

آزمون شماره ۹

سراسری ۱۴۰۲

نوبت دوم - داخل

نام درس	دهم	یازدهم	دوازدهم	ترکیبی	آسان	متوسط	سخت
ریاضیات	۴	۱۵	۹	۱۲	۲	۱۷	۲۱
فیزیک	۸	۱۰	۱۷	-	۲	۲۸	۵
شیمی	۸	۸	۱۱	۳	۵	۱۷	۸

ریاضیات

۱- گزینه ۲

درسنامه اگر a, b, c سه جمله متوالی یک دنباله حسابی باشند، داریم:

$$a + c = 2b$$

سه جمله اول دنباله هندسی را به ترتیب a, ar, ar^2 در نظر می‌گیریم. اگر این سه جمله را نصف کنیم، به این جملات می‌رسیم: $\frac{a}{2}, \frac{ar}{2}, \frac{ar^2}{2}$.

به گفته سؤال، جملات بالا، سه جمله متوالی یک دنباله حسابی اند؛ پس طبق درسنامه می‌توانیم بنویسیم:

$$\frac{a}{2} + \frac{ar^2}{2} = 2 \times \frac{ar}{2} \xrightarrow{\times 2} a + ar^2 = 2ar$$

$$\xrightarrow{-a} 1 + r^2 = 2r \Rightarrow r^2 - 2r + 1 = 0 \Rightarrow (r-1)^2 = 0 \Rightarrow r = 1$$

$r = 1$ شد، پس قدرنسبت جملات دنباله هندسی ۱ و در نتیجه همه جملات آن با هم برابر می‌شوند: $a, ar, ar^2, ar^3, \dots \xrightarrow{r=1} a, a, a, a, \dots$ جملات دنباله هندسی

طبق گفته سؤال اگر این جملات را نصف کنیم، دنباله‌های حسابی با قدرنسبت d خواهیم داشت:

$$\frac{a}{2}, \frac{a}{2}, \frac{a}{2}, \dots$$

واضح است که قدرنسبت دنباله حسابی بالا صفر است، پس $d = 0$ می‌شود؛ بنابراین $r + d = 1 + 0 = 1$.

۲- گزینه ۳

شفاف‌سازی اگر این سهمی، محور x ها را در نقاطی با طول‌های α و β قطع کند، یعنی α و β ریشه‌های سهمی هستند.

درسنامه ۱ اگر مطابق شکل مقابل، دو نقطه با عرض یکسان روی یک سهمی داشته باشیم،

طول رأس سهمی (x_S) برابر میانگین طول آن دو نقطه می‌شود؛ یعنی:

$$x_S = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

۲ اگر مختصات رأس یک سهمی $S(\alpha, \beta)$ باشد، معادله این سهمی به صورت زیر می‌شود:

$$y = a(x - \alpha)^2 + \beta$$

۳ اگر α و β ریشه‌های معادله درجه دوم $Ax^2 + Bx + C = 0$ با شرط $\Delta > 0$ باشند،

داریم: $P = \alpha\beta = \frac{C}{A}$ ضرب ریشه‌ها $S = \alpha + \beta = -\frac{B}{A}$ جمع ریشه‌ها

$$\alpha^2 + \beta^2 = S^2 - 2P$$

۴ سهمی به معادله $y = Ax^2 + Bx + C$ ، محور y ها را در نقطه‌ای با عرض C قطع می‌کند.

۵ دو نقطه $A(3, y)$ و $B(-5, y)$ که عرض یکسانی هم دارند، روی این سهمی قرار

دارند؛ پس طبق مورد (۱) درسنامه، طول رأس این سهمی می‌شود $x_S = \frac{-5+3}{2} = -1$.

۶ عرض رأس این سهمی برابر ۱ است، پس مختصات رأس سهمی $S(-1, 1)$ می‌شود.

حالا به کمک مورد (۲) درسنامه، معادله سهمی را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$y = a(x + 1)^2 + 1 = a(x^2 + 2x + 1) + 1 = ax^2 + 2ax + a + 1$$

$$\Rightarrow y = \underbrace{a}_A x^2 + \underbrace{2a}_B x + \underbrace{a+1}_C \quad (*)$$

مجموع و حاصل ضرب ریشه‌های این سهمی را به کمک مورد (۳) درسنامه به

$$S = -\frac{B}{A} = -\frac{2a}{a} = -2$$

دست می‌آوریم:

$$P = \frac{C}{A} = \frac{a+1}{a}$$

حالا با توجه به این که $\alpha^2 + \beta^2 = 5$ ، داریم:

$$\alpha^2 + \beta^2 = 5 \Rightarrow S^2 - 2P = 5 \Rightarrow (-2)^2 - 2\left(\frac{a+1}{a}\right) = 5$$

$$\Rightarrow -2\left(\frac{a+1}{a}\right) = 1 \Rightarrow \frac{a+1}{a} = -\frac{1}{2} \Rightarrow 2a+2 = -a \Rightarrow 3a = -2 \Rightarrow a = -\frac{2}{3}$$

با جای گذاری $a = -\frac{2}{3}$ در تساوی (*)، معادله سهمی را می‌نویسیم:

$$y = -\frac{2}{3}x^2 - \frac{4}{3}x + \frac{1}{3}$$

حالا که معادله سهمی را به صورت $y = -\frac{2}{3}x^2 - \frac{4}{3}x + \frac{1}{3}$ داریم، می‌توانیم بگوییم این

سهمی در نقطه‌ای با عرض $\frac{1}{3}$ ، محور y ها را قطع می‌کند (طبق مورد (۴) درسنامه).

۳- گزینه ۲

استراتژی قبل از هر چیز از تساوی $A \times B = B \times A$ ، نتیجه می‌گیریم که $A = B$ است. حالا سعی می‌کنیم تساوی $A = B$ را برقرار کنیم. اول تکلیف عضو ۶ از مجموعه A را مشخص می‌کنیم تا مقدار d به دست آید. با جای گذاری d در تساوی $A = B$ به رابطه $\{6, 5, -1\} = \{6, 5, -1\} = \{a - 2, 6, 2b + 1, c\}$ می‌رسیم. در این رابطه یک مجموعه ۳ عضوی با یک مجموعه ۴ عضوی برابر شده است، پس سعی می‌کنیم در مجموعه سمت راست یک عضو تکراری بسازیم تا هر دو مجموعه ۴ عضوی بشوند؛ این جوری به ۳ تساوی مجموعه‌ای می‌رسیم. کلید حل مسئله از این‌جا به بعد استفاده از مورد (۳) درسنامه است.

درسنامه ۱ اگر $A \times B = B \times A$ باشد، در این صورت یا حداقل یکی از A و B تهی است یا A و B برابرند: $A \times B = B \times A \Rightarrow (A = \emptyset \text{ یا } B = \emptyset \text{ یا } A = B)$

۲ دو مجموعه وقتی برابرند که تک‌تک اعضایشان مساوی هم باشند.

۳ در هر تساوی مجموعه‌ای، اگر تعداد اعضای دو مجموعه برابر باشند، می‌توانیم مجموع اعضای دو مجموعه را مساوی هم بگذاریم.

۴ به گفته سؤال $A \times B = B \times A$ است، پس طبق مورد (۱) درسنامه یا باید حداقل

یکی از A و B تهی باشند یا $A = B$ باشد. واضح است که $A = B = \{a - 2, 6, 2b + 1, c\}$ و $A = \{6, 5, -1\}$ هیچ‌کدام نمی‌توانند تهی باشند؛ بنابراین $A = B$ است:

$$\{a - 2, 6, 2b + 1, c\} = \{6, 5, -1\} \quad (**)$$

طبق مورد (۲) درسنامه، برای برقراری رابطه (*) باید تک‌تک اعضای دو مجموعه

مساوی باشند. از عدد ۶ در مجموعه سمت چپ شروع می‌کنیم. ۶ که نمی‌تواند با ۵ و -۱ برابر باشد، پس مجبور است مساوی \sqrt{d} باشد: $6 = \sqrt{d} \Rightarrow d = 36$

تا این‌جا رابطه (*) به این صورت درمی‌آید: $\{a - 2, 6, 2b + 1, c\} = \{6, 5, -1\}$ (**)

در تساوی (***) یک مجموعه ۴ عضوی با یک مجموعه ۳ عضوی برابر شده است، پس باید در مجموعه ۳ عضوی (مجموعه سمت راست) یک عضو تکراری بسازیم تا هر دو مجموعه ۴ عضوی بشوند. این عضو تکراری می‌تواند -۱ یا ۵ یا ۶ باشد؛ این سه حالت را جداگانه بررسی می‌کنیم:

۱ «۶ عضو تکراری باشد» در این حالت داریم: $\{a - 2, 6, 2b + 1, c\} = \{6, 6, 5, -1\}$ (۱)

در تساوی مجموعه‌ای بالا تعداد اعضای دو مجموعه برابرند، پس طبق مورد (۳) درسنامه می‌توانیم مجموع اعضای دو مجموعه را مساوی هم بگذاریم:

$$(a - 2) + 6 + (2b + 1) + c = 6 + 6 + 5 - 1$$

$$\Rightarrow a + 2b + c + 5 = 16 \Rightarrow a + 2b + c = 11$$

ساده‌سازی

$$(r \Rightarrow (p \vee q)) \Rightarrow ((p \vee \sim p) \wedge (q \wedge \sim r)) \equiv (r \Rightarrow (p \vee q)) \Rightarrow (q \wedge \sim r)$$

حالا شروع به حذف گزینه‌ها می‌کنیم. سطر سوم جدول می‌گوید وقتی p و r درست ولی q نادرست باشد، باید X درست شود. ببینیم در کدام گزینه چنین اتفاقی نمی‌افتد:

$$(q \Rightarrow (p \vee r)) \Rightarrow (\sim q \wedge r) \equiv (د \Rightarrow د) \Rightarrow (د \wedge د) \equiv د \Rightarrow د \Rightarrow د \equiv د : \checkmark$$

$$(r \Rightarrow (p \vee q)) \Rightarrow (q \wedge \sim r) \equiv (د \Rightarrow د) \Rightarrow (ن \wedge ن) \equiv د \Rightarrow ن \equiv ن : \times$$

همین‌جا \sim را حذف می‌کنیم.

$$[p \Rightarrow ((q \vee r) \Rightarrow (q \wedge r))] \Rightarrow (\sim (p \vee r) \wedge q)$$

$$\equiv [د \Rightarrow (د \Rightarrow د)] \Rightarrow (ن \wedge ن) \equiv [د \Rightarrow د] \Rightarrow ن \equiv د : \checkmark$$

$$(r \Rightarrow (p \vee q)) \Rightarrow [((p \Rightarrow r) \Rightarrow (\sim p \wedge r)) \wedge q]$$

$$\equiv (د \Rightarrow د) \Rightarrow [(د \Rightarrow ن) \wedge ن] \equiv د \Rightarrow ن \equiv ن : \times$$

پس \sim هم حذف شد.

در ادامه اگر سطر دوم را هم کنترل کنیم، هم حذف می‌شود. این سطر می‌گوید اگر p و q درست، ولی r نادرست باشد، X هم باید نادرست شود که چنین اتفاقی برای نمی‌افتد:

$$[p \Rightarrow ((q \vee r) \Rightarrow (q \wedge r))] \Rightarrow (\sim (p \vee r) \wedge q)$$

$$\equiv [د \Rightarrow (د \Rightarrow د)] \Rightarrow (ن \wedge د) \equiv ن \Rightarrow ن \equiv د$$

پس تنها گزینه باقی‌مانده، یعنی $\textcircled{1}$ جواب است.

مشاوره سر جلسه کنکور برای بار اول باید از این سؤال رد شوید، چون هم بسیار وقت‌گیر و هم احتمال اشتباه‌کردن‌تان زیاد است.

گزینه ۵

استراتژی اول طرفین معادله $ax^2 - ax - b = 0$ را بر a تقسیم کنید (در معادله درجه دوم، ضریب x^2 ، یعنی a مخالف صفر است، به همین خاطر حق انجام چنین کاری را داریم)، بعد α و β را در خود معادله جای‌گذاری کنید تا بتوانید α^2 و β^2 را برحسب α و β بنویسید. در ادامه α^2 و β^2 ای را که برحسب α و β به دست آوردید، در تساوی $4\alpha\beta^2 + 2\alpha^2 - 2\alpha\beta = 17$ جای‌گذاری کنید. این طوری به عبارتی می‌رسید که بلدید آن را برحسب S و P بنویسید.

درس‌نامه اگر α و β ریشه‌های معادله درجه دوم $Ax^2 + Bx + C = 0$ با شرط $\Delta > 0$ باشند، داریم:

ضرب ریشه‌ها: $P = \alpha\beta = \frac{C}{A}$ جمع ریشه‌ها: $S = \alpha + \beta = -\frac{B}{A}$

مجموع مربعات ریشه‌ها: $\alpha^2 + \beta^2 = S^2 - 2P$ اختلاف ریشه‌ها: $|\alpha - \beta| = \frac{\sqrt{\Delta}}{|A|}$

طبق استراتژی، اول طرفین معادله $ax^2 - ax - b = 0$ را بر a تقسیم می‌کنیم:

$$ax^2 - ax - b = 0 \xrightarrow{\div a} x^2 - x - \frac{b}{a} = 0 \quad (*)$$

α و β ریشه‌های متمایز معادله (*) هستند، پس می‌توانیم α و β را در معادله (*) جای‌گذاری کنیم:

$$x^2 - x - \frac{b}{a} = 0 \begin{cases} x=\alpha \rightarrow \alpha^2 - \alpha - \frac{b}{a} = 0 \Rightarrow \alpha^2 = \alpha + \frac{b}{a} \\ x=\beta \rightarrow \beta^2 - \beta - \frac{b}{a} = 0 \Rightarrow \beta^2 = \beta + \frac{b}{a} \end{cases}$$

سؤال می‌خواهد $a + b + c = 9$ باشد، پس تساوی قبل را به این صورت می‌نویسیم:

$$(a + b + c) + b = 11 \Rightarrow 9 + b = 11 \Rightarrow b = 2$$

پس تساوی (۱) به این صورت می‌شود:

$$\{a - 2, 6, \delta, c\} = \{6, 6, \delta, -1\} \Rightarrow \{a - 2, c\} = \{6, -1\}$$

برای برقراری تساوی بالا هم دو حالت داریم:

$$\begin{cases} a - 2 = 6 \Rightarrow a = 8 \\ c = -1 \end{cases}, \begin{cases} a - 2 = -1 \Rightarrow a = 1 \\ c = 6 \end{cases}$$

پس تا این‌جا ۲ جواب پیدا کردیم.

«۵» عضو تکراری باشد: در این حالت داریم: (۲) $\{a - 2, 6, 2b + 1, c\} = \{6, 5, 5, -1\}$ مثل حالت قبلی مجموع اعضای دو مجموعه را مساوی هم می‌گذاریم:

$$(a - 2) + 6 + (2b + 1) + c = 6 + 5 + 5 - 1$$

$$\Rightarrow a + 2b + c + 5 = 15 \Rightarrow a + 2b + c = 10$$

$$\Rightarrow (a + b + c) + b = 10 \Rightarrow b = 1$$

$b = 1$ را در تساوی (۲) جای‌گذاری می‌کنیم: $\{a - 2, 6, 3, c\} = \{6, 5, 5, -1\}$ تساوی بالا هیچ وقت برقرار نمی‌شود، چون مجموعه سمت راست اصلاً عضو «۳» ندارد.

«-۱» عضو تکراری باشد: در این حالت داریم:

$$\{a - 2, 6, 2b + 1, c\} = \{6, 5, -1, -1\} \quad (۳)$$

باز هم مجموع اعضای دو مجموعه را مساوی هم می‌گذاریم:

$$(a - 2) + 6 + (2b + 1) + c = 6 + 5 - 1 - 1$$

$$\Rightarrow a + 2b + c + 5 = 9 \Rightarrow a + 2b + c = 4$$

$$\Rightarrow (a + b + c) + b = 4 \Rightarrow b = -5$$

حالا $b = -5$ را در تساوی (۳) جای‌گذاری می‌کنیم: $\{a - 2, 6, -9, c\} = \{6, 5, -1, -1\}$ تساوی بالا هیچ وقت نمی‌تواند برقرار شود، چون مجموعه سمت راست اصلاً عضو «-۹» ندارد؛ پس در کل همان ۲ جوابی که در حالت اول به دست آوردیم را داریم.

گزینه ۴

استراتژی اول سعی می‌کنیم گزینه‌ها را ساده‌تر بنویسیم. برای این کار به دنبال گزاره‌هایی می‌گردیم که ارزششان کاملاً معلوم است. بعد از این کار سیاست حذف گزینه را پیش می‌گیریم؛ یعنی می‌بینیم کدام گزینه ارزشش طبق سطرهای جدول نیست. این سیاست را تا جایی ادامه می‌دهیم که سه گزینه حذف شود.

درس‌نامه جدول ارزش انواع ترکیب گزاره‌ها را برای دو گزاره p و q در جدول زیر ببینید:

p	q	$p \vee q$	$p \wedge q$	$p \Rightarrow q$
د	د	د	د	د
د	ن	د	ن	ن
ن	د	د	ن	د
ن	ن	ن	ن	د

$p \vee q$
این گزاره فقط وقتی نادرست می‌شود که هر دو گزاره نادرست باشند.

$p \wedge q$
این گزاره فقط وقتی درست است که هر دو گزاره درست باشند.

$p \Rightarrow q$
این گزاره فقط وقتی نادرست است که گزاره اول (P) درست، ولی گزاره دوم (Q) نادرست باشد.

به کمک جدول بالا می‌توانیم دو هم‌ارزی زیر را بنویسیم:

$$p \vee \sim p \equiv د, \quad د \wedge \sim د \equiv \text{خودش}$$

طبق استراتژی، اول گزینه‌ها را ساده می‌کنیم. طبق مورد (۲) درس‌نامه می‌توانیم بگوییم: در $\textcircled{1}$ و $\textcircled{2}$ گزاره $p \vee \sim p$ همیشه درست است، پس این گزینه‌ها را می‌توانیم ساده‌تر بنویسیم:

ساده‌سازی

$$(q \Rightarrow (p \vee r)) \Rightarrow ((p \vee \sim p) \wedge (\sim q \wedge r)) \equiv (q \Rightarrow (p \vee r)) \Rightarrow (\sim q \wedge r)$$

۴ فاصله نقطه $A(x_0, y_0)$ از خط $ax + by + c = 0$ برابر است با: $\frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

۵ همان طور که در شکل مقابل می بینید، در هر مستطیل، وسط قطر، همان مرکز مستطیل است که فاصله آن تا اضلاع مستطیل برابر نصف اندازه طول و نصف اندازه عرض است.

۱۳۵ شیب خط $4x + y = 3$ (یا همان $4x + y - 3 = 0$)، برابر -4 و شیب خط $x - 4y = 5$ (یا همان $x - 4y - 5 = 0$) برابر $\frac{1}{4}$ است (طبق مورد (۲) درس نامه). چون این دو خط شیب هایشان قرینه و معکوس یکدیگر است، پس طبق مورد (۳) درس نامه، بر هم عمودند؛ بنابراین این دو خط، دو ضلع مجاور مستطیل هستند؛ ببینید:

۱۳۵ نقطه $(\frac{4}{5}, 2)$ روی هیچ کدام از دو خط $4x + y - 3 = 0$ و $x - 4y - 5 = 0$ قرار ندارد، چون:

$$4x + y - 3 = 0 \xrightarrow{(\frac{4}{5}, 2)} 4 \times \frac{4}{5} + 2 - 3 = 17 \neq 0$$

$$x - 4y - 5 = 0 \xrightarrow{(\frac{4}{5}, 2)} \frac{4}{5} - 4 \times 2 - 5 = -8 \frac{4}{5} \neq 0$$

بنابراین نقطه $(\frac{4}{5}, 2)$ ، مختصات رأس C (که روی هیچ کدام از این دو خط نیست) می شود. فاصله نقطه $C(\frac{4}{5}, 2)$ از این دو خط را به دست می آوریم تا اندازه طول و عرض مستطیل به دست آید:

$$\frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \begin{cases} \xrightarrow{4x+y-3=0, (\frac{4}{5}, 2)} \frac{|4(\frac{4}{5}) + 1(2) - 3|}{\sqrt{4^2 + 1^2}} = \frac{17}{\sqrt{17}} = \sqrt{17} \\ \xrightarrow{x-4y-5=0, (\frac{4}{5}, 2)} \frac{|1(\frac{4}{5}) - 4(2) - 5|}{\sqrt{1^2 + 4^2}} = \frac{17}{\sqrt{17}} = \frac{17}{\sqrt{17}} = \sqrt{17} \end{cases}$$

۱۳۵ بنابراین اندازه طول مستطیل برابر $\sqrt{17}$ است. طبق مورد (۵) درس نامه، فاصله وسط قطر از اضلاع مستطیل برابر نصف اندازه طول و عرض مستطیل یعنی $\frac{\sqrt{17}}{2}$ و $\frac{\sqrt{17}}{4}$ می شود. سؤال بیشترین فاصله را می خواهد، پس جواب می شود $\frac{\sqrt{17}}{2}$.

۸- گزینه ۴

استراتژی اول اول $y = 10$ را در خط $y = 12 - x$ جای گذاری کنید تا طول نقطه تقاطع f^{-1} با این خط به دست آید. بعد مختصات نقطه تقاطع به صورت $(2, 10)$ می شود، این یعنی $f^{-1}(2) = 10$ است. در آخر با حل معادله $f(10) = 2$ مقدار m و $f(m+4)$ به دست می آید.

درس نامه اگر $f^{-1}(\alpha) = \beta$ باشد، آن گاه $f(\beta) = \alpha$ می شود.

۱۳۵ ابتدا یک شکل فرضی رسم می کنیم:

عرض نقطه تقاطع $y = 10$ است، از طرفی نقطه تقاطع روی خط $y = 12 - x$ قرار دارد، پس با جای گذاری $y = 10$ در این خط، طول نقطه تقاطع می شود: $10 = 12 - x \Rightarrow x = 2$

بنابراین مختصات نقطه تقاطع $(2, 10)$ است.

۱۳۵ از نقطه $(2, 10)$ می گذرد، پس $f^{-1}(2) = 10$ می شود. حالا طبق درس نامه، می توانیم بگوییم $f(10) = 2$ می شود:

$$f(x) = \sqrt{x - 2\sqrt{mx - 1}} \Rightarrow f(10) = \sqrt{10 - 2\sqrt{10 \cdot m - 1}} = 2$$

$$\xrightarrow{\text{توان } 2} 10 - 2\sqrt{10 \cdot m - 1} = 4 \Rightarrow -2\sqrt{10 \cdot m - 1} = -6$$

$$\xrightarrow{\div (-2)} \sqrt{10 \cdot m - 1} = 3 \xrightarrow{\text{توان } 2} 10 \cdot m - 1 = 9 \Rightarrow 10 \cdot m = 10 \Rightarrow m = 1$$

بنابراین ضابطه f به این صورت شد:

۱۳۵ حالا که m را داریم، می توانیم مقدار $f(m+4)$ را محاسبه کنیم:

$$f(m+4) = f(5) = \sqrt{5 - 2\sqrt{5 - 1}} = \sqrt{1} = 1$$

۱۳۵ حالا تساوی های قبل را در $40\beta^2 + 20\alpha^2 - 20\beta = 17$ جای گذاری می کنیم:

$$40(\beta + \frac{b}{a}) + 20(\alpha + \frac{b}{a}) - 20\beta = 17 \Rightarrow 40\beta + \frac{40b}{a} + 20\alpha + \frac{20b}{a} - 20\beta = 17$$

$$\Rightarrow 20\beta + 20\alpha + \frac{60b}{a} = 17 \Rightarrow 20(\frac{\alpha + \beta}{S}) + \frac{60b}{a} = 17 (**)$$

۱۳۵ حالا S را از معادله $\frac{1}{A}x^2 - \frac{1}{B}x - \frac{b}{a} = 0$ حساب می کنیم: $S = -\frac{B}{A} = -\frac{-1}{1} = 1$

در ادامه $S = 1$ را در تساوی $(**)$ جای گذاری می کنیم:

$$20(1) + \frac{60b}{a} = 17 \Rightarrow \frac{60b}{a} = -3 \Rightarrow \frac{b}{a} = \frac{-3}{60} = \frac{-1}{20} \Rightarrow -\frac{b}{a} = \frac{1}{20}$$

۱۳۵ در آخر به جای $-\frac{b}{a}$ در تساوی $(*)$ ، $\frac{1}{20}$ را قرار می دهیم: $x^2 - x + \frac{1}{20} = 0$

اختلاف ریشه های این معادله برابر است با:

$$\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|} = \frac{\sqrt{1 - 4 \times \frac{1}{20}}}{1} = \sqrt{1 - \frac{1}{5}} = \sqrt{\frac{4}{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

۶- گزینه ۳

استراتژی در سمت چپ معادله از اتحاد $a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab$ استفاده کنید تا به یک معادله ساده تر برسید، بعد در معادله ساده شده از تغییر متغیر استفاده کنید.

۱۳۵ طبق استراتژی در سمت چپ معادله از اتحاد $a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab$ استفاده می کنیم:

$$\frac{1}{x^2} + \frac{1}{(1-x)^2} = \frac{16}{9} \Rightarrow (\frac{1}{x} + \frac{1}{1-x})^2 - 2(\frac{1}{x})(\frac{1}{1-x}) = \frac{16}{9}$$

$$\Rightarrow (\frac{1-x+x}{x(1-x)})^2 - \frac{2}{x(1-x)} = \frac{16}{9} \Rightarrow (\frac{1}{x(1-x)})^2 - 2(\frac{1}{x(1-x)}) - \frac{16}{9} = 0$$

۱۳۵ در ادامه از تغییر متغیر $\frac{1}{x(1-x)} = t$ کمک می گیریم: $t^2 - 2t - \frac{16}{9} = 0$

حالا ریشه های معادله بالا را از روش Δ به دست می آوریم. اول Δ را حساب می کنیم:

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4(1)(-\frac{16}{9}) = 4 + \frac{64}{9} = \frac{676}{9} = (\frac{26}{3})^2$$

$$t = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{2 \pm \frac{26}{3}}{2} \Rightarrow \begin{cases} t_1 = \frac{16}{3} \\ t_2 = -\frac{1}{3} \end{cases}$$

پس داریم:

۱۳۵ در آخر های به دست آمده را در $\frac{1}{x(1-x)} = t$ جای گذاری می کنیم:

- $\frac{1}{x(1-x)} = \frac{16}{3} \Rightarrow x(1-x) = \frac{3}{16} \Rightarrow x - x^2 = \frac{3}{16}$
 $\Rightarrow x^2 - x + \frac{3}{16} = 0 \xrightarrow{\Delta = \frac{1}{4} > 0} \rightarrow$ مجموع ریشه ها $= -\frac{-1}{1} = 1$
- $\frac{1}{x(1-x)} = -\frac{1}{3} \Rightarrow x(1-x) = -\frac{3}{10} \Rightarrow x - x^2 = -\frac{3}{10}$
 $\Rightarrow x^2 - x - \frac{3}{10} = 0 \xrightarrow{\Delta = \frac{22}{10} > 0} \rightarrow$ مجموع ریشه ها $= -\frac{-1}{1} = 1$

بنابراین جمع ریشه های معادله می شود $1 + 1 = 2$.

۷- گزینه ۱

استراتژی اول فاصله نقطه $(\frac{4}{5}, 2)$ از دو خط $4x + y = 3$ و $x - 4y = 5$ را محاسبه کنید تا اندازه طول و عرض مستطیل به دست آید. حالا بیشترین فاصله وسط قطر از اضلاع، برابر نصف اندازه طول مستطیل می شود.

درس نامه ۱ خط $ax + by = c$ از نقطه $A(x_0, y_0)$ می گذرد، اگر و تنها اگر $ax_0 + by_0 = c$ شود.

۲ شیب خط $ax + by = c$ برابر است با: $-\frac{a}{b}$ شیب $\frac{a}{b}$ ضرب $\frac{1}{y}$ ضرب x

۳ هر وقت شیب دو خط، قرینه و معکوس همدیگر باشند، دو خط بر هم عمودند و برعکس.

۹- گزینه ۱

درس نامه ۱ برای از بین بردن توان در معادلات نمایی، می‌توانیم از طرفین در یک مبنای دلخواه، مثل X لگاریتم بگیریم که در این صورت، توان تبدیل به ضریب می‌شود:
 $a^n = b^m \Rightarrow \log_x a^n = \log_x b^m \Rightarrow n \log_x a = m \log_x b$

بعضی از قوانین لگاریتم به شکل زیرند:

- الف) $\log_{b^n} a^m = \frac{m}{n} \log_b a$ ب) $\log_a 1 = 0$
 پ) $\log ab = \log a + \log b$ ت) $\log \frac{a}{b} = \log a - \log b$
 ث) $\log_b a = \frac{1}{\log_a b}$

این عنصر در هر ساعت $\frac{1}{9}$ جرم خود را از دست می‌دهد، یعنی جرم آن $1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9}$ برابر می‌شود؛ بنابراین پس از n ساعت، جرم عنصر $(\frac{8}{9})^n$ برابر می‌شود.

برای این که ببینیم پس از چند ساعت، $\frac{1}{6}$ از جرم عنصر باقی خواهد ماند، باید معادله $(\frac{8}{9})^n = \frac{1}{6}$ را حل کنیم. از دو طرف این معادله در مبنای ۵ لگاریتم می‌گیریم:

$$n \log_5 \frac{8}{9} = \log_5 \frac{1}{6} \Rightarrow n \log_5 \frac{8}{9} = \log_5 \frac{1}{6}$$

قسمت (۲- الف) درس‌نامه $\rightarrow n \log_5 \frac{8}{9} = \log_5 \frac{1}{6}$

$$\rightarrow n (\log_5 8 - \log_5 9) = \log_5 1 - \log_5 6$$

قسمت (۲- ت) درس‌نامه

$$\rightarrow n (3 \log_5 2 - 2 \log_5 3) = -(\log_5 2 + \log_5 3) \quad (*)$$

قسمت (۲- الف و پ) درس‌نامه

حالا سراغ داده‌های سؤال می‌رویم:

$$\begin{cases} \log_5 2 = \frac{1}{2/4} = \frac{1}{24} = \frac{10}{24} = \frac{5}{12} \\ \log_5 3 = \frac{1}{1/4} = \frac{1}{14} = \frac{10}{14} = \frac{5}{7} \end{cases}$$

قسمت (۲- ث) درس‌نامه

مقادیر به‌دست‌آمده را در (*) جای‌گذاری می‌کنیم:

$$n (3 \times \frac{5}{12} - 2 \times \frac{5}{7}) = -(\frac{5}{12} + \frac{5}{7}) \Rightarrow n (\frac{3}{12} - \frac{2}{7}) = -(\frac{1}{12} + \frac{1}{7})$$

$$\Rightarrow n \times \frac{-3}{84} = -\frac{19}{84} \Rightarrow n = \frac{19}{3}$$

بنابراین پس از $\frac{19}{3}$ ساعت یا همان « 380° » دقیقه، $\frac{1}{6}$ از جرم عنصر باقی خواهد ماند.

۱۰- گزینه ۲

درس نامه فرمول تانژانت مجموع و تفاضل دو زاویه به شکل زیر است:

$$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan \alpha \pm \tan \beta}{1 \mp \tan \alpha \cdot \tan \beta}$$

همان‌طور که در شکل مقابل می‌بینید، مثلث ABC قائم‌الزاویه متساوی‌الساقین است؛ پس می‌توانیم بگوییم $\hat{BAC} = 45^\circ$ می‌شود. حالا در مثلث ABD تانژانت می‌نویسیم:

$$\tan \hat{BAD} = \frac{BD}{AB} \Rightarrow \tan(45^\circ + \alpha) = \frac{4}{2} = 2$$

حالا با استفاده از فرمول درس‌نامه، $\tan(45^\circ + \alpha)$ را باز می‌کنیم:

$$\tan(45^\circ + \alpha) = \frac{\tan 45^\circ + \tan \alpha}{1 - \tan 45^\circ \cdot \tan \alpha} \xrightarrow{\tan 45^\circ = 1} 2 = \frac{1 + \tan \alpha}{1 - \tan \alpha}$$

$$\Rightarrow 2 - 2 \tan \alpha = 1 + \tan \alpha \Rightarrow -3 \tan \alpha = -1 \Rightarrow \tan \alpha = \frac{1}{3}$$

$\cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha}$ **نکته**
 $\cot \alpha = 3$ طبق نکته بالا می‌توانیم بگوییم:

تیزبازی با توجه به شکل، واضح است که $45^\circ < \alpha$ است. از طرفی می‌دانیم اگر $45^\circ < \alpha < 90^\circ$ باشد، $\cot \alpha > 1$ است. در بین گزینه‌ها فقط مقدار ۳ بزرگ‌تر از ۱ است؛ پس جواب همین گزینه است.

۱۱- گزینه ۱

درس نامه مساحت یک مثلث را می‌توانیم با استفاده از سینوس زوایای داخلی‌اش، به دست آوریم؛ مثلاً برای مثلث ABC در شکل مقابل داریم:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin \hat{A}$$

ابتدا یک شکل فرضی برای سؤال رسم می‌کنیم: (فرض کنید $AB = \sqrt{3}$ ، $AC = 6$ و زاویه بین این دو یعنی \hat{A} برابر α است.)

با کمک فرمول درس‌نامه، مساحت این مثلث را به دست می‌آوریم:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin \alpha \Rightarrow 4/5 = \frac{\sqrt{3} \times 6 \times \sin \alpha}{2}$$

$$\Rightarrow 9 = 6\sqrt{3} \sin \alpha \Rightarrow \sin \alpha = \frac{9}{6\sqrt{3}} = \frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

می‌دانیم در هر مثلث، هر زاویه بین صفر و 180° درجه است، پس α هم بین صفر و 180° است که می‌تواند برابر 60° یا 120° شود (سینوس 60° و 120° برابر $\frac{\sqrt{3}}{2}$ است)، پس بیشترین مقدار α ، دو برابر کم‌ترین مقدار آن است.

۱۲- گزینه ۴

درس نامه ۱ برای محاسبه نسبت‌های مثلثاتی، می‌توانیم هر مضرب زوج دلخواهی از π را اضافه یا کم کنیم.

نسبت‌های مثلثاتی $\alpha + \frac{\pi}{2}$ به شکل زیرند:

$\sin(\alpha + \frac{\pi}{2}) = \cos \alpha$	$\cos(\alpha + \frac{\pi}{2}) = -\sin \alpha$
$\tan(\alpha + \frac{\pi}{2}) = -\cot \alpha$	$\cot(\alpha + \frac{\pi}{2}) = -\tan \alpha$

برای به دست آوردن دوره تناوب توابع سینوسی و کسینوسی از روی نمودار، از جدول زیر استفاده می‌کنیم:

یک چهارم تناوب	نصف تناوب	یک تناوب کامل

در توابع مثلثاتی به شکل $y = a + b \cos(cx)$ داریم:

الف) $\begin{cases} \max = a + |b| \\ \min = a - |b| \\ a = \frac{\max + \min}{2} \end{cases}$ ب) $T = \frac{2\pi}{|c|}$

اگر نمودار تابع در محل برخورد با محور y ها به شکل قله باشد، $b > 0$ و اگر به شکل دره باشد، $b < 0$ است.

