# مقدمهٔ ناشر

**سلام به دوستان عزیزمون، دانش‌آموزای خوب رشتهٔ انسانی**

دقت کردید وقتی سطح یه مسابقه بالا می‌ره، قواعد پیروزی تو اون مسابقه مدام پیچیده‌تر می‌شه و استراتژی‌های شرکت‌کننده‌ها مدام متنوع‌تر؟ مثلاً یه جمع دوستانه که قرار می‌ذارن با هم برن فوتبال، احتمالاً نیم ساعت به مسابقه یه کفش و لباسی برمی‌دارن و می‌رن تو میدون و تازه سرِ بازی می‌فهمن کی به کیه و کی تو تیم کیه و پست هر کسی چیه، منتها وقتی همین مسابقه، بشه مسابقهٔ دوتا تیم باشگاهی معتبر تو یه جام مهم، از ماه‌ها قبلش کلی تاکتیک و استراتژی تعیین می‌شه، بازی‌های تیم خودی و حریف آنالیز می‌شه، برای هر بازیکن وظایف مشخصی تعریف می‌شه و بازیکن‌ها مدت‌ها برای هر کدوم از این تاکتیک‌ها تمرین می‌کنن.

حکایت کنکور انسانی هم همینه، ما که چندین ساله کنار دانش‌آموزای انسانی هستیم و سعی می‌کنیم تو مسیر پر پیچ و خم کنکور همه‌جوره کمکشون کنیم، به وضوح دیدیم که هم کنکور و هم دانش‌آموزای انسانی سال به سال جدی‌تر شدن و سطحشون بالاتر رفته. دانش‌آموزای انسانی هر سال آماده‌تر و با داشته‌های بیشتری رفتن سراغ مسابقهٔ مهم کنکور.

طبیعتاً هر چه‌قدر این رقابت پیچیده‌تر می‌شه، نیازها و چالش‌ها هم متنوع‌تر می‌شه. ما و شما که تو این مسیر همراه همیم باید خودمون رو برای این نیازها و چالش‌های جدید آماده کنیم، ما با پیش‌بینی چالش‌های جدید مسیر کنکور و آماده‌کردن محتوای متناسب با اون‌ها و شما با انتخاب بهترین محتواها و خوندن دقیق و درستشون.

سبد فصل‌آزمون، به همین دلیل متولد شد. ما با خیلی از همراها و دوستای هم‌مسیر شما مشورت کردیم. با رتبه‌های تک‌رقمی کنکورهای سال‌های قبل، با مشاورهای کاربلد، با معلم‌های حرفه‌ای و به این نتیجه رسیدیم علاوه بر کتاب‌های متنوعی که تا الان داشتیم، باید به طور خاص روی یکی از نیازهای شما متمرکز بشیم: تسلط به آزمون‌دادن در هر درس، اون هم آزمون‌های کاملاً استاندارد و کنکوری. کتاب‌های فصل‌آزمون برای پاسخگویی به این نیاز طراحی شدن. مجموعه‌ای از آزمون‌های تک‌درس *(که تمام یا بخشی از محتوای یک درس رو پوشش می‌دن)*، آزمون‌های تجمعی *(که محتوای چند درس رو پوشش می‌دن)*، آزمون‌های جامع و شبیه‌ساز کنکور *(که از دروس یک پایه تا مجموعهٔ دروس هر سه پایه رو به سبک کنکور پوشش می‌دن)* و آزمون‌های به سوی صد *(آزمون‌های سخت‌تر برای دانش‌آموزانی که می‌خوان با تست‌های سخت‌تر دست و پنجه نرم کنن)*.

تلاش کردیم هر کدوم از این آزمون‌ها به معنای واقعی کلمه یه «آزمون» باشن با رعایت همهٔ ملزومات یک آزمون، نه فقط یه تعداد تست از یه مبحث مشخص. تستا هم کاملاً در سطح کنکور و مشابه تیپ‌های تستی کنکور هستن، نه سخت‌تر، نه ساده‌تر. تنها جایی که یه کم از این قاعده دور شدیم آزمون‌های به سوی صده، *(که توش سخت‌ترین تستای کنکور رو مبنا قرار دادیم)* و بعضی از مدل‌ها و تیپ‌های تستی‌ای که حدس زدیم ممکنه تو کنکورهای آینده باهاشون مواجه شید و تا الان سابقه نداشتن. امیدوارم به هدفمون رسیده باشیم و این کتاب‌ها حسابی براتون مفید باشن.

راه‌های ارتباط با ما رو که می‌دونید، اگر نظری، انتقادی، پیشنهادی برامون داشتید، خوشحال می‌شیم بدونیم. اما اگر حس می‌کنید تو یک یا چندتا درس خاص، توانایی ویراستاری، تألیف یا هر نوع همکاری دیگه‌ای با ما رو دارید، می‌تونید رزومه، کارنامه، ایده‌ها یا نمونه کارهاتون در زمینهٔ کنکور رو برای ما به این ایمیل بفرستید: talent@Kheilisabz.com

در پایان باید چندتا تشکر بکنم از مؤلفای خوب کتاب: آقای علی شهرابی و خانم کوثر صادقی که با تلاش و دقت فراوان، سعی کردن کتاب در بهترین سطح آماده بشه.
و از دوستان پرتلاشمون در واحد تولید که تو اجرای این پروژه واقعاً سختی کشیدن و سنگ تموم گذاشتن.

# مقدمهٔ مؤلفان

**۱) مقدمه!**

ما آدما در طول زندگی‌مون کلی آزمون می‌دیم. تو خیلی از اونا موفق می‌شیم و تو بعضیاشون موفق نمی‌شیم!
از آزمونایی که توشون موفق نمی‌شیم، باید تجربه کسب کنیم و تو آزمونای مشابهشون تو زندگی‌مون استفاده کنیم. تجربه چیز خوبیه!
کتاب آزمون، ابزار کسب تجربه‌س برای آزمونای آزمایشی و کنکور.

**۲) دربارهٔ کتاب**

- کتاب شامل ۸ فصل هست. ۷ فصل اول، همان فصول کتاب درسی‌تان (البته با کمی جابه‌جایی و ادغام) و فصل آخر هم، آزمون‌های جامع (یه دونه پایه، یه دونه دوازدهم و سه‌تا جامع کنکوری)
- ۴ مدل آزمون در ۷ فصل اول کتاب می‌بینید:

۱) مبحثی: هر موضوع مهم یک مبحث شده و یک آزمون ۱۰ تستی در آن طرح شده است (البته به ندرت این آزمون‌ها، ۲۰تستی هم شده‌اند!)
۲) تجمعی: در جاهایی که نیاز بوده چندتا آزمون مبحثی با هم ادغام شوند و سؤال بیشتری از آن مباحث حل شود، یک آزمون تجمعی ۱۰تستی هم آورده‌ایم؛ مثلاً در فصل‌های تابع و آمار، «تجمعی دهم» و «تجمعی یازدهم» داریم.
۳) جامع فصل: در هر فصل، یک آزمون جامع ۲۰تستی از کل مباحث مهم آن فصل آورده‌ایم.
۴) به سوی صد: آزمون به سوی صد، یک پله از سطح کنکور بالاتر است و در آن سؤالات به مراتب دشوارتری را می‌بینید، تعداد تست‌های این آزمون‌ها ۱۵تا است.

- سطح کلی تست‌های کتاب: با توجه به کنکورهای اخیر و با در نظر گرفتن این موضوع که شما قبل از این کتاب، قطعاً کتاب تست هم داشته‌اید، تست‌های این کتاب کمی سخت‌تر و حرفه‌ای‌تر طرح شده‌اند. البته در کتاب، گاهاً تست‌های ساده هم می‌بینید ولی خیلی خیلی کم! در کل برای کسی که کتاب تستش را کامل حل کرده و دنبال کتابی برای جمع‌بندی ریاضی انسانی می‌گردد، گزینهٔ مناسبی است.

**۳) تشکر**


دوستان زیادی در تک‌تک مراحل این کتاب به ما کمک کرده‌اند. از همشون ممنونیم و دوستشون داریم:

- دکتر کمیل نصری و مهندس سبزمیدانی عزیز
- دکتر سعید احمدپور، مدیر تألیف کتاب که واقعاً به من لطف دارن. مرسی که انقدر اعتماد دارین.
- خانم لولاو مرادی که زحمت تمام هماهنگی‌های کتاب رو کشیدن. مرسی از صبر و حوصله‌تون.
- تشکر ویژه از مهندس بقایی عزیز و تمام تیم تولید.
- از ویراستاران عزیزمون که خیلی زحمت کشیدن: خانم‌ها زهرا فتحی و نرجس تیمناک.
- دوستان عزیزم در خیلی‌سبز: ایمان سلیمان‌زاده، نوید شاهی، کوشا نشتایی و رسول محسنی‌منش.
- استاد عزیزم آقای محمدی‌نژاد که همیشه مشورت‌های خوبی به ما دادن. مرسی که انقدر خودمونی هستین.

مرسی از همه‌تون



علی شهرابی ـ کوثر صادقی


۱۶ فروردین ۱۴۰۲

# فهرست

# ۱۱

• موضوع: تابع دهم
• صفحهٔ کتاب درسی: ۴۰ تا ۷۰ کتاب دهم
• نوع آزمون: تجمعی
• ۱۰ تست در ۱۵ دقیقه

۱۱۶- اگر رابطهٔ $f=\{(۱,a^۲+b^۲),(۳,|a-b|),(۱,۲ab+۲۵),(۳,c+۱)\}$ یک تابع باشد، c کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

۱۱۷- اگر برد تابع $\begin{cases} f:\{-\frac{۱}{۲},a,b\} \to \mathbb{R} \\ f(x)=۳-۲x \end{cases}$، مجموعهٔ $\{۵,c,۱\}$ باشد، مقدار $a+b+c$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۱۸- در تابع خطی $f$، اگر $f(۲) = ۱۱$، $f(-۱) = ۲۰$ و $f(k) = -۱۳$ باشد، مقدار $k$ کدام است؟

۱) ۸ ۲) ۹ ۳) ۱۰ ۴) ۱۱

۱۱۹- دماسنجی با رابطهٔ خطی، دمای ۴۰ درجهٔ سانتی‌گراد را با عدد ۷۵ و دمای ۷۰ درجهٔ سانتی‌گراد را با عدد ۱۲۰ نشان می‌دهد. این دماسنج دمای ۲ درجهٔ سانتی‌گراد را با چه عددی نشان می‌دهد؟

۱) ۱۶ ۲) ۱۷ ۳) ۱۸ ۴) ۱۹

۱۲۰- اگر رأس سهمی‌های $f(x) = ۲x^۲ + bx + ۷$ و $g(x) = -x^۲ + ۴x + c$ بر هم منطبق باشد، مقدار $b + c$ کدام است؟

۱) $-۱۱$ ۲) $-۱۲$ ۳) $-۱۳$ ۴) $-۱۴$

۱۲۱- تابع خطی $f$ از دو نقطهٔ $(۳,۵)$ و $(۰,۲)$ می‌گذرد. اگر $f$ و سهمی $g(x) = x^۲$ در دو نقطهٔ $A$ و $B$ متقاطع باشند، مجموع طول این دو نقطه کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) $-۱$ ۴) $-۲$

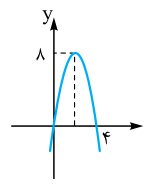
۱۲۲- سهمی $y = -x^۲ + ۳x + ۲۸$ را حداقل چند واحد به چپ انتقال دهیم تا نمودار جدید در ربع اول نباشد؟

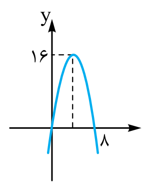
۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۷

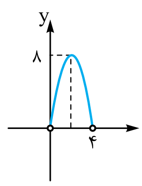
۱۲۳- اگر $\frac{x}{۳} + ۲y = k$ و بیشترین مقدار $xy$ برابر ۹۶ باشد، $k$ کدام است؟ $(k > ۰)$

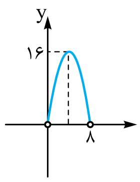
۱) ۱۲ ۲) ۱۶ ۳) ۱۸ ۴) ۲۴

۱۲۴- محیط مستطیلی ۱۶ است. اگر اندازهٔ یکی از اضلاع آن را با $x$ و مساحت آن را با $S$ نشان دهیم، کدام گزینه نمودار $S$ برحسب $x$ را نشان می‌دهد؟ (کتاب درسی)

۱) 


۲) 


۳) 


۴) 


۱۲۵- تابع هزینهٔ یک کارگاه تولیدی به ازای تولید $x$ واحد کالا به صورت $C(x) = x^۲ + ۱۲۰x + ۶۰$ است که هر واحد آن کالا را ۳۰۰ تومان می‌فروشد. اگر الان این کارگاه، روزانه ۸۰ کالا تولید کند و بفروشد، برای این‌که به بیشترین سود روزانه برسد باید چه تغییری در تولید خود بدهد؟

۱) ۲۰ واحد کالا هر روز بیشتر تولید کند. ۲) ۲۰ واحد کالا هر روز کم‌تر تولید کند.

۳) ۱۰ واحد کالا هر روز بیشتر تولید کند. ۴) ۱۰ واحد کالا هر روز کم‌تر تولید کند.

# آزمون ۱۱

**۱۱۶- گزینهٔ ۳** **کلید** به زوج مرتب‌ها نگاه می‌کنیم. اگر در بین زوج مرتب‌ها، زوج مرتب‌هایی دیدیم که مؤلفهٔ اول یکسان دارند، مؤلفه‌های دوم آن‌ها را با یکدیگر برابر قرار می‌دهیم.

**گام اول** مؤلفه‌های اول دو زوج مرتب $(۱,a^۲+b^۲)$ و $(۱,۲ab+۲۵)$ یکسان است، پس باید مؤلفه‌های دومشان نیز یکسان باشد:

$$a^۲+b^۲=۲ab+۲۵ \Rightarrow \underbrace{a^۲+b^۲-۲ab}_{\text{اتحاد مربع}}=۲۵$$

$$\Rightarrow (a-b)^۲=۲۵ \xrightarrow{\text{جذر}} |a-b|=۵$$

**گام دوم** با جای‌گذاری $|a-b|=۵$، دو زوج مرتب دیگر به شکل روبه‌رو می‌شوند: $(۳,\underbrace{|a-b|}_{۵}),(۳,c+۱)$

مؤلفه‌های دومشان باید برابر باشد، پس: $۵=c+۱ \Rightarrow c=۴$

---

**۱۱۷- گزینهٔ ۴** **گام اول** تابع $f(x)$ را برابر ۱، $c$ و ۵ قرار می‌دهیم تا دامنهٔ تابع به دست بیاید.

$$f(x)=۱ \Rightarrow ۳-۲x=۱ \Rightarrow ۲x=۲ \Rightarrow x=۱$$

$$f(x)=c \Rightarrow ۳-۲x=c \Rightarrow ۲x=۳-c$$

$$\Rightarrow x=\frac{۳-c}{۲}$$

$$f(x)=۵ \Rightarrow ۳-۲x=۵ \Rightarrow ۲x=-۲ \Rightarrow x=-۱$$

پس دامنهٔ تابع، مجموعهٔ $\{۱,\frac{۳-c}{۲},-۱\}$ است.

**گام دوم** از طرفی در صورت سؤال، دامنه به صورت $\{\frac{-۱}{۲},a,b\}$ آمده است، پس باید این دو مجموعه یکسان باشند.

$$\{۱,\frac{۳-c}{۲},-۱\}=\{\frac{-۱}{۲},a,b\}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a=۱ \\ b=-۱ \\ \frac{۳-c}{۲}=\frac{-۱}{۲} \rightarrow c=۴ \end{cases}$$

تذکر البته حالت $a=-۱$، $b=۱$ و $c=۴$ هم قبول است.

گام سوم $a+b+c$ برابر است با: $\underbrace{a+b}_{۰}+\underbrace{c}_{۴}=۴$

۱۱۸- گزینهٔ ۳ گام اول دو نقطه از تابع خطی را داریم:

$$A(۲,۱۱)\,,\,B(-۱,۲۰)$$

شیب خط را به دست می‌آوریم:

$$m=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{۲۰-۱۱}{-۱-۲}=\frac{۹}{-۳}=-۳$$

گام دوم معادلهٔ خط را پیدا می‌کنیم:

$$y-y_A=m(x-x_A)\ \Rightarrow\ y-۱۱=-۳(x-۲)$$

$$\Rightarrow\ y=-۳x+۱۷\ \xrightarrow{\text{پس}}\ f(x)=-۳x+۱۷$$

گام سوم با توجه به $f(k)=-۱۳$، داریم:

$$f(k)=-۳k+۱۷\ \Rightarrow\ -۱۳=-۳k+۱۷\ \Rightarrow\ ۳k=۳۰$$

$$\Rightarrow\ k=۱۰$$

۱۱۹- گزینهٔ ۳ کلید • دماسنج دمای ۴۰ درجهٔ سانتی‌گراد را با عدد ۷۵ نشان می‌دهد: $A(۴۰,۷۵)$.

• دماسنج دمای ۷۰ درجهٔ سانتی‌گراد را با عدد ۱۲۰ نشان می‌دهد: $B(۷۰,۱۲۰)$.

گام اول با داشتن دو نقطه، شیب خط را حساب می‌کنیم:

$$m_{AB}=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{۱۲۰-۷۵}{۷۰-۴۰}=\frac{۴۵}{۳۰}=\frac{۳}{۲}$$

گام دوم با داشتن شیب و نقطهٔ A، معادله خط را می‌نویسیم:

$$y-y_A=m(x-x_A)$$

$$\xrightarrow[A(۴۰,۷۵)]{m=\frac{۳}{۲}}\ y-۷۵=\frac{۳}{۲}(x-۴۰)$$

$$\Rightarrow\ y-۷۵=\frac{۳}{۲}x-۶۰\ \Rightarrow\ y=\frac{۳}{۲}x+۱۵$$

گام سوم $x=۲$ را در رابطهٔ خطی به دست آمده، قرار می‌دهیم:

$$y=\frac{۳}{۲}x+۱۵\ \xrightarrow{x=۲}\ y=\frac{۳}{۲}(۲)+۱۵=۳+۱۵=۱۸$$

پس دماسنج جدید دمای ۲ درجهٔ سانتی‌گراد را با عدد ۱۸ نشان می‌دهد.

۱۲۰- گزینهٔ ۳ گام اول طول رأس سهمی‌ها را به دست می‌آوریم:

$$f(x)=۲x^۲+bx+۷\ \Rightarrow\ x_s=\frac{-b}{۲a}=\frac{-b}{۴}$$

$$g(x)=-x^۲+۴x+c\ \Rightarrow\ x_s=\frac{-b}{۲a}=\frac{-۴}{-۲}=۲$$

گام دوم آن‌ها را با هم برابر قرار می‌دهیم:

$$\frac{-b}{۴}=۲\ \Rightarrow\ b=-۸$$

گام سوم طول رأس هر دو سهمی $x=۲$ است. $x=۲$ را در هر دو سهمی جای‌گذاری می‌کنیم تا عرض رأسشان به دست آید:

$$f(x)=۲x^۲+bx+۷$$

$$\xrightarrow{x=۲}\ f(۲)=۲\times۴+(-۸)(۲)+۷$$

$$=۸-۱۶+۷=-۱$$

$$g(x)=-x^۲+۴x+c$$

$$\xrightarrow{x=۲}\ g(۲)=-۴+۸+c=c+۴$$

گام چهارم باید عرض رأس‌ها هم برابر باشند:

$$-۱=c+۴\ \Rightarrow\ c=-۵$$

گام پنجم مقدار $b+c$ را به دست می‌آوریم:

$$b+c=-۸-۵=-۱۳$$

۱۲۱- گزینهٔ ۱ گام اول شیب تابع خطی f را با استفاده از مختصات دو نقطه $A(۳,۵)$ و $B(۰,۲)$ پیدا می‌کنیم:

$$m=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{۲-۵}{۰-۳}=\frac{-۳}{-۳}=۱$$

گام دوم معادلهٔ تابع را با استفاده از رابطهٔ $y-y_A=m(x-x_A)$ به دست می‌آوریم:

$$y-۵=۱(x-۳)\ \Rightarrow\ y=x+۲$$

$$\xrightarrow{\text{پس}}\ f(x)=x+۲$$

گام سوم نمودار سهمی $g(x)=x^۲$ و خط $f(x)=x+۲$ در دو نقطه متقاطع هستند. ضابطهٔ تابع $f(x)$ و $g(x)$ را برابر قرار می‌دهیم تا طول نقاط تقاطع مشخص شود:

$$f(x)=g(x)\ \Rightarrow\ x+۲=x^۲\ \Rightarrow\ x^۲-x-۲=۰$$

$$\Rightarrow\ (x-۲)(x+۱)=۰\ \Rightarrow\ \begin{cases}x_۱=۲\\ x_۲=-۱\end{cases}$$

گام چهارم مجموع طول این دو نقطه را به دست می‌آوریم:

$$x_۱+x_۲=۲+(-۱)=۱$$

۱۲۲- گزینهٔ ۴

گام اول ضریب $x^۲$ در سهمی $y=-x^۲+۳x+۲۸$ عددی منفی است، پس دهانهٔ سهمی رو به پایین است.

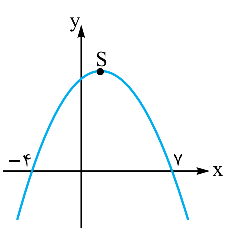
گام دوم طول نقاط برخورد سهمی با محور xها را حساب می‌کنیم. باید y را صفر بدهیم:

$$y=-x^۲+۳x+۲۸\ \xrightarrow{y=۰}\ ۰=-x^۲+۳x+۲۸$$

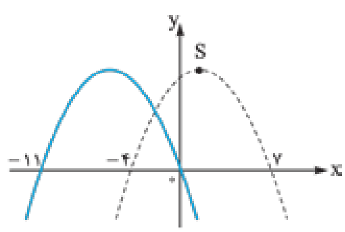
$$\xrightarrow{\text{قرینه}}\ x^۲-۳x-۲۸=۰$$

$$\xrightarrow{\text{جمله‌مشترک}}\ (x-۷)(x+۴)=۰\ \Rightarrow\ \begin{cases}x_۱=۷\\ x_۲=-۴\end{cases}$$

گام سوم با همین اطلاعات سهمی را رسم می‌کنیم:




گام چهارم برای آن‌که سهمی در ناحیهٔ اول قرار نگیرد، باید حداقل آن را ۷ واحد به چپ ببریم:



۱۲۳- گزینهٔ ۲ **کلید** برای آن‌که xy ماکزیمم شود، باید در تساوی $\frac{x}{۳}+۲y=k$، دو عبارت $\frac{x}{۳}$ و ۲y سهم‌های یکسانی از k ببرند.

**گام اول** یعنی هر کدام باید برابر با $\frac{k}{۲}$ باشند:

$$\frac{x}{۳}+۲y=k \Rightarrow \begin{cases} \frac{x}{۳}=\frac{k}{۲} \Rightarrow x=\frac{۳}{۲}k \\ ۲y=\frac{k}{۲} \Rightarrow y=\frac{k}{۴} \end{cases}$$

$$\underbrace{\frac{x}{۳}}_{\frac{k}{۲}}+\underbrace{۲y}_{\frac{k}{۲}}=k$$

**گام دوم** پس ماکزیمم xy برابر است با حاصل‌ضرب $\frac{۳}{۲}k$ و $\frac{k}{۴}$ که باید ۹۶ شود:

$$(\frac{۳}{۲}k)(\frac{k}{۴})=۹۶ \Rightarrow \frac{۳}{۸}k^۲=۹۶ \xrightarrow{\times\frac{۸}{۳}} k^۲=\cancel{۹۶}^{۳۲}\times\frac{۸}{\cancel{۳}_{۱}}$$

$$\Rightarrow k^۲=۲۵۶ \xrightarrow{k>۰} k=۱۶$$

---

۱۲۴- گزینهٔ ۴ **گام اول** ضلع دیگر مستطیل را y در نظر می‌گیریم. محیط مستطیل ۱۶ است، پس داریم:

$$\text{محیط}=۲\times(\text{طول}+\text{عرض}) \Rightarrow ۱۶=۲(x+y)$$

$$\xrightarrow{\div ۲} x+y=۸$$

**گام دوم** y را برحسب x می‌نویسیم: $y=۸-x$

مساحت مستطیل برحسب x برابر است با:

$$S=xy=x(۸-x)=-x^۲+۸x$$

**گام سوم** پس باید تابع $S(x)=-x^۲+۸x$ را رسم کنیم. فقط این تابع یک سری محدودیت‌ها دارد.

- x نمی‌تواند صفر یا منفی باشد: $x>۰$
- y هم نمی‌تواند صفر یا منفی باشد:

$$y>۰ \Rightarrow ۸-x>۰ \Rightarrow x<۸$$

- از طرفی مقدار این تابع که مساحت را به ما می‌دهد هم باید عددی مثبت باشد. پس نتیجه می‌گیریم نمودار باید فقط در ناحیهٔ اول باشد، یعنی جواب گزینه‌های ۳ یا ۴ است.

**گام چهارم** رأس سهمی $S(x)=-x^۲+۸x$ را حساب می‌کنیم:

$$x_S=\frac{-b}{۲a}=\frac{-۸}{۲(-۱)}=۴$$

پس جواب گزینهٔ (۴) است.

---

۱۲۵- گزینهٔ ۳ **گام اول** تابع درآمد را می‌نویسیم:

$$\text{درآمد}=\underbrace{\text{قیمت هر کالا}}_{۳۰۰}\times\underbrace{\text{تعداد کالا}}_{x} \Rightarrow R(x)=۳۰۰x$$

**گام دوم** با داشتن توابع درآمد و هزینه، تابع سود را می‌نویسیم:

$$P(x)=R(x)-C(x)$$

$$\Rightarrow P(x)=۳۰۰x-(x^۲+۱۲۰x+۶۰)$$

$$=۳۰۰x-x^۲-۱۲۰x-۶۰$$

$$\Rightarrow P(x)=-x^۲+۱۸۰x-۶۰$$

**گام سوم** بیشترین سود روزانه وقتی به دست می‌آید که تعداد کالای تولیدشده برابر با طول رأس سهمی به دست آمده برای سود باشد.

$$\text{طول رأس سهمی}=\frac{-b}{۲a}=\frac{-۱۸۰}{۲(-۱)}=۹۰$$

پس این کارگاه باید تولید روزانه را از ۸۰ کالا به ۹۰ کالا برساند، یعنی باید روزانه ۱۰ کالا بیشتر تولید کند.