مشاوره هر وقت در سوآلی $A = \sin x \pm \cos x$ را داشتید و مقدار $\sin x \cdot \cos x$ یا $\sin(2x)$ را می‌خواستید، کافی است طرفین معادله (*) را به توان ۲ برسانید تا جواب حاصل شود.

۱۴- گزینه

استراتژی باید سه نامعادله $-3 + 2m - m^2 < 0$ ، $m^2 - m - 5 < 0$ و $m^2 - m - 5 > -3 + 2m - m^2$ را حل کنید و از جواب‌ها اشتراک بگیرید.

درس‌نامه ۱ اگر دامنه تابع $f(x)$ ، بازه A باشد، برای به دست آوردن دامنه تابع $f(O)$ ، باید شرط $O \in A$ را اجرا کنید؛ مثلاً اگر دامنه تابع $f(x)$ بازه $[-2, 3]$ باشد، برای به دست آوردن دامنه تابع $f(2x - 5)$ باید نامعادله $-2 \leq 2x - 5 < 3$ را حل کنیم. اگر f تابعی اکیداً نزولی باشد، داریم:

نکته دامنه f مجموعه‌ای از مقادیر منفی (یا همان $(-\infty, 0)$) است، پس طبق مورد (۱) درس‌نامه، برای به دست آوردن دامنه $f(-3 + 2m - m^2)$ ، باید نامعادله زیر را حل کنیم:

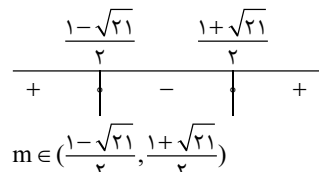
$-3 + 2m - m^2 < 0 \Rightarrow m^2 - 2m + 3 > 0$

دلتهای عبارت سمت چپ منفی ($\Delta = 4 - 12 = -8$) و ضرب m^2 مثبت است، پس نامساوی بالا همیشه برقرار است؛ بنابراین مجموعه‌جواب آن \mathbb{R} می‌شود.

نکته حالا دامنه $f(m^2 - m - 5)$ را به دست می‌آوریم:

$$m^2 - m - 5 < 0 \xrightarrow{\Delta=21} \begin{cases} m_1 = \frac{1 + \sqrt{21}}{2} \\ m_2 = \frac{1 - \sqrt{21}}{2} \end{cases}$$

جدول تعیین علامت رسم می‌کنیم:



$m \in (\frac{1 - \sqrt{21}}{2}, \frac{1 + \sqrt{21}}{2})$ به دنبال قسمت‌های منفی هستیم، پس:

$\sqrt{21}$ تقریباً برابر $4/6$ است، پس بازه بالا را می‌توانیم به این صورت بنویسیم:

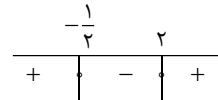
$$m \in (\frac{1 - \frac{4}{6}}{2}, \frac{1 + \frac{4}{6}}{2}) = (-\frac{3}{6}, \frac{5}{6}) = (-1/2, 5/6) \quad (I)$$

نکته f تابعی اکیداً نزولی است، پس طبق مورد (۲) درس‌نامه داریم:

$$f(m^2 - m - 5) < f(-3 + 2m - m^2) \Rightarrow m^2 - m - 5 > -3 + 2m - m^2$$

$$\Rightarrow 2m^2 - 3m - 2 > 0 \xrightarrow{\Delta=25} \begin{cases} m_1 = \frac{3+5}{4} = 2 \\ m_2 = \frac{3-5}{4} = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

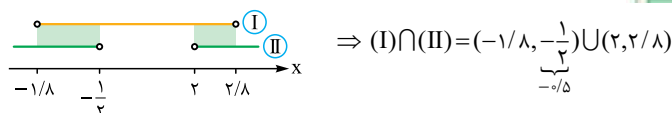
جدول تعیین علامت رسم می‌کنیم:



این جا قسمت‌های مثبت را می‌خواهیم، پس:

$$m \in (-\infty, -\frac{1}{2}) \cup (2, +\infty) \quad (II)$$

نکته در آخر با اشتراک گرفتن از دو بازه (I) و (II) جواب حاصل می‌شود:



این بازه فقط شامل یک عدد صحیح (فقط شامل -۱) است.

۱۵- گزینه

درس‌نامه ۱ ضابطه یک تابع هموگرافیک به شکل $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ (البته به شرطی که $a \neq 0$ و $c \neq 0$ و $ad - bc \neq 0$ باشند) و ضابطه وارونش هم به شکل $f^{-1}(x) = \frac{-dx+b}{cx-a}$ است.

نکته ابتدا با استفاده از مورد (۱) درس‌نامه داریم:

$$\sin(cx - \frac{3\pi}{4}) \cos(cx - \frac{3\pi}{4}) = \frac{1}{2} \sin(2cx - \frac{3\pi}{2})$$

با توجه به مورد (۲) درس‌نامه می‌توانیم به $(2cx - \frac{3\pi}{2})$ ، 2π اضافه کنیم:

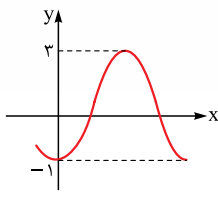
$$\frac{1}{2} \sin(2cx - \frac{3\pi}{2} + 2\pi) = \frac{1}{2} \sin(2cx + \frac{\pi}{2}) \xrightarrow{\text{مورد (۲) درس‌نامه}} \frac{1}{2} \cos(2cx)$$

بنابراین ساده‌شده ضابطه f به صورت مقابل است:

$$f(x) = a + \frac{b}{2} \cos(2cx) \quad T = \pi$$

با توجه به نمودار تابع، از $x = 0$ تا $x = \pi$ یک تناوب کامل داریم، پس $\frac{\pi}{2c} = \pi \Rightarrow |c| = \frac{1}{2}$ است. حالا با استفاده از مورد (۵ - ب) درس‌نامه، داریم:

$$\cos(\alpha) = \cos(-\alpha)$$



از آن جایی که کسینوس یک زاویه و کسینوس قرینه آن زاویه (طبق نکته بالا) با هم برابرند، c می‌تواند برابر $+1$ یا -1 باشد، حالا ما برای راحتی فرض می‌کنیم $c = 1$ است.

نکته همان‌طور که در شکل مقابل می‌بینید، نمودار تابع در محل برخورد با محور y ها به شکل دره است، پس طبق مورد (۵ - ب) درس‌نامه، $\frac{b}{2} < 0$ و در نتیجه $b < 0$ است.

نکته حداکثر مقدار این تابع برابر ۳ و حداقل آن برابر -1 است؛ پس طبق مورد (۵) درس‌نامه داریم:

$$\begin{cases} a + | \frac{b}{2} | = 3 \\ a - | \frac{b}{2} | = -1 \end{cases} \xrightarrow{b < 0} \begin{cases} a - \frac{b}{2} = 3 \\ a + \frac{b}{2} = -1 \end{cases} \xrightarrow{\text{حل دستگاه}} a = 1, b = -4$$

پس ضابطه f به صورت $f(x) = 1 - 2 \cos(2x)$ است.

نکته صفرهای تابع f را می‌خواهیم:

$$f(x) = 0 \Rightarrow 1 - 2 \cos(2x) = 0 \Rightarrow \cos(2x) = \frac{1}{2}$$

به جای $\frac{1}{2}$ قرار می‌دهیم $\cos(\frac{\pi}{3})$: $\cos(2x) = \cos(\frac{\pi}{3})$

نکته جواب‌های معادله مثلثاتی $\cos A = \cos B$ به صورت $A = 2k\pi \pm B$ است.

حالا جواب‌های معادله مثلثاتی $\cos(2x) = \cos(\frac{\pi}{3})$ را به کمک نکته بالا به دست می‌آوریم:

$$2x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3} \xrightarrow{\div 2} x = k\pi \pm \frac{\pi}{6} \xrightarrow{x \in [0, \pi]} x = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$$

اختلاف این دو جواب، برابر $\frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{6} = \frac{4\pi}{6} = \frac{2\pi}{3}$ است.

۱۳- گزینه

درس‌نامه فرمول کسینوس مجموع و تفاضل دو زاویه به شکل زیر است:

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta \mp \sin \alpha \cdot \sin \beta \quad \sin(2\alpha) = 2 \sin(\alpha) \cdot \cos(\alpha)$$

نکته ابتدا با کمک درس‌نامه، $\cos(x + \frac{\pi}{4})$ را ساده می‌کنیم:

$$\cos(x + \frac{\pi}{4}) = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \cos x \cdot \frac{\cos \frac{\pi}{4}}{\sqrt{2}} - \sin x \cdot \frac{\sin \frac{\pi}{4}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} (\cos x - \sin x) = \frac{1}{\sqrt{3}} \xrightarrow{\times \frac{\sqrt{2}}{2}} \cos x - \sin x = \frac{2}{\sqrt{6}} \quad (I)$$

طرفین (I) را به توان ۲ می‌رسانیم:

$$\underbrace{\sin^2 x + \cos^2 x}_{1} - \underbrace{2 \sin x \cdot \cos x}_{\sin(2x)} = \frac{4}{3} \Rightarrow \sin(2x) = \frac{1}{3} \quad (II)$$

نکته با جای‌گذاری (I) و (II) در معادله $m(\cos x - \sin x) - 3\sqrt{6} \sin(2x) = \sqrt{6}$ داریم:

$$m \times \frac{2}{\sqrt{6}} - 3\sqrt{6} \times \frac{1}{3} = \sqrt{6} \Rightarrow \frac{2m}{\sqrt{6}} - \sqrt{6} = \sqrt{6}$$

$$\Rightarrow \frac{2m}{\sqrt{6}} = 2\sqrt{6} \Rightarrow \frac{m}{\sqrt{6}} = \sqrt{6} \Rightarrow m = 6$$

۱۴۵ پیوستگی f در $x = -1$ را بررسی می‌کنیم. برای به دست آوردن حد راست f در $x \rightarrow (-1)^+$ داریم:

$$x \rightarrow (-1)^+ \Rightarrow \underbrace{[x] = -1}_{\text{فرد}} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x)$$

$$= \lim_{x \rightarrow (-1)^+} (x - [x] + k) = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} (x + 1 + k) = -1 + 1 + k = k$$

حد چپ f در $x = -1$ برابر است با:

$x \rightarrow (-1)^- \Rightarrow \underbrace{[x] = -2}_{\text{زوج}} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-1)^-} |x - [-x]|$

مقدار $[-x]$ وقتی $x \rightarrow (-1)^-$ (مثلاً $x = -1/1$) برابر ۱ است $([-(-1/1)] = [1/1] = 1)$:

$$\lim_{x \rightarrow (-1)^-} |x - [-x]| = \lim_{x \rightarrow (-1)^-} |x - 1| = |-1 - 1| = 2$$

مقدار f در $x = -1$ هم برابر است با:

$$x = -1 \Rightarrow \underbrace{[x] = -1}_{\text{فرد}} \Rightarrow f(x) = x - [x] + k \Rightarrow f(-1) = -1 - (-1) + k = k$$

حالا حد راست، حد چپ و مقدار f در $x = -1$ را با هم برابر قرار می‌دهیم:

$$\lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(x) = f(-1) \Rightarrow k = 2 = k \Rightarrow k = 2$$

بنابراین به ازای مقدار مشخص k, f در n فرد پیوسته است.

۱۴۶ حالا پیوستگی f به ازای $x = 2$ را بررسی می‌کنیم:

حد راست f در $x = 2$ $x \rightarrow 2^+ \Rightarrow \underbrace{[x] = 2}_{\text{زوج}} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} |x - [-x]|$

مقدار $[-x]$ وقتی $x \rightarrow 2^+$ (مثلاً $x = 2/1$) برابر -3 است $([-(-2/1)] = [-2] = -3)$:

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} |x - [-x]| = \lim_{x \rightarrow 2^+} |x - (-3)| = 2 - (-3) = 5$$

مقدار f در $x = 2$ برابر است با:

$$x = 2 \Rightarrow \underbrace{[x] = 2}_{\text{زوج}} \Rightarrow f(x) = |x - [-x]| \Rightarrow f(2) = |2 - (-2)| = 4$$

حد راست و مقدار f در $x = 2$ برابر نیستند، پس f در $x = 2$ پیوسته نیست و n نمی‌تواند زوج باشد.

۱۷- گزینه ۳

استراتژی اول ضابطه g را به دست آورید، بعد از هم‌ارزی‌های مثلثاتی استفاده کنید.

درس‌نامه وقتی $u \rightarrow 0$ ، هم‌ارزی مثلثاتی مقابل را برای سینوس داریم: $\sin(u) \approx u$

اول ضابطه $g(x)$ را تنها می‌کنیم:

$$f(x) = xg(x) + 1 \Rightarrow xg(x) = f(x) - 1 \Rightarrow g(x) = \frac{f(x) - 1}{x}$$

حالا به جای $f(x)$ در تساوی بالا، ضابطه آن را جای گذاری می‌کنیم:

$$g(x) = \frac{(-1 + \sin x)^2 - 1}{x} = \frac{\sin^2 x - 2\sin x + 1}{x}$$

$$= \frac{\sin^2 x - 2\sin x + 1 - \sin^2 x + 2\sin x + 1}{x}$$

$$= \frac{-4\sin x}{x}$$

$$= \frac{\sin^2 x + 2\sin x + 1}{x(\sin^2 x + 2\sin x + 1)} = \frac{-4\sin x}{x(\sin^2 x + 2\sin x + 1)}$$

پس $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$ به این صورت می‌شود:

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-4\sin x}{x(\sin^2 x + 2\sin x + 1)}$$

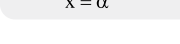
در حد بالا $x \rightarrow 0$ است، پس طبق درس‌نامه، می‌توانیم به جای $\sin x$ قرار دهیم x :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-4x}{x(x^2 + 2x + 1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-4}{x^2 + 2x + 1} = -4$$

۱۸- گزینه ۱

درس‌نامه ۱) قرینه نمودار $y = f(x)$ نسبت به محور x ها، منحنی $y = -f(x)$ است.

۲) شیب خط مماس بر منحنی f در نقطه‌ای به طول $x = \alpha$ واقع بر آن، برابر $f'(\alpha)$ است. برای درک بهتر این موضوع شکل مقابل را ببینید:



۲ هم‌ارزی پرتوان: برای محاسبه حد در بی‌نهایت یک تابع کسری (مثلاً $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f}{g}$)، کافی است در صورت و مخرج، فقط جمله با بزرگ‌ترین توان x را نگه دارید و بقیه جملات را حذف کنید، برای مثال:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x - 2}{5x + 3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x}{5x} = \frac{4}{5}$$

۱۴۵ تابعی هموگرافیک است، پس ضابطه آن را می‌توانیم به صورت $f(x) = \frac{ax + b}{cx + d}$ در نظر بگیریم؛ این جوری ضابطه g به شکل $g(x) = \frac{1}{f(x)} = \frac{cx + d}{ax + b}$ می‌شود.

ضابطه f^{-1} و g^{-1} را به کمک مورد (۱) درس‌نامه به دست می‌آوریم:

$$f(x) = \frac{ax + b}{cx + d} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{-dx + b}{cx - a}$$

$$g(x) = \frac{cx + d}{ax + b} \Rightarrow g^{-1}(x) = \frac{-bx + d}{ax - c}$$

حالا حاصل حدهای داده شده را با کمک هم‌ارزی پرتوان حساب می‌کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g^{-1}(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ax + b}{-bx + d} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(ax + b)(ax - c)}{(cx + d)(-bx + d)}$$

هم‌ارزی پرتوان

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a^2 x^2 + (ab - ac)x - bc}{-bcx^2 + (cd - bd)x + d^2} = \frac{a^2}{-bc}$$

سراغ حد دیگر می‌رویم:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g^{-1}(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-bx + d}{cx - a} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(-bx + d)(ax + b)}{(ax - c)(cx + d)}$$

هم‌ارزی پرتوان

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-abx^2 + (ad - b^2)x + bd}{acx^2 + (ad - c^2)x - cd} = \frac{-ab}{ac} = -\frac{b}{c}$$

به گفته سؤال دو مقدار $-\frac{a^2}{bc}$ و $-\frac{b}{c}$ با هم برابرند، پس:

$$-\frac{a^2}{bc} = -\frac{b}{c} \Rightarrow a^2 = b^2 \Rightarrow \frac{b^2}{a^2} = 1 \Rightarrow \frac{b}{a} = \pm 1$$

در آخر، حاصل $\lim_{x \rightarrow +\infty} f^{-1}(x)$ را به دست می‌آوریم:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f^{-1}(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-dx + b}{cx - a} = -\frac{b}{a}$$

مقدار $\frac{b}{a}$ برابر ± 1 است، پس مقدار $-\frac{b}{a}$ هم برابر ± 1 می‌شود که تنها ۱ در بین گزینه‌ها است.

۱۹- گزینه ۲

استراتژی کافی است پیوستگی f را به ازای $n = 1$ و $n = 2$ بررسی کنید.

۱۴۵ ابتدا فرض کنید $n = 1$ است، پس f باید در $x = n = 1$ و $x = -n = -1$ پیوسته باشد. پیوستگی f در $x = 1$ را بررسی می‌کنیم.

برای به دست آوردن حد راست f در $x = 1$ داریم:

$$x \rightarrow 1^+ \Rightarrow \underbrace{[x] = 1}_{\text{فرد}} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x - [x] + k)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1^+} (x - 1 + k) = 1 - 1 + k = k$$

حد چپ f در $x = 1$ برابر است با:

$x \rightarrow 1^- \Rightarrow \underbrace{[x] = 0}_{\text{زوج}} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} |x - [-x]|$

مقدار $[-x]$ وقتی $x \rightarrow 1^-$ (مثلاً $x = 0/9$) برابر -1 است $([-(-0/9)] = [-0] = -1)$:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} |x - [-x]| = \lim_{x \rightarrow 1^-} |x - (-1)| = |1 - (-1)| = 2$$

مقدار f در $x = 1$ نیز برابر است با:

$$x = 1 \Rightarrow \underbrace{[x] = 1}_{\text{فرد}} \Rightarrow f(x) = x - [x] + k \Rightarrow f(1) = 1 - 1 + k = k$$

حالا حد راست، حد چپ و مقدار f در $x = 1$ را با هم برابر قرار می‌دهیم:

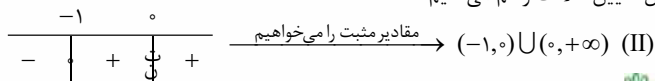
$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = f(1) \Rightarrow k = 2 = k \Rightarrow k = 2$$

پس برای این که f در $x = 1$ پیوسته شود، باید $k = 2$ باشد.

برای این که نقطه عطف در ربع دوم باشد، باید عرض آن مثبت شود:

$$\frac{2(k+1)^2}{27k^2} > 0 \xrightarrow{\text{ریشه‌ها}} \begin{cases} 2(k+1)^2 = 0 \Rightarrow k = -1 \text{ (ریشه فرد)} \\ 27k^2 = 0 \Rightarrow k = 0 \text{ (ریشه زوج)} \end{cases}$$

جدول تعیین علامت رسم می‌کنیم:



از دو بازه (I) و (II) اشتراک می‌گیریم:

$$\Rightarrow (I) \cap (II) = (0, +\infty)$$

این بازه شامل هیچ عدد صحیح منفی‌ای نیست، پس جواب صفر می‌شود.

۲۰- گزینه ۲

درس نامه ۱ نقطه شناور، هر وقت در سؤالی به ما گفته شود که نقطه A روی

منحنی $y = f(x)$ قرار دارد (یا بیشترین یا کمترین فاصله نقاط منحنی $y = f(x)$ از فلان چیز را می‌خواهیم)، مختصات نقاط روی منحنی را به صورت $(x, f(x))$ در نظر می‌گیریم؛ برای مثال نقاط روی منحنی $y = \sqrt{x-1}$ را به صورت $(x, \sqrt{x-1})$ فرض می‌کنیم.

در مسائل بهینه‌سازی برای پیدا کردن طول نقاط اکسترمم یک تابع، کافی است ریشه‌های صورت و مخرج مشتق آن را محاسبه کنیم.

۳ فاصله نقطه $A(x_0, y_0)$ از خط $ax + by + c = 0$ برابر است با: $\frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

ابتدا دقت کنید برای این که زیر رادیکال منفی نشود، باید $x - [x^2] \geq 0$ ، یعنی

$x \geq [x^2]$ باشد. x^2 نامنفی است، پس $[x^2]$ هم نامنفی می‌شود، بنابراین x هم باید نامنفی باشد.

حالا بازه‌بندی داریم:

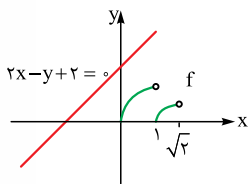
$$f(x) = \begin{cases} 0 \leq x < 1 \Rightarrow \sqrt{x - [x^2]} = \sqrt{x} \\ 1 \leq x < \sqrt{2} \Rightarrow \sqrt{x - [x^2]} = \sqrt{x-1} \\ \sqrt{2} \leq x < \sqrt{3} \Rightarrow \sqrt{x - [x^2]} = \sqrt{x-2} \\ \vdots \\ \text{بقیه مقادیر نیز غیر قابل قبول‌اند.} \end{cases}$$

غ ق ق، چون زیر رادیکال منفی می‌شود.

بنابراین ضابطه تابع به شکل مقابل می‌شود:

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & 0 \leq x < 1 \\ \sqrt{x-1} & 1 \leq x < \sqrt{2} \end{cases}$$

نمودار تابع f و خط $2x - y + 2 = 0$ را رسم می‌کنیم:



با توجه به نمودار رسم‌شده، واضح است نقاطی از منحنی f که کمترین فاصله را تا خط دارند، روی \sqrt{x} قرار دارند.

نقاط روی $f(x) = \sqrt{x}$ را به صورت $A(x, \sqrt{x})$ نمایش می‌دهیم. فاصله این

نقاط از خط $2x - y + 2 = 0$ برابر است با:

$$\frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \xrightarrow{\begin{matrix} \frac{a}{2x} & \frac{b}{-\sqrt{x}} & \frac{c}{2} \\ \downarrow & \downarrow & \\ x_0 & y_0 & \end{matrix}} d(x) = \frac{|2x - \sqrt{x} + 2|}{\sqrt{4+1}}$$

در بازه $[0, 1)$ است که در این بازه، $2x - \sqrt{x} + 2$ مثبت است، پس می‌توانیم قدرمطلق را برداریم:

$$d(x) = \frac{1}{\sqrt{5}} \times (2x - \sqrt{x} + 2)$$

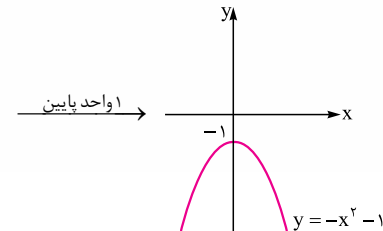
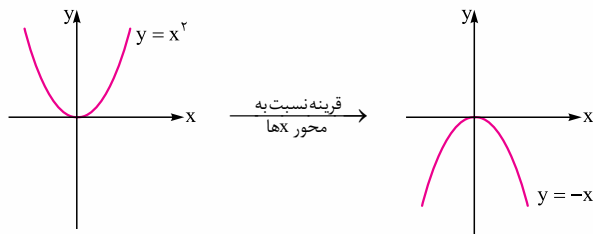
از تابع $d(x)$ مشتق می‌گیریم و برابر صفر قرار می‌دهیم تا طول نقاط اکسترمم به دست آید:

$$d'(x) = \frac{1}{\sqrt{5}} \times (2 - \frac{1}{2\sqrt{x}}) = 0 \Rightarrow 2 - \frac{1}{2\sqrt{x}} = 0$$

$$\Rightarrow 2 = \frac{1}{2\sqrt{x}} \Rightarrow \sqrt{x} = \frac{1}{4} \Rightarrow x = \frac{1}{16}$$

۳ اگر دو خط d و d' بر هم عمود باشند، حاصل ضرب شیب‌هایشان -1 می‌شود.

قرینه سهمی $y = x^2 + 1$ نسبت به محور x ها، طبق مورد (۱) درس نامه، سهمی $y = -x^2 - 1$ است که نمودار آن در سه مرحله رسم می‌شود:



نمودار $y = -x^2 - 1$ ، نسبت به محور y ها متقارن است، پس می‌توانیم فرض کنیم خط d ، این منحنی را در دو نقطه به طول‌های α و $-\alpha$ قطع می‌کند. ($\alpha > 0$)

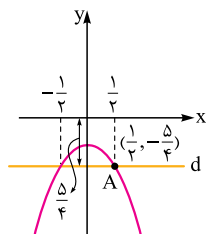
مشتق تابع $y = -x^2 - 1$ ، به صورت $y' = -2x$ است، پس شیب خط مماس بر سهمی در نقطه‌ای به طول α برابر -2α و شیب خط مماس بر آن در نقطه‌ای به طول $-\alpha$ برابر 2α است. (مورد (۲) درس نامه).

این دو خط بر هم عمودند، پس طبق مورد (۳) درس نامه، حاصل ضرب شیب‌هایشان -1 است:

$$(-2\alpha) \times (2\alpha) = -1 \Rightarrow 4\alpha^2 = 1 \Rightarrow \alpha^2 = \frac{1}{4}$$

$$\xrightarrow{\alpha > 0} \alpha = \frac{1}{2}$$

با جای‌گذاری $\alpha = \frac{1}{2}$ به جای x در ضابطه $y = -x^2 - 1$ ، عرض نقطه A برابر $-\frac{5}{4}$ می‌شود، پس فاصله خط d از مبدأ مختصات $\frac{5}{4} = 1\frac{1}{4}$ است:



۱۹- گزینه ۴

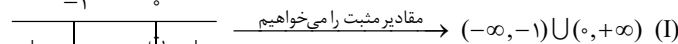
درس نامه طول نقطه عطف توابع درجه سوم به شکل $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$

برابر $-\frac{b}{3a}$ است.

طول نقطه عطف منحنی $y = kx^3 + (k+1)x^2$ ، طبق درس نامه برابر $-\frac{k+1}{3k}$ است. می‌خواهیم نقطه عطف در ربع دوم باشد، پس طول آن باید منفی باشد:

$$-\frac{k+1}{3k} < 0 \Rightarrow \frac{k+1}{3k} > 0 \xrightarrow{\text{ریشه‌ها}} \begin{cases} k+1 = 0 \Rightarrow k = -1 \text{ (ریشه فرد)} \\ 3k = 0 \Rightarrow k = 0 \text{ (ریشه فرد)} \end{cases}$$

جدول تعیین علامت رسم می‌کنیم:



حالا با جای‌گذاری $x = -\frac{k+1}{3k}$ در منحنی، عرض نقطه عطف را به دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} y &= kx^3 + (k+1)x^2 \xrightarrow{x = -\frac{k+1}{3k}} y = k\left(-\frac{k+1}{3k}\right)^3 + (k+1)\left(-\frac{k+1}{3k}\right)^2 \\ &= -k \times \frac{(k+1)^3}{27k^3} + (k+1) \times \frac{(k+1)^2}{9k^2} = -\frac{(k+1)^3}{27k^2} + \frac{(k+1)^3}{9k^2} \\ &= \frac{-(k+1)^3 + 3(k+1)^3}{27k^2} = \frac{2(k+1)^3}{27k^2} \end{aligned}$$

۱۵ همان طور که در نمودار ون گام (۱) می‌بینید، از 150 نفر، « $40 + 75 = 115$ » نفر در قسمت‌های رنگی هستند. X زمانی حداکثر می‌شود که همه، « $150 - 115 = 35$ » نفر باقی‌مانده را به $A \cap B$ اختصاص بدهیم، یعنی $x_{max} = 35$ است؛ بنابراین بیشترین مقدار

$$\frac{P(A)}{P(B)} = \frac{x + 40}{x + 75} \xrightarrow{x_{max} = 35} \frac{P(A)}{P(B)} = \frac{35 + 40}{35 + 75} = \frac{75}{110} = \frac{15}{22}$$

مشاوره این اولین باری است که احتمال با تابع ترکیب می‌شود. این تست پیغام می‌دهد که دیگر نباید چیزی از ریاضی را حذف کنید؛ تست‌ها دیگر ترکیبی شده‌اند.

۲۲- گزینه ۳

شفاف‌سازی منظور طراح از «این روند تا جایی ادامه می‌یابد که همه اعداد زوج، غیرتکراری و با بیشترین میانگین ممکن باشند.» این است که در هر مرحله‌ای که دو عدد دلخواه را حذف می‌کنید و به جای آن دو عدد، اختلافشان را می‌نویسید، نباید هیچ عدد تکراری‌ای درست شود؛ نداشتن تکراری در مرحله آخر کافی نیست؛ در هیچ مرحله‌ای نباید تکراری داشته باشیم. در غیر این صورت مسئله جواب منحصر به فردی نخواهد داشت.

درس‌نامه ۱ اگر میانگین n داده x_1, x_2, \dots, x_n برابر \bar{x} باشد، در این صورت واریانسشان از رابطه زیر محاسبه می‌شود:

$$\sigma^2 = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2}{n}$$

۲ انحراف معیار، همان جذر واریانس است: $\text{انحراف معیار} = \sqrt{\text{انحراف}}$

۱۵ به گفته سؤال، اعداد زیر را در اختیار داریم: $9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19$

در هر مرحله باید دوتا عدد را انتخاب کنیم و به جای آن دو، اختلافشان را بنویسیم، به شرطی که:
 ۱- در هیچ مرحله‌ای عدد تکراری درست نشود.
 ۲- در آخر، همه عددها زوج باشند.
 ۳- اعداد تا جای ممکن بزرگ‌ترین باشند تا میانگینشان هم بیشترین شود.

۱۵ برای برقراری شرط ۲ باید عددهای فرد را حذف کنیم، پس در هر مرحله دو عدد فرد را انتخاب می‌کنیم و اختلافشان را می‌نویسیم به طوری که شرط‌های ۱ و ۳ هم برقرار شوند. طبق شرط ۳ بهتر است در مرحله اول ۹ و ۱۹ را انتخاب کنیم که بیشترین اختلاف را دارند، اما چون اختلاف این دو، عدد تکراری ۱۰ را به وجود می‌آورد، ۹ و ۱۷ را انتخاب می‌کنیم و به جای آن‌ها « $8 = 17 - 9$ » را می‌نویسیم:

$$9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19$$

به همین ترتیب به جای ۱۱ و ۱۵ عدد ۴ و به جای ۱۳ و ۱۹ هم عدد ۶ را می‌نویسیم:

$$9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19$$

پس داده‌ها به این صورت شدند: $4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18$

۱۵ حالا واریانس داده‌های بالا را به دست می‌آوریم. برای این کار اول \bar{x} را حساب می‌کنیم:

$$\bar{x} = \frac{4 + 6 + 8 + 10 + 12 + 14 + 16 + 18}{8} = \frac{88}{8} = 11$$

حالا به کمک مورد (۱) درس‌نامه، واریانس را پیدا می‌کنیم:

$$\sigma^2 = \frac{(4-11)^2 + (6-11)^2 + (8-11)^2 + \dots + (18-11)^2}{8} = \frac{168}{8} = 21$$

شاید بگویید محاسبات خیلی وقت‌گیر است، حق دارید! نکته زیر را بخوانید:

نکته اگر n داده، یک دنباله حسابی با قدرنسبت d بسازند، واریانسشان را می‌توانیم

$$\sigma^2 = \frac{n^2 - 1}{12} d^2$$

اعداد $4, 6, 8, \dots, 18$ یک دنباله حسابی با قدرنسبت ۲ می‌سازند؛ پس طبق نکته بالا می‌توانستیم واریانسشان را مستقیماً حساب کنیم:

$$\sigma^2 = \frac{8^2 - 1}{12} \times 2^2 = \frac{63}{12} \times 4 = \frac{63}{3} = 21$$

حالا که فهمیدیم واریانس داده‌ها ۲۱ است، طبق مورد (۲) درس‌نامه می‌توانیم بگوییم انحراف معیار داده‌ها می‌شود $\sqrt{21}$.

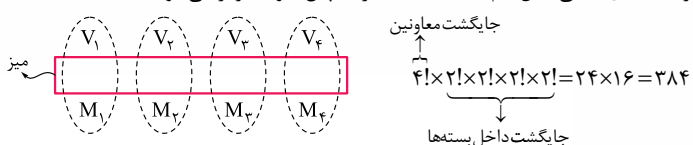
مشاوره سوالات آمار، جدیداً علاوه بر سواد، هوش شما را هم می‌سنجند. انتظار دیدن چنین سؤالاتی را در کنکور خودتان هم داشته باشید.

بنابراین طول نقطه اکسترمم این تابع، $x = \frac{1}{16}$ است. با جای گذاری $x = \frac{1}{16}$ در تابع $d(x)$ ، جواب حاصل می‌شود:

$$d(x) = \frac{1}{\sqrt{5}} \times (2x - \sqrt{x} + 2) \Rightarrow d\left(\frac{1}{16}\right) = \frac{1}{\sqrt{5}} \times \left(2 \times \frac{1}{16} - \sqrt{\frac{1}{16}} + 2\right) = \frac{1}{\sqrt{5}} \times \frac{15}{8} = \frac{3 \times \sqrt{5}}{8 \sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{5}}{8}$$

۲۱- گزینه ۱

چهار وزیر را V_1, V_2, V_3, V_4 و چهار معاونشان را هم M_1, M_2, M_3, M_4 در نظر می‌گیریم. همان طور که در شکل زیر می‌بینید، ۴ معاون را می‌توانیم به ۴! طریق در پایین میز بچینیم. با این کار جای هر کدام از وزیران در بالای میز مشخص می‌شود. هر کدام از بسته‌های بیضی شکل هم ۲! جایگشت دارند؛ پس جواب برابر می‌شود با:

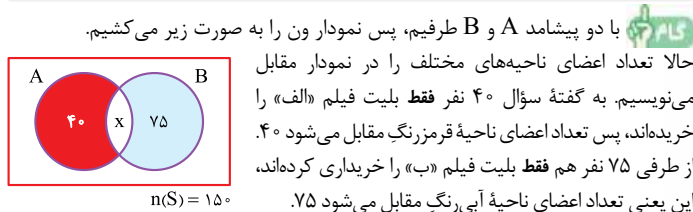


اما متأسفانه عدد بالا در گزینه‌ها نیست و طراح **۲** رو به عنوان گزینه درست انتخاب کرده است!! احتمالاً منظور طراح این بوده که همه وزیران باید در کنار هم و همین طور همه معاونان هم باید کنار هم بنشینند؛ این جوری دیگر جایگشت داخل بسته‌های بیضی شکل بالا را نداریم، بلکه مطابق شکل مقابل، کل بسته وزیران و کل بسته معاونین ۲! جایگشت دارند؛ این جوری به عدد ۴۸ می‌رسیم: $4! \times 2! = 24 \times 2 = 48$

مشاوره متأسفانه در کنکورهای جدید (به خصوص همین کنکور) سؤالات پر ابهام و غلط زیاد شده؛ پس اگر در یک سؤال دیدید هیچ‌چیز به جواب نمی‌رسد این احتمال وجود دارد که اصلاً سؤال غلط باشد. در این جور مواقع از سؤال رد شوید.