# ۱۷

• موضوع: تابع یازدهم • نوع آزمون: تجمعی

• صفحهٔ کتاب درسی: ۲۲ تا ۵۳ کتاب یازدهم • ۱۰ تست در ۱۵ دقیقه

۱۷۶- نمودار تابع $f(x)=\begin{cases} x^2+ax-10 & x\ge 1 \\ ax+b & x<1 \end{cases}$، محور xها را در نقطه‌ای به طول ۵ و محور yها را در نقطه‌ای به عرض ۶ قطع می‌کند. مقدار $f(\frac{b}{a})$ کدام است؟

۱) ۱۰  ۲) ۱۲  ۳) ۱۴  ۴) ۱۶

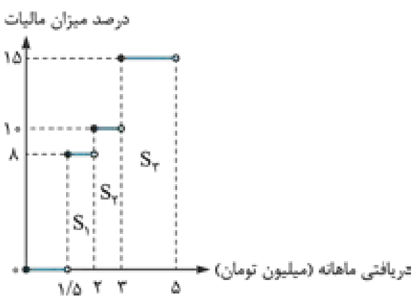
۱۷۷- در تابع همانی f رابطهٔ $\frac{f(a+1)}{f(a-3)}=f(\frac{a-1}{a+1})$ برقرار است. برد کدام‌یک از توابع زیر تک‌عضوی است؟

۱) $g(x)=(3a+1)x-1$  ۲) $g(x)=(3a-1)x+2$  ۳) $g(x)=(2a+1)x-1$  ۴) $g(x)=(2a-1)x+2$

۱۷۸- کدام گزینه تابع پلکانی نیست؟

۱) $f(x)=[2x]$  ۲) $g(x)=\text{sign}(x)+1$  ۳) $h(x)=\frac{2x}{|x|}$  ۴) $t(x)=|x|-x$

۱۷۹- با توجه به نمودار مقابل، شخصی که ۳۲۰۰۰۰ تومان در ماه مالیات پرداخت می‌کند، ماهانه چه‌قدر حقوق می‌گیرد؟




۱) ۳/۸ میلیون تومان

۲) ۴ میلیون تومان

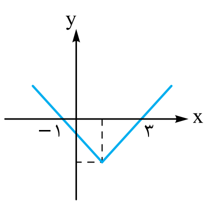
۳) ۴/۲ میلیون تومان

۴) ۴/۴ میلیون تومان

۱۸۰- اگر $f(x)=[2x-[\frac{x}{2}]]-\text{sign}(x+3)+ax$ و $f(\frac{-8}{3})=-20$ باشد، a کدام است؟

۱) ۳  ۲) ۶  ۳) $-3$  ۴) $-6$

۱۸۱- نمودار تابع $f(x)=|x+a|+b$ به صورت مقابل است. مقدار $f(\frac{b}{a})$ کدام است؟




۱) ۱

۲) ۲

۳) $-1$

۴) صفر

۱۸۲- برای رسم نمودار تابع $y_1=3|2-\frac{x}{3}|$ از روی نمودار $y_2=-|x+2|$ باید ابتدا نمودار $y_2$ را .............. واحد به سمت .............. برد و سپس آن را نسبت به محور .............. قرینه کرد.

۱) ۸، راست، xها  ۲) ۴، چپ، yها  ۳) ۴، راست، xها  ۴) ۸، چپ، yها

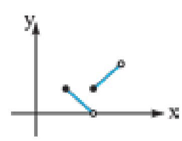
۱۸۳- توابع $f=\{(1,a),(-3,9),(4,b+1)\}$ و $g=\{(-3,b+a),(2,b),(1,-2)\}$ مفروض‌اند. اگر $3g-f$ تابعی همانی باشد، مقدار $a+b$ کدام است؟

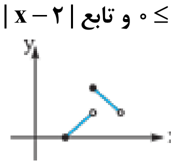
۱) ۱  ۲) ۲  ۳) ۳  ۴) ۴

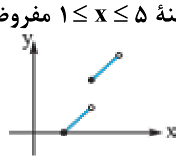
۱۸۴- توابع $f(x)=2[x]$ با دامنهٔ $-2\le x<1$ و $g(x)=\text{sign}(x)-1$ با دامنهٔ $-1\le x\le 3$ مفروض‌اند. مجموع اعضای برد تابع $f+g$ کدام است؟

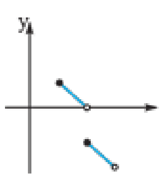
۱) $-3$  ۲) $-4$  ۳) $-5$  ۴) $-6$

۱۸۵- تابع $f(x)=[x]-1$ با دامنهٔ $0\le x<3$ و تابع $g(x)=|x-2|$ با دامنهٔ $1\le x\le 5$ مفروض‌اند. نمودار تابع $f-g$ به کدام صورت است؟

۱) 


۲) 


۳) 


۴) 

# آزمون ۱۷

۱۷۶- گزینهٔ ۲ **گام اول** تابع $f(x)=\begin{cases} x^{۲}+ax-۱۰ & x\geq ۱ \\ ax+b & x<۱ \end{cases}$، محور عرض‌ها را در نقطه‌ای به عرض ۶ قطع می‌کند، یعنی نقطهٔ $(۰,۶)$ روی آن است یا به زبان دیگر $f(۰)=۶$. برای محاسبهٔ $f(۰)$ سراغ ضابطهٔ پایینی می‌رویم:

$$x<۱: f(x)=ax+b \xrightarrow{x=۰} f(۰)=b$$

پس $b=۶$ است.

ضابطهٔ $f$ تا اینجا به صورت $f(x)=\begin{cases} x^{۲}+ax-۱۰ & x\geq ۱ \\ ax+۶ & x<۱ \end{cases}$ درآمد.

**گام دوم** $f$ محور xها را در نقطه‌ای به طول ۵ قطع می‌کند، یعنی $f(۵)=۰$ است.

برای محاسبهٔ $f(۵)$ سراغ ضابطهٔ بالایی می‌رویم:

$$x\geq ۱: f(x)=x^{۲}+ax-۱۰ \xrightarrow{x=۵} f(۵)=۲۵+۵a-۱۰$$
$$=۱۵+۵a$$

$۱۵+۵a$ باید صفر باشد: $۱۵+۵a=۰ \Rightarrow a=-۳$

با جای‌گذاری $a=-۳$، ضابطهٔ $f$ به صورت زیر می‌شود:

$$f(x)=\begin{cases} x^{۲}-۳x-۱۰ & x\geq ۱ \\ -۳x+۶ & x<۱ \end{cases}$$

**گام سوم** مقدار $\frac{b}{a}$ برابر است با: $\frac{b}{a}=\frac{۶}{-۳}=-۲$

برای محاسبهٔ مقدار $f(-۲)$ باید سراغ ضابطهٔ پایینی برویم:

$$x<۱: f(x)=-۳x+۶ \xrightarrow{x=-۲} f(-۲)=۶+۶=۱۲$$

۱۷۷- گزینهٔ ۲ **نکتهٔ ۱** ضابطهٔ تابع همانی به صورت $f(x)=x$ است.

**نکتهٔ ۲** تابعی که برد آن فقط یک عضو دارد، تابع ثابت است و ضابطهٔ آن به صورت $f(x)=c$ می‌باشد.

**گام اول** تابع $f$ همانی است، پس جای تمام ☁ها، $f(☁)$ ☁ قرار می‌دهیم:

$$f(\frac{a-۱}{a+۱})=\frac{a-۱}{a+۱}$$
$$f(a+۱)=a+۱$$
$$f(a-۳)=a-۳$$

**گام دوم** مقادیر به دست آمده را در رابطهٔ $f(\frac{a-۱}{a+۱})=\frac{f(a+۱)}{f(a-۳)}$ جای‌گذاری می‌کنیم:

$$f(\frac{a-۱}{a+۱})=\frac{f(a+۱)}{f(a-۳)} \Rightarrow \frac{a-۱}{a+۱}=\frac{a+۱}{a-۳}$$

$$\xrightarrow{\text{طرفین‌وسطین}} \overbrace{(a+۱)(a+۱)}^{\text{مربع دوجمله‌ای}}=\overbrace{(a-۱)(a-۳)}^{\text{جمله‌مشترک}}$$

$$\Rightarrow \cancel{a^{۲}}+۲a+۱=\cancel{a^{۲}}-۴a+۳ \Rightarrow ۶a=۲ \Rightarrow a=\frac{۱}{۳}$$

**کلید** دنبال یک تابع ثابت می‌گردیم. ضابطهٔ این تابع به شکل $f(x)=c$ است. یعنی ضریب x باید صفر باشد.

**گام سوم** مقدار $a=\frac{۱}{۳}$ را در گزینه‌ها جای‌گذاری می‌کنیم:

(۱) $g(x)=۲x-۱ \rightarrow$ ثابت نیست.

(۲) $g(x)=۲ \rightarrow$ ثابت است.

(۳) $g(x)=\frac{۵}{۳}x-۱ \rightarrow$ ثابت نیست.

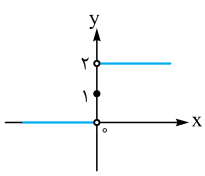
(۴) $g(x)=\frac{-x}{۳}+۲ \rightarrow$ ثابت نیست.

۱۷۸- گزینهٔ ۴ هر گزینه را در یک گام چک می‌کنیم:

**گام اول** تمام توابع به فرم $f(x)=[☁]$ پلکانی هستند، پس تابع $f(x)=[۲x]$ نیز پلکانی است.

**گام دوم** تابع $g(x)=\text{sign}(x)+۱$ همان تابع علامت است که یک واحد به بالا منتقل شده.

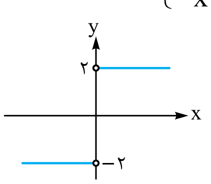
این تابع هم پلکانی است.




**گام سوم** برای ساده‌کردن تابع $h(x)=\frac{۲x}{|x|}$، با توجه به ریشهٔ داخل قدرمطلق که $x=۰$ است آن را با دو دامنهٔ $x>۰$ و $x<۰$ می‌نویسیم:

$$h(x)=\frac{۲x}{|x|}=\begin{cases} \frac{۲x}{x} & x>۰ \\ \frac{۲x}{-x} & x<۰ \end{cases}=\begin{cases} ۲ & x>۰ \\ -۲ & x<۰ \end{cases}$$

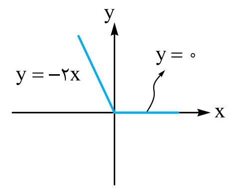
ضابطه‌هایش تابع ثابت هستند، پس پلکانی است. نمودارش را هم ببینید:



**گام چهارم** تابع $t(x)=|x|-x$ هم یک عبارت قدرمطلقی دارد که ریشه‌اش $x=۰$ است. مثل گام ۳ دوضابطه‌ای می‌شود:

$$t(x)=|x|-x=\begin{cases}x-x & x\ge ۰\\ -x-x & x<۰\end{cases}=\begin{cases}۰ & x\ge ۰\\ \underbrace{-۲x}_{\text{ثابت نیست}} & x<۰\end{cases}$$

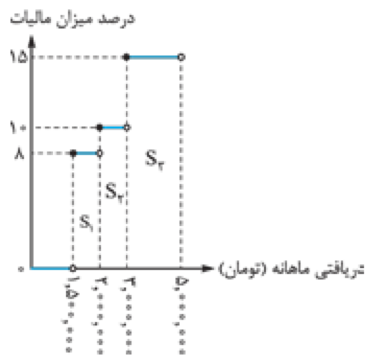
چون یکی از ضابطه‌ها تابع ثابت نیست، پس پلکانی نیست. نمودارش هم به شکل مقابل است:




---

**۱۷۹- گزینهٔ ۳** **کلید** اگر دنبال حقوقی باشیم که مالیاتش ۳۲۰۰۰۰ تومان است باید دنبال x باشیم که تا آن‌جا، مجموع مساحت‌های بین زیر نمودار تا محور xها، ۳۲۰۰۰۰ شده باشد.

**گام اول** مساحت مستطیل‌ها را تک‌تک حساب می‌کنیم:

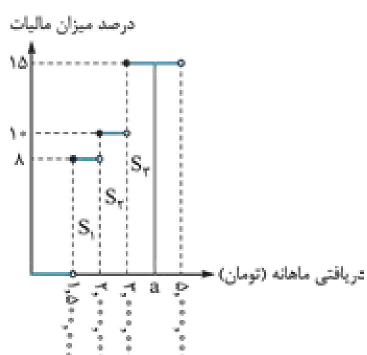



$S_1=(۲۰۰۰۰۰۰-۱۵۰۰۰۰۰)\times ۰/۰۸=۵۰۰۰۰۰\times ۰/۰۸$
$=۴۰۰۰۰$

$S_2=(۳۰۰۰۰۰۰-۲۰۰۰۰۰۰)\times ۰/۱=۱۰۰۰۰۰۰\times ۰/۱$
$=۱۰۰۰۰۰$

$S_3=(۵۰۰۰۰۰۰-۳۰۰۰۰۰۰)\times ۰/۱۵=۲۰۰۰۰۰۰\times ۰/۱۵$
$=۳۰۰۰۰۰$

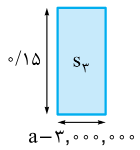
**گام دوم** مجموع $S_1$ تا $S_3$ می‌شود ۴۴۰۰۰۰ تومان.
چون از ۳۲۰۰۰۰ بیشتر شد، پس باید بخشی از $S_3$ را می‌گرفتیم. فرض کنیم عدد مورد نظر عددی مثل a بین ۳ و ۵ میلیون باشد:




**گام سوم** باید جمع مساحت $S_1$، $S_2$ تا $S_3$ شود ۳۲۰۰۰۰:

$$\underbrace{S_1}_{۴۰۰۰۰}+\underbrace{S_2}_{۱۰۰۰۰۰}+S_3=۳۲۰۰۰۰ \Rightarrow S_3=۱۸۰۰۰۰$$

پس مساحت $S_3$ باید ۱۸۰۰۰۰ باشد:




$$(a-۳۰۰۰۰۰۰)\times \overset{\text{همان ۰/۱۵ است}}{\frac{۳}{۲۰}}=۱۸۰۰۰۰$$

$$\xrightarrow{\times\frac{۲۰}{۳}} a-۳۰۰۰۰۰۰=۱۲۰۰۰۰۰ \Rightarrow a=۴۲۰۰۰۰۰$$

---

**۱۸۰- گزینهٔ ۲** **گام اول** مقدار عبارت براکتی را به ازای $x=\frac{-۸}{۳}$ حساب می‌کنیم:

$$[۲x-[\frac{x}{۲}]]=[۲(\frac{-۸}{۳})-[\frac{-\frac{۸}{۳}}{\frac{۲}{۱}}]]=[\frac{-۱۶}{۳}-[-\frac{۴}{۳}]]$$

$$=[\frac{-۱۶}{۳}-(-۲)]=[\frac{-۱۶}{۳}+\frac{۶}{۳}]=[\frac{-۱۰}{۳}]=[-۳/...]=-۴$$

**گام دوم** مقدار $sign(x+۳)$ را به ازای $x=\frac{-۸}{۳}$ حساب می‌کنیم:

$$sign(\frac{-۸}{۳}+۳)=sign(\frac{۱}{۳})=sign(\text{عدد مثبت})=۱$$

**گام سوم** با توجه به تساوی $f(\frac{-۸}{۳})=-۲۰$ داریم:

$$f(x)=[۲x-[\frac{x}{۲}]]-sign(x+۳)+ax+۱$$

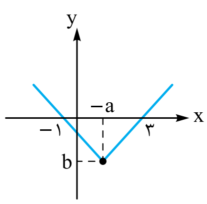
$$\xrightarrow{x=\frac{-۸}{۳}} \underbrace{f(\frac{-۸}{۳})}_{-۲۰}=-۴-۱+a(\frac{-۸}{۳})+۱$$

$$\Rightarrow -۲۰=-۴-\frac{۸}{۳}a \Rightarrow \frac{۸}{۳}a=۱۶ \Rightarrow a=\overset{۲}{\cancel{۱۶}}\times\frac{۳}{\underset{۱}{\cancel{۸}}}=۶$$

---

**۱۸۱- گزینهٔ ۳** **کلید** ریشهٔ داخل قدرمطلق، طول نقطهٔ شکستگی تابع را به ما می‌دهد: $\underbrace{x+a}_{\text{داخل قدرمطلق}}=۰ \Rightarrow x=-a$

**گام اول** به ازای $x=-a$، مقدار تابع برابر b می‌شود. پس مختصات نقطهٔ شکستگی $(-a,b)$ است:




**گام دوم** با توجه به متقارن‌بودن این تابع، میانگین ریشه‌ها یعنی ۱− و ۳ برابر با طول نقطهٔ شکستگی یعنی a− است، پس:

$$-a=\frac{-۱+۳}{۲} \Rightarrow -a=۱ \Rightarrow a=-۱$$

با جای‌گذاری $a=-۱$، ضابطه به شکل $f(x)=|x-۱|+b$ درمی‌آید.

**گام سوم** نمودارمان از نقطهٔ $(۳,۰)$ می‌گذرد، پس:

$$f(۳)=۰ \Rightarrow |۳-۱|+b=۰ \Rightarrow ۲+b=۰ \Rightarrow b=-۲$$

ضابطه کامل شد: $f(x)=|x-۱|-۲$

**گام چهارم** سؤال مقدار $f(\frac{b}{a})$ یعنی $f(\frac{-۲}{-۱})$ یا همان $f(۲)$ را می‌خواهد:

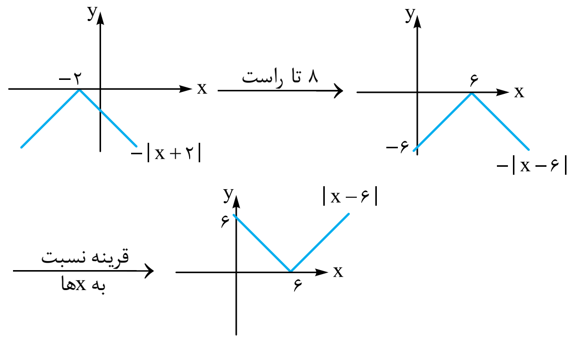
$$f(۲)=|۲-۱|-۲=۱-۲=-۱$$

**۱۸۲- گزینهٔ ۱** **نکته** $|-A|=|A|$

**گام اول** ابتدا ضابطهٔ $y_۱$ را ساده می‌کنیم:

$$y_۱=۳|۲-\frac{x}{۳}|=|۶-x|=|-(x-۶)|\overset{\text{نکته}}{=}|x-۶|$$

**گام دوم** برای آن که از نمودار تابع $y_۲=-|x+۲|$ به $y_۱=|x-۶|$ برسیم باید ابتدا ۸ واحد به راست برویم و سپس نمودار را نسبت به محور xها قرینه کنیم.




**۱۸۳- گزینهٔ ۲** **نکته** ضابطهٔ تابع همانی به شکل $f(x)=x$ است.

**گام اول** دامنهٔ تابع $۳g-f$ از اشتراک دامنهٔ تابع f و g به دست می‌آید: $D_{۳g-f}=D_f\cap D_g=\{۱,-۳\}$

**گام دوم** مقدار تابع $۳g-f$ را به ازای $x=-۳$ و $x=۱$ به دست می‌آوریم:

$$x=-۳:۳g(-۳)-f(-۳)=۳(b+a)-۹=۳b+۳a-۹$$

$$x=۱:۳g(۱)-f(۱)=۳(-۲)-a=-۶-a$$

**گام سوم** نمایش زوج مرتبی $۳g-f$ به صورت زیر است:

$$\{(-۳,۳b+۳a-۹),(۱,-۶-a)\}$$

**گام چهارم** تابع $۳g-f$ همانی است، پس مؤلفه‌های اول و دوم هر زوج مرتب آن برابرند:

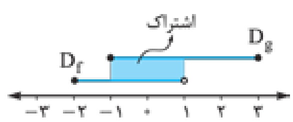
$$(۱,-۶-a)\Rightarrow -۶-a=۱\Rightarrow a=-۷$$

$$(-۳,۳b+۳a-۹)\Rightarrow ۳b+\underbrace{۳a}_{-۲۱}-۹=-۳\Rightarrow ۳b=۲۷$$

$$\Rightarrow b=۹$$

**گام پنجم** مقدار $a+b$ برابر است با: $a+b=-۷+۹=۲$

**۱۸۴- گزینهٔ ۳** **گام اول** دامنهٔ تابع $f+g$ از اشتراک دامنهٔ توابع f و g به دست می‌آید:




$$D_{f+g}=D_f\cap D_g=(-۱\le x<۱)$$

در محدودهٔ $-۱\le x<۱$ توابع $f(x)=۲[x]$ و $g(x)=\text{sign}(x)-۱$ را به صورت چندضابطه‌ای می‌نویسیم.

**گام دوم** اول تابع g:

$$g(x)=\begin{cases}۱-۱ & ۰<x<۱\\ ۰-۱ & x=۰\\ -۱-۱ & -۱\le x<۰\end{cases}=\begin{cases}۰ & ۰<x<۱\\ -۱ & x=۰\\ -۲ & -۱\le x<۰\end{cases}$$

**گام سوم** با توجه به دامنه‌های تابع g، تابع f را هم به همان شکل (از نظر دامنه) می‌نویسیم:

$$f(x)=۲[x]=\begin{cases}۲(۰) & ۰<x<۱\\ ۲(۰) & x=۰\\ ۲(-۱) & -۱\le x<۰\end{cases}=\begin{cases}۰ & ۰<x<۱\\ ۰ & x=۰\\ -۲ & -۱\le x<۰\end{cases}$$

**گام چهارم** حالا توابع f و g را جمع می‌کنیم:

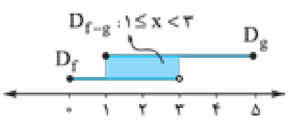
$$(f+g)(x)=\begin{cases}۰+۰ & ۰<x<۱\\ ۰+(-۱) & x=۰\\ -۲+(-۲) & -۱\le x<۰\end{cases}$$

$$=\begin{cases}۰ & ۰<x<۱\\ -۱ & x=۰\\ -۴ & -۱\le x<۰\end{cases}$$

**گام پنجم** برد تابع $f+g$، سه عضو دارد: $\{۰,-۱,-۴\}$

مجموع اعضای بردش برابر ۵- است.

**۱۸۵- گزینهٔ ۱** **گام اول** بین محدودهٔ دامنه‌ها اشتراک می‌گیریم تا دامنهٔ $f-g$ به دست آید:




**گام دوم** با توجه به ضابطهٔ توابع f و g، در دو محدودهٔ $۱\le x<۲$ و $۲\le x<۳$، ضابطهٔ $f-g$ را تشکیل می‌دهیم:

$$\blacktriangleright ۱\le x<۲:(f-g)(x)=f(x)-g(x)=\underbrace{[\overset{\text{بین ۱ و ۲}}{x}]}_{۱}-۱+|\underbrace{x-۲}_{\text{منفی}}|$$

$$=۱-۱+(-x+۲)=-x+۲$$

$$\blacktriangleright ۲\le x<۳:(f-g)(x)=f(x)-g(x)=\underbrace{[\overset{\text{بین ۲ و ۳}}{x}]}_{۲}-۱+|\underbrace{x-۲}_{\text{مثبت}}|$$

$$=۲-۱+(x-۲)=x-۱$$

پس: $(f-g)(x)=\begin{cases}-x+۲ & ۱\le x<۲\\ x-۱ & ۲\le x<۳\end{cases}$

**گام سوم** هر خط را به کمک نقاط ابتدا و انتهای دامنه‌اش رسم می‌کنیم:

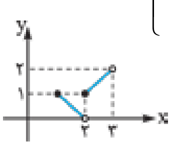
$(f-g)(x)=$

$-x+۲ \quad ۱\le x<۲$

| x | ۱ | ۲ |
|---|---|---|
| y | ۱ | ۰ |
| نقطه | (۱,۱) | $\underbrace{(۲,۰)}_{\text{توخالی}}$ |

$x-۱ \quad ۲\le x<۳$

| x | ۲ | ۳ |
|---|---|---|
| y | ۱ | ۲ |
| نقطه | (۲,۱) | $\underbrace{(۳,۲)}_{\text{توخالی}}$ |



# ۴۱

• موضوع: آزمون جامع شمارش و احتمال • نوع آزمون: جامع فصل

• صفحهٔ کتاب درسی: ۲ تا ۲۷ کتاب دوازدهم • ۲۰ تست در ۳۰ دقیقه

۴۴۶- به چند طریق می‌توان ۸ توپ متفاوت را بین ۵ نفر تقسیم کرد؟

۱) $P(۸,۵)$ ۲) $C(۸,۵)$ ۳) $۵^۸$ ۴) $۸^۵$

۴۴۷- قرار است ۶ دوست با دو ماشین که ظرفیت هر کدام ۳ نفر می‌باشد به سفر بروند. اگر ۳ نفرشان گواهی‌نامه داشته باشند، به چند طریق می‌توانند داخل ماشین‌ها قرار گیرند؟ (هر ماشین دو صندلی در جلو و یکی در عقب دارد.)

۱) ۳۶ ۲) ۹۶ ۳) ۱۰۸ ۴) ۱۴۴

۴۴۸- با ارقام ۰ تا ۸ چند عدد چهاررقمی بدون ارقام تکراری و مضرب ۵ می‌توانیم بنویسیم که ارقام آن یکی در میان زوج و فرد باشد؟

۱) ۹۶ ۲) ۸۴ ۳) ۱۰۸ ۴) ۹۲

۴۴۹- با ارقام ۰ تا ۷ چند عدد سه‌رقمی می‌توان نوشت که در آن‌ها حداقل دو رقم تکراری باشد؟

۱) ۱۵۰ ۲) ۱۵۲ ۳) ۱۵۴ ۴) ۱۵۶

۴۵۰- حاصل عبارت $\dfrac{۷۰\times۹!-۹۰\times۸!}{۵۶\times۶!+۸۸\times۷!}$ کدام است؟

۱) ۴۰ ۲) ۴۵ ۳) ۵۰ ۴) ۶۰

۴۵۱- به چند طریق می‌توان با ۷ شاخه گل متفاوت، یک دسته گل شامل ۲ یا ۳ یا ۴ گل درست کرد؟

۱) ۸۹ ۲) ۹۱ ۳) ۹۳ ۴) ۹۵

۴۵۲- مجموعهٔ $\{۱,۲,۳,...,۹\}$ چند زیرمجموعه دارد که همه اعضای آن زوج باشند؟

۱) ۱۵ ۲) ۱۶ ۳) ۱۷ ۴) ۱۸

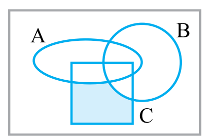
۴۵۳- ۴ دانش‌آموز به همراه پدرهایشان می‌خواهند عکس یادگاری بگیرند. در چند حالت هر پدر کنار فرزندش قرار دارد؟

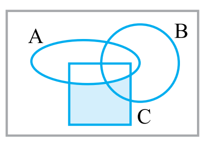
۱) ۳۷۴ ۲) ۳۸۴ ۳) ۳۹۴ ۴) ۳۰۴

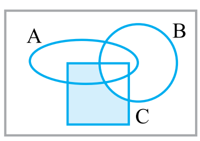
۴۵۴- در کیسه‌ای ۳ مهرهٔ آبی، ۴ مهرهٔ قرمز و ۶ مهرهٔ سبز وجود دارد. به چند طریق می‌توانیم ۳ مهره از این کیسه خارج کنیم به طوری که دقیقاً ۲ مهرهٔ آن همرنگ باشند؟