۲۲- گزینه ۴

استراتژی اول نمودار ون را برای دو مجموعه A و B می‌کشیم، بعد تعداد اعضای «فقط A » و «فقط B » را در ناحیه مناسب می‌نویسیم. در ادامه تعداد اعضای ناحیه $A \cap B$ را x در نظر می‌گیریم تا بتوانیم $\frac{P(A)}{P(B)}$ را بر حسب x بنویسیم. در آخر مقدار x را طوری تنظیم می‌کنیم که حداکثر شود.



۱۵ با دو پیشامد A و B طرفیم، پس نمودار ون را به صورت زیر می‌کشیم. حالا تعداد اعضای ناحیه‌های مختلف را در نمودار مقابل می‌نویسیم. به گفته سؤال ۴۰ نفر فقط بلیت فیلم «الف» را خریده‌اند، پس تعداد اعضای ناحیه قرمز رنگ مقابل می‌شود ۴۰. از طرفی ۷۵ نفر فقط بلیت فیلم «ب» را خریده‌اند، این یعنی تعداد اعضای ناحیه آبی رنگ مقابل می‌شود ۷۵.

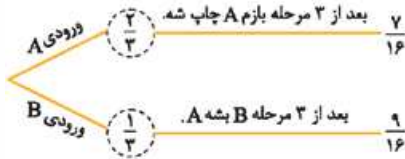
بباید فرض کنیم تعداد اعضای $A \cap B$ ، x تا باشد، در این صورت $\frac{P(A)}{P(B)}$ برابر می‌شود با:

$$\frac{P(A)}{P(B)} = \frac{x + 40}{x + 75} \Rightarrow \frac{P(A)}{P(B)} = \frac{x + 40}{x + 75} \quad (*)$$

نکته هر تابع هموگرافیک مثل $y = \frac{ax + b}{cx + d}$ ، دو شاخه دارد. در صورتی که $ad - bc > 0$ باشد، هر دو شاخه اکیداً صعودی و در صورتی که $ad - bc < 0$ باشد، هر دو شاخه اکیداً نزولی هستند.

طبق نکته بالا $y = \frac{x + 40}{x + 75}$ یک تابع هموگرافیک با شاخه‌های صعودی است، چون $ad - bc = 75 - 40 > 0$ است؛ بنابراین اگر حداکثرش را می‌خواهیم باید حداکثر x را حساب کنیم.

پس کامل شده نمودار درختی به این صورت شد:



حالا شاخه‌ها را در هم ضرب و اعداد حاصل را با هم جمع می‌کنیم تا $P(A)$ پیدا شود:

$$P(A) = \left(\frac{2}{3} \times \frac{7}{16}\right) + \left(\frac{1}{3} \times \frac{9}{16}\right) = \frac{14}{48} + \frac{9}{48} = \frac{23}{48}$$

طبق قانون بیز برای محاسبه $P(A | \text{خروجی } A)$ باید شاخه مطلوب را به احتمال کل تقسیم کنیم. شاخه مطلوب، شاخه‌ای است که حرف ورودی A و خروجی هم A بوده که شاخه اول است و احتمال کل هم که شد $\frac{23}{48}$ ؛ پس:

$$P(A | \text{خروجی } A) = \frac{\frac{2}{3} \times \frac{7}{16}}{\frac{23}{48}} = \frac{\frac{14}{48}}{\frac{23}{48}} = \frac{14}{23}$$

مشاوره سؤال واقعاً سختی بود، اگر حلتش نکردید نگران نباشید؛ طبیعی است. لطفاً پاسخ این سؤال را خوب بخوانید تا اگر مشابه همچین سؤالی را در کنکور دیدید سورپرایز نشوید.

۲۵ - گزینه ۲

شفاف‌سازی «هر ضلع واسطه هندسی دو قطر لوزی است»؛ یعنی این رابطه برقرار است:

$$\text{ضرب قطره‌های لوزی} = (\text{طول ضلع لوزی})^2$$

استراتژی مساحت لوزی را یک بار برحسب زاویه داخلی‌اش و یک بار هم برحسب قطره‌های آن می‌نویسیم و مساوی هم می‌گذاریم.

درس‌نامه ۱ مساحت لوزی به ضلع a و زاویه θ برابر است با:

$$S = a^2 \cdot \sin \theta$$

۲ مساحت هر چهارضلعی که قطرهای آن بر هم عمودند (مثل لوزی)، برابر است با نصف حاصل ضرب طول قطرهای آن، مثلاً مساحت چهارضلعی $ABCD$ در شکل مقابل می‌شود:

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2} AC \cdot BD$$

۳ قطره‌های هر لوزی، نیمسازهای زاویه‌های داخلی‌اش هستند.

نوشتن مساحت لوزی برحسب زاویه داخلی‌اش

مطابق شکل، زاویه حاده این لوزی را θ و طول ضلعش را a در نظر می‌گیریم، همان‌طور که در قسمت (۱) درس‌نامه گفتیم برای مساحت این لوزی می‌توانیم رابطه زیر را بنویسیم:

$$S_{ABCD} = a^2 \cdot \sin \theta \quad (1)$$

نوشتن مساحت لوزی برحسب طول قطره‌هایش

با توجه به قسمت (۲) درس‌نامه، داریم:

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2} AC \cdot BD \quad (2)$$

پیدا کردن خواسته مسئله

طبق شفاف‌سازی می‌توانیم بنویسیم:

$$a^2 = AC \cdot BD \Rightarrow a^2 \cdot \sin \theta = \frac{1}{2} AC \cdot BD \Rightarrow a^2 \cdot \sin \theta = \frac{1}{2} a^2$$

$$\Rightarrow \sin \theta = \frac{1}{2} \xrightarrow{\theta \text{ حاده است.}} \theta = 30^\circ$$

با توجه به این که در لوزی، زاویه‌های مجاور، مکمل و قطرهای نیمسازند، شکل دقیق به صورت مقابل می‌شود.

همان‌طور که در شکل مقابل می‌بینید، وقتی قطرهای لوزی را بکشیم ۴ مثلث درست می‌شود که کوچک‌ترین زاویه هر کدام 15° است.

شفاف‌سازی «با کدام احتمال حرف «A» چاپ شده توسط دستگاه با حرف ورودی یکسان است»؛ یعنی اگر در آخر حرف «A» چاپ شود، با کدام احتمال حرف ورودی دستگاه هم «A» بوده است؛ پس باید $P(\text{خروجی } A | \text{ورودی } A)$ را حساب کنیم.

ورودی A باشد به شرطی که خروجی هم A باشد.

درس‌نامه قانون بیز: در فرم شرطی احتمال کل، اول احتمال کل را به کمک نمودار درختی حساب کنید، بعد شاخه مطلوب را به احتمال کل تقسیم کنید.

طبق شفاف‌سازی باید $P(A | \text{خروجی } A)$ و $P(A)$ را حساب کنیم؛ این یعنی با فرم شرطی احتمال کل طرفیم. اول $P(A)$ (خروجی A همان احتمال کل) را پیدا می‌کنیم.

شروع نمودار درختی به این صورت است:

در دایره توخالی بالا باید احتمال ورودی بودن A و در دایره توخالی پایین باید احتمال ورودی بودن B را بنویسیم. به گفته سؤال احتمال انتخاب حرف A ، دو برابر احتمال انتخاب حرف B است؛ این یعنی اگر $P(B) = x$ باشد، $P(A) = 2x$ می‌شود. حالا جمع دو احتمال را مساوی ۱ می‌گذاریم:

$$x + 2x = 1 \Rightarrow 3x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{3} \Rightarrow \begin{cases} P(A) = 2x = \frac{2}{3} \\ P(B) = x = \frac{1}{3} \end{cases}$$

پس قسمت اول نمودار درختی به این صورت می‌شود:

قبل از این که به گام بعدی برویم، بایاید احتمال تغییر و عدم تغییر حرف در هر مرحله را حساب کنیم. به گفته سؤال در هر مرحله حرف ورودی با احتمال $\frac{1}{4}$ بدون تغییر به مرحله بعدی می‌رود؛ پس احتمال تغییر می‌شود $\frac{3}{4} = 1 - \frac{1}{4}$.

حالا شاخه‌های نمودار درختی را ادامه می‌دهیم:

همان‌طور که می‌بینید در شاخه اول می‌خواهیم ورودی A و بعد از سه مرحله خروجی هم A باشد. برای این که چنین اتفاقی بیفتد از این سه مرحله یا باید دو مرحله تغییر داشته باشیم یا اصلاً تغییر نداشته باشیم (صفر بار). چون با دو بار تغییر، یک بار A مان می‌شود و با تغییر بعدی باز هم به A می‌رسیم و با صفر بار تغییر هم که A مان دست‌نخورده باقی ماند؛ بنابراین عددی که در شاخه اول باید بنویسیم می‌شود:

$$P_1 = \binom{3}{0} \left(\frac{1}{4}\right)^0 \left(\frac{3}{4}\right)^3 + \binom{3}{1} \left(\frac{1}{4}\right)^1 \left(\frac{3}{4}\right)^2 + \binom{3}{2} \left(\frac{1}{4}\right)^2 \left(\frac{3}{4}\right)^1 + \binom{3}{3} \left(\frac{1}{4}\right)^3 \left(\frac{3}{4}\right)^0 = \frac{1}{4^3} + \frac{3 \cdot 3}{4^3} + \frac{3 \cdot 3}{4^3} + \frac{1}{4^3} = \frac{16}{64} = \frac{1}{4}$$

در شاخه دوم هم می‌خواهیم ورودی B را بعد از سه مرحله به A تبدیل کنیم، بنابراین از این ۳ مرحله یا باید ۱ بار تغییر داشته باشیم ($B \rightarrow A$) یا ۳ بار ($B \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow A$)؛ بنابراین عددی که باید در شاخه دوم بنویسیم برابر است با:

$$P_2 = \binom{3}{1} \left(\frac{1}{4}\right)^1 \left(\frac{3}{4}\right)^2 + \binom{3}{3} \left(\frac{1}{4}\right)^3 \left(\frac{3}{4}\right)^0 = \frac{3 \cdot 9}{4^3} + \frac{1}{4^3} = \frac{27}{64} + \frac{1}{64} = \frac{28}{64} = \frac{7}{16}$$

۲۶ - گزینه ۴

استراتژی اول نشان می‌دهیم دو مثلث ABC و DEF متشابه‌اند، بعد با نوشتن نسبت تشابه این دو مثلث، خواسته سؤال را به دست می‌آوریم.

درس‌نامه ۱ هر زاویه خارجی یک مثلث، برابر است با مجموع دو زاویه داخلی غیرمجاورش؛ مثلاً زاویه خارجی B_1 در شکل مقابل برابر می‌شود با:

$B_1 = \hat{A} + \hat{C}$
 اگر دو زاویه از یک مثلث با دو زاویه از مثلثی دیگر برابر باشند، آن‌گاه آن دو مثلث با هم متشابه‌اند. مثلاً دو مثلث ABC و $A'B'C'$ ، در شکل‌های مقابل با دو زاویه برابر α و β متشابه‌اند.

۳ برای نوشتن نسبت تشابه دو مثلث، ضلع‌های رو به زاویه‌های برابر را در یک نسبت زیر هم می‌نویسیم، به طوری که در صورت، نسبت‌ها اضلاع یک مثلث و در مخرج آن‌ها اضلاع مثلث دیگر قرار داشته باشند. مثلاً نسبت تشابه مثلث‌های ABC و DEC در شکل مقابل برابر می‌شود با:

$$\frac{AC}{EC} = \frac{AB}{DE} = \frac{BC}{DC}$$

α روبه
 β روبه
 θ روبه

اثبات متشابه بودن دو مثلث ABC و DEF :
 سؤال گفته سه زاویه ABF ، CAE ، BCD هم‌اندازه‌اند. این سه زاویه را با α در شکل مقابل نشان می‌دهیم، حالا می‌توانیم بنویسیم:

$$\hat{B}\hat{A}E = \hat{A} - \alpha, \hat{F}\hat{B}C = \hat{B} - \alpha, \hat{A}\hat{C}D = \hat{C} - \alpha$$

این زاویه‌ها را هم روی شکل می‌نویسیم. حالا خوب به رنگ‌بندی زاویه‌های مثلث DEF و بقیه مثلث‌ها توجه کنید. همان‌طور که می‌بینید زاویه قرمز رنگ (\hat{D}_1) برای مثلث ACD یک زاویه خارجی است، پس می‌توانیم بگوییم برابر می‌شود با جمع زاویه‌های α و $\hat{C} - \alpha$:

$$\hat{D}_1 = (\hat{C} - \alpha) + \alpha = \hat{C}$$

همین‌طور زاویه‌های سبز (\hat{E}_1) و آبی (\hat{F}_1) هم به ترتیب برای مثلث‌های ABE و BCF ، یک زاویه خارجی هستند؛ پس می‌توانیم بنویسیم:

$$\hat{E}_1 = (\hat{A} - \alpha) + \alpha = \hat{A}, \hat{F}_1 = (\hat{B} - \alpha) + \alpha = \hat{B}$$

پس شکل مسئله به صورت مقابل می‌شود. همان‌طور که می‌بینید؛ زاویه‌های مثلث‌های ABC و DEF برابر شدند، پس طبق مورد (۲) درس‌نامه این دو مثلث متشابه‌اند.

(محاسبه خواسته سؤال): الان نوبت نوشتن نسبت تشابه مثلث‌های ABC و DEF است. برای این کار از مورد (۳) درس‌نامه کمک می‌گیریم:

$$\frac{AB}{EF} = \frac{BC}{DF} \xrightarrow{BC=8, DF=2/5, EF=3} \frac{AB}{3} = \frac{8}{2/5} \Rightarrow \frac{AB}{3} = \frac{8}{2}$$

$$\Rightarrow AB = \frac{2 \times 8 \times 3}{5} = \frac{48}{5} = 9 \frac{3}{5}$$

مشاوره شاهد مدل جدیدی از سؤال در مورد تشابه بودیم که حتماً برای خیلی‌ها ناآشنا است و ایده‌ای برای حل آن ندارند؛ بنابراین اگر از پس این سؤال برنیامده‌اید، خیلی نگران نباشید، سعی کنید پاسخ آن را خوب یاد بگیرید تا در مواجهه با سؤال‌های مشابه، غافلگیر نشوید.

۲۷ - گزینه ۱

استراتژی اول شکل مسئله را رسم می‌کنیم تا کوچک‌ترین مثلثی که درست می‌شود، خودش را نشان دهد؛ بعد با توجه به این که قطر، مساحت مستطیل را نصف می‌کند، خواسته سؤال را به نسبت طول دو پاره‌خط تبدیل می‌کنیم. در آخر این نسبت را به کمک قضیه تالس حساب می‌کنیم.

درس‌نامه ۱ در مثلث مقابل، اگر $DE \parallel BC$ باشد، طبق قضیه تالس می‌توانیم نسبت زیر را بنویسیم:

$$\frac{DE}{BC} = \frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$$

(تالس جزء به کل)

۲ با رسم هر قطر یک مستطیل، دو مثلث هم‌نهشت (و در نتیجه هم‌مساحت) ایجاد می‌شود.

(رسم شکل مسئله) شکل مسئله به صورت مقابل است. در این شکل d و d' همان خط‌هایی هستند که قطر AC را به سه قسمت تقسیم می‌کنند. به گفته سؤال قسمت وسط (HH') ، دو برابر قسمت‌های کناری (AH) و (CH') است، پس می‌توانیم فرض کنیم: $AH = CH' = x$ ، $HH' = 2x$.

(تحلیل خواسته سؤال) همان‌طور که در شکل بالا می‌بینید، کوچک‌ترین مثلثی که در مستطیل وجود دارد، مثلث AEH (یا CFH') است؛ پس خواسته سؤال، یعنی نسبت مساحت مستطیل به مساحت کوچک‌ترین مثلث درست‌شده در آن، می‌شود $\frac{S_{ABCD}}{S_{\triangle AEH}}$. طبق مورد (۲) درس‌نامه، مساحت مستطیل، دو برابر مساحت مثلث ABC است؛ پس می‌توانیم بنویسیم:

$$\frac{S_{ABCD}}{S_{\triangle AEH}} = \frac{2S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle AEH}} = \frac{2 \left(\frac{1}{2} \times BH' \times AC \right)}{\frac{1}{2} \times EH \times \frac{AH}{x}} = \frac{BH' \times 8x}{EH \times x} = 8 \times \frac{BH'}{EH} \quad (*)$$

(محاسبه خواسته سؤال) طبق رابطه $(*)$ برای محاسبه خواسته سؤال، باید نسبت $\frac{BH'}{EH}$ را به دست بیاوریم. خوب به مثلث ABH' نگاه کنید. پاره‌های BH' و EH در این مثلث هر دو بر قطر AC عمودند، پس می‌توانیم بگوییم $BH' \parallel EH$. حالا در مثلث ABH' ، تالس می‌نویسیم:

$$\frac{AH}{AH'} = \frac{EH}{BH'} \Rightarrow \frac{x}{x+2x} = \frac{EH}{BH'} \Rightarrow \frac{EH}{BH'} = \frac{x}{3x} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{BH'}{EH} = 3$$

در آخر تساوی بالا را در رابطه $(*)$ جای‌گذاری می‌کنیم:

$$\frac{S_{ABCD}}{S_{\triangle AEH}} = 8 \times \frac{BH'}{EH} = 8 \times 3 = 24$$

تله حواستان باشد، سؤال گفته خط‌هایی از دو رأس مقابل، نه پاره‌خط‌هایی از دو رأس مقابل. اگر به اشتباه پاره‌خط‌های عمود بر قطر را بکشیم به شکل مقابل می‌رسیم. کوچک‌ترین مثلث درست‌شده در این شکل، مثلث BHC (یا $AH'D$) است. در این حالت اگر خواسته مسئله را حساب کنیم به عدد ۸ می‌رسیم که در **۴** به عنوان تله وجود دارد.

۲۸ - گزینه ۴

درس‌نامه ۱ میان‌های هر مثلث مطابق شکل مقابل، در نقطه‌ای به نام مرکز ثقل هم‌رس‌اند. میان‌ها همیشه به نسبت ۱ به ۲ همدیگر را قطع می‌کنند. برای درک بهتر این موضوع شکل مقابل را ببینید:

۲ اگر مثل شکل مقابل، از مرکز ثقل مثلث به رأس‌هایش وصل کنیم، سه مثلث هم‌مساحت درست می‌شود؛ پس می‌توانیم بنویسیم:

$$S = \frac{1}{3} S_{\triangle ABC}$$

(رسم شکل مناسب و تحلیل آن) شکل مسئله به صورت مقابل است. طبق مورد (۱) درس‌نامه، میان‌ها به نسبت ۱ به ۲ همدیگر را قطع می‌کنند، پس می‌توانیم طول قطعات ایجادشده روی میان‌ها را به صورت مقابل روی شکل بنویسیم. محل برخورد میان‌های CP و BN همان مرکز ثقل مثلث (G) است، پس می‌توانیم از خواص هم‌رسی میان‌ها که در درس‌نامه گفتیم، استفاده کنیم.

۱۳۵ (محاسبه مساحت مثلث ABC)

طول سه ضلع مثلث ABC را داریم $a = BC = 7$ ، $b = AC = 8$ ، $c = AB = 9$ ، پس برای محاسبه مساحت، می‌توانیم از رابطه هرون استفاده کنیم (طبق مورد (۱) درس‌نامه).
اول p یا همان نصف محیط را حساب می‌کنیم:

$$p = \frac{a+b+c}{2} = \frac{7+8+9}{2} = 12$$

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$\Rightarrow S = \sqrt{12(12-7)(12-8)(12-9)} = \sqrt{12 \times 5 \times 4 \times 3} = \sqrt{3^2 \times 4^2 \times 5} = 12\sqrt{5}$$

۱۳۶ (محاسبه خواسته سؤال)

حالا که مقدار a ، p و S را داریم، می‌توانیم r_a را به کمک رابطه (*) به دست بیاوریم:

$$r_a = \frac{12\sqrt{5}}{12-7} = \frac{12\sqrt{5}}{5} = 2/4\sqrt{5}$$

مشاوره سؤال ترکیبی از فصل‌های اول و سوم کتاب هندسه ۲ که کاملاً قابل حل است. در میان سؤال‌های هندسه پایه، باید بتوانید این مدل سؤال‌ها را شناسایی کرده و اول سراغ آن‌ها بروید.

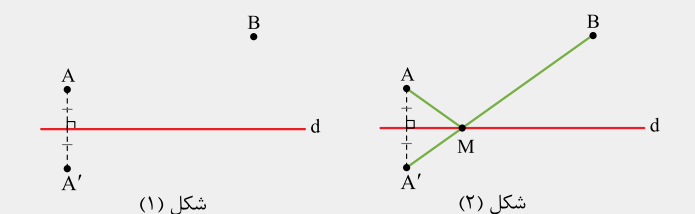
۳۱ - گزینه ۲

استراتژی اول ببینید رأس روبه‌روی ضلع ثابت (ضلع به طول ۱۵) کجاها می‌تواند باشد. این جوری متوجه می‌شوید که با نوع خاص مسئله هرون طرف هستید.

درس‌نامه ۱ برای پیدا کردن نقطه‌هایی که از خط d به فاصله R باشند، باید دو خط موازی با d و به فاصله R در دو طرف آن رسم کنیم (Δ' ، Δ). هر نقطه‌ای که روی یکی از این خط‌ها باشد (مثل A و B)، فاصله‌اش از خط d برابر R است. نگاه کنید:

مسئله هرون: در این مسئله مطابق شکل مقابل، دو نقطه A و B در یک طرف خط d قرار دارند. می‌خواهیم نقطه‌ای مثل M را روی خط d پیدا کنیم، به طوری که مسیر AMB (همون $AM + MB$) کم‌ترین طول ممکن را داشته باشد. برای پیدا کردن نقطه M کارهای زیر را انجام می‌دهیم:

الف) نقطه A' را نسبت به خط d بازتاب می‌دهیم تا به نقطه A' برسیم. (شکل ۱)
ب) A' را به B وصل می‌کنیم تا d را در نقطه M قطع کند. همان نقطه‌ای است که به دنبالش هستیم.



۳ بعد از پیدا کردن نقطه M در مسئله هرون (شکل مقابل را ببینید)، می‌توانیم بگوییم از بین همه مثلث‌هایی که دو رأس آن‌ها A و B و رأس سومشان روی d قرار دارد، مثلث AMB ، کم‌ترین محیط را دارد.

۴ حالت خاص مسئله هرون، وقتی اتفاق می‌افتد که AB با خط d موازی باشد (شکل مقابل را ببینید). در چنین حالتی اگر محیط مثلث AMB کم‌ترین باشد، حتماً متساوی‌الساقین است.

۱۳۷ (پیدا کردن جای روبه‌روی ضلع ثابت)

سؤال در مورد مثلث‌هایی حرف می‌زند که در ضلع $BC = 15$ مشترک هستند. یکی از این مثلث‌ها را در شکل مقابل ببینید.
به گفته سؤال، مساحت این مثلث 3° واحد مربع است، پس می‌توانیم بنویسیم:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} a \cdot h_a \Rightarrow 3 = \frac{1}{2} \times 15 \times h_a \Rightarrow h_a = 4$$

۱۳۵ (محاسبه مساحت مثلث GBC): طبق مورد (۲) درس‌نامه، مساحت مثلث GBC ، $\frac{1}{3} S_{ABC}$ است؛ پس:

$$S_{\Delta GBC} = \frac{1}{3} S_{\Delta ABC} \xrightarrow{S_{\Delta ABC} = 18} S_{\Delta GBC} = 6$$

۱۳۶ (محاسبه x ، y و خواسته سؤال)
سؤال گفته $CP = 4/5$ و این یعنی: $CG = 2x = 3$ $\Rightarrow x = 1/5$ $\Rightarrow CG = 2x = 3$ برای پیدا کردن مقدار y ، از مساحت مثلث GBC که در گام قبل به دست آوردیم، استفاده می‌کنیم:

$$S_{\Delta GBC} = \frac{1}{2} BG \cdot CG \xrightarrow{S_{\Delta GBC} = 6, CG = 3} 6 = \frac{1}{2} BG \times 3$$

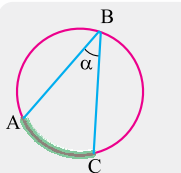
$$\Rightarrow BG = 4 \Rightarrow 2y = 4 \Rightarrow y = 2 \Rightarrow BN = 3y = 6$$

$$\frac{BN}{CP} = \frac{6}{4/5} = \frac{6}{9} = \frac{12}{9} = \frac{4}{3}$$

و در نهایت، خواسته سؤال می‌شود:

۲۹ - گزینه ۲

درس‌نامه اندازه هر زاویه محاطی مثل α در شکل مقابل، مساوی نصف اندازه کمان مقابلش است؛ یعنی $\alpha = \frac{1}{2} \widehat{AC}$



همان‌طور که در شکل می‌بینید، پنج ضلعی $ABCDE$ دایره محاط است. به گفته سؤال هر ضلع این ضلعی، وتر رو به یک زاویه محاطی است، مثلاً در شکل مقابل، ضلع AB و تر رو به زاویه محاطی F_1 است، پس طبق درس‌نامه می‌توانیم بگوییم:

$$\hat{F}_1 = \frac{1}{2} \widehat{AB}$$

به همین ترتیب اگر ضلع‌های BC ، CD ، DE و EA ، وتر رو به زاویه‌های محاطی F_2 ، F_3 ، F_4 و F_5 باشند، می‌توانیم بنویسیم:

$$\hat{F}_2 = \frac{1}{2} \widehat{BC}, \hat{F}_3 = \frac{1}{2} \widehat{CD}, \hat{F}_4 = \frac{1}{2} \widehat{DE}, \hat{F}_5 = \frac{1}{2} \widehat{EA}$$

پس مجموع این زاویه‌ها می‌شود:

$$\hat{F}_1 + \hat{F}_2 + \hat{F}_3 + \hat{F}_4 + \hat{F}_5 = \frac{1}{2} \widehat{AB} + \frac{1}{2} \widehat{BC} + \frac{1}{2} \widehat{CD} + \frac{1}{2} \widehat{DE} + \frac{1}{2} \widehat{EA}$$

$$= \frac{1}{2} (\widehat{AB} + \widehat{BC} + \widehat{CD} + \widehat{DE} + \widehat{EA}) = 180^\circ$$

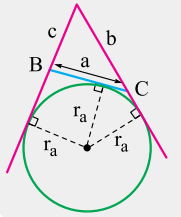
متأسفانه سازمان سنجش پاسخ این سؤال را اعلام کرده، **حالا چرا و چه پوری نمی‌دونیم!!!**

۳۰ - گزینه ۴

استراتژی در واقع سؤال، شعاع یکی از دایره‌های محاطی خارجی مثلث ABC را می‌خواهد، پس باید اول مساحت مثلث را حساب کنیم، برای این کار هم چون طول سه ضلع مثلث را داریم، هرون بهترین انتخاب است.

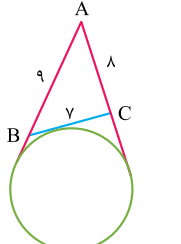
درس‌نامه ۱ اگر p نصف محیط مثلثی با اضلاع a ، b و c باشد، مساحت این مثلث برابر می‌شود با: (رابطه هرون) $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

۲ یکی از دایره‌های محاطی خارجی مثلث ABC را در شکل مقابل ببینید. این دایره بر ضلع به طول a و امتداد دو ضلع دیگر مماس است؛ به همین خاطر شعاعش را با r_a نشان می‌دهیم. برای محاسبه r_a از رابطه مقابل استفاده می‌کنیم:

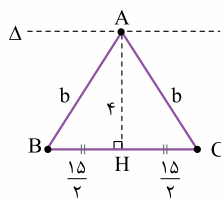
$$r_a = \frac{S}{p-a}$$


۱۳۸ (تحلیل شکل مسئله و خواسته سؤال)

همان‌طور که می‌بینید، دایره رسم شده در شکل، یکی از دایره‌های محاطی خارجی مثلث ABC است. دایره‌ای که بر ضلع به طول $BC = a = 7$ و امتداد دو ضلع دیگر مثلث مماس است. طبق مورد (۲) درس‌نامه شعاع این دایره برابر می‌شود با:

$$r_a = \frac{S}{p-a} (*)$$


حالا می‌تونیم بگوییم فاصله نقطه متغیر A از خط ثابت BC، ۴ واحد است، پس طبق مورد (۱) درس‌نامه، نقطه A می‌تواند روی هر کدام از دو خط یا A' قرار بگیرد.



۱۳۵ (استفاده از حالت خاص مسئله هرون)

حالا خوب به نقطه A، خط Δ و ضلع BC نگاه کنید. همان‌طور که می‌بینید ضلع BC با Δ موازی است و می‌خواهیم نقطه A را روی خط Δ طوری انتخاب کنیم که محیط مثلث ABC کم‌ترین شود. طبق مورد (۴) درس‌نامه (حالت خاص مسئله هرون) در چنین حالتی مثلث ABC

حتماً متساوی‌الساقین است. می‌دانیم در هر مثلث متساوی‌الساقین ارتفاع وارد بر قاعده، میانه هم هست، پس در شکل بالا ارتفاع AH میانه هم هست؛ یعنی: $BH = HC = \frac{15}{2}$

۱۳۶ (محاسبه خواسته سؤال)

مثلث قائم‌الزاویه ABH را در شکل گام قبل ببینید، با استفاده از قضیه فیثاغورس در آن، داریم:

$$b = \sqrt{AH^2 + BH^2} \Rightarrow b = \sqrt{4^2 + \left(\frac{15}{2}\right)^2} = \sqrt{16 + \frac{225}{4}}$$

$$= \sqrt{\frac{64 + 225}{4}} = \sqrt{\frac{289}{4}} = \frac{17}{2} \Rightarrow \text{محیط } \triangle ABC = \left(2 \times \frac{17}{2}\right) + 15 = 32$$

(البته اگر دقت کنید اضلاع قائم‌الزاویه ABH به صورت $8 \times \frac{1}{2}$ و $15 \times \frac{1}{2}$ هستند که آدم را یاد اعداد فیثاغورسی $8k$ ، $15k$ و $17k$ می‌اندازد؛ پس طول وتر آن می‌شود $17 \times \frac{1}{2}$)

۳۲ - گزینه ۱

استراتژی اگر در مثلث ABC، نیمساز داخلی AE را رسم کنید، دو مثلث در شکل ایجاد می‌شود که در هر کدام آن‌ها، یک نیمساز داخلی رسم شده، حالا باید از روابط نیمساز در این دو مثلث استفاده کنید.

درس‌نامه نیمساز داخلی هر مثلث، ضلع مقابلش را به نسبت اضلاع کناریش قطع می‌کند؛ این یعنی در شکل مقابل، اگر AD نیمساز باشد؛ داریم:

$$\frac{BD}{CD} = \frac{AB}{AC}$$

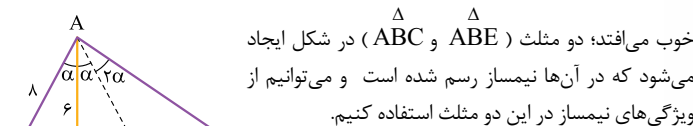
برای محاسبه طول این نیمساز هم از رابطه زیر استفاده می‌کنیم:

$$AD^2 = AB \cdot AC - BD \cdot CD$$

۱۳۷ (تحلیل شکل مسئله)

به گفته سؤال $\hat{D}AC = 3\alpha$ است، پس می‌تونیم بگوییم $\hat{B}AD = \alpha$ و $\hat{D}AC = 3\alpha$ بنابراین $\hat{B}AC = 4\alpha$ می‌شود.

همان‌طور که در شکل زیر می‌بینید، اگر نیمساز زاویه BAC را رسم کنیم (AE)، یک اتفاق



خوب می‌افتد؛ دو مثلث (ABE و ABC) در شکل ایجاد می‌شود که در آن‌ها نیمساز رسم شده است و می‌تونیم از ویژگی‌های نیمساز در این دو مثلث استفاده کنیم.

۱۳۸ (استفاده از ویژگی‌های نیمساز در مثلث ABE)

در مثلث ABE، AD نیمساز است، پس طبق درس‌نامه می‌تونیم بنویسیم:

$$\frac{BD}{DE} = \frac{AB}{AE} \Rightarrow \frac{4}{DE} = \frac{8}{AE} \Rightarrow \frac{AE}{DE} = \frac{8}{4} = 2 \Rightarrow AE = 2x, DE = x$$

حالا به کمک فرمول طول نیمساز در مثلث ABE، x را به دست می‌آوریم:

$$AD^2 = AB \cdot AE - BD \cdot DE \Rightarrow 6^2 = 8(2x) - 4(x)$$

$$\Rightarrow 36 = 12x \Rightarrow x = 3 \Rightarrow \begin{cases} AE = 2x = 6 \\ DE = x = 3 \end{cases}$$

۱۳۹ (استفاده از ویژگی نیمساز در مثلث ABC)

چیزهایی که در گام قبل به دست آوردیم را روی شکل مقابل می‌نویسیم:

در مثلث ABC، AE نیمساز است؛ پس:

$$\frac{BE}{CE} = \frac{AB}{AC} \Rightarrow \frac{3+4}{CE} = \frac{8}{AC} \Rightarrow \frac{7}{CE} = \frac{8}{AC} \Rightarrow \frac{AC}{CE} = \frac{8}{7} \Rightarrow \begin{cases} AC = 8y \\ CE = 7y \end{cases}$$

حالا فرمول طول نیمساز AE را در مثلث ABC می‌نویسیم تا y هم پیدا بشود:

$$AE^2 = AB \cdot AC - BE \cdot CE \Rightarrow 6^2 = 8(8y) - 7(7y)$$

$$\Rightarrow 36 = 64y - 49y \Rightarrow 15y = 36 \Rightarrow y = \frac{36}{15} = \frac{12}{5} = 2.4$$

بنابراین طول AC می‌شود $AC = 8y = 8 \times 2.4 = 19.2$

مشاوره یکی از سخت‌ترین سؤال‌های ریاضی کنکور ۱۴۰۲. اگر نتوانستید به این سؤال پاسخ دهید، اصلاً نگران نباشید؛ پاسخ را خوب بخوانید تا سؤال‌های شبیه به این سؤال را بتوانید حل کنید.