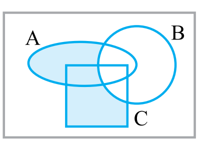
۱) ۱۶۹ ۲) ۱۷۹ ۳) ۱۸۹ ۴) ۱۹۹

۴۵۵- اگر A، B و C، سه مجموعه باشند، کدام گزینه عبارت $(A\cup C')'-B$ را به درستی نشان می‌دهد؟

۱) 


۲) 


۳) 


۴) 

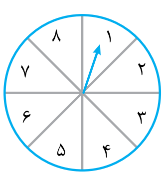

۴۵۶- از بین اعداد طبیعی کوچک‌تر از ۲۹، مضارب ۸ را حذف می‌کنیم. از اعداد باقی‌مانده یکی را انتخاب می‌کنیم. با چه احتمالی عدد انتخاب‌شده عددی اول است؟

۱) ۰/۲۸ ۲) ۰/۳۲ ۳) ۰/۳۶ ۴) ۰/۴

۴۵۷- در پرتاب دو تاس با چه احتمالی یکی از اعداد، مضرب دیگری است؟

۱) $\dfrac{۵}{۹}$ ۲) $\dfrac{۷}{۱۲}$ ۳) $\dfrac{۱۱}{۱۸}$ ۴) $\dfrac{۲}{۳}$

۴۵۸- صفحهٔ عقربه‌دار زیر به ۸ ناحیهٔ مساوی تقسیم شده است. عقربهٔ این صفحه را می‌چرخانیم و همزمان ۲ سکه پرتاب می‌کنیم. با چه احتمالی عقربه روی عددی اول می‌ایستد و سکه‌ها متفاوت می‌آیند؟




۱) $\dfrac{۳}{۱۶}$ ۲) $\dfrac{۱}{۴}$

۳) $\dfrac{۱}{۸}$ ۴) $\dfrac{۵}{۱۶}$

۴۵۹- آرین ۴ کتاب ریاضی، ۳ کتاب تاریخ و ۵ کتاب فیزیک دارد. آرین ۳تا از این کتاب‌ها را انتخاب می‌کند و در کیفش می‌گذارد. با چه احتمالی حداکثر ۲ کتاب فیزیک برداشته است؟

۱) $\frac{۲۱}{۲۲}$ ۲) $\frac{۱۰}{۱۱}$ ۳) $\frac{۱۹}{۲۲}$ ۴) $\frac{۹}{۱۱}$

۴۶۰- ۴ نفر سوار یک تاکسی هستند. با چه احتمالی ماه تولد حداقل دو نفر آن‌ها یکسان است؟

۱) $\frac{۴۱}{۹۶}$ ۲) $\frac{۵۵}{۹۶}$ ۳) $\frac{۸۹}{۱۴۴}$ ۴) $\frac{۵۵}{۱۴۴}$

۴۶۱- با حروف کلمهٔ **brazil** یک کلمهٔ ۶حرفی می‌سازیم. با چه احتمالی حروف صدادار کنار هم و حروف بی‌صدا نیز کنار هم قرار دارند؟

۱) $\frac{۴}{۱۵}$ ۲) $\frac{۲}{۱۵}$ ۳) $\frac{۱}{۱۵}$ ۴) $\frac{۱}{۳۰}$

۴۶۲- با چه احتمالی علی و استادش در یک فصل ولی در ماه‌های متفاوتی به دنیا آمده‌اند؟

۱) $\frac{۱}{۴}$ ۲) $\frac{۱}{۶}$ ۳) $\frac{۱}{۸}$ ۴) $\frac{۱}{۱۲}$

۴۶۳- با ارقام ۱ تا ۵ یک عدد ۴رقمی بدون ارقام تکراری می‌نویسیم. با چه احتمالی رقم اول و آخر آن هر دو فرد یا هر دو زوج هستند؟

۱) ۰/۳۶ ۲) ۰/۴ ۳) ۰/۴۲ ۴) ۰/۴۸

۴۶۴- در یک کلاس ورزشی ۱۰نفره، ۴ نفر دوبه‌دو برادرند. می‌خواهیم ۴ نفر از بین آن‌ها انتخاب کنیم. با چه احتمالی دو برادر در آن‌ها هستند و دو برادر دیگر نیستند؟

۱) $\frac{۱}{۶}$ ۲) $\frac{۱}{۷}$ ۳) $\frac{۱}{۸}$ ۴) $\frac{۱}{۱۰}$

۴۶۵- یک هتل در طبقهٔ دوم خود، ۴ اتاق خالی در یک سمت راهرو و ۳ اتاق خالی در سمت دیگر راهرو دارد. ۷ بازیکن فوتبال می‌خواهند هر کدام در یکی از اتاق‌ها ساکن شوند. با چه احتمالی اتاق ایمان، عرفان و علی (۳ نفر از ۷ بازیکن) کنار هم می‌افتد؟

۱) $\frac{۱}{۳۵}$ ۲) $\frac{۲}{۳۵}$ ۳) $\frac{۳}{۳۵}$ ۴) $\frac{۴}{۳۵}$

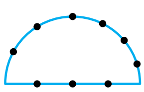
# ۴۲

• موضوع: آزمون جامع شمارش و احتمال
• نوع آزمون: جامع فصل (به سوی صد)
• صفحهٔ کتاب درسی: ۲ تا ۲۷ کتاب دوازدهم
• ۱۵ تست در ۲۵ دقیقه

۴۶۶- در چند عدد سه‌رقمی، بزرگ‌ترین رقم ۷ و کوچک‌ترین رقم ۲ است؟

۱) ۳۰ ۲) ۳۱ ۳) ۳۲ ۴) ۳۳

۴۶۷- چند مثلث می‌توان رسم کرد که رئوس آن‌ها روی نقاط شکل مقابل واقع باشند؟



۱) ۸۱ ۲) ۸۲ ۳) ۸۳ ۴) ۸۴

۴۶۸- اگر یک عضو به اعضای مجموعهٔ A اضافه کنیم، به تعداد زیرمجموعه‌های ۳عضوی‌اش ۲۸ واحد اضافه می‌شود. این مجموعه در ابتدا چند عضو داشته است؟

۱) ۷ ۲) ۸ ۳) ۹ ۴) ۱۰

۴۶۹- در تساوی $\binom{۲۶}{۴k} = \binom{۲۶}{k+۶}$، مجموع مقادیر ممکن برای k کدام است؟

۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۷ ۴) ۸

۴۷۰- می‌خواهیم از بین ۲ دانش‌آموز دهم، ۴ دانش‌آموز یازدهم و ۵ دانش‌آموز دوازدهم، یک تیم والیبال ۶نفره انتخاب کنیم به طوری که کاپیتان تیم از پایهٔ دوازدهم و پاسور از پایهٔ یازدهم باشد. این کار را به چند طریق می‌توانیم انجام دهیم؟

۱) ۲۳۴۰ ۲) ۲۴۰۰ ۳) ۲۴۸۰ ۴) ۲۵۲۰

۴۷۱- از هر ۶ مدرسهٔ برتر کشور، ۳ نفر در اردویی شرکت دارند. می‌خواهیم یک گروه ۴نفره از بینشان انتخاب کنیم به طوری که هیچ دو نفری از یک مدرسه نباشند. این کار به چند طریق امکان‌پذیر است؟

۱) ۷۲۰ ۲) ۹۰۰ ۳) ۱۰۵۰ ۴) ۱۲۱۵

۴۷۲- ۶ نفر قرار است برای یک جلسه دور یک میزگرد بنشینند. در چند حالت دو شخص خاص کنار هم نیستند؟

۱) ۶۰ ۲) ۶۴ ۳) ۶۸ ۴) ۷۲

**۴۷۳- کدام پیشامدها همواره ناسازگارند؟**

۱) $(A\cap B)' , A-B$
۲) $A\cap B' , A\cup B$
۳) $A'\cap B' , B-A$
۴) $A'-B' , A'\cup B$

**۴۷۴- با ارقام ۰ تا ۶ یک عدد چهاررقمی بدون تکرار ارقام می‌نویسیم، با چه احتمالی این عدد مضرب ۵ و بزرگ‌تر از ۳۰۰۰ است؟**

۱) $\frac{۲}{۹}$
۲) $\frac{۷}{۳۶}$
۳) $\frac{۵}{۲۴}$
۴) $\frac{۱}{۴}$

**۴۷۵- ۱۵ مهره داریم که رنگ بعضی از آن‌ها سفید و رنگ بعضی سیاه است. ۲ مهره به تصادف از بینشان انتخاب می‌کنیم. احتمال این‌که رنگ مهره‌ها متفاوت باشد، $\frac{۱۸}{۳۵}$ است. تعداد مهره‌های سیاه کدام می‌تواند باشد؟**

۱) ۷
۲) ۸
۳) ۹
۴) ۱۰

**۴۷۶- در پرتاب ۴ تاس با چه احتمالی دقیقاً اعداد ۲ تاس یکسان است؟**

۱) $\frac{۱}{۳}$
۲) $\frac{۴}{۹}$
۳) $\frac{۵}{۹}$
۴) $\frac{۲}{۳}$

**۴۷۷- قرار است ۶ نفر در یک مراسم سخنرانی کنند. با چه احتمالی دقیقاً دو نفر بین شخص A و شخص B، سخنرانی می‌کنند؟**

۱) $\frac{۱}{۶}$
۲) $\frac{۱}{۸}$
۳) $\frac{۱}{۹}$
۴) $\frac{۱}{۱۰}$

**۴۷۸- در یک جمع سه‌نفره با چه احتمالی ماه‌های تولد در سه فصل متفاوت است؟**

۱) $\frac{۱}{۸}$
۲) $\frac{۱}{۹}$
۳) $\frac{۱}{۱۲}$
۴) $\frac{۱}{۱۶}$

**۴۷۹- احتمال رخ‌دادن پیشامد A، دو برابر احتمال رخ‌ندادن پیشامد B است. اگر احتمال آن‌که حداقل یکی از دو پیشامد A یا B رخ دهد، ۸۲ درصد و احتمال رخ‌دادن هر دو پیشامد ۵۰ درصد باشد، با چه احتمالی فقط B رخ می‌دهد؟**

۱) ۰/۱۲
۲) ۰/۱۴
۳) ۰/۱۶
۴) ۰/۱۸

**۴۸۰- علی، رضا و محمد می‌خواهند روی ۳تا از صندلی‌های سالن بنشینند. با چه احتمالی در ردیف‌های متفاوتی می‌نشینند؟**

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| ردیف اول | ۳ | ۲ | ۱ | | |
| ردیف دوم | ۷ | ۶ | ۵ | ۴ | |
| ردیف سوم | ۱۲ | ۱۱ | ۱۰ | ۹ | ۸ |

۱) $\frac{۱}{۱۱}$
۲) $\frac{۲}{۱۱}$
۳) $\frac{۳}{۱۱}$
۴) $\frac{۴}{۱۱}$

# آزمون ۴۱

**۴۴۶- گزینهٔ ۳** هر توپ را به ۵ نفر می‌توانیم بدهیم، پس برای هر توپ ۵ انتخاب داریم. تعداد توپ‌ها برابر ۸ است، پس تعداد تمام حالت‌های ممکن برابر است با:

$$\frac{۵}{\text{توپ اول}}\times\frac{۵}{\text{توپ دوم}}\times\cdots\times\frac{۵}{\text{توپ هشتم}}=۵^{۸}$$

**۴۴۷- گزینهٔ ۴** **گام اول** صندلی‌های راننده محدودیت دارند، پس اول از آن‌ها شروع می‌کنیم: ۳ نفر گواهی‌نامه دارند، پس برای صندلی راننده‌ها به ترتیب ۳ و ۲ حالت داریم:

$$\frac{۳}{\text{رانندهٔ ماشین اول}}\times\frac{۲}{\text{رانندهٔ ماشین دوم}}\times\frac{}{\text{صندلی جلوی ماشین اول}}\times\frac{}{\text{صندلی جلوی ماشین دوم}}$$

$$\times\frac{}{\text{صندلی عقب ماشین اول}}\times\frac{}{\text{صندلی عقب ماشین دوم}}=$$

**گام دوم** ۴ نفر باقی‌مانده را در ۴ صندلی باقی‌مانده قرار می‌دهیم:

$$\frac{۳}{\text{رانندهٔ ماشین اول}}\times\frac{۲}{\text{رانندهٔ ماشین دوم}}\times\frac{۴}{\text{صندلی جلوی ماشین اول}}\times\frac{۳}{\text{صندلی جلوی ماشین دوم}}$$

$$\times\frac{۲}{\text{صندلی عقب ماشین اول}}\times\frac{۱}{\text{صندلی عقب ماشین دوم}}=۱۴۴$$

**۴۴۸- گزینهٔ ۱** **کلید** عدد باید مضرب ۵ باشد، پس یکان یا صفر است یا ۵. ارقام یکی در میان زوج و فرد هستند. یعنی با توجه به یکان، ارقامی که در جایگاه هزارگان، صدگان و دهگان هستند را پیدا می‌کنیم.

**گام اول** اگر یکان عدد صفر باشد، صدگان زوج است، ولی هزارگان و دهگان فرد هستند. یعنی داریم:

$$\frac{\overset{\overset{۷,۵,۳,۱}{\uparrow}}{۴}}{\text{هزارگان}}\times\frac{\overset{\overset{۸,۶,۴,۲}{\uparrow}}{۴}}{\text{صدگان}}\times\frac{\overset{\overset{\text{ارقام فرد به‌جز عددی که در هزارگان است.}}{\uparrow}}{۳}}{\text{دهگان}}\times\frac{\overset{\overset{\text{صفر}}{\nearrow}}{۱}}{\text{یکان}}=۴۸$$

**گام دوم** اگر یکان عدد ۵ باشد، صدگان فرد است، ولی هزارگان و دهگان زوج هستند. یعنی داریم:

$$\frac{\overset{\overset{۸,۶,۴,۲}{\uparrow}}{۴}}{\text{هزارگان}}\times\frac{\overset{\overset{۷,۳,۱}{\uparrow}}{۳}}{\text{صدگان}}\times\frac{\overset{\overset{\text{رقمی‌که در هزارگان است حذف می‌شود ولی صفر می‌تواند این‌جا قرارگیرد.}}{\uparrow}}{۴}}{\text{دهگان}}\times\frac{\overset{\overset{۵}{\uparrow}}{۱}}{\text{یکان}}=۴۸$$

**گام سوم** مجموع دو حالت برابر است با: $۴۸+۴۸=۹۶$

**۴۴۹- گزینهٔ ۳** **کلید** به جای این‌که همهٔ حالت‌های مطلوب را حساب کنیم، تعداد حالت‌های نامطلوب را از کل حالت‌ها کم می‌کنیم. حالت نامطلوب وقتی به وجود می‌آید که هیچ رقم تکراری نداشته باشیم.

**گام اول** تعداد کل عددهای سه‌رقمی که می‌توان با ارقام ۰ تا ۷ ساخت، برابر است با:

$$\frac{\overset{\overset{\text{صدگان صفر نیست.}}{\uparrow}}{۷}}{\text{صدگان}}\times\frac{۸}{\text{دهگان}}\times\frac{۸}{\text{یکان}}$$

**گام دوم** تعداد کل اعدادی که در آن‌ها هیچ رقم تکراری وجود ندارد، برابر است با:

$$\frac{\overset{\overset{\text{صدگان صفر نیست.}}{\uparrow}}{۷}}{\text{صدگان}}\times\frac{\overset{\overset{\text{صفر می‌تواند باشد، ولی رقمی که در صدگان است حذف می‌شود.}}{\uparrow}}{۷}}{\text{دهگان}}\times\frac{۶}{\text{یکان}}$$

**گام سوم** تعداد حالت‌های مطلوب برابر است با:

$$۷\times\underbrace{۸\times۸}_{۶۴}-۷\times\underbrace{۷\times۶}_{۴۲}=۷(۶۴-۴۲)=۷\times۲۲=۱۵۴$$

**۴۵۰- گزینهٔ ۲** **گام اول** صورت کسر $\frac{70\times9!-90\times8!}{56\times6!+88\times7!}$ را ساده‌تر می‌نویسیم:

$$70\times9!-90\times8!=7\times\overbrace{10\times9!}^{10!}-\overbrace{10\times9\times8!}^{10!}=7\times10!-10!$$
$$=10!(7-1)=10!\times6$$

**گام دوم** مخرج کسر را ساده‌تر می‌نویسیم:

$$56\times6!+88\times7!=\overbrace{8\times7\times6!}^{8!}+11\times\overbrace{8\times7!}^{8!}=8!+11\times8!$$
$$=8!(1+11)=8!\times12$$

**گام سوم** حاصل کسر برابر است با:

$$\frac{\overset{10\times9}{\cancel{10!}}\times\overset{1}{\cancel{6}}}{\cancel{8!}\times\underset{2}{\cancel{12}}}=\frac{10\times9}{2}=45$$

**۴۵۱- گزینهٔ ۲** **گام اول** اگر دسته گل شامل ۲ شاخه گل باشد، باید ۲ شاخه از ۷ شاخه انتخاب کنیم:

$$\binom{7}{2}=\frac{7\times6}{2}=21$$

**گام دوم** اگر دسته گل شامل ۳ شاخه گل باشد، آن‌گاه داریم:

$$\binom{7}{3}=\frac{\overset{7\times6\times5}{\cancel{7!}}}{\cancel{4!}\,3!}=\frac{7\times\cancel{6}\times5}{\cancel{6}}=35$$

**گام سوم** اگر دسته گل شامل ۴ شاخه گل باشد، آن‌گاه داریم:

$$\binom{7}{4}=\frac{\overset{7\times6\times5}{\cancel{7!}}}{\cancel{4!}\,3!}=\frac{7\times6\times5}{6}=35$$

**گام چهارم** مجموع همهٔ حالت‌ها برابر است با: $21+35+35=91$

**۴۵۲- گزینهٔ ۱** **کلید** در این مجموعه اعداد ۲، ۴، ۶ و ۸ زوج هستند. زیرمجموعه‌هایی که فقط شامل این اعداد هستند می‌توانند ۱عضوی یا ۲عضوی یا ۳عضوی یا ۴عضوی باشند.
تعداد زیرمجموعه‌ها برابر است با:

$$\underbrace{\binom{4}{1}}_{\text{۱عضوی}}\underset{\text{یا}}{+}\underbrace{\binom{4}{2}}_{\text{۲عضوی}}\underset{\text{یا}}{+}\underbrace{\binom{4}{3}}_{\text{۳عضوی}}\underset{\text{یا}}{+}\underbrace{\binom{4}{4}}_{\text{۴عضوی}}=4+6+4+1=15$$

**۴۵۳- گزینهٔ ۲** **گام اول** هر فرزند را به همراه پدرش در یک بسته قرار می‌دهیم:

[فرزند ۴ و پدر ۴], [فرزند ۳ و پدر ۳], [فرزند ۲ و پدر ۲], [فرزند ۱ و پدر ۱]

**گام دوم** تعداد حالت‌هایی که این ۴ بسته را می‌توانیم کنار هم قرار دهیم برابر است با: $4!=24$

**گام سوم** داخل هر بسته، جای پدر و فرزند می‌تواند عوض شود، پس داخل هر بسته ۲! حالت داریم.

**گام چهارم** تعداد کل حالات برابر است با:

$$\underbrace{4!}_{\text{بسته‌ها}}\times\overbrace{(2!)^4}^{\text{داخل بسته‌ها}}=24\times16=384$$

**۴۵۴- گزینهٔ ۳** **کلید** برای آن‌که دقیقاً ۲ مهره همرنگ باشند، سه حالت داریم:

۱) ۲ مهره آبی و ۱ مهره قرمز یا سبز باشد.
۲) ۲ مهره قرمز و ۱ مهره آبی یا سبز باشد.
۳) ۲ مهره سبز و ۱ مهره آبی یا قرمز باشد.

**گام اول** اگر ۲ مهره آبی و ۱ مهره قرمز یا سبز باشد، آن‌گاه داریم:

$$\binom{3}{2}\times\overbrace{\binom{10}{1}}^{\text{مجموع قرمزها و سبزها}}=3\times10=30$$

**گام دوم** اگر ۲ مهره قرمز و ۱ مهره آبی یا سبز باشد، آن‌گاه داریم:

$$\binom{4}{2}\times\overbrace{\binom{9}{1}}^{\text{مجموع آبی‌ها و سبزها}}=\frac{4\times3}{2}\times9=54$$

**گام سوم** اگر ۲ مهره سبز و ۱ مهره آبی یا قرمز باشد، آن‌گاه داریم:

$$\binom{6}{2}\times\overbrace{\binom{7}{1}}^{\text{مجموع آبی‌ها و قرمزها}}=\frac{6\times5}{2}\times7=105$$

**گام چهارم** تعداد همهٔ حالت‌ها برابر است با: $30+54+105=189$

**۴۵۵- گزینهٔ ۱** **نکته ۱** $(A\cup B)'=A'\cap B'$

**نکته ۲** $A-B=A\cap B'$

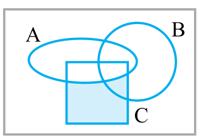
**گام اول** به کمک نکتهٔ ۱، عبارت $(A\cup C')'$ را ساده می‌کنیم:
$(A\cup C')'=A'\cap C$

**گام دوم** جای $A'\cap C$ می‌نویسیم $C\cap A'$ و بعد از نکتهٔ ۲ استفاده می‌کنیم:
$C\cap A'=C-A$

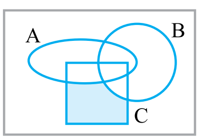
**گام سوم** ساده‌شدهٔ عبارت به صورت زیر است:

$$\underbrace{(A\cup C')'}_{C-A}-B=(C-A)-B$$

**گام چهارم** اول $C-A$ را مشخص می‌کنیم:




**گام پنجم** حالا از قسمت رنگی، ناحیه‌ای که در B قرار دارد را هم حذف می‌کنیم تا به $(C-A)-B$ برسیم:




**۴۵۶- گزینهٔ ۳** **گام اول** از اعداد طبیعی کوچک‌تر از ۲۹ (یعنی ۱ تا ۲۸)، مضارب ۸ را حذف می‌کنیم و اعداد باقی‌مانده را می‌نویسیم:

$$S=\{1,2,3,4,5,6,7,9,10,11,12,13,14,15,17,18,19,20,21,22,23,25,26,27,28\}$$

تعداد این اعداد $n(S)=25$ است.

**گام دوم** اعداد اول آن‌ها را می‌نویسیم:

$$A=\{2,3,5,7,11,13,17,19,23\}\Rightarrow n(A)=9$$

**گام سوم** احتمال آن‌که عدد انتخابی اول باشد برابر است با:

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{9}{25}=\frac{9\times4}{25\times4}=0/36$$

**۴۵۷- گزینهٔ ۳** گام اول تعداد کل حالات در پرتاب دو تاس را حساب می‌کنیم:

$$n(S)=\underset{\text{تاس اول}}{6}\times\underset{\text{تاس دوم}}{6}=36$$

گام دوم در جدول زیر خانه‌هایی که یکی از تاس‌ها مضرب دیگری است را تیک می‌زنیم:

| تاس ۱ / تاس ۲ | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ | ۵ | ۶ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| ۱ | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ |
| ۲ | ✓ | ✓ | | ✓ | | ✓ |
| ۳ | ✓ | | ✓ | | | ✓ |
| ۴ | ✓ | ✓ | | ✓ | | |
| ۵ | ✓ | | | | ✓ | |
| ۶ | ✓ | ✓ | ✓ | | | ✓ |

پس تعداد حالات مطلوب $n(A)=22$ است.

گام سوم احتمال وقوع پیشامد $A$ برابر است با:

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{22}{36}=\frac{11}{18}$$

**۴۵۸- گزینهٔ ۲** گام اول تعداد اعضای فضای نمونه برابر است با:

$$n(S)=\underset{\text{عقربه}}{8}\times\underset{\text{سکهٔ ۱}}{2}\times\underset{\text{سکهٔ ۲}}{2}=32$$

گام دوم حالات مطلوب عقربه و سکه‌ها را می‌نویسیم:

عقربه روی عدد اول بایستد: $\{2,3,5,7\}\Rightarrow$ ۴ حالت

سکه‌ها متفاوت باشند: {ر پ، پ ر} $\Rightarrow$ ۲ حالت

پس تعداد کل حالات مطلوب برابر است با:

$$n(A)=\underset{\text{عقربه}}{4}\times\underset{\text{سکه‌ها}}{2}=8$$

گام سوم احتمال وقوع $A$ برابر است با:

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{8}{32}=\frac{1}{4}$$

**۴۵۹- گزینهٔ ۱** کلید با توجه به کلمهٔ «حداکثر» چک می‌کنیم که اگر با احتمال متمم سؤال را حل کنیم راحت‌تر است یا خیر.

متمم پیشامد $\underbrace{\text{«حداکثر ۲ کتاب فیزیک»}}_{A}$، پیشامد $\underbrace{\text{«هر ۳ کتاب فیزیک باشند»}}_{A'}$ است که محاسبهٔ آن راحت‌تر است.

گام اول تعداد کل حالات انتخاب ۳ کتاب از بین $\underbrace{4+3+5}_{12}$ کتاب برابر است با:

$$n(S)=\binom{12}{3}=\frac{12!}{9!3!}=\frac{\overset{2}{\cancel{12}}\times11\times10}{\underset{1}{\cancel{3\times2}}}=220$$

گام دوم برای حساب‌کردن تعداد اعضای $A'$ باید هر سه کتاب انتخابی فیزیک باشند.

در کل ۵ کتاب فیزیک داریم که باید ۳تای آن‌ها را انتخاب کنیم:

$$n(A')=\binom{5}{3}=10$$

گام سوم احتمال وقوع $A'$ را حساب می‌کنیم:

$$P(A')=\frac{n(A')}{n(S)}=\frac{10}{220}=\frac{1}{22}$$

گام چهارم احتمال وقوع $A$ برابر است با:

$$P(A)=1-P(A')=1-\frac{1}{22}=\frac{21}{22}$$

**۴۶۰- گزینهٔ ۱** کلید با توجه به کلمهٔ «حداقل» باید از احتمال متمم استفاده کنیم.

گام اول متمم پیشامد $\underbrace{\text{«ماه تولد حداقل دو نفر یکسان است»}}_{A}$، پیشامد $\underbrace{\text{«ماه تولد همهٔ افراد متفاوت است»}}_{A'}$ می‌باشد.