۳۳ - گزینه ۴

درس‌نامه ۱ دترمینان هر ماتریس 2×2 ، مثل $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ به صورت زیر محاسبه می‌شود:

ضرب درایه‌های قطر فرعی

$$|A| = ad - bc$$

ضرب درایه‌های قطر اصلی

۲ در دنیای لگاریتم‌ها، ۴ قانون مهم زیر برقرار است:

(الف) قانون جمع لگاریتم‌ها: $\log_a b + \log_a c = \log_a bc$

(ب) قانون تفاضل لگاریتم‌ها: $\log_a b - \log_a c = \log_a \frac{b}{c}$

(پ) لگاریتم، توانی را که روی عدد جلویش نشسته باشد، به عنوان ضرب به پشت خودش منتقل می‌کند؛ یعنی: $\log_a b^m = m \log_a b$

(ت) در عبارت‌هایی مثل $a^{\log_b c}$ که در آن‌ها عدد به توان لگاریتم می‌رسد، می‌تونیم جای a و c را عوض کنیم؛ یعنی: $a^{\log_b c} = c^{\log_b a}$

۱۳۵ (محاسبه |A|)

اول به کمک مورد (۱) درس‌نامه، دترمینان ماتریس $A = \begin{bmatrix} \log_6 3 & \log_6 2 \\ \log_6 2 & \log_6 3 \end{bmatrix}$ را محاسبه می‌کنیم:

$$|A| = (\log_6 3)^2 - (\log_6 2)^2 = (\log_6 3 - \log_6 2)(\log_6 3 + \log_6 2)$$

اتحاد مزدوج

$$= \log_6 \frac{3}{2} \times \log_6 6 = \log_6 \frac{3}{2}$$

۱۳۶ (محاسبه خواسته سؤال) سؤال مقدار دترمینان ماتریس $B = \begin{bmatrix} 6^{|A|} & 3^{|A|} \\ 3^{|A|} & 6^{|A|} \end{bmatrix}$ را می‌خواهد که برابر است با:

$$|B| = (6^{|A|} \times 6^{|A|}) - (3^{|A|} \times 3^{|A|}) = 6^{2|A|} - 3^{2|A|}$$

حالا $|A| = \log_6 \frac{3}{2}$ را در تساوی بالا جای‌گذاری می‌کنیم:

$$|B| = 6^{2 \log_6 \frac{3}{2}} - 3^{2 \log_6 \frac{3}{2}} = 6^{\log_6 \frac{9}{4}} - 3^{\log_6 \frac{9}{4}}$$

$$|B| = 6^{\log_6 \frac{9}{4}} - 6^{\log_6 \frac{9}{4}}$$

در آخر به کمک قانون (ت) درس‌نامه تساوی بالا را ساده می‌کنیم:

$$|B| = \frac{9}{4} - \frac{9}{4} = \frac{9}{4} - \frac{9}{4} = \frac{15}{8}$$

۳۴ - گزینه ۲

شفاف‌سازی «وتری که از کانون بر محور سهمی عمود است»، همان وتر کانونی سهمی است.

درس‌نامه ۱ همان‌طور که در شکل مقابل می‌بینید، فاصله رأس سهمی از کانون و خط هادی یکسان است. به این فاصله، **فاصله کانونی** می‌گوییم و با |a| نشان می‌دهیم.

۲۵- گزینه ۳

شفاف سازی ضرب داخلی بردارهای \vec{a} و \vec{b} ، حاصل ضرب اندازه‌های دو بردار است؛ یعنی: $\vec{a} \cdot \vec{b} = -\frac{3}{5} |\vec{a}| |\vec{b}|$

درس نامه ۱ اگر زاویه بین دو بردار \vec{a} و \vec{b} ، α باشد، در این صورت $\vec{a} \cdot \vec{b}$ و $|\vec{a} \times \vec{b}|$ به صورت زیر محاسبه می‌شوند:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \alpha, \quad |\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \alpha$$

زاویه بین دو بردار عددی بین صفر تا 180° است.

۳ مساحت مثلثی که روی بردارهای \vec{O} و \vec{O} ساخته می‌شود، برابر است با:

$$S = \frac{1}{2} |\vec{O} \times \vec{O}|$$

۴ دوتا از قوانین مهم ضرب خارجی بردارها را ببینید:

$$\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a} \quad \text{یا} \quad \vec{b} \times \vec{a} = -\vec{a} \times \vec{b}$$

(الف)

$$\vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}$$

(ب) ضرب خارجی هر بردار در خودش، بردار صفر است؛ یعنی:

۱۵ (محاسبه سینوس و کسینوس زاویه بین بردارهای \vec{a} و \vec{b}) طبق شفاف‌سازی، رابطه $\vec{a} \cdot \vec{b} = -\frac{3}{5} |\vec{a}| |\vec{b}|$ برقرار است، پس اگر فرض کنیم زاویه بین دو بردار، α باشد، به کمک مورد (۱) درس‌نامه می‌توانیم بنویسیم:

$$|\vec{a}| |\vec{b}| \cos \alpha = -\frac{3}{5} |\vec{a}| |\vec{b}| \Rightarrow \cos \alpha = -\frac{3}{5}$$

حالا به کمک اتحاد $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ می‌توانیم $\sin \alpha$ را هم حساب کنیم:

$$\sin^2 \alpha + \left(-\frac{3}{5}\right)^2 = 1 \Rightarrow \sin^2 \alpha + \frac{9}{25} = 1 \Rightarrow \sin^2 \alpha = \frac{16}{25} \Rightarrow \sin \alpha = \pm \frac{4}{5}$$

این‌جا باید حواسمان باشد که طبق مورد (۲) درس‌نامه، $0^\circ < \alpha < 180^\circ$ و در نتیجه $\sin \alpha > 0$ است، پس $\sin \alpha = +\frac{4}{5}$ را انتخاب می‌کنیم.

۱۵ (محاسبه خواسته سؤال) حالا به کمک مورد (۳) درس‌نامه مساحت مثلثی را که روی بردارهای $\left(\frac{3\vec{a}}{|\vec{a}|} + \frac{2\vec{b}}{|\vec{b}|}\right)$ و $\left(\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} - \frac{2\vec{b}}{|\vec{b}|}\right)$ ساخته می‌شود، به دست می‌آوریم:

$$S = \frac{1}{2} \left| \left(\frac{3\vec{a}}{|\vec{a}|} + \frac{2\vec{b}}{|\vec{b}|}\right) \times \left(\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} - \frac{2\vec{b}}{|\vec{b}|}\right) \right| = \frac{1}{2} \left| \vec{0} - \frac{6\vec{a} \times \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} + \frac{2\vec{b} \times \vec{a}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} - \vec{0} \right|$$

طبق مورد (۴) درس‌نامه، می‌توانیم به جای $2\vec{b} \times \vec{a}$ بنویسیم $-2\vec{a} \times \vec{b}$:

$$S = \frac{1}{2} \left| -\frac{6\vec{a} \times \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} - \frac{2\vec{a} \times \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} \right| = \frac{1}{2} \left| -8 \frac{\vec{a} \times \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} \right| = 4 \left| \frac{\vec{a} \times \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} \right| = \frac{4}{|\vec{a}| |\vec{b}|} |\vec{a} \times \vec{b}|$$

به جای $|\vec{a} \times \vec{b}|$ هم می‌نویسیم $|\vec{a}| |\vec{b}| \sin \alpha$ ؛ قبلاً شد $\frac{4}{5}$:

$$S = 4 \frac{|\vec{a}| |\vec{b}| \sin \alpha}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = 4 \sin \alpha = 4 \left(\frac{4}{5}\right) = \frac{16}{5} = 3\frac{1}{5}$$

۳۶- گزینه ۱

درس نامه ۱ معادله گسترده هر دایره به صورت $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ است. برای به دست آوردن شعاع و مرکز در این معادله، از روابط زیر استفاده می‌کنیم:

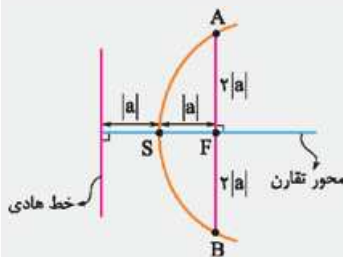
$$O\left(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}\right) \quad r = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 - c}$$

عدد ثابت معادله گسترده

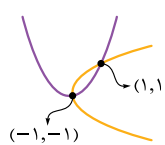
فقط حواسمان باشد، زمانی می‌توانید از رابطه‌های بالا استفاده کنید که در معادله گسترده ضریب x^2 و y^2 برابر ۱ و عدد ثابت، سمت چپ معادله باشد. اگر معادله گسترده این شکلی نبود، باید چنین شرایطی را خودتان بسازید.

۲ اگر در معادله سهمی x^2 وجود داشته باشد، سهمی قائم و در نتیجه دهانه‌اش یا رو به بالاست یا رو به پایین. در چنین سهمی‌هایی اگر مختصات رأس سهمی به صورت $A(h, k)$ و فاصله کانونی $|a|$ باشد، معادله سهمی مطابق جدول زیر نوشته می‌شود:

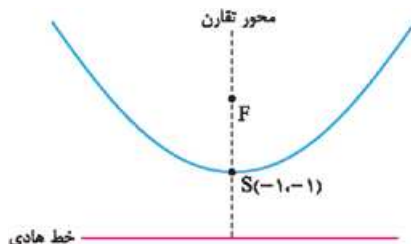
شکل		
مشخصات	رو به بالا	رو به پایین
معادله سهمی	$(x-h)^2 = 4a(y-k)$	$(x-h)^2 = -4a(y-k)$



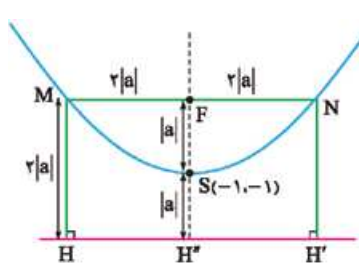
۳ مطابق شکل مقابل، اگر از کانون بر محور تقارن سهمی، یک خط عمود بکشیم تا سهمی را در نقاط A و B قطع کند، وترى به طول $4|a|$ درست می‌شود که به آن **وتر کانونی** می‌گوییم.



۱۵ (تشخیص قائم یا افقی بودن سهمی) همان‌طور که در شکل مقابل می‌بینید، سهمی‌ای که مختصات رأسش $S(-1, -1)$ باشد و از نقطه $(1, 1)$ بگذرد، هم می‌تواند افقی و هم می‌تواند قائم باشد.



این‌جا ما فرض می‌کنیم سهمی قائم است، پس نمودارش به این صورت می‌شود:



۱۵ (کامل کردن شکل مسئله و تحلیل آن) طبق خواسته سؤال وتر کانونی MN و همین‌طور عمودهای MH' و NH'' را به نمودار سهمی اضافه می‌کنیم تا به شکل مقابل برسیم: حالا می‌توانیم به کمک مورد (۱) و (۳) درس‌نامه طول قطعات SF, NF, MF و SH'' را برحسب $|a|$ روی شکل بنویسیم.

۱۵ (محاسبه خواسته سؤال برحسب $|a|$) خواسته سؤال، یعنی طول قطر مستطیل $MNH'H$ را می‌توانیم به کمک قضیه فیثاغورس در مثلث MNH' برحسب $|a|$ به دست بیاوریم:

$$NH'^2 = MN^2 + MH'^2 = (4|a|)^2 + (2|a|)^2 = 16|a|^2 + 4|a|^2 = 20|a|^2 \quad (*)$$

بنابراین برای محاسبه خواسته سؤال باید a را حساب کنیم.

۱۵ (محاسبه a و خواسته سؤال) طبق مورد (۲) درس‌نامه، معادله سهمی‌ای که مختصات رأسش $S(-1, -1)$ و دهانه‌اش رو به بالا باشد، به این صورت است:

$$(x+1)^2 = 4a(y+1)$$

به گفته سؤال سهمی از نقطه $(1, 1)$ می‌گذرد، پس حق داریم این نقطه را در معادله سهمی جای‌گذاری کنیم:

$$(1+1)^2 = 4a(1+1) \Rightarrow 4 = 8a \Rightarrow a = \frac{1}{2}$$

حالا که a را داریم، می‌توانیم به کمک رابطه $(*)$ ، خواسته سؤال را به دست بیاوریم:

$$NH'^2 = 20a^2 = 20 \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 20 \times \frac{1}{4} = 5 \Rightarrow NH' = \sqrt{5}$$

۱۵ (محاسبه خواسته سؤال) در آخر محل تقاطع دو دایره را طبق مورد (۶) درس نامه

در دو مرحله پیدا می‌کنیم:

پیدا کردن معادله و ترم مشترک دو دایره: طبق مورد (۵) درس نامه معادله و ترم مشترک دایره‌های $x^2 + y^2 + 6x - 2y + 2 = 0$ و $x^2 + y^2 - 2x + 6y - 22 = 0$ به صورت زیر به دست می‌آید:

$$(x^2 + y^2 - 2x + 6y - 22) - (x^2 + y^2 + 6x - 2y + 2) = 0 - 0$$

جای‌گذاری و ترم مشترک در معادله یکی از دایره‌ها: حالا $y = x + 3$ را در معادله دایره $x^2 + y^2 + 6x - 2y + 2 = 0$ جای‌گذاری می‌کنیم تا به یک معادله درجه ۲ بر حسب x همان طول نقاط تقاطع است) برسیم:

نکته حاصل ضرب ریشه‌های معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ به شرطی که $\Delta > 0$ باشد، برابر است با: $\frac{c}{a}$ = ضرب ریشه‌ها

سؤال حاصل ضرب طول نقطه‌های برخورد، یعنی حاصل ضرب جواب‌های معادله (*) را می‌خواهد که طبق نکته بالا برابر می‌شود با:

$$P = \frac{c}{a} = \frac{5}{2}$$

۳۷ - گزینه ۲ به قسمت اول صورت سؤال توجه کنید: «با قراردادن عدد سه رقمی $3(a \cdot a)$...» همین‌جا می‌توانیم بگوییم ۳ یا ۲ یا ۱. چون به‌ازای $a > 3$ ، عدد $3(a \cdot a)$ ، چهاررقمی می‌شود. سؤال می‌پرسد حداکثر چند عدد اول می‌تواند a را بشمارد. در جواب باید بگوییم وقتی $a = 1$ باشد، صفر عدد و وقتی $a = 2$ ، $a = 3$ باشد، ۱ عدد اول a را می‌شمارد؛ پس جواب عدد ۱ است.

۳۸ - گزینه ۳

استراتژی اول طرفین معادله را به پیمانه ۷۷ هم‌نهشت قرار می‌دهیم تا y حذف شود، بعد با حل معادله هم‌نهشتی حاصل، فرم کلی x را به دست می‌آوریم. در آخر به کمک فرم کلی x ، خواسته مسئله را حساب می‌کنیم.

درس‌نامه ۱ به معادله‌هایی به شکل $ax + by = c$ (با a ، b و c اعدادی صحیح‌اند) معادله سیاله خطی می‌گوییم. برای حل کردن این معادله‌ها، کارهای زیر را انجام می‌دهیم:

(الف) طرفین معادله را به پیمانه ضریب کوچک‌تر (یا a یا b) هم‌نهشت قرار می‌دهیم تا به یک معادله هم‌نهشتی برسیم.

(ب) با حل معادله هم‌نهشتی، فرم کلی یکی از مجهول‌ها را به دست می‌آوریم.

(پ) مجهول به‌دست‌آمده را در معادله سیاله جای‌گذاری می‌کنیم تا مجهول دیگر هم به دست بیاید.

۲ اگر طرفین یک هم‌نهشتی به پیمانه m بر عدد صحیحی مثل $a \neq 0$ بخش‌پذیر باشند، می‌توانیم a را از طرفین هم‌نهشتی ساده کنیم، اما باید حواسمان باشد که پیمانه را هم بر (a, m) تقسیم کنیم؛ یعنی:

$$ax \equiv ay \pmod{m} \xrightarrow{\frac{m}{d}} x \equiv y \pmod{\frac{m}{d}}$$

هر هم‌نهشتی مثل $a \equiv b$ را می‌توانیم به یک تساوی تبدیل کنیم، ببینید:

$$a \equiv b \Leftrightarrow a = mk + b$$

در قسمت (۱) درس‌نامه گفتیم طرفین معادله سیاله را به پیمانه ضریب کوچک‌تر هم‌نهشت قرار دهید، اما این‌جا سؤال مجموع ارقام کوچک‌ترین عدد طبیعی سه‌رقمی x را می‌خواهد و اصلاً به y کاری ندارد. پس به جای این‌که طرفین معادله $63x + 77y = 273$ را به پیمانه ۶۳ هم‌نهشت قرار بدهیم، به پیمانه ۷۷ هم‌نهشت می‌گذاریم تا x را به دست بیاوریم:

$$63x + 77y \equiv 273 \pmod{77} \Rightarrow -14x \equiv 42 \pmod{77} \xrightarrow{\div 14} -x \equiv 3 \pmod{77} \Rightarrow x \equiv -3 \pmod{77}$$

طبق مورد (۳) درس‌نامه، هم‌نهشتی بالا را می‌توانیم به یک تساوی تبدیل کنیم:

کوچک‌ترین عدد طبیعی سه‌رقمی x به‌ازای $k = 10$ به دست می‌آید: $x = 11(10) - 3 = 107$ که مجموع ارقامش برابر $1 + 0 + 7 = 8$ است.

۲ اگر خط d مثل شکل مقابل بر دایره $C(O, R)$ مماس باشد، می‌توانیم بگوییم فاصله مرکز دایره از خط d ، مساوی شعاع دایره است:



۳ معادله دایره به مرکز $O(\alpha, \beta)$ و شعاع r به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = r^2$$

۴ برای به دست آوردن قرینه یک نقطه نسبت به نیمساز ناحیه اول $(y = x)$ باید جای x و y نقطه را عوض کنیم. مثلاً قرینه نقطه $A(3, -5)$ نسبت به نیمساز ناحیه اول و سوم می‌شود $A'(-5, 3)$.

۵ برای به دست آوردن معادله و ترم مشترک دو دایره، کارهای زیر را انجام می‌دهیم:

(الف) چک می‌کنیم که ضرایب x^2 و y^2 در معادله گسترده‌شان ۱ باشد (اگر نبود این کار را انجام می‌دهیم).

(ب) طرفین معادله‌های گسترده را از هم کم می‌کنیم. برای به دست آوردن طول نقطه‌های برخورد دو دایره: (الف) معادله و ترم مشترک دو دایره را پیدا می‌کنیم.

(ب) معادله و ترم مشترک را به صورت $y = x + c$ می‌نویسیم و در معادله یکی از دایره‌ها جای‌گذاری می‌کنیم. جواب‌های معادله به‌دست‌آمده، طول نقاط برخورد دو دایره هستند. با جای‌گذاری این جواب‌ها در معادله و ترم مشترک، عرض نقاط تقاطع هم به دست می‌آیند.



به گفته سؤال خط $y - x = 0$ بر دایره کوچک‌تر مماس است؛ این یعنی فاصله مرکز دایره کوچک‌تر $O(-3, 1)$ از خط $y - x = 0$ برابر شعاع دایره است:

$$R = \frac{|1 - (-3)|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{4}{\sqrt{2}} = \frac{4\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$$

از طرفی سؤال می‌گوید شعاع دایره بزرگ‌تر، دو برابر شعاع دایره کوچک‌تر است؛ پس اگر شعاع دایره بزرگ‌تر را R' در نظر بگیریم، می‌توانیم بنویسیم: $R' = 2R = 2(2\sqrt{2}) = 4\sqrt{2}$

(محاسبه ۲) در گام قبلی دیدیم مرکز دایره $x^2 + y^2 + 6x - 2y - 2 = 0$ ، نقطه $O(-3, 1)$ و شعاعش $2\sqrt{2}$ شد؛ پس می‌توانیم به کمک روابط مورد (۱) درس‌نامه r را حساب کنیم، اما قبلاً عدد ثابت معادله، یعنی r را به سمت چپ می‌بریم تا بتوانیم از آن روابط استفاده کنیم. با این کار معادله دایره به صورت $x^2 + y^2 + 6x - 2y - r = 0$ درمی‌آید:

$$R = \sqrt{(-3)^2 + (1)^2 + (-r)} \Rightarrow 2\sqrt{2} = \sqrt{10 - r} \Rightarrow 8 = 10 - r \Rightarrow r = -2$$

پس معادله دایره کوچک‌تر به این صورت می‌شود:

(نوشتن معادله دایره بزرگ‌تر) برای نوشتن معادله دایره بزرگ‌تر، شعاع و مرکزش را لازم داریم. شعاعش را که به دست آوردیم $4\sqrt{2}$ ، پس فقط می‌ماند مرکزش. خوب به خط $y - x = 0$ و نقطه‌های O و O' در شکل گام (۱) نگاه کنید. به گفته سؤال، خط $y - x = 0$ که همان نیمساز ناحیه اول و سوم است، عمودمنصف OO' است؛ این یعنی اگر نقطه O را نسبت به نیمساز ناحیه اول قرینه کنیم به مختصات نقطه O' می‌رسیم:

$$O(-3, 1) \xrightarrow{\text{قرینه نسبت به } y=x} O'(1, -3)$$

حالا که مرکز و شعاع دایره بزرگ‌تر را داریم، می‌توانیم معادله‌اش را به کمک مورد (۳) درس‌نامه بنویسیم:

$$(x - 1)^2 + (y + 3)^2 = (4\sqrt{2})^2 \Rightarrow (x^2 - 2x + 1) + (y^2 + 6y + 9) = 32 \Rightarrow x^2 + y^2 - 2x + 6y - 22 = 0$$

ذره گسیل شده، X است؛ یعنی این ذره پوزیترون (β^+) است.

۷ تله اگر ۱ را انتخاب کردید، سخت در اشتباه هستید، چون نماد پروتون، p است.

۴۲- گزینه ۳

شفاف سازی گلوله در حداکثر ارتفاع خود از سطح زمین متوقف می‌شود؛ بنابراین انرژی جنبشی آن در این ارتفاع صفر است.

درس نامه ۱ انرژی پتانسیل گرانشی؛ اگر جسمی با جرم m در ارتفاع h نسبت به

سطح زمین قرار بگیرد، آن‌گاه انرژی پتانسیل گرانشی آن از رابطه زیر به دست می‌آید (مبدأ انرژی پتانسیل گرانشی را سطح زمین فرض کردیم):

ارتفاع (m) ← جرم (kg)
 $U = mgh$
 شتاب گرانش (m/s^2)

۲ انرژی جنبشی جسمی که با تندی v در حال حرکت است:

جرم (kg) ←
 $K = \frac{1}{2}mv^2$

۳ انرژی مکانیکی: به مجموع انرژی جنبشی و انرژی پتانسیل جسم، انرژی مکانیکی می‌گوییم.

انرژی پتانسیل (J) ←
 $E = K + U$

انرژی جنبشی (J) ←

اگر از نیروهای اتلافی (مثل نیروی مقاومت هوا) صرف نظر کنیم، انرژی مکانیکی جسم

پایسته می‌ماند: $E_1 = E_2 \Rightarrow K_1 + U_1 = K_2 + U_2$

مقاومت هوا ناچیز است؛ پس انرژی مکانیکی گلوله پایسته است؛ بنابراین می‌توانیم

بنویسیم (در تمام مراحل مبدأ انرژی پتانسیل گرانشی را سطح زمین در نظر گرفتیم):

$E_1 = E_2 \Rightarrow K_1 + U_1 = K_2 + U_2$

$\frac{U_1=0}{K_2=K_1-\frac{1}{2}mv_1^2=0} \rightarrow K_1 = \frac{1}{2}mv_1^2 = mgh_1 \Rightarrow v_1^2 = 2gh_1$

حداکثر ارتفاع گلوله از سطح زمین هنگامی است که تندی آن در آن ارتفاع صفر

شود؛ در نتیجه انرژی جنبشی آن نیز در این ارتفاع صفر است ($K_2 = 0$)؛ بنابراین با استفاده از

پایستگی انرژی مکانیکی می‌توانیم بنویسیم: $E_1 = E_2 \Rightarrow K_1 + U_1 = K_2 + U_2$

$\frac{U_1=0}{K_2=0} \rightarrow K_1 = U_2 \Rightarrow \frac{1}{2}mv_1^2 = mgh_2 \Rightarrow h_2 = \frac{v_1^2}{2g} = \frac{2gh_1}{2g} = h_1 = 140 \text{ m}$

بنابراین در این حالت $\Delta(\bar{G}) + q(\bar{G}) = 3 + 4 = 7$ می‌شود که در گزینه‌ها نیست.

بنابراین در این حالت $\Delta(\bar{G}) + q(\bar{G}) = 3 + 4 = 7$ می‌شود که در گزینه‌ها نیست.

بنابراین در این حالت $\Delta(\bar{G}) + q(\bar{G}) = 3 + 4 = 7$ می‌شود که در گزینه‌ها نیست.

بنابراین در این حالت $\Delta(\bar{G}) + q(\bar{G}) = 3 + 4 = 7$ می‌شود که در گزینه‌ها نیست.

بنابراین در این حالت $\Delta(\bar{G}) + q(\bar{G}) = 3 + 4 = 7$ می‌شود که در گزینه‌ها نیست.

بنابراین در این حالت $\Delta(\bar{G}) + q(\bar{G}) = 3 + 4 = 7$ می‌شود که در گزینه‌ها نیست.

بنابراین در این حالت $\Delta(\bar{G}) + q(\bar{G}) = 3 + 4 = 7$ می‌شود که در گزینه‌ها نیست.

بنابراین در این حالت $\Delta(\bar{G}) + q(\bar{G}) = 3 + 4 = 7$ می‌شود که در گزینه‌ها نیست.

بنابراین در این حالت $\Delta(\bar{G}) + q(\bar{G}) = 3 + 4 = 7$ می‌شود که در گزینه‌ها نیست.

بنابراین در این حالت $\Delta(\bar{G}) + q(\bar{G}) = 3 + 4 = 7$ می‌شود که در گزینه‌ها نیست.

بنابراین در این حالت $\Delta(\bar{G}) + q(\bar{G}) = 3 + 4 = 7$ می‌شود که در گزینه‌ها نیست.

بنابراین در این حالت $\Delta(\bar{G}) + q(\bar{G}) = 3 + 4 = 7$ می‌شود که در گزینه‌ها نیست.

بنابراین در این حالت $\Delta(\bar{G}) + q(\bar{G}) = 3 + 4 = 7$ می‌شود که در گزینه‌ها نیست.

بنابراین در این حالت $\Delta(\bar{G}) + q(\bar{G}) = 3 + 4 = 7$ می‌شود که در گزینه‌ها نیست.

بنابراین در این حالت $\Delta(\bar{G}) + q(\bar{G}) = 3 + 4 = 7$ می‌شود که در گزینه‌ها نیست.

بنابراین در این حالت $\Delta(\bar{G}) + q(\bar{G}) = 3 + 4 = 7$ می‌شود که در گزینه‌ها نیست.

بنابراین در این حالت $\Delta(\bar{G}) + q(\bar{G}) = 3 + 4 = 7$ می‌شود که در گزینه‌ها نیست.

بنابراین در این حالت $\Delta(\bar{G}) + q(\bar{G}) = 3 + 4 = 7$ می‌شود که در گزینه‌ها نیست.

بنابراین در این حالت $\Delta(\bar{G}) + q(\bar{G}) = 3 + 4 = 7$ می‌شود که در گزینه‌ها نیست.

بنابراین در این حالت $\Delta(\bar{G}) + q(\bar{G}) = 3 + 4 = 7$ می‌شود که در گزینه‌ها نیست.

بنابراین در این حالت $\Delta(\bar{G}) + q(\bar{G}) = 3 + 4 = 7$ می‌شود که در گزینه‌ها نیست.

بنابراین در این حالت $\Delta(\bar{G}) + q(\bar{G}) = 3 + 4 = 7$ می‌شود که در گزینه‌ها نیست.

بنابراین در این حالت $\Delta(\bar{G}) + q(\bar{G}) = 3 + 4 = 7$ می‌شود که در گزینه‌ها نیست.

بنابراین در این حالت $\Delta(\bar{G}) + q(\bar{G}) = 3 + 4 = 7$ می‌شود که در گزینه‌ها نیست.

بنابراین در این حالت $\Delta(\bar{G}) + q(\bar{G}) = 3 + 4 = 7$ می‌شود که در گزینه‌ها نیست.

۳۹- گزینه ۱

متأسفانه این سؤال غلط است، چون بی‌شمار زوج مرتب به فرم $(\Delta k + 1, \Delta k)$ و $(\Delta k + 2, \Delta k - 1)$ داریم که نه مجموع مؤلفه‌های اولشان مضرب ۵ است؛ نه مجموع مؤلفه‌های دومشان.

۴۰- گزینه ۴

درس نامه ۱ هر وقت درجه رأس‌های یک گراف را داشتید و اندازه گراف را

می‌خواستید، از رابطه مقابل استفاده کنید: تعداد یال‌ها $2 \times$ مجموع درجه رأس‌ها

۲ بزرگ‌ترین عدد در بین درجه رأس‌های گراف $\Delta(G) = G$

۳ فرض کنید G یک گراف از مرتبه p و a یک رأس آن باشد، در این صورت بین درجه رأس a در G و \bar{G} رابطه زیر برقرار است:

$p - 1 = \text{درجه رأس } a \text{ در } \bar{G} + \text{درجه رأس } a \text{ در } G$

۴ تعداد رأس‌های فرد هر گراف، همیشه عددی زوج است.

اول ۴۸ را تجزیه می‌کنیم: $48 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3$

۲، ۲، ۲، ۲، ۳ نمی‌تواند درجه رأس باشد، چون تعداد رأس‌های فردش، عددی زوج نیست (به دونه فرد داره)، پس حق داریم یه دونه ۱ به اعداد بالا اضافه کنیم؛ این جوری هم

تعداد یک‌ها حداقل است هم تعداد رأس‌های فرد، زوج: ۳، ۲، ۲، ۲، ۱: درجه رأس‌ها

با کمی دقت به درجه‌های بالا متوجه می‌شویم که می‌توانیم دوتا از ۲ها را در هم ضرب کنیم و به جایشان ۴ را قرار بدهیم تا درجه رأس‌ها به صورت ۴، ۳، ۲، ۲، ۱ دربیاید؛ این دنباله هم مشکلی ندارد.

۱ اول ۴۸ را تجزیه می‌کنیم: $48 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3$

۲، ۲، ۲، ۲، ۳ نمی‌تواند درجه رأس باشد، چون تعداد رأس‌های فردش، عددی زوج نیست (به دونه فرد داره)، پس حق داریم یه دونه ۱ به اعداد بالا اضافه کنیم؛ این جوری هم

تعداد یک‌ها حداقل است هم تعداد رأس‌های فرد، زوج: ۳، ۲، ۲، ۲، ۱: درجه رأس‌ها

با کمی دقت به درجه‌های بالا متوجه می‌شویم که می‌توانیم دوتا از ۲ها را در هم ضرب کنیم و به جایشان ۴ را قرار بدهیم تا درجه رأس‌ها به صورت ۴، ۳، ۲، ۲، ۱ دربیاید؛ این دنباله هم مشکلی ندارد.

بنابراین در این حالت $\Delta(\bar{G}) + q(\bar{G}) = 3 + 4 = 7$ می‌شود که در گزینه‌ها نیست.

بنابراین در این حالت $\Delta(\bar{G}) + q(\bar{G}) = 3 + 4 = 7$ می‌شود که در گزینه‌ها نیست.

بنابراین در این حالت $\Delta(\bar{G}) + q(\bar{G}) = 3 + 4 = 7$ می‌شود که در گزینه‌ها نیست.

بنابراین در این حالت $\Delta(\bar{G}) + q(\bar{G}) = 3 + 4 = 7$ می‌شود که در گزینه‌ها نیست.

بنابراین در این حالت $\Delta(\bar{G}) + q(\bar{G}) = 3 + 4 = 7$ می‌شود که در گزینه‌ها نیست.

بنابراین در این حالت $\Delta(\bar{G}) + q(\bar{G}) = 3 + 4 = 7$ می‌شود که در گزینه‌ها نیست.

بنابراین در این حالت $\Delta(\bar{G}) + q(\bar{G}) = 3 + 4 = 7$ می‌شود که در گزینه‌ها نیست.

بنابراین در این حالت $\Delta(\bar{G}) + q(\bar{G}) = 3 + 4 = 7$ می‌شود که در گزینه‌ها نیست.

بنابراین در این حالت $\Delta(\bar{G}) + q(\bar{G}) = 3 + 4 = 7$ می‌شود که در گزینه‌ها نیست.

بنابراین در این حالت $\Delta(\bar{G}) + q(\bar{G}) = 3 + 4 = 7$ می‌شود که در گزینه‌ها نیست.

بنابراین در این حالت $\Delta(\bar{G}) + q(\bar{G}) = 3 + 4 = 7$ می‌شود که در گزینه‌ها نیست.

بنابراین در این حالت $\Delta(\bar{G}) + q(\bar{G}) = 3 + 4 = 7$ می‌شود که در گزینه‌ها نیست.

بنابراین در این حالت $\Delta(\bar{G}) + q(\bar{G}) = 3 + 4 = 7$ می‌شود که در گزینه‌ها نیست.

بنابراین در این حالت $\Delta(\bar{G}) + q(\bar{G}) = 3 + 4 = 7$ می‌شود که در گزینه‌ها نیست.

بنابراین در این حالت $\Delta(\bar{G}) + q(\bar{G}) = 3 + 4 = 7$ می‌شود که در گزینه‌ها نیست.

بنابراین در این حالت $\Delta(\bar{G}) + q(\bar{G}) = 3 + 4 = 7$ می‌شود که در گزینه‌ها نیست.

بنابراین در این حالت $\Delta(\bar{G}) + q(\bar{G}) = 3 + 4 = 7$ می‌شود که در گزینه‌ها نیست.

بنابراین در این حالت $\Delta(\bar{G}) + q(\bar{G}) = 3 + 4 = 7$ می‌شود که در گزینه‌ها نیست.

بنابراین در این حالت $\Delta(\bar{G}) + q(\bar{G}) = 3 + 4 = 7$ می‌شود که در گزینه‌ها نیست.

بنابراین در این حالت $\Delta(\bar{G}) + q(\bar{G}) = 3 + 4 = 7$ می‌شود که در گزینه‌ها نیست.

بنابراین در این حالت $\Delta(\bar{G}) + q(\bar{G}) = 3 + 4 = 7$ می‌شود که در گزینه‌ها نیست.

بنابراین در این حالت $\Delta(\bar{G}) + q(\bar{G}) = 3 + 4 = 7$ می‌شود که در گزینه‌ها نیست.

بنابراین در این حالت $\Delta(\bar{G}) + q(\bar{G}) = 3 + 4 = 7$ می‌شود که در گزینه‌ها نیست.

بنابراین در این حالت $\Delta(\bar{G}) + q(\bar{G}) = 3 + 4 = 7$ می‌شود که در گزینه‌ها نیست.

بنابراین در این حالت $\Delta(\bar{G}) + q(\bar{G}) = 3 + 4 = 7$ می‌شود که در گزینه‌ها نیست.

بنابراین در این حالت $\Delta(\bar{G}) + q(\bar{G}) = 3 + 4 = 7$ می‌شود که در گزینه‌ها نیست.

بنابراین در این حالت $\Delta(\bar{G}) + q(\bar{G}) = 3 + 4 = 7$ می‌شود که در گزینه‌ها نیست.

بنابراین در این حالت $\Delta(\bar{G}) + q(\bar{G}) = 3 + 4 = 7$ می‌شود که در گزینه‌ها نیست.

بنابراین در این حالت $\Delta(\bar{G}) + q(\bar{G}) = 3 + 4 = 7$ می‌شود که در گزینه‌ها نیست.