گام دوم تعداد کل حالات برابر است با:

$$n(S)=\underset{\text{نفر اول}}{12}\times\underset{\text{نفر دوم}}{12}\times\underset{\text{نفر سوم}}{12}\times\underset{\text{نفر چهارم}}{12}=12^4$$

گام سوم برای آن‌که ماه تولدها متفاوت باشد، نفر اول ۱۲ حالت، نفر دوم ۱۱ حالت و نفر سوم و چهارم به ترتیب ۱۰ و ۹ حالت دارند:

$$n(A')=\underset{\text{نفر اول}}{12}\times\underset{\text{نفر دوم}}{11}\times\underset{\text{نفر سوم}}{10}\times\underset{\text{نفر چهارم}}{9}$$

گام چهارم احتمال وقوع $A'$ را حساب می‌کنیم:

$$P(A')=\frac{n(A')}{n(S)}=\frac{\overset{1}{\cancel{12}}\times11\times\overset{5}{\cancel{10}}\times9}{\underset{1}{\cancel{12}}\times\underset{6}{\cancel{12}}\times12\times12}=\frac{11\times5\times\overset{3}{\cancel{9}}}{\underset{2}{\cancel{6}}\times\underset{4}{\cancel{12}}\times12}=\frac{55}{96}$$

گام پنجم احتمال وقوع $A$ برابر است با:

$$P(A)=1-P(A')=1-\frac{55}{96}=\frac{41}{96}$$

**۴۶۱- گزینهٔ ۲** گام اول تعداد کل کلمات ۶حرفی که با حروف کلمهٔ brazil می‌توان نوشت، برابر است با: $n(S)=6!$

گام دوم حروف a و i باید کنار هم قرار بگیرند. حروف b، r، z و l هم باید کنار هم باشند. یعنی داریم:

$$\underset{2!}{\boxed{a,i}}\ \text{و}\ \underset{4!}{\boxed{b,r,z,l}}\Rightarrow n(A)=2!4!\underset{\text{جایگشت دو بسته}}{2!}=4\times4!$$

گام سوم $P(A)$ برابر است با:

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{4\times\overset{1}{\cancel{4!}}}{\underset{6\times5}{\cancel{6!}}}=\frac{4}{6\times5}=\frac{2}{15}$$

**۴۶۲- گزینهٔ ۲** گام اول تعداد اعضای فضای نمونه را به دست می‌آوریم:

$$n(S)=\underset{\text{علی}}{12}\times\underset{\text{استاد}}{12}$$

گام دوم در یک فصل یکسان ولی در ماه‌های متفاوت به دنیا آمده‌اند، یعنی داریم:

$$n(A)=\overset{\text{انتخاب یک فصل}}{\binom{۴}{۱}}\times\underset{\text{ماه تولد علی}}{۳}\times\underset{\text{ماه تولد استادش}}{۲}=۲۴$$

گام سوم $P(A)$ برابر است با:

$$P(A)=\frac{\overset{۲}{\cancel{۲۴}}}{\cancel{۱۲}\times ۱۲}=\frac{۱}{۶}$$

**۴۶۳- گزینهٔ ۲** گام اول تعداد کل اعداد ۴رقمی بدون تکرار ارقام که با ارقام ۱ تا ۵ می‌توان نوشت، برابر است با:

$$n(S)=\underset{\text{هزارگان}}{۵}\times\underset{\text{صدگان}}{۴}\times\underset{\text{دهگان}}{۳}\times\underset{\text{یکان}}{۲}=۱۲۰$$

گام دوم می‌خواهیم رقم اول و آخر هر دو فرد یا هر دو زوج باشد. دو حالت داریم:

- رقم اول و آخر فرد باشد:

$$\overset{\text{۱ یا ۳ یا ۵}}{\underset{\text{هزارگان}}{۳}}\times\underset{\text{صدگان}}{۳}\times\underset{\text{دهگان}}{۲}\times\overset{\text{فرد به جز هزارگان}}{\underset{\text{یکان}}{۲}}=۳۶$$

- رقم اول و آخر زوج باشد:

$$\overset{\text{۲ یا ۴}}{\underset{\text{هزارگان}}{۲}}\times\underset{\text{صدگان}}{۳}\times\underset{\text{دهگان}}{۲}\times\overset{\text{زوج به جز هزارگان}}{\underset{\text{یکان}}{۱}}=۱۲$$

گام سوم مجموع دو حالت برابر است با:

$$n(A)=۳۶+۱۲=۴۸$$

گام چهارم احتمال وقوع $A$ برابر است با:

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۴۸}{۱۲۰}=\frac{۴}{۱۰}=۰/۴$$

**۴۶۴- گزینهٔ ۲** گام اول در کل ۴ نفر از بین ۱۰ نفر انتخاب می‌کنیم:

$$n(S)=\binom{۱۰}{۴}=\frac{۱۰!}{۶!۴!}=\frac{۱۰\times\overset{۳}{\cancel{۹}}\times\overset{۱}{\cancel{۸}}\times ۷}{\underset{۱}{\cancel{۴}}\times\underset{۱}{\cancel{۳}}\times\underset{۱}{\cancel{۲}}}=۲۱۰$$

گام دوم برادرها را با «$A_1, A_2$» و «$B_1, B_2$» نشان می‌دهیم. برای آن‌که دو برادر باشند و دو برادر دیگر نباشند، دو حالت داریم:

- $A_1$ و $A_2$ انتخاب شوند و $B_1$ و $B_2$ انتخاب نشوند:

$$A_1, A_2, \bigcirc, \bigcirc \Rightarrow \binom{۶}{۲}=\frac{۶\times ۵}{۲}=۱۵$$

باید از بین ۶ نفر باقی‌مانده انتخاب شوند.

- $B_1$ و $B_2$ انتخاب شوند و $A_1$ و $A_2$ انتخاب نشوند:

$$B_1, B_2, \bigcirc, \bigcirc \Rightarrow \binom{۶}{۲}=\frac{۶\times ۵}{۲}=۱۵$$

- تعداد حالات مطلوب برابر است با: $n(A)=۱۵+۱۵=۳۰$

گام سوم احتمال وقوع $A$ برابر است با:

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۳۰}{۲۱۰}=\frac{۱}{۷}$$

**۴۶۵- گزینهٔ ۳** گام اول در کل ۷ اتاق خالی و ۷ نفر داریم، پس تعداد کل حالات برابر است با: $n(S)=۷!$

گام دوم شکل اتاق‌ها به صورت مقابل است:

| A | B | C | D |
|---|---|---|---|
| E | F | G | |

برای آن‌که ایمان، عرفان و علی کنار هم باشند، باید یکی از حالات زیر رخ دهد:

۱) این ۳ نفر در اتاق‌های A، B و C باشند (!۳) و چهار نفر دیگر در ۴ اتاق دیگر (!۴): $۳!\times ۴!$

۲) این ۳ نفر در اتاق‌های B، C و D باشند (!۳) و چهار نفر دیگر در ۴ اتاق دیگر (!۴): $۳!\times ۴!$

۳) این ۳ نفر در اتاق‌های E، F و G باشند (!۳) و چهار نفر دیگر در ۴ اتاق دیگر (!۴): $۳!\times ۴!$

مجموع حالات مطلوب برابر است با:

$$n(A)=۳\times(۳!\times ۴!)$$

گام سوم احتمال وقوع $A$ برابر است با:

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۳\times ۳!\times\overset{۱}{\cancel{۴!}}}{\underset{۵\times ۶\times ۷}{\cancel{۷!}}}=\frac{۳\times\overset{۱}{\cancel{۶}}}{۵\times\underset{۱}{\cancel{۶}}\times ۷}=\frac{۳}{۳۵}$$

## آزمون ۴۲

**۴۶۶- گزینهٔ ۱** کلید سه حالت مختلف داریم که همهٔ آن‌ها را بررسی می‌کنیم:

۱) رقم تکراری نداشته باشیم.

۲) دوتا رقم ۲ داشته باشیم.

۳) دوتا رقم ۷ داشته باشیم.

گام اول دو رقم ۲ و ۷ را که داریم. اگر رقم تکراری نداشته باشیم، رقم سوم از بین اعداد ۳، ۴، ۵ و ۶ انتخاب می‌شود:

$$\binom{۴}{۱}=۴$$

حالا سه رقم را داریم و باید آن‌ها را کنار هم قرار دهیم: $۳!=۶$

پس تعداد اعداد در این حالت برابر است با: $۴\times ۶=۲۴$

گام دوم دو رقم ۲ و یک رقم ۷ داشته باشیم. اعداد را می‌نویسیم:

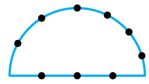
$$\underbrace{۷۲۲,۲۷۲,۲۲۷}_{\text{۳ حالت}}$$

گام سوم دو رقم ۷ و یک رقم ۲ داشته باشیم. اعداد را می‌نویسیم:

$$\underbrace{۲۷۷,۷۲۷,۷۷۲}_{\text{۳ حالت}}$$

گام چهارم تعداد کل حالات برابر است با: $۲۴+۳+۳=۳۰$

**۴۶۷- گزینهٔ ۳** روش ۱ گام اول ما باید از بین ۹ نقطه روی شکل، ۳ نقطه انتخاب کنیم که روی یک امتداد نباشند:



۳ حالت داریم:

«۳ نقطه از روی قوس»
حالت ۱

یا «۲ نقطه از روی قوس و ۱ نقطه از قطر» یا
حالت ۲

«۱ نقطه از روی قوس و ۲ نقطه از قطر»
حالت ۳

گام دوم حالت ۱ ۳ نقطه از بین ۶ نقطه روی قوس انتخاب کنیم:

$$\binom{۶}{۳}=\frac{۶!}{۳!۳!}=\frac{\cancel{۶}\times ۵\times ۴}{\cancel{۳!}}=۲۰$$

حالت ۲ «۲ نقطه از بین ۶ نقطه روی قوس» و «۱ نقطه از بین ۳ نقطه روی قطر»:

$$\binom{۶}{۲}\times\binom{۳}{۱}=\frac{۶\times ۵}{۲}\times ۳=۴۵$$

حالت ۳ «۱ نقطه از بین ۶ نقطه روی قوس» و «۲ نقطه از بین ۳ نقطه روی قطر»:

$$\binom{۶}{۱}\times\binom{۳}{۲}=۶\times ۳=۱۸$$

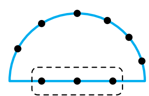
گام سوم مجموع حالات بالا برابر است با: $۲۰+۴۵+۱۸=۸۳$

روش ۲ از روش متمم استفاده می‌کنیم:

گام اول در کل ۹ نقطه داریم. ۳تای آن را انتخاب می‌کنیم:

$$\binom{۹}{۳}=\frac{۹!}{۶!۳!}=\frac{\cancel{۹}^{۳}\times \cancel{۸}^{۴}\times ۷}{\cancel{۳}_{۱}\times \cancel{۲}_{۱}}=۸۴$$

گام دوم حالا حالت‌هایی که ۳ نقطه روی یک امتداد می‌افتند را می‌شماریم که فقط ۱ حالت می‌شود:



گام سوم پس تعداد حالات قابل قبول، $۸۴-۱=۸۳$ می‌شود.

**۴۶۸- گزینهٔ ۲** کلید تعداد اعضای اولیهٔ A را n می‌گیریم.

تعداد زیرمجموعه‌های سه‌عضوی مجموعهٔ A در حالت اول $\binom{n}{۳}$ بوده است. یک عضو به مجموعهٔ A اضافه شده، تعداد زیرمجموعه‌های سه‌عضوی برابر با $\binom{n+۱}{۳}$ می‌شود.

گام اول تعداد زیرمجموعه‌های ۳عضوی‌اش برابر است با:

$$\binom{n}{۳}=\frac{n!}{(n-۳)!۳!}=\frac{n(n-۱)(n-۲)}{۶}$$

گام دوم اگر یک عضو به اعضای A اضافه کنیم، تعداد اعضایش $n+۱$ می‌شود و تعداد زیرمجموعه‌های ۳عضوی‌اش برابر است با:

$$\binom{n+۱}{۳}=\frac{(n+۱)!}{(n+۱-۳)!۳!}=\frac{(n+۱)!}{(n-۲)!\times ۶}=\frac{(n+۱)n(n-۱)}{۶}$$

گام سوم کسر به دست آمده در گام ۲، ۲۸ واحد از کسر گام ۱ بیشتر است، پس:

$$\frac{(n+۱)n(n-۱)}{۶}-\frac{n(n-۱)(n-۲)}{۶}=۲۸$$

$$\xrightarrow{\times ۶}(n+۱)n(n-۱)-n(n-۱)(n-۲)=۱۶۸$$

گام چهارم در سمت چپ از $n(n-۱)$ فاکتور می‌گیریم:

$$(n+۱)\underline{n(n-۱)}-\underline{n(n-۱)}(n-۲)=۱۶۸$$

$$\Rightarrow n(n-۱)(\underbrace{(n+۱)-(n-۲)}_{۳})=۱۶۸$$

$$\Rightarrow ۳n(n-۱)=۱۶۸$$

$$\xrightarrow{\div ۳} n(n-۱)=۵۶\Rightarrow n^{۲}-n-۵۶=۰$$

$$\xrightarrow{\text{جمله‌مشترک}}(n-۸)(n+۷)=۰\Rightarrow\begin{cases}n=۸ \checkmark\\ n=-۷ \times\end{cases}$$

**۴۶۹- گزینهٔ ۲** نکته اگر $\binom{n}{a}=\binom{n}{b}$ باشد، آن‌گاه یا $a=b$ است یا $a+b=n$.

گام اول با توجه به نکته، از تساوی $\binom{۲۶}{۴k}=\binom{۲۶}{k+۶}$ دوتا نتیجه می‌توانیم بگیریم:

- $۴k$ و $k+۶$ برابرند: $۴k=k+۶\Rightarrow ۳k=۶\Rightarrow k=۲$
- مجموع $۴k$ و $k+۶$ می‌شود ۲۶:

$$۴k+k+۶=۲۶\Rightarrow ۵k=۲۰\Rightarrow k=۴$$

گام دوم مجموع مقادیر k برابر است با: $۲+۴=۶$

**۴۷۰- گزینهٔ ۴** کلید بعد از انتخاب کاپیتان و پاسور، ۴ نفر دیگر تیم را از بین نفرات باقی‌مانده انتخاب می‌کنیم.

گام اول کاپیتان از بین ۵ نفر پایهٔ دوازدهم انتخاب می‌شود:

$$\binom{۵}{۱}=۵$$

گام دوم پاسور از بین ۴ نفر پایهٔ یازدهم انتخاب می‌شود:

$$\binom{۴}{۱}=۴$$

گام سوم در کل $۱۱=۵+۴+۲$ بازیکن داریم که ۲تای آن‌ها به عنوان پاسور و کاپیتان انتخاب شده‌اند. حالا باید از بین ۹ نفر باقی‌مانده، ۴ نفر انتخاب کنیم:

$$\binom{۹}{۴}=\frac{۹!}{۵!۴!}=\frac{۹\times \cancel{۸}^{۲}\times ۷\times \cancel{۶}^{۱}}{\cancel{۴}_{۱}\times \cancel{۳}_{۱}}=۱۲۶$$

گام چهارم حالا تعداد حالات مراحل را طبق اصل ضرب در هم ضرب می‌کنیم:
$۵\times ۴\times ۱۲۶=۲۵۲۰$

**۴۷۱- گزینهٔ ۴** گام اول ۴ مدرسه از ۶ مدرسه انتخاب می‌کنیم:

$$\binom{۶}{۴}=\frac{\cancel{۶!}^{۶\times ۵}}{\cancel{۴!}۲!}=۱۵$$

**گام دوم** از هر کدام از ۴ مدرسهٔ انتخاب‌شده، ۱ نفر انتخاب می‌کنیم:

$$\binom{۳}{۱}\binom{۳}{۱}\binom{۳}{۱}\binom{۳}{۱}=۳^{۴}=۸۱$$

**گام سوم** تعداد حالت‌ها برابر است با: $۱۵\times۸۱=۱۲۱۵$

---

**۴۷۲- گزینهٔ ۴** **نکته** تعداد حالات قرارگرفتن n نفر، دور یک میز گرد برابر با $(n-۱)!$ است.

**کلید** حساب‌کردن تعداد همهٔ حالت‌های مطلوب وقت‌گیر است، پس تعداد همهٔ حالت‌های ممکن را به دست می‌آوریم و حالت‌های نامطلوب را حذف می‌کنیم.