بنابراین در این حالت $\Delta(\bar{G}) + q(\bar{G}) = 3 + 4 = 7$ می‌شود که در گزینه‌ها نیست.

بنابراین در این حالت $\Delta(\bar{G}) + q(\bar{G}) = 3 + 4 = 7$ می‌شود که در گزینه‌ها نیست.

بنابراین در این حالت $\Delta(\bar{G}) + q(\bar{G}) = 3 + 4 = 7$ می‌شود که در گزینه‌ها نیست.

فیزیک

۴۱- گزینه ۲

استراتژی در مسائل واپاشی، عدد جرمی قبل از فرایند را با مجموع عددهای جرمی

پس از فرایند و هم‌چنین عدد اتمی قبل از فرایند را با مجموع عددهای اتمی پس از فرایند برابر قرار بدهید و مجهول را پیدا کنید.

تعداد نوکلئون‌ها در طی فرایند واپاشی هسته‌ای پایسته است؛ بنابراین می‌توانیم بنویسیم:

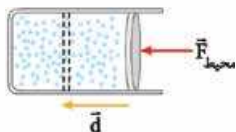
${}_{11}^{11}\text{C} \rightarrow {}_{5}^{11}\text{B} + {}_{6}^{11}\text{X}$

عدد جرمی: $11 = 11 + A \Rightarrow A = 0$

$\Rightarrow {}_{11}^{11}\text{X}$

عدد اتمی: $6 = 5 + Z \Rightarrow Z = 1$

شکل روبه‌رو، یک فرایند تراکمی را نشان می‌دهد. با توجه به شکل روبه‌رو، کاری که محیط بر روی گاز در فرایندهای تراکمی انجام می‌دهد، مثبت است.



$$W_{\text{محیط بر روی گاز}} = F_{\text{محیط}} d \cos \theta \xrightarrow{\theta=0^\circ} W_{\text{محیط بر روی گاز}} > 0$$

۳ و ۴ پُر!

حالا باید تغییر انرژی درونی گاز را در فرایندهای تراکم هم‌فشار و تراکم بی‌دررو بررسی کنیم. **تراکم بی‌دررو**: در فرایند بی‌دررو، گرمایی بین گاز و محیط مبادله نمی‌شود ($Q=0$)؛ بنابراین طبق قانون اول ترمودینامیک، انرژی درونی گاز در فرایند تراکم بی‌دررو افزایش می‌یابد (در واقع گاز در این فرایند از محیط انرژی می‌گیرد، اما نه به صورت گرما، بلکه از طریق کاری که محیط بر روی آن انجام می‌دهد).

$$\Delta U = Q + W \xrightarrow[Q=0]{W>0} \Delta U > 0$$

۲ پُر!

گزینه درست معلوم شد! اما تنبلی نکن یا ببین چرا درسته!

تراکم هم‌فشار: فشار گاز در طی فرایند هم‌فشار ثابت است و گرما و کار هر دو مبادله می‌شوند. گاز در فرایند تراکم هم‌فشار، مقداری انرژی از طریق کاری که محیط بر روی آن انجام می‌دهد، دریافت می‌کند و مقداری انرژی از طریق گرما از دست می‌دهد. برای این که فشار گاز ثابت بماند، باید گرمایی که گاز از دست می‌دهد، بیشتر از کاری که محیط بر روی آن انجام می‌دهد باشد. بنابراین طبق قانون اول ترمودینامیک، انرژی درونی گاز در فرایند تراکم هم‌فشار کاهش می‌یابد.

$$\Delta U = Q + W \xrightarrow[Q<0]{|Q|>|W|, W>0} \Delta U < 0$$

۴۵ - گزینه ۲

شفاف‌سازی متحرک B، ۲ s دیرتر از متحرک A به حرکت درآمده است، پس اگر مدت زمان t برای متحرک A بگذرد، برای متحرک B مدت زمان t-۲ سپری می‌شود.

درس‌نامه معادله مکان - زمان در حرکت با شتاب ثابت بر روی خط راست:

$$x = \frac{1}{2} a t^2 + v_0 t + x_0$$

\uparrow مکان اولیه (m) \uparrow شتاب (m/s^2)
 \leftarrow زمان (s) \rightarrow سرعت اولیه (m/s)

متحرک‌های A و B از یک نقطه ($x_A = x_B$) با شتاب ثابت شروع به حرکت کرده‌اند، اما متحرک B، ۲ s دیرتر از متحرک A! پس وقتی که ۶ s از حرکت متحرک A می‌گذرد، متحرک B، ۴ s در حرکت بوده است. طبق گفته سؤال، ۶ s پس از حرکت متحرک A، دو متحرک به هم می‌رسند؛ پس مکان دو متحرک در این لحظه یکسان است و با استفاده از معادله مکان - زمان در حرکت با شتاب ثابت این دو متحرک می‌توانیم بنویسیم:

$$\begin{cases} x_A = \frac{1}{2} a_A t_A^2 + v_{0A} t_A + x_{0A} \xrightarrow{v_{0A}=0 \text{ m/s}} x_A = \frac{1}{2} a_A t_A^2 + x_{0A} \\ x_B = \frac{1}{2} a_B t_B^2 + v_{0B} t_B + x_{0B} \xrightarrow{v_{0B}=0 \text{ m/s}} x_B = \frac{1}{2} a_B t_B^2 + x_{0B} \end{cases}$$

$$\frac{x_A = x_B}{x_{0A} = x_{0B}} \rightarrow \cancel{\frac{1}{2}} a_A t_A^2 + \cancel{x_{0A}} = \cancel{\frac{1}{2}} a_B t_B^2 + \cancel{x_{0B}}$$

$$\frac{a_A = a, a_B = a + \Delta \text{ (m/s}^2\text{)}}{t_A = 6 \text{ s}, t_B = 4 \text{ s}} \rightarrow a \text{ (} \cancel{6} \text{)}^2 = (a + \Delta) \text{ (} \cancel{4} \text{)}^2$$

$$\Rightarrow 9a = 4a + \Delta \Rightarrow \Delta a = \Delta \Rightarrow a = \frac{\Delta}{5} \text{ m/s}^2 = \frac{0}{5} \text{ m/s}^2$$

سؤال از ما فاصله دو متحرک را در لحظه‌ای که ۱۰ s از حرکت متحرک A می‌گذرد، می‌خواهد. با توجه به این که متحرک B، ۲ s دیرتر از متحرک A به حرکت درآمده است، پس برای متحرک B تا این لحظه، ۸ s سپری شده است. مکان هر یک از متحرک‌ها در این لحظه را محاسبه می‌کنیم:

$$x_A = \frac{1}{2} a_A t_A^2 + v_{0A} t_A + x_{0A}$$

$$\frac{a_A = a = \frac{0}{5} \text{ m/s}^2, v_{0A} = 0 \text{ m/s}}{t_A = 10 \text{ s}} \rightarrow x_A = \frac{1}{2} \left(\frac{0}{5} \right) (10)^2 + x_{0A} = 20 + x_{0A} \text{ (m)}$$

$$x_B = \frac{1}{2} a_B t_B^2 + v_{0B} t_B + x_{0B}$$

$$\frac{a_B = a + \Delta = \frac{0}{5} + \frac{0}{5} = \frac{0}{5} \text{ m/s}^2}{v_{0B} = 0 \text{ m/s}, t_B = 8 \text{ s}} \rightarrow x_B = \frac{1}{2} \left(\frac{0}{5} \right) (8)^2 + x_{0B} = 28/5 + x_{0B} \text{ (m)}$$

حالا فاصله دو متحرک یعنی $x_B - x_A$ را به دست می‌آوریم:

$$x_B - x_A = 28/5 + x_{0B} - (20 + x_{0A})$$

فاصله دو متحرک A و B: $x_{0B} = x_{0A}$

$$x_B - x_A = 28/5 + x_{0B} - 20 - x_{0A} = 8/5 \text{ m}$$

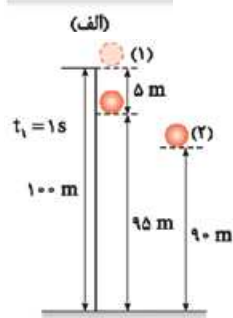
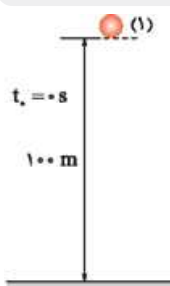
۴۶ - گزینه ۴

درس‌نامه جابه‌جایی در ثانیه m در سقوط آزاد بدون سرعت اولیه (جهت مثبت Y را رو به پایین فرض کردیم):

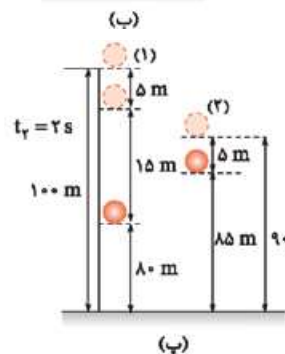
$$\Delta y = (n - 0) \Delta g$$

در رابطه بالا، اگر $g = 10 \text{ m/s}^2$ باشد، متحرک در ثانیه‌های اول، دوم، سوم و ... به ترتیب به اندازه ۵ m، ۱۵ m، ۲۵ m و ... جابه‌جا می‌شود.

گلوله (۱) در لحظه $t_0 = 0 \text{ s}$ از فاصله ۱۰۰ متری زمین رها می‌شود (شکل الف).



یک ثانیه بعد ($t_1 = 1 \text{ s}$)، گلوله (۲) از فاصله ۹۰ متری زمین (10 m پایین‌تر از مکان اولیه گلوله اول) رها می‌شود. در این یک ثانیه گلوله اول به اندازه ۵ m پایین آمده و به فاصله ۹۵ متری زمین رسیده است (شکل ب).



یک ثانیه بعد ($t_2 = 2 \text{ s}$)، گلوله اول به اندازه ۱۵ m و گلوله دوم به اندازه ۵ m به سمت پایین می‌آیند و به ترتیب در فاصله ۸۰ متری و ۸۵ متری زمین قرار می‌گیرند (شکل پ).

همان‌طور که در شکل‌های (ب) و (پ) می‌بینید، از لحظه رها شدن گلوله (۲) (شکل ب) تا لحظه‌ای که گلوله (۱) به زمین می‌رسد، فاصله دو گلوله ابتدا کاهش می‌یابد، سپس افزایش می‌یابد.

۴۷ - گزینه ۲

درس‌نامه ۱ معادله سرعت - زمان در حرکت با شتاب ثابت بر روی خط راست:

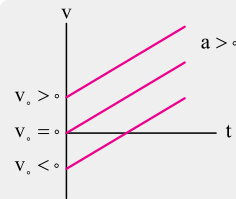
$$v = a t + v_0$$

\uparrow شتاب (m/s^2)
 \downarrow سرعت اولیه (m/s)

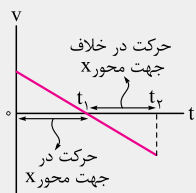
۲ معادله مکان - زمان در حرکت با سرعت ثابت بر روی خط راست:

$$x = v t + x_0$$

\uparrow سرعت (m/s)
 \downarrow مکان اولیه (m)



۲) نمودار سرعت - زمان متحرکی که با شتاب ثابت بر روی خط راست حرکت می‌کند، به صورت یک خط راست است.



۳) در نمودار سرعت - زمان
 - $v > 0$ متحرک در جهت محور X حرکت می‌کند.
 - $v < 0$ متحرک در خلاف جهت محور X حرکت می‌کند.

ابتدا اطلاعاتمان را راجع به دو متحرک A و B کامل می‌کنیم. نمودار سرعت - زمان دو متحرک A و B به صورت یک خط راست است؛ پس حرکت این دو متحرک از نوع حرکت با شتاب ثابت است. با توجه به نمودار سرعت - زمان آن‌ها، شتاب متحرک B را محاسبه می‌کنیم:

$$a = a_{av} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} \Rightarrow a_B = \frac{0 - (-16)}{8 - 0} = 2 \text{ m/s}^2$$

حالا که شتاب متحرک B را حساب کردیم، معادله سرعت - زمان آن را نیز می‌نویسیم:

$$v_B = a_B t + v_{0,B} \xrightarrow{a_B = 2 \text{ m/s}^2, v_{0,B} = -16 \text{ m/s}} v_B = 2t - 16$$

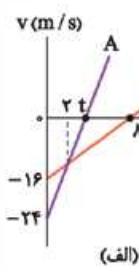
معادله سرعت - زمان متحرک A را نیز می‌نویسیم:

$$v_A = a_A t + v_{0,A} \xrightarrow{v_{0,A} = -24 \text{ m/s}} v_A = a_A t - 24$$

نمودار سرعت - زمان این دو متحرک را ببینید. سرعت دو متحرک A و B در لحظه $t = 2 \text{ s}$ با هم برابر شده است ($v_A = v_B$). بنابراین با استفاده از معادله سرعت - زمان آن‌ها می‌توانیم بنویسیم:

$$v_A = v_B \xrightarrow{v_A = a_A t - 24, v_B = 2t - 16} a_A t - 24 = 2t - 16$$

$$\xrightarrow{t=2 \text{ s}} 2a_A - 24 = 2(2) - 16 \Rightarrow 2a_A = 12 \Rightarrow a_A = 6 \text{ m/s}^2$$



شتاب متحرک A را هم پیدا کردیم. حالا به سراغ سؤال می‌رویم! سؤال راجع به بازه زمانی است که دو متحرک A و B در خلاف جهت هم حرکت می‌کنند؛ پس باید این بازه زمانی را پیدا کنیم. با توجه به شکل (الف)، سرعت متحرک A در لحظه t صفر می‌شود و متحرک A در این لحظه تغییر جهت داده و در جهت محور X به حرکت خود ادامه می‌دهد. با استفاده از معادله سرعت - زمان متحرک A، لحظه t را به دست می‌آوریم:

$$v_A = 6t - 24 \xrightarrow{v_A = 0 \text{ m/s}} 0 = 6t - 24 \Rightarrow t = 4 \text{ s}$$

همان‌طور که در نمودار سرعت - زمان دو متحرک A و B می‌بینید، در بازه زمانی $t = 4 \text{ s}$ تا $t' = 8 \text{ s}$ متحرک A در جهت محور X و متحرک B در خلاف جهت محور X حرکت می‌کند، پس در این بازه زمانی این دو متحرک در خلاف جهت هم حرکت می‌کنند. حالا برای این‌که ببینیم فاصله این دو متحرک در این بازه زمانی چگونه تغییر می‌کند، ابتدا مکان هر یک از آن‌ها را در لحظه $t = 4 \text{ s}$ با استفاده از معادله مکان - زمان آن‌ها به دست می‌آوریم:

$$x_A = \frac{1}{2} a_A t^2 + v_{0,A} t + x_{0,A}$$

$$\xrightarrow{a_A = 6 \text{ m/s}^2, x_{0,A} = 0 \text{ m}, v_{0,A} = -24 \text{ m/s}} x_A = \frac{1}{2} (6) t^2 - 24t + 0 = 3t^2 - 24t$$

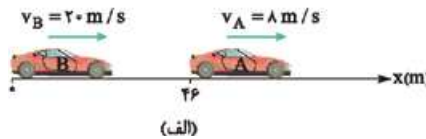
$$\xrightarrow{t=4 \text{ s}} x_A = 3(4)^2 - 24(4) = 48 - 96 = -48 \text{ m}$$

$$x_B = \frac{1}{2} a_B t^2 + v_{0,B} t + x_{0,B}$$

$$\xrightarrow{a_B = 2 \text{ m/s}^2, x_{0,B} = 0 \text{ m}, v_{0,B} = -16 \text{ m/s}} x_B = \frac{1}{2} (2) t^2 - 16t + 0 = t^2 - 16t$$

$$\xrightarrow{t=4 \text{ s}} x_B = (4)^2 - 16(4) = 16 - 64 = -48 \text{ m}$$

در ابتدا هر دو خودرو با سرعت ثابت در حال حرکت هستند. وقتی فاصله بین دو خودرو به 46 m می‌رسد، نوع حرکت خودروی A تغییر می‌کند و با شتاب ثابت به حرکت خود ادامه می‌دهد و خودروی B یک ثانیه پس از خودروی A نوع حرکتش تغییر می‌کند و با شتاب ثابت به حرکت خود ادامه می‌دهد؛ بنابراین می‌توانیم نتیجه بگیریم که در این یک ثانیه، خودروی A با شتاب ثابت و خودروی B با سرعت ثابت در حال حرکت‌اند.



با توجه به شکل (الف)، مکان هر یک از خودروها در لحظه $t = 1 \text{ s}$ را با استفاده از معادله مکان - زمان آن‌ها به دست می‌آوریم:

$$x_A = \frac{1}{2} a_A t^2 + v_{0,A} t + x_{0,A}$$

$$\xrightarrow{a_A = -2 \text{ m/s}^2, v_{0,A} = 8 \text{ m/s}, x_{0,A} = 46 \text{ m}} x_A = \frac{1}{2} (-2) t^2 + 8t + 46 = -t^2 + 8t + 46$$

$$\xrightarrow{t=1 \text{ s}} x_A = -(1)^2 + 8(1) + 46 = 53 \text{ m}$$

$$x_B = v_B t + x_{0,B} \xrightarrow{v_B = 20 \text{ m/s}, x_{0,B} = 0 \text{ m}} x_B = 20 \cdot t \xrightarrow{t=1 \text{ s}} x_B = 20(1) = 20 \text{ m}$$

از این لحظه ($t = 1 \text{ s}$) به بعد،

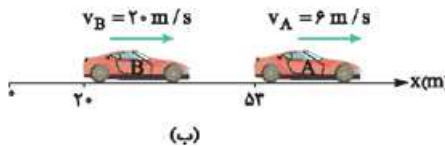
خودروی B با شتاب ثابت به

حرکت خود ادامه می‌دهد. پس

با توجه به شکل (ب)، معادله

مکان - زمان خودروی B پس

از لحظه $t = 1 \text{ s}$ را می‌نویسیم:



$$x'_B = \frac{1}{2} a_B t'^2 + v_{0,B} t' + x'_{0,B}$$

$$\xrightarrow{a_B = -2 \text{ m/s}^2, v_{0,B} = 20 \text{ m/s}, x'_{0,B} = 20 \text{ m}} x'_B = \frac{1}{2} (-2) t'^2 + 20t' + 20$$

$$= -t'^2 + 20t' + 20$$

برای این‌که معادله مکان - زمان خودروی A پس از لحظه $t = 1 \text{ s}$ را بنویسیم، به سرعت آن در این لحظه نیاز داریم (پهن سرعت اولیه‌اش می‌شه). با استفاده از معادله سرعت - زمان، سرعت خودروی A در لحظه $t = 1 \text{ s}$ را به دست می‌آوریم:

$$v_A = a_A t + v_{0,A} \xrightarrow{a_A = -2 \text{ m/s}^2, v_{0,A} = 8 \text{ m/s}, t=1 \text{ s}} v_A = -2(1) + 8 = 6 \text{ m/s}$$

حالا با توجه به شکل (ب)، می‌توانیم معادله مکان - زمان خودروی A پس از لحظه $t = 1 \text{ s}$ را بنویسیم:

$$x'_A = \frac{1}{2} a_A t'^2 + v'_{0,A} t' + x'_{0,A}$$

$$\xrightarrow{a_A = -2 \text{ m/s}^2, v'_{0,A} = 6 \text{ m/s}, x'_{0,A} = 53 \text{ m}} x'_A = \frac{1}{2} (-2) t'^2 + 6t' + 53 = -t'^2 + 6t' + 53$$

وقتی دو خودروی A و B به هم می‌رسند، مکان آن‌ها یکسان است ($x'_A = x'_B$)؛ پس

معادله مکان - زمان دو خودرو را برابر با یکدیگر قرار می‌دهیم تا لحظه به هم رسیدن را به دست بیاوریم:

$$x'_A = x'_B \Rightarrow -t'^2 + 6t' + 53 = -t'^2 + 20t' + 20$$

$$\Rightarrow t'^2 - 14t' + 33 = 0 \Rightarrow \begin{cases} t' = 11 \text{ s} & \times \\ t' = 3 \text{ s} & \checkmark \end{cases}$$

دو خودروی A و B قبل از لحظه $t' = 11 \text{ s}$ متوقف می‌شوند، به خاطر همین $t' = 11 \text{ s}$ غیر قابل قبول است. در آخر خواسته سؤال یعنی سرعت خودروی B در لحظه $t' = 3 \text{ s}$ را محاسبه می‌کنیم:

$$v_B = a_B t' + v_{0,B} \xrightarrow{a_B = -2 \text{ m/s}^2, t'=3 \text{ s}, v_{0,B} = 20 \text{ m/s}} v_B = -4(3) + 20 = 8 \text{ m/s}$$

۴۸ - گزینه ۳

۱) درس‌نامه اگر سرعت متحرکی در لحظه t_1 برابر v_1 و در لحظه t_2 برابر v_2 باشد، آن‌گاه شتاب متوسط آن از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$a_{av} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1}$$

↑
تغییرات سرعت (m/s)
↓
مدت‌زمان (s)

گزینه ۳ - ۵۱
درس نامه ۱ نیروی اصطکاک جنبشی؛ ضریب اصطکاک جنبشی بین جسم و سطح

$$f_k = \mu_k F_N$$

نیروی عمودی سطح (N)

۲ اندازه نیرویی که سطح به جسم وارد می‌کند (R)، برابر با برآیند دو نیروی عمودی سطح (F_N) و نیروی اصطکاک (f) است.

$$R = \sqrt{F_N^2 + f^2}$$

 در رابطه بالا، f می‌تواند f_s ، $f_{s,max}$ یا f_k باشد.

$$F_{net} = ma$$

جرم (kg) شتاب (m/s^2)
نیروی خالص (N)

۳ قانون دوم نیوتون. وقتی جسم حرکت می‌کند، نیروی اصطکاک جنبشی بر آن وارد می‌شود. در این حالت با استفاده از قانون دوم نیوتون می‌توانیم شتاب جسم در حین حرکت را به دست بیاوریم:

$$F_{net} = ma \Rightarrow F - f_k = ma$$

$$f_k = \mu_k F_N = \mu_k mg \Rightarrow F - \mu_k mg = ma$$

$$\frac{m = 5 \text{ kg}, g = 10 \text{ m/s}^2}{F = 26 \text{ N}, \mu_k = 0/4} \rightarrow 26 - 0/4 \times 5 \times 10 = 5a$$

$$\Rightarrow 6 = 5a \Rightarrow a = \frac{6}{5} = 1/2 \text{ m/s}^2$$

۴ در حین حرکت، سطح به جسم نیروی عمودی سطح (F_N) و نیروی اصطکاک جنبشی (f_k) را وارد می‌کند؛ بنابراین نیرویی که سطح به جسم وارد می‌کند، برآیند این دو نیرو است:

$$R = \sqrt{F_N^2 + f_k^2} \xrightarrow{F_N = mg = 50 \text{ N}, f_k = \mu_k F_N = \frac{4}{10} \times 50 = 20 \text{ N}} R = \sqrt{50^2 + 20^2}$$

$$= \sqrt{2900} = 10\sqrt{29} \text{ N}$$

۵ تله اگر ضریب اصطکاک جنبشی بین جسم و سطح را ۵/۰ در نظر بگیرید، به گزینه نادرست **۲** می‌رسید.

گزینه ۲ - ۵۲
درس نامه نیروی مرکزگرا در حرکت دایره‌ای یکنواخت. $F_C = \frac{mv^2}{r}$

در حرکت دایره‌ای یکنواخت خودرو بر روی سطح افقی، نیروی اصطکاک ایستایی، نیروی مرکزگرا را تأمین می‌کند. با جای‌گذاری داده‌ها در رابطه زیر، اندازه این نیرو را به دست می‌آوریم.

$$F_C = \frac{mv^2}{r} \xrightarrow{m = 2 \times 10^3 \text{ kg}, r = 20 \text{ m}, v = 18 \times \frac{10}{36} = 5 \text{ m/s}} F_C = \frac{2 \times 10^3 \times 5^2}{20} = 2500 \text{ N}$$

گزینه ۳ - ۵۳
شفاف‌سازی در طول تار ۳ شکم تشکیل شده، یعنی شماره هماهنگ ۳ است.

درس نامه ۱ برای محاسبه بسامد تشدید هماهنگ f_n با استفاده از بسامد تشدید اصلی (f_1) در تار مرتعش دو انتها بسته، از رابطه زیر استفاده می‌کنیم: $f_n = nf_1$

تعداد شکم در طول تار مرتعش دو انتها بسته برابر با شماره هماهنگ (n) است.

۲ بسامد تشدید هماهنگ f_n در تار مرتعش دو انتها بسته،

$$f_n = \frac{nv}{2L}$$

تندی انتشار (m/s) شماره هماهنگ
طول تار (m)

 در شکل (ب)، موقعیت این دو متحرک در لحظه $t = 4 \text{ s}$ را بر روی محور X نشان دادیم. همان‌طور که می‌بینید، متحرک B در مکان -48 m و در حال حرکت در خلاف جهت محور X و متحرک A در مکان -48 m و در جهت داده و در جهت محور X شروع به حرکت می‌کند. حالا مکان دو متحرک A و B را در لحظه $t' = 8 \text{ s}$ به دست می‌آوریم:

$$x_A = 3t^2 - 24t \xrightarrow{t'=8s} x'_A = 3(8)^2 - 24(8) = 192 - 192 = 0 \text{ m}$$

$$x_B = t^2 - 16t \xrightarrow{t'=8s} x'_B = (8)^2 - 16(8) = 64 - 128 = -64 \text{ m}$$

 در شکل (پ) موقعیت این دو متحرک در لحظه $t' = 8 \text{ s}$ را بر روی محور X نشان دادیم. همان‌طور که می‌بینید، در بازه زمانی ۴ s تا ۸ s متحرک A از مکان -48 m به مکان 0 m و متحرک B از مکان -48 m به مکان -64 m جابه‌جا شده‌اند.

 با توجه به شکل (پ)، متحرک A، 48 m در جهت محور X و متحرک B، 16 m در خلاف جهت محور X در این بازه زمانی جابه‌جا شده‌اند. پس در مجموع 64 m ($48 + 16$) از هم دور شده‌اند.

مشاوره سوالات حرکت بر خط راست این آزمون از دو متحرک تشکیل شده است. معمولاً این جور سؤال‌ها وقت‌گیر هستند، پس اگر دیدید وقتتان را می‌گیرد، در انتهای آزمون به آن پاسخ دهید و وقتتان را صرف سوالات دیگر کنید.

گزینه ۲ - ۴۹
درس نامه در جدول زیر، چهار کمیت مربوط به حرکت ماهواره به دور زمین بررسی شده است.

کمیت	رابطه	تناسب
وزن	$W = \frac{GM_e m}{r^2}$	$W \propto \frac{1}{r^2}$
شتاب	$a = \frac{GM_e}{r^2}$	$a \propto \frac{1}{r^2}$
تندی	$v = \sqrt{\frac{GM_e}{r}}$	$v \propto \frac{1}{\sqrt{r}}$
دوره گردش	$T = 2\pi \sqrt{\frac{r^3}{GM_e}}$	$T \propto \sqrt{r^3}$

 در جدول بالا، G ثابت گرانش عمومی، M_e جرم زمین، m جرم ماهواره و r فاصله تا مرکز زمین است.

بررسی سایر گزینه‌ها: ۱) تندی ماهواره در گردش به دور زمین، با جذر فاصله آن از مرکز زمین نسبت وارون دارد. ۲) شتاب حرکت ماهواره با مجذور فاصله آن از مرکز زمین نسبت وارون دارد. ۳) وزن یک ماهواره با مجذور فاصله آن از مرکز زمین رابطه عکس دارد.

گزینه ۱ - ۵۰
درس نامه نیروی خالص وارد بر جسم برابر با تغییر تکانه جسم تقسیم بر زمان تغییر آن است و از رابطه روبه‌رو به دست می‌آید:

$$\vec{F}_{net} = \frac{\Delta \vec{p}}{\Delta t}$$

۱ ابتدا تکانه متحرک در لحظه‌های $t_1 = 1 \text{ s}$ و $t_2 = 3 \text{ s}$ را به دست می‌آوریم:

$$\vec{p}_1 = (3(1) - 6)\vec{i} = -3\vec{i}$$

$$\vec{p}_2 = (3(3) - 6)\vec{i} = 3\vec{i}$$

 حالا با جای‌گذاری داده‌ها در رابطه زیر، نیروی خالص متوسط در بازه زمانی $t_1 = 1 \text{ s}$ تا $t_2 = 3 \text{ s}$ را به دست می‌آوریم:

$$\vec{F}_{net} = \frac{\Delta \vec{p}}{\Delta t} = \frac{\vec{p}_2 - \vec{p}_1}{t_2 - t_1} = \frac{3\vec{i} - (-3\vec{i})}{3 - 1} = \frac{6\vec{i}}{2} = 3\vec{i} \text{ (N)}$$

مشاوره قرار نیست از همه اطلاعات برای حل سؤال استفاده کنیم؛ مثلاً در حل این سؤال به جرم متحرک کاری نداشتیم و طراح اطلاعات اضافی داده است.

گزینه ۵۶

شفاف سازی با توجه به معادله مکان - زمان نوسانگر: $x = A \cos \Delta \cdot \pi \cdot t$

درس نامه ۱ فرم کلی معادله مکان - زمان نوسانگر هماهنگ ساده:

بسامد زاویه‌ای (rad/s) بسامد زاویه‌ای (rad/s)

$$x = A \cos \omega t \quad \text{و} \quad \omega = \frac{2\pi}{T}$$

دامنه (m) دوره تناوب (s)

۲ **تندی متوسط:** نسبت مسافت طی شده به زمان.
 $S_{av} = \frac{\ell}{\Delta t} \rightarrow$ مسافت (m) مدت زمان (s)

با توجه به معادله مکان - زمان نوسانگر، دوره تناوب نوسانگر را به دست می‌آوریم:

$$x = A \cos \Delta \cdot \pi \cdot t \rightarrow x = A \cos \omega t \rightarrow \omega = \Delta \cdot \pi \text{ rad/s}$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow \Delta \cdot \pi = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow T = 0.4 \text{ s}$$

بازه زمانی داده شده را بر حسب دوره تناوب به دست می‌آوریم:

$$\frac{\Delta t}{T} = \frac{t_2 - t_1}{T} \rightarrow \frac{t_2 - t_1 = 0.2 \text{ s}}{T = 0.4 \text{ s}} \rightarrow \frac{\Delta t}{T} = \frac{0.2}{0.4} = \frac{1}{2} \Rightarrow \Delta t = \frac{T}{2}$$

حالا مسافت طی شده در این بازه زمانی را با استفاده از تندی متوسط نوسانگر محاسبه می‌کنیم:

$$S_{av} = \frac{\ell}{\Delta t} \rightarrow \frac{S_{av} = 1.5 \text{ m/s}}{\Delta t = 0.2 \text{ s}} \rightarrow \ell = 1.5 \times 0.2 = 0.3 \text{ m} = 3 \text{ cm}$$

در آخر با توجه به نکته زیر، دامنه نوسان را به دست می‌آوریم.

نکته مسافتی که نوسانگر هماهنگ ساده در مدت زمان نصف دوره تناوب $(\frac{T}{2})$ طی می‌کند، برابر با $\frac{2A}{\pi}$ است.

$$\Delta t = \frac{T}{2} \Rightarrow \ell = \frac{2A}{\pi} \rightarrow \ell = 3 \text{ cm} \rightarrow 2A = \pi \ell \Rightarrow A = 1.5 \text{ cm}$$

گزینه ۵۷

شفاف سازی مدت زمانی که طول می‌کشد تا هر یک از ذرات تار یک نوسان کامل انجام دهند، برابر با دوره تناوب موج است.

درس نامه دوره تناوب و بسامد معکوس یکدیگرند:
 $T = \frac{1}{f} \rightarrow$ دوره تناوب (s) بسامد (Hz)

با جای گذاری داده‌ها در رابطه زیر، بسامد تشدید هماهنگ اول تار (f) را به دست می‌آوریم:

$$f = \frac{nv}{2L} \rightarrow \frac{n=1, v=250 \text{ m/s}}{L=50 \text{ cm}=0.5 \text{ m}} \rightarrow f = \frac{250}{2 \times 0.5} = 250 \text{ Hz}$$

مدت زمانی که هر یک از ذرات تار یک نوسان کامل انجام می‌دهد، برابر با دوره تناوب موج است. بنابراین دوره تناوب موج را با استفاده از بسامد آن محاسبه می‌کنیم:

$$T = \frac{1}{f} \rightarrow \frac{1}{f=250 \text{ Hz}} \rightarrow T = \frac{1}{250} = 0.004 \text{ s} = 4 \text{ ms}$$

گزینه ۵۸

درس نامه ۱ انرژی الکترون در اتم هیدروژن در مدار nام:
 $E_n = -\frac{13.6 \text{ eV}}{n^2}$
 شماره مدار الکترون

۲ در اتم هیدروژن وقتی که الکترون از یک حالت مانا با انرژی بیشتر (E_U) به یک حالت مانا با انرژی کمتر (E_L) می‌رود، یک فوتون گسیل می‌شود. انرژی این فوتون برابر با اختلاف انرژی بین دو مدار اولیه و نهایی است:
 $E_U - E_L = hf$
 همچنین اگر به الکترونی که در یک حالت مانا با انرژی کمتر (E_L) قرار دارد، فوتونی با انرژی $E_U - E_L$ بتابانیم، الکترون با دریافت این انرژی به یک حالت مانا با انرژی بیشتر (E_U) می‌رود.

این الکترون وقتی از مدار n به مدار n' می‌رود، فوتونی با انرژی $12/75 \text{ eV}$ گسیل می‌کند.

سه شکم در طول تار ایجاد شده است، پس تار بسامد تشدید هماهنگ سوم ($n=3$) خود را انجام می‌دهد. بنابراین می‌توانیم بنویسیم:

$$f_n = n f_1 \Rightarrow 300 = 3 \times f_1 \Rightarrow f_1 = 100 \text{ Hz}$$

در آخر داده‌ها را در رابطه زیر جای گذاری می‌کنیم و تندی انتشار موج عرضی در تار را به دست می‌آوریم:

$$f_n = \frac{nv}{2L} \rightarrow \frac{f_n=300 \text{ Hz}, n=3}{L=60 \text{ cm}=0.6 \text{ m}} \rightarrow 300 = \frac{3v}{2 \times 0.6} \Rightarrow v = 120 \text{ m/s}$$

گزینه ۵۴

درس نامه ۱ شدت صوت در فاصله ۲ از چشمه صوت:

شدت صوت توان چشمه صوتی (W) (W/m^2)

$$I = \frac{P_{av}}{4\pi r^2}$$

فاصله از چشمه صوت (m)

۲ **رابطه اختلاف تراز شدت دو صوت:**

$$\beta_2 - \beta_1 = 10 \log \frac{I_2}{I_1}$$

تراز شدت صوت (dB) شدت صوت (W/m^2)
 شدت صوت (W/m^2) تراز شدت صوت (dB)

ابتدا نسبت $\frac{I_2}{I_1}$ را به دست می‌آوریم:

$$I = \frac{P_{av}}{4\pi r^2} \Rightarrow \frac{I_2}{I_1} = \frac{P_{av_2}}{P_{av_1}} \times \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2 \rightarrow \frac{P_{av_2}=2P_{av_1}}{r_2=\frac{1}{2}r_1} \rightarrow \frac{I_2}{I_1} = \frac{2}{1} \times \left(\frac{1}{\frac{1}{2}}\right)^2 \Rightarrow \frac{I_2}{I_1} = 8$$

حالا با جای گذاری داده‌ها در رابطه زیر، اختلاف تراز شدت دو صوت را محاسبه می‌کنیم:

$$\beta_2 - \beta_1 = 10 \log \frac{I_2}{I_1} \rightarrow \frac{I_2}{I_1} = 8 \rightarrow \beta_2 - \beta_1 = 10 \log 8$$

$$\frac{\log 8 = \log 2^3 = 3 \log 2}{\log 2 = 0.3} \rightarrow \beta_2 - \beta_1 = 10 \times 3 \times 0.3 = 9 \text{ dB}$$

بنابراین تراز شدت صوت ۹ dB افزایش می‌یابد.

تله با توجه به این که تراز شدت صوت ۹ dB افزایش یافته، به عنوان تله تستی مطرح شده تا به اشتباه ۹ برابر را انتخاب نکند.

گزینه ۵۵

شفاف سازی با توجه به این که دوره تناوب آونگ افزایش یافته است، پس طول آونگ افزایش یافته است.

درس نامه دوره تناوب آونگ ساده:
 $T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}}$
 طول آونگ (m) شتاب گرانش (m/s^2) دوره تناوب (s)

طول آونگ تغییر کرده است و در اثر این تغییر، دوره تناوب آن افزایش می‌یابد.

طبق رابطه $T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}}$ ، برای این که دوره تناوب آونگ ساده افزایش پیدا کند، باید طول آن افزایش یابد؛ بنابراین طول آونگ افزایش می‌یابد و می‌توانیم بنویسیم:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}} \Rightarrow \frac{T_2}{T_1} = \sqrt{\frac{L_2}{L_1}} \rightarrow \frac{T_2 = T_1 + 12 \times 10^{-2} T_1 = \frac{9}{10} T_1}{L_2 = L_1 + 17 \text{ (cm)}} \rightarrow \frac{9}{10} = \sqrt{\frac{L_1 + 17}{L_1}}$$

$$\Rightarrow \frac{81}{100} = \frac{L_1 + 17}{L_1} \Rightarrow 81L_1 = 100L_1 + 1700 \Rightarrow 19L_1 = 1700 \Rightarrow L_1 = \frac{1700}{19} \text{ cm} \approx 89.47 \text{ cm}$$

حالا می‌توانیم دوره تناوب آونگ قبل از تغییر طول را به دست بیاوریم:

$$T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{L_1}{g}} \rightarrow \frac{L_1 = 89.47 \text{ cm}}{g = \pi^2 \text{ m/s}^2} \rightarrow T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{0.8947}{\pi^2}} = 2 \times 0.8 = 1.6 \text{ s}$$

تله اگر به اشتباه T_2 را محاسبه کنید، به $\frac{1}{4}$ می‌رسید.

بنابراین با جای گذاری داده‌ها در رابطه زیر می‌توانیم n و n' را پیدا کنیم:

$$E_U - E_L = 12/75 \text{ eV} \rightarrow \frac{E_U}{E_L} = \frac{E_R}{E_R} \rightarrow \frac{E_U}{E_L} = \frac{E_R}{E_R} \rightarrow \frac{E_U}{E_L} = \frac{E_R}{E_R} = 12/75$$

$$\frac{E_U}{E_L} = \frac{E_R}{E_R} \rightarrow \frac{E_U}{E_L} = \frac{E_R}{E_R} = 12/75$$

$$\Rightarrow 12/75 \left(\frac{1}{n'^2} - \frac{1}{n^2} \right) = 12/75 \Rightarrow \frac{1}{n'^2} - \frac{1}{n^2} = \frac{12/75}{12/75} = \frac{15}{16}$$

$$\Rightarrow n' = 1, n = 4$$

گزینه ۲ - ۵۹

درس نامه بیشینه انرژی جنبشی فوتوالکترون‌ها در اثر فوتوالکتریک:

تندی انتشار امواج الکترومغناطیسی در خلأ (m/s) ← ثابت پلانک (eV.s)

$$K_{\max} = \frac{hc}{\lambda} - W_0$$

↑
تابع کار فلز (eV)
↓
طول موج (m)

کافی است دو بار از معادله فوتوالکتریک استفاده کنیم و دستگاه تشکیل بدهیم.

$$K_{\max} = \frac{hc}{\lambda} - W_0 \rightarrow \begin{cases} K_{\max_1} = \frac{hc}{\lambda_1} - \phi \\ \phi K_{\max_1} = \frac{rhc}{\lambda_1} - \phi \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -\phi K_{\max_1} = -\frac{\phi hc}{\lambda_1} + \phi \\ \phi K_{\max_1} = \frac{rhc}{\lambda_1} - \phi \end{cases} \Rightarrow \frac{hc}{\lambda_1} = \frac{\phi}{\phi} = 1$$

$$\frac{h \times 4 \times 10^{-15} \text{ eV.s}}{c = 3 \times 10^8 \text{ m/s}} \rightarrow \frac{4 \times 10^{-15} \times 3 \times 10^8}{\lambda_1} = 5$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = \frac{12}{5} \times 10^{-7} \text{ m} \Rightarrow \lambda_1 = 240 \times 10^{-9} \text{ m} = 240 \text{ nm}$$

گزینه ۴ - ۶۰

برای استفاده از اورانیم به عنوان سوخت در نیروگاه‌های هسته‌ای یا استفاده در انفجارهای هسته‌ای، باید فراوانی ایزوتوپ ۲۳۵ را در یک نمونه اورانیم افزایش بدهیم. به فرایند افزایش درصد یا غلظت ایزوتوپ ۲۳۵ در یک نمونه، غنی‌سازی می‌گوییم.

تله ایزوتوپ‌های یک عنصر را نمی‌توانیم به یکدیگر تبدیل کنیم. اگر به این نکته توجه نکنید، ممکن است گزینه نادرست ۲ را انتخاب کنید. طراح زره به مفهوم!

مشاوره این سؤال از متن کتاب درسی طراحی شده است. خط‌به‌خط کتاب درسی را بخوانید تا سؤال ساده‌ای مثل این سؤال را از دست ندهید.

گزینه ۳ - ۶۱

استراتژی ابتدا نسبت بار الکتریکی خازن در دو حالت ($\frac{Q_2}{Q_1}$) را محاسبه کنید، سپس نسبت انرژی آن در دو حالت ($\frac{U_2}{U_1}$) را به دست بیاورید و در آخر کسر تغییر انرژی خازن را پیدا کنید.

درس نامه ۱ رابطه بار الکتریکی با ظرفیت خازن و اختلاف پتانسیل دو سر آن:

$$Q = CV$$

↑
ظرفیت خازن (F)
↓
اختلاف پتانسیل دو سر خازن (V)

۲ انرژی ذخیره‌شده در خازن:

انرژی (J)
 $U = \frac{1}{2} QV$

با توجه به این که نسبت اختلاف پتانسیل الکتریکی در دو حالت ($\frac{V_2}{V_1}$) معلوم است، نسبت بار الکتریکی خازن در دو حالت ($\frac{Q_2}{Q_1}$) را محاسبه می‌کنیم.

$$Q = CV \Rightarrow \frac{Q_2}{Q_1} = \frac{C_2}{C_1} \times \frac{V_2}{V_1} \rightarrow \frac{C_2 = C_1}{\frac{V_2 = 2}{V_1 = 4}} \rightarrow \frac{Q_2}{Q_1} = \frac{2}{4}$$

حالا نسبت انرژی خازن در حالت دوم به حالت اول را پیدا می‌کنیم.

$$U = \frac{1}{2} QV \Rightarrow \frac{U_2}{U_1} = \frac{Q_2}{Q_1} \times \frac{V_2}{V_1} \rightarrow \frac{U_2}{U_1} = \frac{2}{4} \times \frac{2}{4} = \frac{9}{16}$$

در آخر با توجه به این که انرژی خازن کاهش یافته است، کسر تغییر انرژی آن را به دست می‌آوریم:

$$U_2 = \frac{9}{16} U_1 \Rightarrow \frac{U_1 - U_2}{U_1} = \frac{U_1 - \frac{9}{16} U_1}{U_1} = \frac{7}{16} U_1 = \frac{7}{16}$$

مشاوره تست‌های مربوط به خازن در اغلب کنکورهای چند سال اخیر به چشم می‌خورند. پس توجه ویژه‌ای به مبحث خازن داشته باشید.

گزینه ۴ - ۶۲

درس نامه ۱ اختلاف پتانسیل الکتریکی بین دو نقطه از میدان الکتریکی:

تغییر انرژی پتانسیل الکتریکی (J)
↑
اختلاف پتانسیل الکتریکی (V)
 $\Delta V = \frac{\Delta U}{q}$
↓
بار الکتریکی (C)

هواستون باشه! توی این رابطه باید بار q رو با علامتش بنارین.

اگر درهای با بار الکتریکی منفی در جهت میدان الکتریکی حرکت کنند، انرژی پتانسیل الکتریکی آن افزایش و اگر در خلاف جهت میدان الکتریکی حرکت کنند، انرژی پتانسیل الکتریکی آن کاهش می‌یابد.

انرژی پتانسیل الکتریکی این بار الکتریکی در حرکت از نقطه A تا نقطه B افزایش یافته است، با توجه به این که علامت این بار الکتریکی منفی است، پس در جهت میدان الکتریکی حرکت کرده است (رد ۱ و ۲). با جای گذاری داده‌ها در رابطه زیر، مقدار $V_B - V_A$ را به دست می‌آوریم:

$$\Delta V = \frac{\Delta U}{q} \rightarrow \frac{\Delta U = 2 \times 10^{-3} \text{ J}}{q = -20 \times 10^{-9} \text{ C}} \rightarrow V_B - V_A = \frac{2 \times 10^{-3}}{-20 \times 10^{-9}} = -10^5 \text{ V}$$

تیزبازی علامت این بار الکتریکی منفی است و انرژی پتانسیل الکتریکی آن در حرکت از نقطه A تا نقطه B افزایش یافته است؛ بنابراین این بار الکتریکی در جهت میدان الکتریکی حرکت کرده است (رد ۱ و ۲). همچنین با توجه به این که با حرکت در جهت میدان الکتریکی پتانسیل الکتریکی کاهش می‌یابد، پس $V_B < V_A$ و در نتیجه $V_B - V_A < 0$ است. بنابراین فقط ۴ می‌تواند درست باشد.

گزینه ۱ - ۶۳

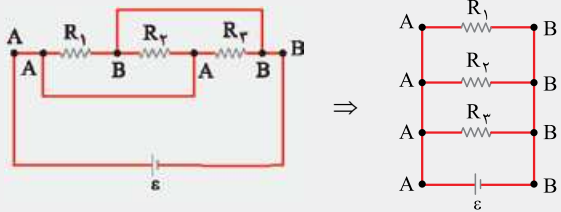
استراتژی ۱ میدان الکتریکی حاصل از بار q_1 در نقطه M را E_1 می‌نامیم و میدان الکتریکی حاصل از بارهای q_2 و q_3 در نقطه M را برحسب E_1 می‌نویسیم، سپس میدان الکتریکی خالص هر سه آن‌ها (E) را به دست می‌آوریم.

۲ در حالتی که بار q_2 حذف شده، میدان الکتریکی خالص (E') حاصل از بارهای q_1 و q_3 در نقطه M را برحسب E_1 می‌نویسیم.

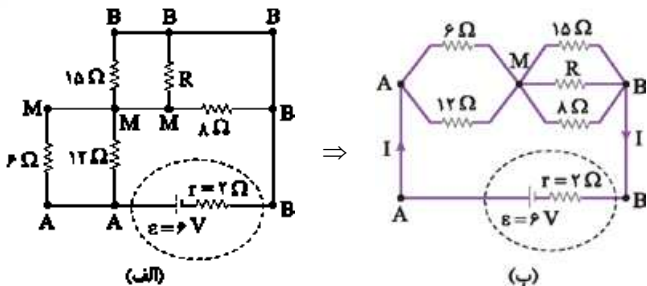
۳ نسبت $\frac{E'}{E}$ را پیدا می‌کنیم.

۵ ساده کردن شکل مدار به روش نام گذاری نقاط هم پتانسیل:

برای این کار، نقاطی از مدار را که با سیم به یکدیگر وصل شده‌اند، با یک نام مشترک در نظر می‌گیریم. بعد از نام گذاری چنین نقاطی از مدار، دو سر مولد یا دو سر مدار را مینا قرار داده و سایر اجزای مدار را بین نقطه‌های نام گذاری شده، جای گذاری می‌کنیم تا شکل ساده‌تری از مدار به دست بیاید.



نقاط هم پتانسیل را نام گذاری می‌کنیم (شکل الف) و شکل ساده‌تری از مدار را رسم می‌کنیم (شکل ب).



مقاومت معادل حاصل از دو مقاومت موازی ۱۲ اهمی و ۸ اهمی را محاسبه می‌کنیم:

$$R_{AM} = \frac{6 \times 12}{6 + 12} = \frac{72}{18} = 4 \Omega$$

اختلاف پتانسیل دو سر مقاومت‌های موازی با اختلاف پتانسیل دو سر مقاومت معادل آن‌ها برابر است. همچنین از آن‌جا که اختلاف پتانسیل دو سر مقاومت‌های ۶ اهمی و ۸ اهمی برابر است، می‌توانیم بنویسیم:

$$V_{AM} = V_{MB} \Rightarrow R_{AM} \times I_{AM} = R_{MB} \times I_{MB}$$

$$\frac{I_{AM} = I_{MB} = I}{R_{AM} = 4 \Omega} \rightarrow R_{MB} = 4 \Omega$$

بنابراین مقاومت معادل مدار برابر است با: $R_{eq} = R_{AM} + R_{MB} = 4 + 4 = 8 \Omega$ حالا جریان الکتریکی گذرنده از مولد (I) را محاسبه می‌کنیم:

$$I = \frac{\epsilon}{R_{eq} + r} = \frac{6 \text{ V}}{8 \Omega + 2 \Omega} = \frac{6}{10} = 0.6 \text{ A}$$

در ادامه اختلاف پتانسیل بین دو نقطه A و M را با استفاده از رابطه $V = RI$ پیدا می‌کنیم:

$$V_{AM} = R_{AM} \times I = \frac{R_{AM} = 4 \Omega}{I = 0.6 \text{ A}} \rightarrow V_{AM} = 4 \times 0.6 = 2.4 \text{ V}$$

در آخر جریان گذرنده از مقاومت ۸ اهمی را به دست می‌آوریم:

$$I_{8 \Omega} = \frac{V_{MB}}{8} = \frac{V_{MB} = V_{AM} = 2.4 \text{ V}}{8} \rightarrow I_{8 \Omega} = \frac{2.4}{8} = 0.3 \text{ A}$$

۶۵- گزینه ۴

درسنامه ۱ قاعده انشعاب: مجموع

جریان‌هایی که به هر نقطه انشعاب (گره) وارد می‌شوند برابر با مجموع جریان‌هایی است که از آن نقطه انشعاب (گره) خارج می‌شوند؛ مثلاً در شکل روبه‌رو، جریان $I_1 + I_2 = 12 \text{ A}$ به گره M وارد شده و جریان $I_3 + I_4 = 12 \text{ A}$ از آن خارج شده است.

۲ قانون اختلاف پتانسیل‌ها: در هر حلقه بسته، مجموع جبری اختلاف پتانسیل‌ها صفر است.

$$\sum V = 0 \Rightarrow \sum \epsilon - \sum RI = 0$$

در به کار بردن این قانون، به نکات زیر توجه کنید:

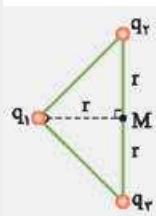
- یک جهت چرخش اختیاری در نظر می‌گیریم.
- جهت جریان را در هر حلقه به دلخواه انتخاب می‌کنیم.

درسنامه ۱ اندازه میدان الکتریکی حاصل از یک ذره باردار q در فاصله r از آن:

اندازه میدان الکتریکی (C) $E = k \frac{|q|}{r^2}$
 اندازه بار الکتریکی (N/C) $E = k \frac{|q|}{r^2}$
 فاصله (m) $E = k \frac{|q|}{r^2}$
 ثابت کولن $(\frac{N.m^2}{C^2})$

جهت میدان الکتریکی، از بارهای مثبت رو به خارج و به سوی بارهای منفی است.

در یک مثلث قائم‌الزاویه متساوی‌الساقین، میانه وارد بر وتر، نصف وتر است و هم‌چنین میانه و عمودمنصف بر هم منطبق هستند.



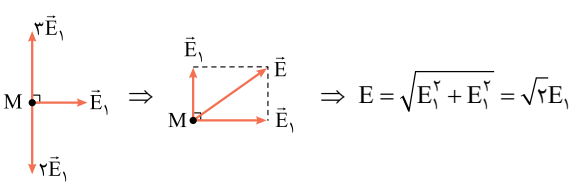
میدان الکتریکی حاصل از بار q_1 در نقطه M را E_1 می‌نامیم:

سه میدان‌های الکتریکی حاصل از بارهای q_1 و q_2 در نقطه M را برحسب E_1 می‌نویسیم:

$$E_2 = k \frac{q_2}{r^2} \xrightarrow{q_2 = 2q_1} E_2 = 2E_1$$

$$E_3 = k \frac{q_3}{r^2} \xrightarrow{q_3 = 3q_1} E_3 = 3E_1$$

میدان الکتریکی خالص ناشی از هر سه بار را در نقطه M به دست می‌آوریم:



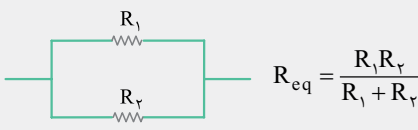
بعد از حذف بار q_2 ، میدان الکتریکی خالص ناشی از بارهای q_1 و q_3 در نقطه M را به دست می‌آوریم:

$$E' = \sqrt{E_1^2 + (3E_1)^2} = \sqrt{10} E_1 = \sqrt{10} E_1$$

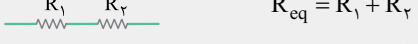
$$\frac{E'}{E} = \frac{\sqrt{10} E_1}{\sqrt{2} E_1} = \sqrt{5}$$

۶۶- گزینه ۲

درسنامه ۱ مقاومت معادل دو مقاومت موازی R_1 و R_2 :



۲ مقاومت معادل دو مقاومت متوالی R_1 و R_2 :



۳ تعریف مقاومت الکتریکی: نسبت اختلاف پتانسیل الکتریکی دو سر یک رسانا به جریان الکتریکی عبوری از آن. $R = \frac{V}{I}$ اختلاف پتانسیل الکتریکی (V) \leftarrow مقاومت الکتریکی (Ω) \rightarrow جریان الکتریکی (A)

۴ جریان الکتریکی خروجی از باتری: نیروی محرکه مولد (V) \rightarrow جریان الکتریکی (A)

$$I = \frac{\epsilon}{R_{eq} + r}$$

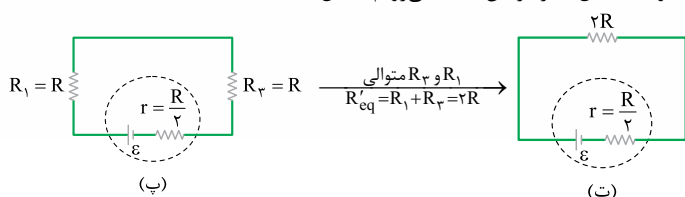
مقاومت درونی مولد (Ω) \leftarrow مقاومت معادل مدار (Ω)

پلاس حالا جریان خروجی از باتری را محاسبه می‌کنیم تا بتوانیم با استفاده از آن، اختلاف پتانسیل الکتریکی دو سر مقاومت $2R$ را که برابر با اختلاف پتانسیل الکتریکی دو سر باتری است، به دست بیاوریم.

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R_{eq} + r} \xrightarrow{R_{eq} = 2R, r = \frac{R}{2}} I = \frac{\mathcal{E}}{2R + \frac{R}{2}} = \frac{2\mathcal{E}}{5R}$$

$$V_{\text{باتری}} = R_{eq} I \xrightarrow{R_{eq} = 2R, I = \frac{2\mathcal{E}}{5R}} V_{\text{باتری}} = (2R) \left(\frac{2\mathcal{E}}{5R} \right) = \frac{4}{5} \mathcal{E}$$

پلاس در حالت دوم، وقتی کلید را می‌بندیم، پتانسیل الکتریکی دو سر مقاومت R_p یکسان شده و در نتیجه اختلاف پتانسیل الکتریکی دو سر آن صفر می‌شود. در این حالت مقاومت R_p اتصال کوتاه شده و از مدار حذف می‌شود (شکل پ). مانند گام اول، به سراغ مقاومت معادل مدار در این حالت می‌رویم (شکل ت).



پلاس حالا جریان خروجی از باتری در حالت دوم را محاسبه می‌کنیم تا بتوانیم با استفاده از آن، اختلاف پتانسیل الکتریکی دو سر مقاومت $2R$ را که برابر با اختلاف پتانسیل الکتریکی دو سر باتری است، به دست بیاوریم.

$$I' = \frac{\mathcal{E}}{R'_{eq} + r} \xrightarrow{R'_{eq} = 2R, r = \frac{R}{2}} I' = \frac{\mathcal{E}}{2R + \frac{R}{2}} = \frac{2\mathcal{E}}{5R}$$

$$V'_{\text{باتری}} = R'_{eq} I' \xrightarrow{R'_{eq} = 2R, I' = \frac{2\mathcal{E}}{5R}} V'_{\text{باتری}} = (2R) \left(\frac{2\mathcal{E}}{5R} \right) = \frac{4}{5} \mathcal{E}$$

پلاس در آخر خواسته سؤال یعنی نسبت $\frac{V'_{\text{باتری}}}{V_{\text{باتری}}}$ را محاسبه می‌کنیم و تمام!

$$\frac{V'_{\text{باتری}}}{V_{\text{باتری}}} = \frac{\frac{4}{5} \mathcal{E}}{\frac{4}{5} \mathcal{E}} = \frac{14}{15}$$

۶۷- گزینه‌ها

درس‌نامه ۱ بزرگی میدان مغناطیسی در مرکز بیچه مسطح:

تعداد حلقه‌ها \rightarrow تراوایی مغناطیسی $\left(\frac{T \cdot m}{A} \right)$

$$B = \frac{\mu_0 NI}{2R} \rightarrow (A) \text{ جریانی الکتریکی}$$

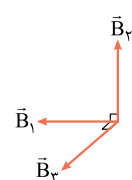
شعاع (m)

۲ برای تشخیص جهت میدان مغناطیسی در اطراف حلقه حامل جریان از قاعده دست راست استفاده می‌کنیم. طبق این قاعده، اگر انگشت شست دست راست را در جهت جریان قرار بدهیم، جهت خم شدن چهار انگشت دست راست، جهت میدان مغناطیسی را نشان می‌دهد.

پلاس با توجه به این که جریان عبوری از هر حلقه و شعاع آن‌ها با یکدیگر یکسان است، پس میدان مغناطیسی حاصل از هر حلقه در مرکز حلقه‌ها (نقطه O) نیز یکسان است و می‌توانیم بنویسیم:

$$B_1 = B_2 = B_3 = B = \frac{\mu_0 NI}{2R} = \frac{12 \times 10^{-7} \times 1 \times 0 / 5}{2 \times (0 / 15)} = 2 \times 10^{-6} \text{ T}$$

پلاس طبق قاعده دست راست، اگر انگشت شست دست راست را در جهت جریان قرار بدهیم، جهت خم شدن چهار انگشت جهت میدان مغناطیسی در مرکز حلقه را نشان می‌دهد. جهت میدان مغناطیسی ناشی از سه حلقه را به دست می‌آوریم.



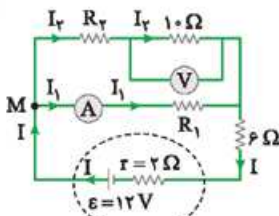
۳ برای نوشتن \mathcal{E} ها، با توجه به جهت چرخش در مدار، اگر از پایانه مثبت باتری خارج شویم (نیروی محرکه باتری را مثبت $(+\mathcal{E})$ و اگر از پایانه منفی باتری خارج شویم (نیروی محرکه باتری را منفی $(-\mathcal{E})$) در نظر می‌گیریم.

۴ برای نوشتن RI ها، اگر در جهت جریان از مقاومت عبور کنیم، چون پتانسیل الکتریکی در حال کاهش است، RI را منفی $(-RI)$ و اگر در خلاف جهت جریان از مقاومت عبور کنیم، چون پتانسیل الکتریکی در حال افزایش است، RI را مثبت $(+RI)$ در نظر می‌گیریم. اگر علامت جریان مثبت به دست آمد، یعنی جهت انتخابی درست است و اگر منفی به دست آمد، فقط جهت جریان در شاخه مورد نظر را برعکس می‌کنیم.

پلاس با استفاده از رابطه $I = \frac{V}{R}$ ، جریانی را که از مقاومت 10 اهمی می‌گذرد، به دست می‌آوریم:

$$I = \frac{V}{R} \xrightarrow{V = 5 \text{ V}, R = 10 \Omega} I = \frac{5}{10} = 0.5 \text{ A}$$

پلاس قانون گره (انشعاب) را در نقطه M بنویسیم. حواستون باشه! از شاخه‌ای که ولت‌سنج آرمانی قرار دارد، جریان الکتریکی عبور نمی‌کند.



$$I = I_1 + I_2 \xrightarrow{I_1 = 0.25 \text{ A}, I_2 = 0.5 \text{ A}} I = 0.25 + 0.5 = 0.75 \text{ A}$$

پلاس قانون اختلاف پتانسیل‌ها را در حلقه پایین مدار به کار می‌بریم و در جهت ساعتگرد از اجزای مدار می‌گذریم.

$$-I_1 R_1 - \mathcal{E} - rI + \mathcal{E} = 0 \xrightarrow{I_1 = 0.25 \text{ A}, I = 0.75 \text{ A}, r = 2 \Omega, \mathcal{E} = 12 \text{ V}} -0.25 R_1 - 6 \times 0.75 - 2 \times 0.75 + 12 = 0$$

$$\Rightarrow 6 = 0.25 R_1 \Rightarrow R_1 = 24 \Omega$$

تیزبازی مقاومت R_1 با مجموع مقاومت‌های R_p و 10Ω به طور موازی بسته شده‌اند؛ پس داریم:

$$V_{R_1} = V_{R_p} + V_{10 \Omega} \Rightarrow V_{R_1} > V_{10 \Omega} \Rightarrow I_1 R_1 > 5$$

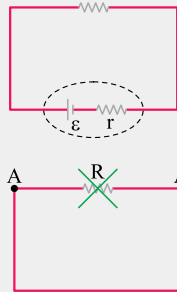
$$\Rightarrow 0.25 R_1 > 5 \Rightarrow R_1 > 20 \Omega$$

پس تنها جواب ممکن 24 است.

۶۶- گزینه ۳

شفاف‌سازی وقتی کلید را می‌بندیم، مقاومت الکتریکی R اتصال کوتاه شده و از مدار حذف می‌شود.

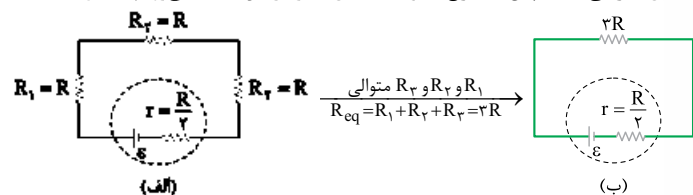
درس‌نامه ۱ اختلاف پتانسیل الکتریکی دو سر باتری برابر با اختلاف پتانسیل الکتریکی دو سر مقاومت معادل خارجی است.



$$V_{\text{باتری}} = V_R$$

۲ اتصال کوتاه: اگر دو سر مقاومتی را با یک سیم بدون مقاومت به هم وصل کنیم، پتانسیل الکتریکی دو سر مقاومت الکتریکی یکسان شده و در نتیجه اختلاف پتانسیل الکتریکی دو سر آن صفر می‌شود. در این حالت مقاومت الکتریکی اتصال کوتاه شده و از مدار حذف می‌گردد.

پلاس در ابتدا کلید باز است و مقاومت R_p در مدار حضور دارد (شکل الف). با توجه به این که اختلاف پتانسیل الکتریکی دو سر باتری برابر با اختلاف پتانسیل الکتریکی دو سر مقاومت معادل خارجی است، پس به سراغ مقاومت معادل مدار در این حالت می‌رویم (شکل ب).



۷۰- گزینه ۲

درس نامه نیروی محرکه القایی متوسط برای پیچه یا سیم‌لوله‌ای که از N دور مشابه تشکیل شده است: مساحت حلقه (m²) ← تغییر میدان مغناطیسی (T)

$$\varepsilon_{av} = -N \frac{\Delta B A \cos \theta}{\Delta t}$$
 زاویه بین بردار میدان مغناطیسی و نیم‌خط عمود بر سطح حلقه
 مدت زمان (s) تعداد دور
 نیروی محرکه القایی متوسط (V)
 برای تبدیل گاوس به تسلا (و برعکس) به صورت مقابل عمل می‌کنیم: $G \frac{\div 10^4}{\times 10^4} \rightarrow T$
 کفایت داده‌ها را در رابطه زیر جای گذاری کنیم:

$$\varepsilon_{av} = -N \frac{\Delta B A \cos \theta}{\Delta t} \quad \frac{N=1, \Delta B=-6000 \times 10^{-4} T, \Delta t=15/7 \times 10^{-2} s}{A=\pi r^2=3/14 \times 10^{-2} m^2, \theta=90^\circ-30^\circ=60^\circ}$$

$$\varepsilon_{av} = -1 \times \frac{(-6000 \times 10^{-4}) \times 3/14 \times 10^{-2} \times \cos 60^\circ}{15/7 \times 10^{-2}} = 0.6 V$$

تله اگر به اشتباه θ را 30° در نظر بگیرد، به گزینه نادرست ۱ می‌رسید.

۷۱- گزینه ۱

نقاط C و D در سطح آزاد مایع‌ها هستند و فشار این دو نقطه یکسان و برابر با P_C = P_D = P₀ است. فشار در نقاط A و M، به دلیل این که در یک مایع و در یک تراز قرار دارند، با هم برابر است؛ بنابراین می‌توانیم بنویسیم:

$$P_A = P_M \Rightarrow P_A = P_B + \rho_r g h_r$$

$$\Rightarrow P_A > P_B$$

فشار در نقطه B ناشی از فشار هوا و مایع ρ_r است؛ بنابراین داریم:

$$P_B = P_0 + \rho_r g h_r \xrightarrow{P_0=P_C} P_B = P_C + \rho_r g h_r \Rightarrow P_B > P_C$$
 پس در نتیجه $P_A > P_B > P_C = P_D$ است.

تیزبازی با توجه به این که $P_C = P_D = P_0$ است، رد می‌شود، چون $P_C > P_D$ نیست. همچنین ۳ و ۴ هم رد می‌شوند؛ چون در این دو گزینه، با توجه به این که $P_C = P_D$ است، $P_A = P_B$ می‌شود که درست نیست.

۷۲- گزینه ۴

درس نامه به اختلاف فشار مطلق (P) و فشار جو (P₀)، فشار پیمانه‌ای می‌گوییم و آن را با P_g نشان می‌دهیم.

$$P_g = P - P_0$$
 شکل مقابل وضعیت وزنه را که روی روزه قرار دارد، نشان می‌دهد. برای این که وزنه در تعادل باشد، باید برایندهای نیروهای وارد بر وزنه صفر باشد؛ بنابراین می‌توانیم بنویسیم:

$$P_0 A + mg = P_{\text{داخل زودپز}} A$$

$$\Rightarrow P_0 + \frac{mg}{A} = P_{\text{داخل زودپز}} \Rightarrow \frac{mg}{A} = P_{\text{داخل زودپز}} - P_0$$
 فشار پیمانه‌ای بخار داخل زودپز $P_g = P_{\text{داخل زودپز}} - P_0$

$$\Rightarrow P_g = \frac{mg}{A} \Rightarrow 1.5 = \frac{m \times 10}{5 \times 10^{-6}} \Rightarrow m = 5 \times 10^{-2} \text{ kg} = 50 \text{ g}$$

مشاوره تمام تمرین‌ها، مثال‌ها، شکل‌ها و ... کتاب درسی را بخوانید. این سؤال مشابه تمرین کتاب درسی است.

برایند میدان مغناطیسی ناشی از \vec{B}_1 و \vec{B}_2 را محاسبه می‌کنیم.

$$B_{1,2} = \sqrt{B_1^2 + B_2^2} \xrightarrow{B_1=B_2=B} B_{1,2} = B\sqrt{2}$$

$$\xrightarrow{B=2 \times 10^{-6} T} B_{1,2} = 2\sqrt{2} \times 10^{-6} T$$

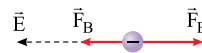
پس برایند میدان مغناطیسی ناشی از \vec{B}_1 و \vec{B}_2 را به دست می‌آوریم:

$$B_T = \sqrt{B_{1,2}^2 + B_2^2} = \sqrt{(2\sqrt{2} \times 10^{-6})^2 + (2 \times 10^{-6})^2}$$

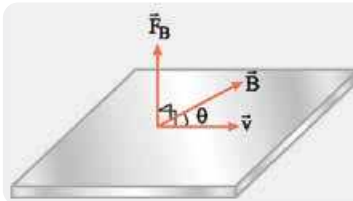
$$\Rightarrow B_T = 2 \times 10^{-6} \sqrt{(\sqrt{2})^2 + (1)^2} = 2\sqrt{3} \times 10^{-6} T$$

۶۸- گزینه ۴

برای این که الکترون بدون انحراف در مسیر حرکت کند، باید نیرویی که از طرف میدان الکتریکی و میدان مغناطیسی به الکترون وارد می‌شود، با هم برابر و در خلاف جهت هم باشند. ذره باردار و نیروهای وارد شده را به صورت مقابل در نظر می‌گیریم (چون ذره باردار منفی است، پس جهت نیروی الکتریکی وارد بر ذره، در خلاف جهت میدان الکتریکی است).



نکته نیرویی که از طرف میدان مغناطیسی بر ذره باردار وارد می‌شود، هم بر راستای حرکت ذره و هم بر میدان مغناطیسی عمود است.



با توجه به نکته بالا، نیروی مغناطیسی وارد بر الکترون (\vec{F}_B) بر صفحه‌ای که بردار \vec{v} و بردار \vec{B} تشکیل می‌دهند، عمود است؛ بنابراین میدان مغناطیسی (\vec{B}) و راستای حرکت (\vec{v}) باید به صورت روبه‌رو در صفحه YOZ باشند تا نیروی مغناطیسی به سمت چپ باشد.

همان‌طور که مشاهده می‌کنیم، میدان الکتریکی عمود بر راستای حرکت است (\vec{E} در خلاف جهت محور X و \vec{v} در صفحه YOZ است). اما \vec{v} و \vec{B} هر زاویه دلخواهی به غیر از صفر و 180° می‌توانند داشته باشند.

۶۹- گزینه ۱

شفاف‌سازی عدد ۱۵/۷ به ما آلام می‌دهد که مقدار π را باید ۳/۱۴ در نظر بگیریم.

درس نامه ضریب القاوری سیم‌لوله آرمانی و بدون هسته:

$$L = \frac{\mu_0 N^2 A}{\ell}$$
 سطح مقطع سیم‌لوله (m²) ← تعداد دور
 طول سیم‌لوله (m) ← ضریب القاوری (H)

کفایت داده‌ها را در رابطه زیر جای‌گذاری کنیم و ضریب القاوری سیم‌لوله را به دست بیاوریم (تبدیل واحد یاد تیره!).

$$L = \frac{\mu_0 N^2 A}{\ell} \xrightarrow{N=1000, A=8 \times 10^{-2} m^2, \mu_0=4\pi \times 10^{-7} \frac{T \cdot m}{A}, \ell=15/7 \times 10^{-2} m}$$

$$L = \frac{4\pi \times 10^{-7} \times (1000)^2 \times 8 \times 10^{-2}}{15/7 \times 10^{-2}}$$

$$= \frac{4 \times 3/14 \times 10^{-7} \times 10^6 \times 8 \times 10^{-2}}{15/7 \times 10^{-2}} = 6/4 \times 10^{-2} H = 6/4 \text{ mH}$$

۷۳- گزینه
درس نامه ۱ کار نیروی ثابت F:

$$W = Fd \cos \theta$$

زاویه بین نیرو و جابه‌جایی

نیروی (N) جابه‌جایی (m)

۲ قضیه کار - انرژی جنبشی: کار کل وارد بر یک جسم در یک جابه‌جایی معین برابر با تغییر انرژی جنبشی آن است.

با استفاده از قضیه کار - انرژی جنبشی می‌توانیم بنویسیم (کار نیروی وزن و نیروی عمودی سطح چون بر جابه‌جایی عمود هستند، صفر است):

$$W_t = \Delta K \Rightarrow W_{mg} + W_{F_N} + W_F + W_{f_k} = \Delta K$$

$$\Rightarrow Fd \cos 37^\circ + f_k d \cos 18^\circ = \Delta K$$

$$\Rightarrow 6000 \times 5 \times 0.8 + 4000 \times 5 \times (-1) = \Delta K$$

$$\Rightarrow \Delta K = 24000 - 20000 = 4000 \text{ J}$$

۷۴- گزینه
درس نامه طبق قانون پایستگی انرژی، جمع جبری گرماهای مبادله‌شده تا رسیدن به حالت تعادل، برابر با صفر است.

$$Q_1 + Q_2 + Q_3 = 0 \Rightarrow m_1 c_1 (\theta - \theta_1) + m_2 c_2 (\theta - \theta_2) + m_3 c_3 (\theta - \theta_3) = 0$$

طبق قانون پایستگی انرژی، جمع جبری گرماهای مبادله‌شده تا رسیدن به حالت تعادل، برابر با صفر است؛ بنابراین می‌توانیم بنویسیم:

$$Q_1 + Q_2 + Q_3 = 0$$

$$\Rightarrow m_{\text{آب}} c_{\text{آب}} (\theta - \theta_{\text{آب}}) + m'_{\text{آب}} c_{\text{آب}} (\theta - \theta'_{\text{آب}}) + m_{\text{ظرف}} c_{\text{ظرف}} (\theta - \theta_{\text{ظرف}}) = 0$$

$$\Rightarrow 80 \times 10^{-3} \times 4200 (\theta - 20) + 20 \times 10^{-3} \times 4200 (\theta - 80) + 300 \times 10^{-3} \times 400 (\theta - 32) = 0$$

$$\xrightarrow{\div 4000 \times 10^{-3}} 84(\theta - 20) + 21(\theta - 80) + 30(\theta - 32) = 0$$

$$\Rightarrow 84\theta - 1680 + 21\theta - 1680 + 30\theta - 960 = 0 \Rightarrow 135\theta = 4320 \Rightarrow \theta = 32^\circ \text{C}$$

۷۵- گزینه
درس نامه با توجه به معادله حالت گاز کامل (PV = nRT)، برای مقایسه دو حالت مختلف، رابطه کلی مقابل را در نظر بگیرید و هر کمیتی را که در سؤال ثابت فرض شده بود، از طرفین این رابطه حذف کنید.

دما (K) تعداد مول

۱ در حالت اول، فشار گاز زیر پیستون برابر با مجموع فشار هوا و فشار ناشی از وزن پیستون قرار گرفته در بالای گاز است. با توجه به شکل (الف)، فشار گاز و حجم گاز در حالت اول را به دست می‌آوریم (جرم پیستون را m فرض می‌کنیم).

$$P_1 = \frac{mg}{A} + P_0, V_1 = 40 \times A = 40A$$

۲ فشار گاز و حجم گاز در حالت دوم را که وزنه‌ای با جرم ۹ برابر جرم پیستون روی آن قرار داده‌ایم، به دست می‌آوریم (شکل ب).

$$P_2 = \frac{(9m + m)g}{A} + P_0$$

$$= \frac{10mg}{A} + P_0, V_2 = A \times 30 = 30A$$

۳ حالا با جای‌گذاری داده‌ها در رابطه زیر، P_۰ را به دست می‌آوریم:

$$\frac{P_1 V_1}{n_1 T_1} = \frac{P_2 V_2}{n_2 T_2} \xrightarrow{n_1 = n_2} P_1 V_1 = P_2 V_2 \Rightarrow (P_0 + \frac{mg}{A}) \times 40A = (P_0 + \frac{10mg}{A}) \times 30A$$

$$= (P_0 + \frac{10mg}{A}) \times 30A \Rightarrow 4P_0 + \frac{4mg}{A} = 3P_0 + \frac{30mg}{A} \Rightarrow P_0 = \frac{26mg}{A}$$

$$\Rightarrow P_0 = \frac{26 \times 1 / 75 \times 10}{50 \times 10^{-4}} = 9 / 1 \times 10^4 \text{ Pa}$$

شیمی
۷۶- گزینه
نکته

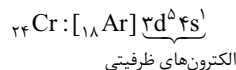
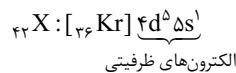
تعیین تعداد الکترون‌های ظرفیتی اتم‌ها

اگر آرایش الکترونی به زیرلایه p ختم شود:

$$\text{مجموع الکترون‌های آخرین زیرلایه‌های s و p} = (ns) s + (np) p$$

$$\text{الکترون‌های ظرفیتی} = \left(\text{الکترون‌های زیرلایه s} \right) + \left(\text{الکترون‌های زیرلایه p} \right)$$

۱ ابتدا آرایش الکترون‌های ظرفیتی اتم X و عدد اتمی آن را به دست می‌آوریم:

 بیست و چهارمین عنصر جدول تناوبی، کروم (۲۴ Cr) است که آرایش الکترون‌های ظرفیتی آن به صورت $3d^5 4s^1$ است؛ بنابراین عنصر X فلزی واسطه است و آرایش الکترونی آن به $(n-1)d^5 ns^1$ ختم می‌شود.

۲ عنصر X، فلزی واسطه بوده و بنابراین یون پایدار آن کاتیون است و طبق اطلاعات داده‌شده در سؤال با تبدیل شدن به کاتیون، شمار الکترون‌های آن با شمار الکترون‌های نخستین عنصر واسطه دوره پنجم جدول برابر می‌شود؛ بنابراین عنصر X در دوره پنجم قرار دارد (n = 5) و آرایش الکترونی آن به $3d^5 4s^1$ ختم شده و عدد اتمی آن ۴۲ است:

۳ نخستین عنصر واسطه دوره پنجم (Y)، در گروه ۳ قرار دارد و عدد اتمی آن، ۳ واحد بیشتر از گاز نجیب دوره چهارم (۳۶ Kr) است؛ بنابراین عدد اتمی آن $36 + 3 = 39$ است. از طرفی عنصر X همانند عنصر Cr ۲۴ در گروه ۶ جدول قرار دارد که با توجه به اطلاعات داده‌شده با از دست دادن الکترون و تبدیل شدن به کاتیون، شمار الکترون‌های آن به ۳۹ رسیده است؛ بنابراین:

$$42 = 39 + 3$$

اختلاف شمارهٔ گروه دو عنصر X و Y
عدد اتمی عنصر (نخستین عنصر واسطه دورهٔ ۵)

۴ به دست آوردن شمار نوترون‌های اتم ${}_{42}^{96}\text{X}$: $96 - 42 = 54$ = شمار نوترون‌ها

۷۷- گزینه

طیف نشری خطی، وسیلهٔ شناسایی عنصرها است، دقیقاً مثل بارکد یا خط نماد روی بسته‌های مواد غذایی و کالاها! (که اطلاعاتی مانند نوع کالا، قیمت، تاریخ انقضا و ... در آن درج شده است). یعنی طیف نشری خطی و خط نماد، از نظر این که وسیلهٔ شناسایی هستند، به هم شبیه‌اند ولی طیف نشری خطی عنصرها، کاربردی در خط نماد کالاها ندارد و در آن استفاده نشده است!

۱ در حاشیهٔ یکی از صفحه‌های فصل ۱ کتاب درسی شیمی دهم می‌خوانیم که کاربرد طیف‌های نشری خطی از برخی جنبه‌ها مانند کاربرد خط نماد (بارکد) روی جعبه یا بستهٔ مواد غذایی و کالاهاست؛ بنابراین طیف نشری خطی و خط نماد روی بستهٔ کالاها فقط از نظر کاربرد، شبیه هم‌اند. طراح در این عبارت با جابه‌جایی کلمات، مفهوم جملهٔ کتاب درسی را به شکل هوشمندانه‌ای تغییر داده و گفته که یکی از کاربردهای طیف نشری خطی در «خط نماد» روی بستهٔ کالاهاست که غلطه! و باید خیلی دقیق باشی تا تو دام این عبارت نیفتی!

۷۹- **گزینه ۱**

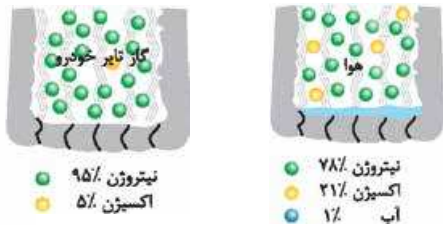


بررسی گزینه‌ها: ۱) با توجه به شکلی که در فصل ۲ کتاب درسی شیمی دهم در رابطه با لایه اوزون آورده شده است، از هر ۵ پروتو فرابنفش، ۴ تای آن‌ها توسط اوزون جذب شده و فقط یکی از آن‌ها می‌تواند فرار کند؛ پس می‌شه گفت حدود $80 = 100 \times \frac{4}{5}$ درصد تابش فرابنفش توسط لایه اوزون جذب می‌شود که بیشتر از ۷۵ درصد!

۲) در فرایند هابر (تهیه NH_3 از گازهای N_2 و H_2)، باید فراورده (آمونیاک) را از مخلوط جدا کنیم که برای این کار (مابعد شدن آمونیاک)، دما را باید کمی پایین‌تر از نقطه جوش آمونیاک (حدود $-34^\circ C$) بیاوریم. دقت کنید که در این فرایند دما را به هیچ وجه نباید پایین‌تر از دمای جوش نیتروژن ($-196^\circ C$) و هیدروژن ($-253^\circ C$) آورد، چون این‌طور می‌تواند این گازها نیز مایع شده و با آمونیاک مایع **قاطی پاتی!** می‌شوند.

نکته مقایسه نقطه جوش مواد شرکت کننده در واکنش تولید آمونیاک این‌طور است:
 $NH_3 > N_2 > H_2$
 $-34^\circ C \quad -196^\circ C \quad -253^\circ C$

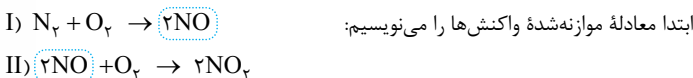
۳) نسبت درصد گاز نیتروژن در هوا به درصد این گاز در تاپر خودرو حدود $\frac{78}{95}$ است که قطعاً 95% برابر نیست.



۴) گاز نیتروژن (N_2)، فراوان‌ترین جزء سازنده هواکره است که واکنش‌پذیری ناچیزی دارد، اما در صنعت، مواد مختلفی از آن تهیه می‌کنند.

مشاوره ۱) و ۳)، تحلیل‌های عددی از شکل‌های کتاب درسی است که تاکنون به این صورت در کنکور مطرح نشده بودن، متأسفانه طراحان کنکور برای پررنگ کردن اهمیت کتاب درسی، رو به طرح این عبارتهای غیراستاندارد برده‌اند! پی بگیریم!! از اهمیت کتاب درسی غافل نشدید.

۸۰- **گزینه ۴**



استفاده از کسرهای تناسب:

ضرب ماده مشترک (NO)، در دو واکنش برابر است (نیازی به یکسان‌سازی ضرب این ماده در واکنش‌ها نداریم)؛ بنابراین می‌تونیم به طور مستقیم بین واکنش‌دهنده‌های واکنش (I) و فراورده واکنش (II)، برای قسمت دوم سؤال، روابط استوکیومتری بنویسیم:

$$1 \text{ mol } N_2, 1 \text{ mol } O_2 \sim 2 \text{ mol } NO \sim 2 \text{ mol } NO_2$$

$\frac{\text{جرم}}{\text{جرم مولی} \times \text{ضرب}}$	$=$	$\frac{\text{جرم}}{\text{جرم مولی} \times \text{ضرب}}$	$=$	$\frac{\text{حجم}}{\text{حجم مولی} \times \text{ضرب}}$
$\frac{O_2-N_2}{}$		$\frac{NO}{}$		$\frac{NO_2}{}$

نکته در مسائل استوکیومتری واکنش، در مواردی که به جای جرم یک ماده، مجموع یا تفاوت جرم دو ماده خواسته شده یا داده می‌شود، کسر تناسب مربوط به جرم به صورت زیر نوشته می‌شود:

مجموع جرم دو ماده	
(جرم مولی ماده ۱ × ضرب ماده ۱) + (جرم مولی ماده ۲ × ضرب ماده ۲)	جرم
تفاوت جرم دو ماده	
(جرم مولی ماده ۱ × ضرب ماده ۱) - (جرم مولی ماده ۲ × ضرب ماده ۲)	جرم مولی × ضرب

بررسی سایر گزینه‌ها: ۱) هر عنصر (چه فلز، چه نافلز و چه شبه‌فلز) طیف نشری خطی ویژه خود را دارد؛ یعنی تعداد خطوط و محل قرارگیری آن‌ها (طول موج خط‌های طیفی) در طیف نشری خطی برای هر عنصر اختصاصی است و مانند اثر انگشت می‌توان از این طیف‌ها برای شناسایی عنصرها استفاده کرد. ۲) در ناحیه مرئی طیف نشری خطی هر یک از اتم‌های H و Li، ۴ خط یا نوار رنگی وجود دارد. ۳) رنگ شعله نمک‌ها به دلیل وجود عنصر فلزی در آن‌هاست، بنابراین با استفاده از تغییر رنگ شعله، می‌توان به وجود عنصر فلزی (نه نافلزی!) در آن پی برد.

۷۸- **گزینه ۴**

نکته تعیین شماره دوره و گروه عنصرها با استفاده از عدد اتمی گازهای نجیب: تعیین شماره دوره: کافی است عدد اتمی عنصر مورد نظر را بین عدد اتمی دو گاز نجیب قرار دهیم، شماره دوره عنصر با شماره دوره گاز نجیب بعد از آن یکسان است.

۱۱۸	۸۶	۵۴	۳۶	۱۸	۱۰	۲
دوره ۷	دوره ۶	دوره ۵	دوره ۴	دوره ۳	دوره ۲	دوره ۱

تعیین شماره گروه: برای تعیین شماره گروه:

۱) اگر عدد اتمی عنصر مورد نظر یک یا دو واحد بیشتر از عدد اتمی یکی از گازهای نجیب باشد، شماره گروه عنصر به ترتیب برابر ۱ یا ۲ است:

۱ = شماره گروه عنصر $X_{19} \Rightarrow 19 - 18 = 1$ مثال: X_{19}
 عدد اتمی Ar_{18}

۲) عنصرهایی که در دو ردیف در پایین جدول قرار دارند (عنصرهای ۵۷ تا ۷۰ و ۸۹ تا ۱۰۲ جدول) را می‌توان متعلق به گروه ۳ دانست.

۳) برای بقیه عنصرها که عدد اتمی آن‌ها بیش از ۲ واحد از عدد اتمی گاز نجیب قبل از خود بیشتر است، باید اختلاف عدد اتمی عنصر و گاز نجیب هم‌دوره‌اش را از عدد کم کنیم:

مثال: $X_{47} \Rightarrow 47 - 36 = 11$ شماره گروه = ۱۸ - ۱۱ = ۷
 عدد اتمی عنصر گاز نجیب هم‌دوره

کاربرد ابتدا شماره دوره و گروه عنصر X در جدول دوره‌ای را به دست می‌آوریم:

تعیین شماره دوره عنصر X: عنصرهایی با عددهای اتمی ۱۹ تا ۳۶ در دوره چهارم قرار دارد؛ بنابراین عنصر X مانند $_{28}Ni$ متعلق به دوره چهارم است.

تعیین شماره گروه عنصر X: عنصر X با نخستین عنصر ساخت بشر، یعنی تکنسیم با عدد اتمی ۴۳ ($_{43}Tc$) هم‌گروه است و هر دو متعلق به گروه ۷ جدول دوره‌ای‌اند.

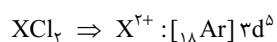
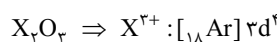
$7 = 43 - 36 = 18 - 11 = 7$ شماره گروه = ۱۸ - ۱۱ = ۷
 عدد اتمی تکنسیم گاز نجیب هم‌دوره

کاربرد با توجه به شماره دوره و گروه عنصر X، آرایش الکترونی آن را می‌نویسیم. عنصر

X در دوره چهارم و گروه ۷ قرار دارد، بنابراین آرایش الکترونی آن به $3d^5 4s^2$ ختم شده و همان منگنز ($_{25}Mn$) است:

کاربرد با توجه به فرمول‌های شیمیایی داده‌شده در گزینه‌ها، بار کاتیون X^{n+} را تشخیص

داده و آرایش الکترونی آن را می‌نویسیم. با توجه به بار یون‌های O^{2-} ، Cl^- و فرمول‌های داده‌شده در گزینه‌ها، X می‌تواند دو نوع کاتیون دو بار مثبت (X^{2+}) و سه بار مثبت (X^{3+}) تشکیل دهد.



تیزبازی با به نگاه به گزینه‌ها می‌شه فهمید که عنصر X یک فلز واسطه است و از آن‌جا که در آرایش الکترونی کاتیون فلزهای واسطه، زیرلایه ns وجود ندارد، ۱) و ۲)

سریع حذف می‌شن. از اون جایی که عنصر X مانند $_{43}Tc$ متعلق به گروه ۷ جدول، آرایش الکترونی آن به $(n-1)d^5 ns^2$ و با توجه به دو گزینه باقی‌مانده آرایش الکترونی کاتیون‌های X^{2+} و X^{3+} آن به ترتیب به $(n-1)d^5$ و $(n-1)d^4$ ختم می‌شه، پس جواب می‌شه ۴) و تمام!

روش استفاده از کسر تبدیل:

$$42750 \times 10^{-4} \text{ g Ba(OH)}_2 \times \frac{1 \text{ mol Ba(OH)}_2}{171 \text{ g Ba(OH)}_2} \times \frac{2 \text{ mol HCl}}{1 \text{ mol Ba(OH)}_2}$$

$$\times \frac{1 \text{ L HCl(aq)}}{4 \text{ mol HCl}} \times \frac{1000 \text{ mL}}{1 \text{ L}} = \frac{21375}{171} > 100 \Rightarrow \text{پ}$$

نکته ۱: برای تبدیل درصد جرمی و غلظت ppm به یکدیگر از رابطه زیر استفاده می‌کنیم:

$$\text{ppm} = \text{درصد جرمی} \times 10^4$$

نکته ۲: برای تبدیل درصد جرمی و غلظت مولار یک محلول به یکدیگر از رابطه زیر استفاده می‌کنیم:

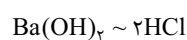
$$M = \frac{\text{درصد جرمی محلول}}{10 \text{ ad} \rightarrow (\text{g/mL})} \rightarrow (\text{غلظت مولار})$$

می‌توانیم ابتدا غلظت مولی محلول باریم هیدروکسید را به دست آورده و سپس محاسبات را انجام بدهیم.

$$\text{غلظت مولی} = \frac{10 \text{ ad}}{\text{جرم مولی}}, a = \text{ppm} \times 10^{-4}$$

$$\Rightarrow \text{Ba(OH)}_2 \text{ غلظت مولی} = \frac{10 \times 21375 \times 10^{-4} \times 1}{171} = \frac{21375}{171} \times 10^{-3} \text{ mol.L}^{-1}$$

روش استفاده از کسر تناسب:



$$\frac{\text{حجم} \times \text{غلظت مولی}}{\text{ضریب}} = \frac{\text{حجم} \times \text{غلظت مولی}}{\text{ضریب}}$$

$$\Rightarrow \frac{21375 \times 10^{-3} \times 200}{171 \times 1} = \frac{2 \times x}{2 \times 1} \Rightarrow x = \frac{21375}{171} > 100 \Rightarrow \text{پ}$$

روش استفاده از کسر تبدیل:

$$200 \text{ mL Ba(OH)}_2(\text{aq}) \times \frac{21375 \times 10^{-3} \text{ mol Ba(OH)}_2}{171}$$

$$\times \frac{2 \text{ mol HCl}}{1 \text{ mol Ba(OH)}_2} \times \frac{1 \text{ L HCl(aq)}}{4 \text{ mol HCl}} = \frac{21375}{171} > 100 \Rightarrow \text{پ}$$

۸۲- گزینه ۱

نکته: در جدول زیر برخی از ویژگی‌های آب (H₂O) در مقایسه با هیدروژن سولفید (H₂S)، در فشار ۱ atm آمده است:

ماده	آب	هیدروژن سولفید
فرمول شیمیایی	H ₂ O	H ₂ S
مدل فضاپرکن		
قطبیت مولکول	قطبی	قطبی
گشتاور دوقطبی (μ)	۱/۸۵D	۰/۹۷D
جرم مولی (g.mol ⁻¹)	۱۸	۳۴
حالت فیزیکی (۲۵ °C)	مایع	گاز
نقطه جوش (°C)	۱۰۰	-۶۰

دلیل تفاوت نقطه جوش مواد مولکولی برمی‌گردد به قدرت نیروهای بین مولکولی آن‌ها! از آنجایی که نیروی بین مولکولی آب (H₂O) برخلاف هیدروژن سولفید (H₂S) از نوع پیوند هیدروژنی است، آب نقطه جوش بالاتری دارد.

$$\Rightarrow \frac{0/125}{(1 \times 32) - (1 \times 28)} = \frac{x}{2 \times 30} = \frac{x'}{2 \times 22/4} \Rightarrow \frac{1}{4} = \frac{x}{2 \times 30} = \frac{x'}{2 \times 22/4}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{2 \times 30}{4} = \frac{15}{2} = 7.5 \text{ g NO} \\ x' = \frac{2 \times 22/4}{4} = \frac{11}{2} = 5.5 \text{ L NO}_2 \end{cases}$$

روش استفاده از کسر تبدیل: برای قسمت اول سؤال با توجه به معادله موازنه‌شده واکنش (I)، به ازای واکنش ۱ مول یا ۲۸ گرم N₂ یا ۱ مول یا ۳۲ گرم O₂، ۲ مول گاز NO حاصل می‌شود؛ یعنی اگر تفاوت جرم دو گاز N₂ و O₂ در آغاز واکنش برابر با ۴ = ۳۲ - ۲۸ گرم باشد، ۲ مول گاز NO خواهیم داشت؛ بنابراین:

$$0/125 \text{ g} \left(\begin{matrix} \text{تفاوت جرم} \\ \text{O}_2 \text{ و N}_2 \end{matrix} \right) \times \frac{2 \text{ mol NO}}{4 \text{ g} \left(\begin{matrix} \text{تفاوت جرم} \\ \text{O}_2 \text{ و N}_2 \end{matrix} \right)} \times \frac{30 \text{ g NO}}{1 \text{ mol NO}} = 1/875 \text{ g NO}$$

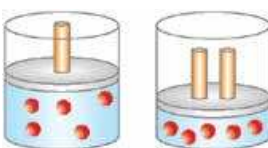
قسمت دوم سؤال هم که یک مسئله استوکیومتری ساده است:

$$1/875 \text{ g NO} \times \frac{1 \text{ mol NO}}{30 \text{ g NO}} \times \frac{2 \text{ mol NO}_2}{2 \text{ mol NO}} \times \frac{22/4 \text{ L NO}_2}{1 \text{ mol NO}_2} = 1/4 \text{ L NO}_2$$

(II) در واکنش

۸۱- گزینه ۳

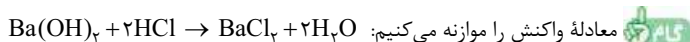
فاصله بین مولکول‌های یک نمونه گازی، به فشار آن بستگی دارد، به طوری که هر چه فشار وارده بر یک گاز بیشتر باشد، فاصله بین مولکول‌های آن کم‌تر شده و حجم نمونه گازی کاهش می‌یابد.



بررسی سایر گزینه‌ها: ۱) گازها حجم معینی ندارند، ولی مایع‌ها حجم معینی دارند. ۲) با افزایش فشار بر یک نمونه گاز، فاصله بین مولکول‌های آن کم می‌شود و نه حجم مولکول‌ها! شکل مقابل را ببینید:

۳) در دما و فشار ثابت، حجم شمار مول‌های یکسانی از دو گاز با هم برابر است نه حجم جرم‌های یکسانی از دو گاز! جرم مولی CO و CO₂ با هم متفاوت است؛ بنابراین در یک گرم از آن‌ها، تعداد مول یکسانی وجود ندارد.

۸۲- گزینه ۴



معادله واکنش را موازنه می‌کنیم: جرم Ba(OH)₂ در محلول را به دست می‌آوریم: با توجه به این که چگالی محلول برابر با ۱ g.mL⁻¹ است، لذا ۲۰۰ میلی‌لیتر محلول، جرمی معادل با ۲۰۰ گرم دارد. با توجه به فرمول ppm می‌توان نوشت:

$$\text{ppm}_{\text{Ba(OH)}_2} = \frac{\text{جرم Ba(OH)}_2}{\text{جرم محلول}} \times 10^6 \Rightarrow 21375 = \frac{x}{200} \times 10^6$$

$$\Rightarrow x = 42750 \times 10^{-4} \text{ g}$$

با استفاده از روابط استوکیومتری از جرم Ba(OH)₂ به حجم محلول HCl می‌رسیم.



استفاده از کسر تناسب: برای Ba(OH)₂ کسر تناسب مربوط به جرم و برای HCl کسر تناسب مربوط به غلظت مولی را می‌نویسیم:

$$\frac{\text{جرم}}{\text{جرم مولی} \times \text{ضریب}} = \frac{\text{حجم} \times \text{غلظت مولی}}{\text{ضریب}} \Rightarrow \frac{42750 \times 10^{-4}}{1 \times 171} = \frac{x}{2 \times 1}$$

$$\Rightarrow x = \frac{21375}{171} \times 10^{-2} \text{ (L)} = \frac{21375}{171} \text{ (mL)} > 100 \Rightarrow \text{پ}$$

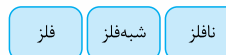
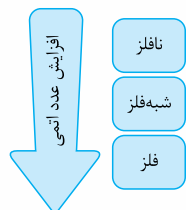
همه عبارت‌های داده شده درست‌اند.

بررسی عبارت‌ها:

- همه شبه‌فلزها در دسته p جدول دوره‌ای قرار دارند.
- می‌دانیم که در یک گروه از بالا به پایین، خاصیت فلزی عنصرها افزایش می‌یابد و گروه‌هایی که دارای هر سه نوع عنصر فلزی، نافلزی و شبه‌فلزی هستند، با عنصرهای نافلزی شروع شده و به عنصرهای فلزی ختم می‌شوند؛ پس عدد اتمی یک عنصر فلزی، به یقین بیشتر از عدد اتمی نافلز هم‌گروه آن است.

برم (Br_۲) تنها نافلز جدول دوره‌ای است. این عنصر در دوره چهارم قرار دارد. تنها عنصر گازی این دوره، گاز نجیب است که واکنش‌پذیری ناچیزی دارد.

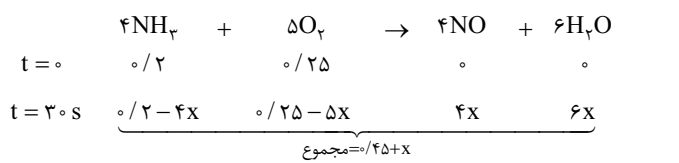
در یک دوره از چپ به راست، خصلت فلزی عنصرها کاهش و خصلت نافلزی آن‌ها افزایش می‌یابد.



بنابراین عنصرهای سمت چپ شبه‌فلز X در یک دوره، یا شبه‌فلز و یا فلز هستند و با توجه به این که خواص فیزیکی شبه‌فلزها بیشتر به فلزها شبیه است، به طور کلی می‌توان گفت که عنصرهای سمت چپ شبه‌فلز X، خواص فیزیکی فلزات را دارند.

۹۰- گزینه ۲

ابتدا معادله موازنه‌شده واکنش را نوشته و جدول تغییرات مقدار مول مواد را می‌نویسیم:



حالا با توجه به رابطه سرعت یکی از مواد (مثلاً NH_۳)، x را حساب می‌کنیم:

سرعت متوسط واکنش از تقسیم سرعت متوسط تولید یا مصرف یک ماده شرکت‌کننده در واکنش بر ضریب استوکیومتری آن در معادله موازنه‌شده به دست می‌آید.

$$aA + bB \rightarrow cC + dD \\
 \bar{R}_{\text{واکنش}} = \frac{\bar{R}(A)}{a} = \frac{\bar{R}(B)}{b} = \frac{\bar{R}(C)}{c} = \frac{\bar{R}(D)}{d}$$

$$\bar{R}_{\text{واکنش}} = \frac{\bar{R}(\text{NH}_3)}{4} \Rightarrow \bar{R}(\text{NH}_3) = 4 \times 0/02 = 0/08 \text{ mol.L}^{-1} \cdot \text{min}^{-1}$$

$$\text{مصرف شده NH}_3 \text{ مول} = 30 \text{ s} \times \frac{1 \text{ min}}{60 \text{ s}} \times \frac{0/08 \text{ mol.L}^{-1}}{1 \text{ min}} \times 2 \text{ L} = 0/08 \text{ mol}$$

$$\Rightarrow 4x = 0/08 \Rightarrow x = 0/02$$

با به دست آمدن پارامتر x، مجموع مول مواد گازی در ظرف که همه مواد شرکت‌کننده در واکنش هستند، را به دست می‌آوریم:

$$0/45 + x = 0/45 + 0/02 = 0/47 \text{ mol}$$

برای قسمت دوم سؤال، با توجه به فرض ثابت بودن سرعت واکنش، کافیست که با توجه به مقدار اولیه و مصرفی یکی از مواد واکنش‌دهنده تا ثانیه ۳۰، مقدار باقی‌مانده آن را به دست بیاوریم و با استفاده از رابطه سرعت، زمان لازم برای مصرف این مقدار باقی‌مانده را حساب کنیم. با گذشت ۳۰ ثانیه، ۰/۰۸ مول آمونیاک مصرف شده و ۰/۱۲ و ۰/۲ - ۰/۰۸ = ۰/۱۲ مول آن باقی مانده است؛ حالا باید ببینیم که چه قدر زمان نیاز است تا ۰/۱۲ مول آمونیاک دیگر هم مصرف شود:

$$? \text{ s} = 0/12 \text{ mol} \times \frac{1 \text{ min}}{0/08 \text{ mol.L}^{-1} \times 2 \text{ L}} \times \frac{60 \text{ s}}{1 \text{ min}} = 45 \text{ s}$$

$$\bar{R}(\text{NH}_3) = \frac{|\Delta n(\text{NH}_3)|}{\Delta t} \Rightarrow 0/08 \times 2 \text{ mol} \cdot \text{min}^{-1}$$

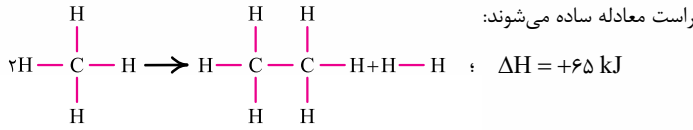
$$= \frac{0/12}{\Delta t} \Rightarrow \Delta t = 0/75 \text{ min} \times \frac{60 \text{ s}}{1 \text{ min}} = 45 \text{ s}$$

همه آلکن‌ها به دلیل داشتن پیوند دوگانه کربن - کربن سیر نشده‌اند؛ بنابراین همه آن‌ها با برم مایع واکنش می‌دهند. به شمار اتم‌های کربن بستگی ندارد که! نفت کوره دارای مولکول‌های بزرگ‌تری نسبت به نفت سفید است و نقطه جوش بالاتری دارد؛ بنابراین اگر در یک دمای مشخص، نفت کوره به صورت بخار باشد، یعنی دما بالاتر از نقطه جوش نفت کوره باشد، قطعاً آن دما، بالاتر از نقطه جوش نفت سفید نیز خواهد بود و نفت سفید هم به صورت بخار است.

نفت کوره < گازوئیل < نفت سفید < بنزین و خوراک پتروشیمی مقایسه اندازه و جرم مولکول در برج تقطیر، از پایین به بالا، دما کاهش می‌یابد. از طرفی در ارتفاعات بالاتر برج، مولکول‌های سبک‌تر (مانند بنزین و خوراک پتروشیمی) خارج می‌شوند؛ پس روند تغییر دما و اندازه مولکول‌های خروجی، مانند یکدیگر است.

۸۸- گزینه ۲

در سمت چپ معادله، ۸ پیوند C-H داریم که ۶‌تای آن‌ها، با پیوندهای C-H سمت راست معادله ساده می‌شوند:



نکته

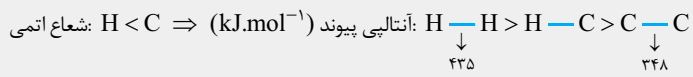
$$\Delta H_{\text{واکنش}} = [\text{مجموع آنتالپی پیوندها در مواد واکنش‌دهنده}] - [\text{مجموع آنتالپی پیوندها در مواد فرآورده}]$$

$$\Delta H_{\text{واکنش}} = [2\Delta H(\text{C}-\text{H})] - [\Delta H(\text{C}-\text{C}) + \Delta H(\text{H}-\text{H})]$$

$$\Rightarrow 65 = 2\Delta H(\text{C}-\text{H}) - 348 - 435 \Rightarrow 2\Delta H(\text{C}-\text{H}) = 848$$

$$\Rightarrow \Delta H(\text{C}-\text{H}) = 424 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$$

تیزبازی با توجه به گزینه‌ها، در این سؤال می‌شه بدون حساب کتاب و سریع‌تر به جواب رسید. می‌دانیم که به طور کلی، هر چه شعاع اتم‌های تشکیل‌دهنده پیوند کووالانسی، کوچک‌تر باشند، انرژی لازم برای شکستن آن و در نتیجه آنتالپی پیوند بیشتر است؛ بنابراین:



پس میانگین آنتالپی پیوند C-H که سؤال از ما خواسته، عددی بزرگ‌تر از ۳۴۸ (رد ۳) و کوچک‌تر از ۴۳۵ (رد ۱) است که می‌شه ۲ و تمام!

۸۹- گزینه ۴

درسی نامه شبه‌فلزها:

همه شبه‌فلزها به دسته p جدول دوره‌ای تعلق دارند. این عنصرها در جدول دوره‌ای همانند مرزی بین فلزها و نافلزها قرار دارند.

عنصرهایی که در سمت راست این شبه‌فلزها قرار گرفته‌اند، نافلز و عنصرهایی که در سمت چپ این شبه‌فلزها قرار گرفته‌اند، فلز هستند (البته به جز هیدروژن که یک نافلز است).
براندید و آله باشید! که در هر دوره (به جز دوره اول که شامل H و He است و دوره هفتم که چند عنصر با ویژگی‌های نامشخص دارد) حداقل یک عنصر شبه‌فلز وجود دارد.



روند تغییر خصلت فلزی و نافلزی در عناصر جدول دوره‌ای

- خصلت فلزی و واکنش‌پذیری فلزها کاهش می‌یابد.
 - خصلت نافلزی و واکنش‌پذیری نافلزها افزایش می‌یابد.
 - خصلت فلزی و واکنش‌پذیری فلزها افزایش می‌یابد.
 - خصلت نافلزی و واکنش‌پذیری نافلزها کاهش می‌یابد.
- در یک دوره از چپ به راست
- در یک گروه از بالا به پایین

سوزاندن الیاف آهن در محفظه اکسیژن: تأثیر غلظت بر سرعت واکنش: الیاف آهن گداخته در هوا نمی‌سوزند ولی در محفظه اکسیژن خالص می‌سوزند.
سوزاندن گرد آهن از طریق پاشیدن آن بر روی شعله: تأثیر سطح تماس بر سرعت واکنش: گرد آهن پاشیده‌شده بر شعله به خاطر سطح تماس بالا با حرارت شعله می‌سوزد.

۹۴- گزینه ۲

عبارت‌های (الف) و (ت) درست‌اند.

بررسی عبارت‌ها: (الف) ترکیب داده‌شده دارای ۱۶ اتم کربن و ۱۶ پیوند C-H است. **هواستون** باشد که ترکیب مورد نظر در مجموع ۱۷ اتم هیدروژن دارد که یکی از آن‌ها به نیتروژن و ۱۶ اتای دیگر به کربن متصل‌اند.

تله در ساختار ترکیب داده‌شده، اتم گوگردی وجود دارد که ۴ پیوند اشتراکی تشکیل داده است؛ بنابراین اگر می‌خواهید از فرمول برای تعیین شمار اتم‌های هیدروژن استفاده کنید، باید هواستون باشد که برخلاف اتم اکسیژن، اتم گوگرد در این جا (به خاطر ۴ پیوند اشتراکی) بر روی شمار اتم‌های هیدروژن تأثیر دارد و در فرمول کلی، به خاطر گوگرد، ۲ اتم هیدروژن را نیز باید اضافه کنید؛ یعنی:

$$\begin{aligned} &(\text{تعداد حلقه‌ها} + \text{تعداد پیوندهای دوگانه}) - 2 = (2n + 2) = \text{شمار اتم‌های هیدروژن} \\ &2 + (\text{تعداد اتم‌های نیتروژن}) + (\text{تعداد پیوندهای سه‌گانه}) - 4 \\ &= 2 + 2 - 2(8 + 3) + 3 + 2 = 17 \end{aligned}$$

اگر این ۲ اتم هیدروژن را محاسبه نکنید، شمار اتم‌های هیدروژن ۱۵ تا می‌شود و عبارت (الف) رو به اشتباه غلط در نظر می‌گیرید. پس بهتره، در مواردی که ساختار ترکیب آلی دارای گروه‌های جدید (مثل —S—) است، شمار اتم‌های H رو از روی شکل به دست بیارید نه فرمول.

(ب) یکی از حلقه‌ها، ۵ کربنی خواهد شد، در حالی که حلقه بنزنی (بنزین)، ۶ اتم کربن دارد.

(پ) مولکول داده‌شده، ۱۶ اتم کربن دارد، در حالی که آلکان مورد نظر، ۱۴ کربنی است.
۳، ۶ - دی‌تیل - ۴ - متیل نونان
۹ ۱ ۲×۲=۴
۹+۱+۴=۱۴ (ت)

نکته اکسندترین و کاهنده‌ترین عنصرهای جدول دوره‌ای:

گونه اکسند	تمایل به گرفتن الکترون	دارای E ⁺ بزرگ‌تر	اگر عنصر نافلز باشد نافلز واکنش پذیرتر
F > O > N > Cl > Br > I > S > C > H			
گونه کاهنده	تمایل به از دست دادن الکترون	دارای E ⁻ کوچک‌تر	در میان عنصرها، کاهنده‌ترین Li عنصر است.

در ساختار مولکول داده‌شده، ۸ پیوند دوگانه وجود دارد. از طرفی از بین اتم‌های این مولکول (C, N, H, S, O)، اکسیژن بیشترین قدرت اکسندگی را دارد. دو اتم اکسیژن در مجموع دارای ۴ جفت الکترون ناپیوندی هستند:

۹۵- گزینه ۴

مقدار pH با غلظت H⁺ رابطه وارونه دارد؛ به طوری که هر چه غلظت یون هیدرونیوم (H₃O⁺ = H⁺) در محلولی بیشتر باشد، آن محلول اسیدی‌تر است و pH کم‌تری دارد.

$$\text{pH} = -\log[\text{H}^+] \Rightarrow [\text{H}^+] \uparrow \Rightarrow \text{pH} \downarrow$$

دقت کنید که در محلول‌های اسیدهای تک‌پروتون‌دار (HX)، [H⁺] با [X⁻] برابر است؛ بنابراین:

$$\text{HA} > \text{HX} \quad \text{مقایسه} [\text{H}^+] \text{ در محلول‌های اسیدی}$$

$$\Rightarrow \text{pH}(\text{HA}) < \text{pH}(\text{HX}) \quad \text{مقایسه} \text{pH} \text{ محلول‌های اسیدی}$$

بررسی سایر گزینه‌ها: ۱) هیدروفلوئوریک اسید، یک اسید ضعیف است و [H⁺] در آن کم‌تر از [HF] است. ۲) گاز هیدروژن کلرید (HCl) یک ماده مولکولی است و به کار بردن واژه «تفکیک یونی» برای آن نادرست است.

۹۱- گزینه ۱

درس‌نامه در رابطه با سرعت واکنش نکات زیر را به خاطر بسپاریم:

۱) سرعت متوسط تولید یا مصرف یک ماده، با ضریب استوکیومتری آن ماده در معادله موازنه‌شده واکنش، متناسب است. برای مثال در واکنش $A + 2B \rightarrow C$ ، سرعت متوسط مصرف B در یک بازه زمانی خاص، ۲ برابر سرعت متوسط مصرف A است.

۲) شیب نمودار «مول یا غلظت - زمان»، بیانگر سرعت متوسط تولید یا مصرف یک ماده بوده و متناسب با ضریب استوکیومتری آن ماده است.

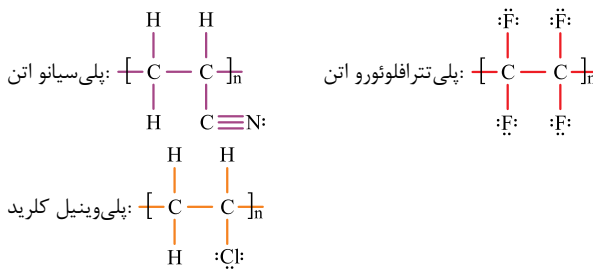
۳) سرعت متوسط واکنش از تقسیم سرعت متوسط تولید یا مصرف یک ماده بر ضریب استوکیومتری آن در معادله موازنه‌شده واکنش، به دست می‌آید. برای مثال در واکنش $2A + C \rightarrow 2B$ داریم:

$$\bar{R} = \frac{\bar{R}_A}{2} = \frac{\bar{R}_C}{1} = \frac{\bar{R}_B}{2}$$

با توجه به درس‌نامه بالا، همه عبارت‌های داده‌شده، درست و از مفاهیم اولیه سرعت واکنش هستند که باید بلدشون باشید!

۹۲- گزینه ۳

در ساختار هر سه پلیمر گفته‌شده، جفت الکترون ناپیوندی وجود دارد:

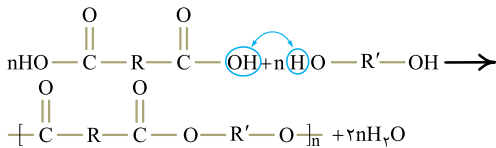


بررسی سایر گزینه‌ها: ۱) به طور کلی، تعداد مونومرهایی که در ساختار هر مولکول پلیمر به هم متصل شده‌اند، مشخص نیست؛ به همین دلیل، برای پلیمرها نمی‌توان فرمول مولکولی دقیقی نوشت.

اگر به شکل الیاف پنبه هم دقت کنید، می‌بینید که طول زنجیرهای آن با هم برابر نیست!



۲) روغن زیتون برخلاف پلی‌اتن و انسولین، پلیمر نیست و جرم مولی آن از هر دو ماده کم‌تر است. ۳) در تشکیل پلیمرها، لزوماً اتم‌های کربن مونومرها به هم متصل نمی‌شود؛ مثلاً در تشکیل پلی‌استرها از دی‌اسیدها و دی‌الکل‌ها، اتم کربن به اتم اکسیژن متصل شده و گروه عاملی استری را می‌سازد؛ به عبارت دیگر اتم اکسیژن باعث اتصال مونومرها به یکدیگر می‌شود.



مشاوره ۱، ۲ و ۴ این سؤال، عبارت‌های روتینی نیستند ولی اگر به مفاهیم اصلی کتاب درسی تسلط کافی داشته باشی، با خواندن ۳، می‌تونی به یقین درستی اون رو تأیید کنی.

۹۳- گزینه ۴

افزودن $\text{I}^-(\text{aq})$ به محلول هیدروژن پراکسید برای تجزیه آن: تأثیر استفاده از کاتالیزگر $2\text{H}_2\text{O}_2(\text{aq}) \rightarrow 2\text{H}_2\text{O}(\text{l}) + \text{O}_2(\text{g})$



تله اگر در این گزینه به جای واژه «تفکیک یونی» از «فرایند یونیده شدن» استفاده می‌شد، این عبارت کاملاً درست بود؛ بنابراین اگر دقت کافی نداشته باشی و همه گزینه‌ها رو بررسی نکنی، این گزینه می‌تونه خیلی راحت و شیک، تو رو تار مابنده!

با افزایش شمار اتم‌های کربن در کربوکسیلیک اسیدها، ثابت یونش و قدرت اسیدی آن‌ها کاهش می‌یابد؛ بنابراین در شرایط یکسان، خاصیت اسیدی محلول فرمیک اسید (HCOOH) بیشتر از محلول استیک اسید (CH₃COOH) است.

۹۶- گزینه ۴

عبارت‌های (الف) و (پ) درست‌اند.

بررسی عبارت‌ها:

$$\begin{cases} [\text{OH}^-] = M\alpha = 0.1 \times 0.16 = 1.6 \times 10^{-2} \\ [\text{H}^+] = \frac{10^{-14}}{[\text{OH}^-]} = \frac{10^{-14}}{1.6 \times 10^{-2}} = 6.25 \times 10^{-13} \end{cases} \quad (\text{الف})$$

(ب) با افزایش شمار اتم‌های کربن، بخش ناقطبی بزرگ‌تر شده و از میزان انحلال‌پذیری آن در آب کاسته می‌شود. در نتیجه پاک‌کنندگی آن نیز کاهش می‌یابد.
(پ) انحلال Li₂O و N₂O₅ در آب به صورت زیر است:



با انحلال مول‌های برابر از این مواد در حجم برابر آب، [H⁺] = [OH⁻] خواهد بود و محلولی با pH خنثی حاصل می‌شود.

(ت) قسمت اول درست است و با افزایش غلظت مولی هر اسیدی (قوی یا ضعیف)، [H⁺] بالا رفته و pH کاهش می‌یابد اما بر روی ثابت تعادل (ثابت یونش) فقط و فقط دما تأثیرگذار است و پس!

۹۷- گزینه ۲

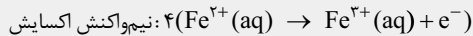
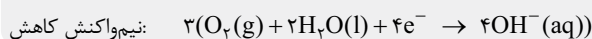
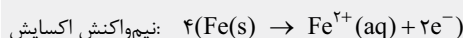
استراتژی اول رابطه ثابت یونش رو برای هر دو اسید بنویس (می‌دونی که برای محاسبه ثابت تعادل، غلظت تعادلی مواد در رابطه ثابت تعادل قرار می‌گیره)، از اون‌جا که سؤال $\frac{K_a(\text{HD})}{K_a(\text{HA})}$ رو بهت داده، رابطه ثابت یونش HD رو بر HA تقسیم و کسر حاصل رو ساده کن. در نهایت از دو طرف معادله -log بگیر تا [H⁺] در رابطه به pH تبدیل شه و خواسته مسئله رو بتونی به دست بیاری.

از رابطه محاسبه ثابت یونش استفاده می‌کنیم:

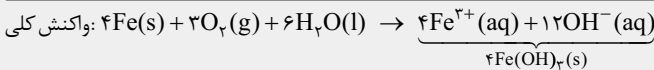
$$\begin{aligned} K_a &= \frac{[\text{H}^+][\text{X}^-]}{[\text{HX}]} \xrightarrow{\text{یکسان}=\text{تعدالی}[\text{HX}]} \frac{K_a(\text{HD})}{K_a(\text{HA})} = \left(\frac{[\text{H}^+]_{\text{HD}}}{[\text{H}^+]_{\text{HA}}} \right)^2 \\ \Rightarrow 10^{-6} &= \left(\frac{[\text{H}^+]_{\text{HD}}}{[\text{H}^+]_{\text{HA}}} \right)^2 \Rightarrow \frac{[\text{H}^+]_{\text{HD}}}{[\text{H}^+]_{\text{HA}}} = 10^{-3} \Rightarrow [\text{H}^+]_{\text{HD}} = 10^{-3} [\text{H}^+]_{\text{HA}} \\ \xrightarrow{-\log \text{ می‌گیریم}} & \quad -\log[\text{H}^+]_{\text{HD}} = -\log 10^{-3} - \log[\text{H}^+]_{\text{HA}} \\ & \quad \text{pH}(\text{HD}) = 3 - \text{pH}(\text{HA}) \\ \Rightarrow \text{pH}(\text{HA}) &= \text{pH}(\text{HD}) - 3 \end{aligned}$$

۹۸- گزینه ۳

درس‌نامه هنگامی که یک قطعه آهن در هوای مرطوب قرار می‌گیرد، همانند سلول‌های گالوانی یک واکنش اکسایش - کاهش خودبه‌خودی (E^o سلول > 0) در حضور O₂ در سطح آن رخ می‌دهد. نیم‌واکنش‌های اکسایش و کاهش و واکنش کلی فرایند زنگ‌زدن آهن به صورت زیر است:



آهن (II) به آهن (III)

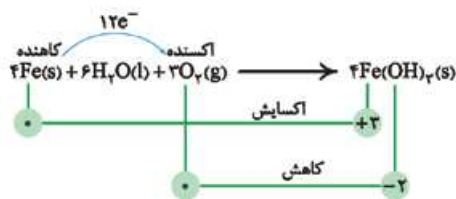
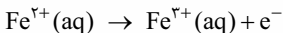
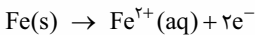


به‌جز عبارت دوم، بقیه عبارت‌ها درست‌اند.

بررسی عبارت‌ها:

واکنش‌های طبیعی و خودبه‌خودی دارای $E^o > 0$ هستند.

فراورده نیم‌واکنش‌های اکسایش، کاتیون است نه آنیون!



در واکنش زنگ‌زدن آهن، در نهایت Fe به Fe³⁺ تبدیل می‌شود؛ بنابراین می‌توان گفت به ازای مصرف هر مول آهن، ۳ مول الکترون مبادله می‌شود.

۹۹- گزینه ۱

درس‌نامه رابطه ثابت یونش و درجه یونش:

اگر درجه یونش اسید ضعیف HX برابر α و غلظت اولیه اسید برابر M باشد، اسید به اندازه $M\alpha$ یونیده شده و غلظت تعادلی آن برابر با $M - M\alpha$ خواهد بود؛ پس می‌توان نوشت:

	HX	\rightleftharpoons	H ⁺	+	X ⁻
غلظت اولیه:	M		0		0
تغییر غلظت:	-M α		+M α		+M α
غلظت تعادلی:	M - M α		M α		M α

$$K_a = \frac{[\text{H}^+][\text{X}^-]}{[\text{HX}]} = \frac{(M\alpha)(M\alpha)}{M - M\alpha} = \frac{M^2\alpha^2}{M(1 - \alpha)} = \frac{M\alpha^2}{1 - \alpha}$$

$$\Rightarrow K_a = \frac{M\alpha^2}{1 - \alpha}, \quad K_a = \frac{[\text{H}^+]^2}{M - [\text{H}^+]}$$

برای اسیدهای خیلی ضعیف (معمولاً با K_a کوچک‌تر از 10^{-5}) و با مقادیر کم α (معمولاً کم‌تر از 0.05)، می‌توان در عبارت « $1 - \alpha$ » از α صرف نظر کرده و از رابطه تقریبی زیر استفاده کرد:

$$K_a = M\alpha^2$$

بررسی گزینه‌ها: با ۴ برابر شدن حجم محلول، غلظت مولی آن $\frac{1}{4}$ برابر می‌شود.

توجه به این‌که K_a اسید کوچک است، می‌توانیم از رابطه تقریبی $K_a = M\alpha^2$ استفاده کنیم:

$$K_a = \text{ثابت} \Rightarrow M_1\alpha_1^2 = M_2\alpha_2^2 \Rightarrow \frac{\alpha_2}{\alpha_1} = \sqrt{\frac{M_1}{M_2}} = \sqrt{\frac{4}{1}} = 2 \Rightarrow \alpha_2 = 2\alpha_1$$

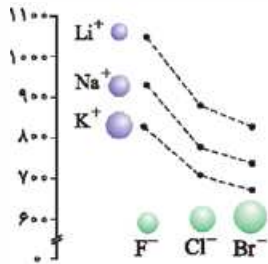
گزینه درست همین‌ها لورفت!

با دو برابر کردن جرم و در نتیجه دو برابر شدن تعداد مول اسید و هم‌چنین نصف کردن حجم محلول، غلظت محلول ۴ برابر می‌شود؛ چون غلظت تغییر کرده، pH محلول نیز تغییر خواهد کرد.

$$\text{غلظت محلول} = \frac{\text{برابر } \uparrow \text{ مول حل‌شونده}}{\text{برابر } \downarrow \text{ حجم محلول}} = 4 \text{ برابر}$$

ابتدا باید غلظت مولی محلول را حساب کنیم:

$$\text{غلظت مولی} = \frac{\frac{1 \text{ g}}{50 \text{ g.mol}^{-1}}}{\frac{400}{1000} \text{ L}} = 0.5 \text{ mol.L}^{-1}$$



۲) آنیون‌های سازنده یک دوره، بارهای متفاوتی دارند. اگر عناصر سازنده آنیون‌های a و b، در یک دوره بود، به دلیل اختلاف بار آن‌ها، تفاوت آنتالپی فروپاشی آن‌ها خیلی بیشتر از اینی می‌شد که در نمودار نشان داده شده! **۳) نه اصلاً! مثلاً c و e** به ترتیب می‌توانند MgO و CaO باشند که بار یون‌های هر دو، $+2$ و -2 است اما به دلیل کم‌تر بودن شعاع Mg^{2+} ، آنتالپی فروپاشی ترکیب e بیشتر از c شده است. **۴) آنتالپی فروپاشی ترکیب‌های d و b** بسیار به هم نزدیک است؛ بنابراین اختلاف بار یون‌های سازنده آن‌ها را بی‌فایده می‌شیم و فقط می‌ریزم سراغ مقایسه شعاع یون‌ها! می‌دانیم که آنتالپی فروپاشی شبکه با شعاع یون‌ها رابطه وارونه دارد. با توجه به این که آنتالپی فروپاشی d از b بیشتر و شعاع آنیون آن بیشتر است، پس حتماً باید شعاع کاتیون آن کم‌تر باشد.

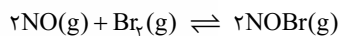
مشاوره این سؤال، چالشی‌ترین سؤال این کنکور بوده، سر جلسه آزمون این جور سؤال‌ها رو باید حتماً در دور اول رها کنید و در آخر زمان داشتید بیاید سراغش.

گزینه ۲ - ۱۰۲

۱۰۲ ابتدا شمار مول‌های تعادلی مواد (m) و سپس غلظت‌های تعادلی ([]) آن‌ها را حساب می‌کنیم:

$$\left\{ \begin{aligned} n_{NOBr} &= \frac{66}{110} = 0.6 \text{ mol} \\ [NOBr] &= \frac{0.6}{3} = 0.2 \text{ M} \end{aligned} \right\} \left\{ \begin{aligned} n_{NO} &= \frac{18}{30} = 0.6 \text{ mol} \\ [NO] &= \frac{0.6}{3} = 0.2 \text{ M} \end{aligned} \right\} \left\{ \begin{aligned} n_{Br_2} &= \frac{24}{160} = 0.15 \text{ mol} \\ [Br_2] &= \frac{0.15}{3} = 0.05 \text{ M} \end{aligned} \right.$$

حالا از رابطه ثابت تعادل استفاده می‌کنیم:



$$K = \frac{[NOBr]^2}{[NO]^2 [Br_2]} = \frac{(0.2)^2}{(0.2)^2 \times 0.05} = 20$$

۱۰۳ برای قسمت دوم سؤال، با توجه به اطلاعات داده شده میزان مصرفی Br_2 ۶۰٪ بوده؛ پس ۴۰٪ از آن باقی مانده است یعنی مقدار Br_2 در حال تعادل، ۴۰٪ مقدار اولیه‌اش است.

$$\frac{40}{100} \times n_{Br_2} = 0.15 \text{ mol} \Rightarrow n_{Br_2} = \frac{0.15 \times 100}{40} = 0.375 \text{ mol}$$

۱۰۴ اگر به اشتباه، ۶۰٪ مقدار آغازی Br_2 را برابر با مقدار تعادلی آن (۰.۱۵ mol) در نظر بگیریم به عدد ۲۵/۰ و گزینه اشتباه ۱ می‌رسید.

گزینه ۳ - ۱۰۳

انرژی فعال‌سازی سوختن گاز هیدروژن در هوا و در دمای اتاق تأمین نمی‌شود اما این انرژی برای فسفر سفید تأمین شده و فسفر سفید برخلاف گاز هیدروژن، در هوا و در دمای اتاق می‌سوزد. سوختن گاز هیدروژن < سوختن فسفر سفید: E_a در هوا و در دمای اتاق

بررسی سایر گزینه‌ها:

۱) محدوده طول موج $10^5 - 10^3$ nm، مربوط به محدوده پرتوهای فرورسوخ است. گروه‌های عاملی می‌توانند بخش معینی از پرتوهای الکترومغناطیسی در این محدوده را جذب کنند؛ به همین دلیل برای شناسایی گروه‌های عاملی از طیف‌سنجی فرورسوخ استفاده می‌شود.

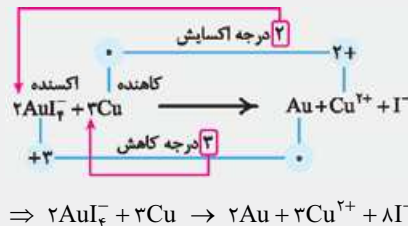
$$K_a = \frac{[H^+]^2}{M} \Rightarrow [H^+]^2 = 10^{-5} \times 4 \times 10^{-1} = 4 \times 10^{-6} \Rightarrow [H^+] = 2 \times 10^{-3} \text{ mol.L}^{-1}$$

$$[OH^-] = \frac{10^{-14}}{[H^+]} = \frac{10^{-14}}{2 \times 10^{-3}} = 5 \times 10^{-12} \text{ mol.L}^{-1}$$

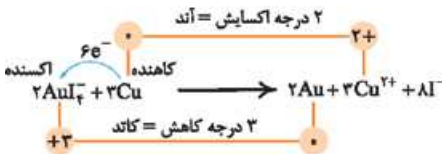
$$pH = -\log[H^+] = -\log(2 \times 10^{-3}) = 3 - \log 2 = 3 - 0.3 = 2.7$$

گزینه ۱ - ۱۰۰

درس‌نامه موازنه به روش تغییر عدد اکسایش: به طور کلی برای موازنه واکنش‌های اکسایش-کاهش، ابتدا تغییر عدد اکسایش اتم‌ها را حساب می‌کنیم، سپس مقدار تغییر عدد اکسایش گونه کاهنده را ضرب گونه اکسنده و مقدار تغییر عدد اکسایش گونه اکسنده را ضرب گونه کاهنده قرار می‌دهیم و در آخر، با توجه به ضرایبی که معلوم هستند، ضرایب بقیه گونه‌ها را تعیین می‌کنیم. **موازنه** باشد که اگر عنصری که عدد اکسایش آن تغییر کرده است، دارای زیروند باشد، باید تغییر عدد اکسایش آن را در زیروندش ضرب کنیم و سپس جابه‌جایی تغییر عدد اکسایش‌ها را انجام بدهیم.



همه عبارت‌های داده شده درست‌اند. معادله موازنه شده واکنش به صورت زیر است:



بررسی عبارت‌ها:

عبارت اول: $E^\circ = E^\circ(\text{کاتد}) - E^\circ(\text{آند}) = 0.56 - 0.34 = 0.22$

$\Rightarrow E^\circ > 0$ (واکنش) \Rightarrow خودبه‌خودی و انجام‌پذیر

عبارت دوم:

نکته

تغییر عدد اکسایش یک اتم \times زیروند اتم اکسنده یا کاهنده \times ضریب = تعداد مول الکترون مبادله شده

تعداد مول الکترون‌های مبادله شده برابر است با:

$$3 \times 1 \times 2 = 6e^-$$

$$2 \times 1 \times 3 = 6e^-$$

عبارت سوم: یون AuI_3 با گرفتن الکترون از Cu، به عنوان اکسنده عمل می‌کند.

عبارت چهارم: مجموع ضرایب = $2 + 3 + 2 + 3 + 6 = 18$

گزینه ۴ - ۱۰۱

درس‌نامه تکنیک مقایسه آنتالپی فروپاشی شبکه بلور ترکیب‌های یونی:

به طور کلی برای مقایسه ΔH فروپاشی شبکه ترکیب‌های یونی می‌توان از روش زیر استفاده کرد:

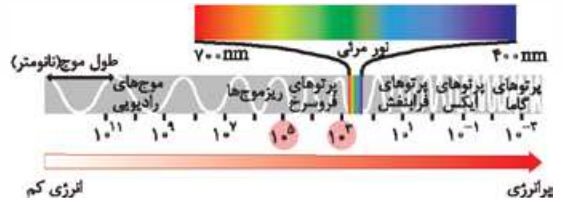
۱۰۱ هر چه مجموع قدرمطلق بار یک کاتیون و یک آنیون در یک ترکیب یونی بزرگ‌تر باشد، ΔH فروپاشی شبکه آن بزرگ‌تر است.

۱۰۲ اگر مجموع قدرمطلق بار یک کاتیون و یک آنیون برای دو ترکیب یونی برابر باشد، هر چه شعاع یون‌های ترکیب یونی کوچک‌تر باشد، ΔH فروپاشی آن بزرگ‌تر است.

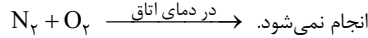
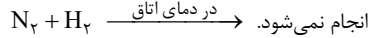
با توجه به نمودار، مقایسه آنتالپی فروپاشی ۵ ترکیب داده شده به صورت $e > c > a > d > b$ است.

بررسی گزینه‌ها: ۱) آنتالپی فروپاشی ترکیب‌های a، b، d، کم‌تر از 1000 kJ.mol^{-1} است.

با توجه به نمودار کتاب درسی، آنتالپی فروپاشی اغلب هالیدهای فلزهای قلیایی نیز کم‌تر از 1000 kJ.mol^{-1} است؛ پس آنیون ترکیب a می‌تواند یک هالید باشد.

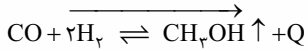


انرژی فعال‌سازی واکنش‌های گفته‌شده، بالا بوده و در دمای اتاق انجام نمی‌شود.

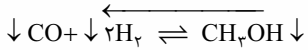


اصلاً تعریف طیف همینه!

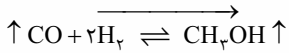
کاهش دما: چون واکنش گرماده است، کاهش دما تعادل را در جهت رفت جابه‌جا می‌کند.



خارج کردن ۵۰ درصد از H_2 و CO به صورت هم‌زمان: با کاهش مقدار H_2 و CO ، تعادل در جهت برگشت جابه‌جا می‌شود.



تزیق CO به ظرف واکنش: با افزایش مقدار CO ، تعادل در جهت رفت و مصرف آن

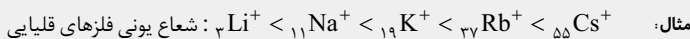


گزینه ۱-۱۰۵

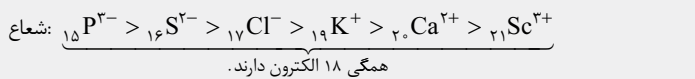
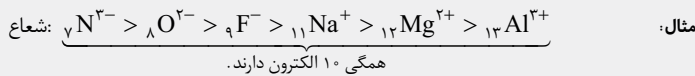


درس‌نامه روند تغییر شعاع یونی در جدول دوره‌ای:

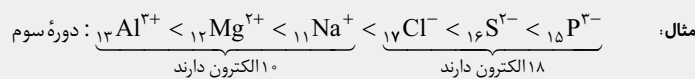
در یک گروه جدول دوره‌ای، درست مانند شعاع اتمی، شعاع یونی هم از بالا به پایین افزایش می‌یابد.



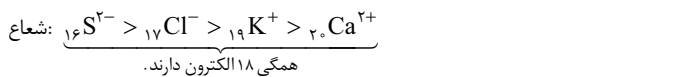
مثال: $I^- > Br^- > Cl^- > F^-$: شعاع یونی هالیدها
در یون‌های هم‌الکترون، هر چه عدد اتمی بیشتر باشد، شعاع یون کوچک‌تر است.



همان‌طور که دیدید در یون‌های هم‌الکترون، شعاع آنیون‌ها از شعاع کاتیون‌ها بزرگ‌تر است.
در دوره‌های دوم و سوم، کاتیون‌ها نسبت به آنیون‌ها یک لایه الکترونی کم‌تر دارند، به همین دلیل، شعاع کاتیون‌ها از شعاع آنیون‌ها کوچک‌تر است.



یون‌های داده‌شده در ①، هم‌الکترون هستند. در یون‌های هم‌الکترون، هر چه عدد اتمی بیشتر باشد، شعاع یون کوچک‌تر است:

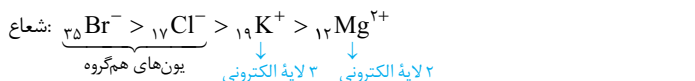


بررسی سایر گزینه‌ها:

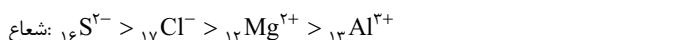
برای رد هر گزینه، دنبال ۱ مورد غلط می‌گردیم.

دقت کنید که شعاع K^+ با داشتن یک لایه الکترونی بیشتر، از شعاع Mg^{2+} بیشتر است.

هم‌الکترون



یون‌های داده‌شده در این گزینه، همگی در دوره سوم قرار دارند (هم‌دوره‌اند). در دوره سوم، شعاع کاتیون‌ها از شعاع آنیون‌ها کوچک‌تر است:



در یون‌های هم‌الکترون، با افزایش عدد اتمی، شعاع یونی کوچک‌تر می‌شود:



مشاوره برای این مدل سؤال‌های مقایسه‌ای، بهتره با رد گزینه به پاسخ صحیح برسید؛ یعنی در هر گزینه، یک مورد غلط رو پیدا کنید و گزینه رو حذف کنید.

گزینه ۲-۱۰۴



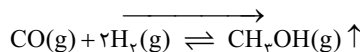
نکته اثر عوامل مختلف بر تعادل:

عامل	عکس‌العمل تعادل به تغییر	چگونگی تغییر ثابت تعادل (K) با جابه‌جاشدن تعادل
تغییر غلظت	افزایش غلظت یک ماده	جابه‌جایی در جهت مصرف آن ماده
	کاهش غلظت یک ماده	جابه‌جایی در جهت تولید آن ماده
تغییر حجم (فشار)	افزایش حجم (کاهش فشار) سامانه	جابه‌جایی در جهت شمار مول‌های گازی بیشتر
	کاهش حجم (افزایش فشار) سامانه	جابه‌جایی در جهت شمار مول‌های گازی کمتر
واکنش‌های گرماده	کاهش دما	جابه‌جایی در جهت تولید گرما (جهت رفت)
	افزایش دما	جابه‌جایی در جهت مصرف گرما (جهت برگشت)
تغییر دما	کاهش دما	جابه‌جایی در جهت تولید گرما (جهت برگشت)
	افزایش دما	جابه‌جایی در جهت مصرف گرما (جهت رفت)
واکنش‌های گرماگیر	افزایش دما	جابه‌جایی در جهت تولید گرما (جهت برگشت)

هر عاملی که سبب جابه‌جایی تعادل در جهت رفت شود، مقدار فراورده را افزایش خواهد داد.

بررسی همه موارد:

افزایش فشار: تعادل را به سمت مول‌های گازی کم‌تر جابه‌جا می‌کند:



خارج کردن ۵۰ درصد از CH_3OH : $CO(g) + 2H_2(g) \rightleftharpoons CH_3OH(g) \downarrow$

دقت کنید که در این سؤال منظور طراح فقط جابه‌جایی تعادل در جهت رفت

(افزایش مقدار فراورده) است، نه افزایش مقدار فراورده نسبت به تعادل اولیه!

اگر به اشتباه مقدار فراورده رو پس از اعمال تغییر نسبت به تعادل اولیه بررسی کنید، این مورد رو غلط در نظر می‌گیرید؛ زیرا با خارج کردن ۵۰٪ CH_3OH (فراورده) از تعادل اولیه، مقدار فراورده در تعادل جدید نسبت به تعادل اولیه، کم‌تر می‌شود.