**گام اول** تعداد حالت‌های قرارگرفتن ۶ نفر دور یک میز گرد برابر است با: $(۶-۱)!=۵!=۱۲۰$

**گام دوم** حالا دو نفری که قرار است کنار هم باشند را در یک بسته قرار می‌دهیم:

$$\underbrace{\boxed{a,b},c,d,e,f}_{\text{۵ تا}}$$

تعداد حالت‌های قرارگرفتن ۶ نفر دور میز گرد به طوری‌که دو شخص خاص در کنار هم برابر است با:

$$\underbrace{(۵-۱)!}_{\text{جایگشت دوری}}\ \underbrace{۲!}_{\text{داخل بسته}}=۴!۲!=۴۸$$

**گام سوم** تعداد حالت‌های مطلوب برابر است با: $۱۲۰-۴۸=۷۲$

---

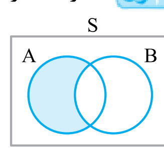
**۴۷۳- گزینهٔ ۳** **کلید** پیشامدهای گزینه‌ها را روی نمودار ون نشان می‌دهیم. هر دو پیشامدی که اشتراکی نداشتند، ناسازگارند.

**نکته۱** $A-B=A\cap B'$

**نکته۲** $(A\cap B)'=A'\cup B'$ و $(A\cup B)'=A'\cap B'$

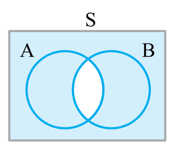
در هر گام یکی از گزینه‌ها را روی نمودار ون نشان می‌دهیم:

**گام اول** اشتراک دارند:



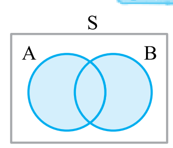
A-B

و



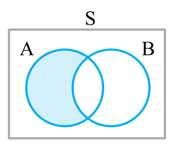
$(A\cap B)'$

**گام دوم** اشتراک دارند:



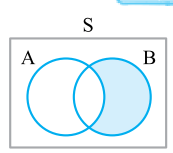
$A\cup B$

و



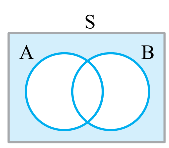
$A\cap B'=A-B$

**گام سوم** اشتراک ندارند، پس ناسازگارند:



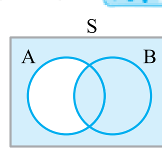
B-A

و



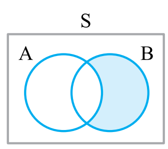
$A'\cap B'=(A\cup B)'$

**گام چهارم** اشتراک دارند:



$A'\cup B$

و



$A'-B'=B-A$

---

**۴۷۴- گزینهٔ ۲** **کلید** فضای نمونه، همهٔ اعداد ۴رقمی بدون تکرار با ارقام ۰ تا ۶ است. از بین این اعداد، مضاربی از ۵ که بزرگ‌تر از ۳۰۰۰ باشند، حالت‌های مطلوب هستند.

**گام اول** تعداد کل اعداد ۴رقمی بدون ارقام تکراری که با ارقام ۰ تا ۶ می‌توان نوشت را حساب می‌کنیم:

$$n(S)=\underset{\text{ه}}{۶}\times\underset{\text{ص}}{۶}\times\underset{\text{د}}{۵}\times\underset{\text{ی}}{۴}=۷۲۰$$

**گام دوم** تعداد اعداد مضرب ۵ بزرگ‌تر از ۳۰۰۰ را به دست می‌آوریم. یکان باید ۰ یا ۵ باشد. دو حالت را جداگانه حساب می‌کنیم:

۱) یکان صفر باشد:

$$\overset{۶,۵,۴,۳}{\underset{\text{ه}}{۴}}\times\underset{\text{ص}}{۵}\times\underset{\text{د}}{۴}\times\overset{\text{صفر}}{\underset{\text{ی}}{۱}}=۸۰$$

۲) یکان ۵ باشد:

$$\overset{۶,۴,۳}{\underset{\text{ه}}{۳}}\times\underset{\text{ص}}{۵}\times\underset{\text{د}}{۴}\times\overset{۵}{\underset{\text{ی}}{۱}}=۶۰$$

پس تعداد حالات مطلوب برابر است با: $n(A)=۸۰+۶۰=۱۴۰$

**گام سوم** احتمال را به دست می‌آوریم:

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۱۴۰}{۷۲۰}=\frac{۷}{۳۶}$$

---

**۴۷۵- گزینهٔ ۳** **گام اول** در کل ۱۵ مهره داریم و ۲تای آن‌ها را انتخاب می‌کنیم:

$$n(S)=\binom{۱۵}{۲}=\frac{۱۵\times\cancel{۱۴}^{۷}}{\cancel{۲}_{۱}}=۱۰۵$$

**گام دوم** فرض کنیم k مهرهٔ سیاه داریم. پس تعداد مهره‌های سفید $۱۵-k$ می‌شود.

برای آن‌که رنگ دو مهرهٔ انتخاب‌شده متفاوت باشد باید ۱ مهرهٔ سیاه و ۱ مهرهٔ سفید انتخاب کنیم، پس:

$$n(A)=\binom{k}{۱}\times\binom{۱۵-k}{۱}=k(۱۵-k)$$

**گام سوم** احتمال وقوع پیشامد A را حساب می‌کنیم:

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{k(۱۵-k)}{۱۰۵}$$

**گام چهارم** کسر بالا باید با $\frac{۱۸}{۳۵}$ برابر باشد:

$$\frac{k(۱۵-k)}{\cancel{۱۰۵}_{۳}}=\frac{۱۸}{\cancel{۳۵}_{۱}}\xrightarrow{\times۳}k(۱۵-k)=۵۴$$

$$\Rightarrow ۱۵k-k^{۲}=۵۴\Rightarrow k^{۲}-۱۵k+۵۴=۰$$

$$\xrightarrow{\text{جمله مشترک}}(k-۹)(k-۶)=۰\Rightarrow\begin{cases}k=۶\\k=۹\end{cases}$$

پس تعداد مهره‌های سیاه ۶ یا ۹ بوده است.

---

**۴۷۶- گزینهٔ ۳** **گام اول** تعداد اعضای فضای نمونه در پرتاب ۴ تاس برابر است با:

$$n(S)=\underset{\text{تاس ۱}}{۶}\times\underset{\text{تاس ۲}}{۶}\times\underset{\text{تاس ۳}}{۶}\times\underset{\text{تاس ۴}}{۶}=۶^{۴}$$

**گام دوم** از ۴ تاس، ۲ تاس را انتخاب می‌کنیم: $\binom{4}{2}$

می‌خواهیم اعداد این ۲ تاس یکسان باشد، پس اولی ۶ حالت و دومی ۱ حالت دارد: $6\times 1$

تاس سوم باید عدد تاس اول و دوم نباشد، یعنی ۵ حالت دارد.

تاس چهارم هم باید دو عدد قبلی نباشد، یعنی ۴ حالت دارد.

پس: $n(A)=\binom{4}{2}\times 6\times 1\times 5\times 4=6\times 6\times 5\times 4$

**گام سوم** احتمال وقوع A برابر است با:

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{\cancelto{1}{6\times 6}\times 5\times 4}{\cancelto{1}{6\times 6}\times 6\times 6}=\frac{20}{36}=\frac{5}{9}$$

**۴۷۷- گزینه ۴** **گام اول** تعداد کل حالات برای سخنرانی این ۶ نفر برابر است با:

$$n(S)=\underset{\text{اول}}{\frac{6}{\text{نفر}}}\times\underset{\text{دوم}}{\frac{5}{\text{نفر}}}\times\underset{\text{سوم}}{\frac{4}{\text{نفر}}}\times\underset{\text{چهارم}}{\frac{3}{\text{نفر}}}\times\underset{\text{پنجم}}{\frac{2}{\text{نفر}}}\times\underset{\text{ششم}}{\frac{1}{\text{نفر}}}=6!$$

**گام دوم**

- برای آن‌که دقیقاً ۲ نفر بین A و B، سخنرانی کنند، ابتدا ۲ نفر از ۴ نفر باقی‌مانده را انتخاب می‌کنیم: $\binom{4}{2}$
- چون سؤال مشخص نکرده A جلوتر از B است یا B جلوتر از A، پس جابه‌جایی A و B نیز !۲ حالت دارد.
- حالا با ۳ بسته روبه‌روییم که خودشان می‌توانند جابه‌جا شوند و !۳ حالت دارند: $\square\ \square\ \boxed{A\ \square\ \square\ B}$

پس در کل تعداد حالاتی که قرار است بین A و B دقیقاً ۲ نفر سخنرانی کنند برابر است با:

$$\binom{4}{2}\times 2!\times 3!=6\times 2\times 6=72$$

**گام سوم** احتمال وقوع A برابر است با:

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{72}{6!}=\frac{72}{720}=\frac{1}{10}$$

**۴۷۸- گزینه ۴** **گام اول** تعداد اعضای فضای نمونه را به دست می‌آوریم:

$$n(S)=\frac{12}{\text{نفر اول}}\times\frac{12}{\text{نفر دوم}}\times\frac{12}{\text{نفر سوم}}=12^3$$

**گام دوم** ۳ فصل از ۴ فصل انتخاب می‌کنیم: $\binom{4}{3}=4$

در هر فصل از بین ۳ ماه باید یکی را انتخاب کنیم:

$$\binom{3}{1}\times\binom{3}{1}\times\binom{3}{1}=3^3$$

پس تعداد حالات مطلوب برابر است با:

$$n(A)=4\times 3^3=4\times 3\times 3\times 3=12\times 3\times 3$$

**گام سوم** احتمال وقوع پیشامد A برابر است با:

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{\cancelto{1}{12}\times\cancelto{1}{3}\times\cancelto{1}{3}}{\cancelto{1}{12}\times\cancelto{4}{12}\times\cancelto{4}{12}}=\frac{1}{16}$$

**۴۷۹- گزینه ۴** **نکته ۱**

$$P(\underbrace{A\cup B}_{\text{حداقل یکی رخ دهد.}})=P(A)+P(B)-P(\underbrace{A\cap B}_{\text{هر دو رخ دهند.}})$$

**نکته ۲**

$$P(\underbrace{A-B}_{\text{فقط A رخ‌دهد.}})=P(A)-P(A\cap B)$$

**گام اول** احتمال رخدادن A (یعنی $P(A)$)، ۲ برابر احتمال رخندادن B (یعنی $P(B')$) است، پس:

$$P(A)=2\underbrace{P(B')}_{1-P(B)}\Rightarrow P(A)=2-2P(B)$$

**گام دوم**

- احتمال رخدادن حداقل یکی از دو پیشامد A یا B، ۸۲ درصد است، پس: $P(A\cup B)=0/82$
- احتمال رخدادن هر دو پیشامد A و B با هم، ۵۰ درصد است، پس: $P(A\cap B)=0/50$
- داده‌ها را در فرمول جای‌گذاری می‌کنیم:

$$\underbrace{P(A\cup B)}_{0/82}=\underbrace{P(A)}_{2-2P(B)}+P(B)-\underbrace{P(A\cap B)}_{0/5}$$

$$\Rightarrow 0/82=2-2P(B)+P(B)-0/5$$

$$\Rightarrow 0/82=1/5-P(B)\Rightarrow P(B)=0/68$$

**گام سوم** احتمال آن‌که فقط B رخ دهد را حساب می‌کنیم:

$$P(\underbrace{B-A}_{\text{فقط B رخ دهد.}})=P(B)-P(A\cap B)=0/68-0/5=0/18$$

**۴۸۰- گزینه ۳** **گام اول** ۳ نفر می‌خواهند روی این ۱۲ صندلی بنشینند. تعداد کل حالات برابر است با:

$$n(S)=\frac{12}{\text{علی}}\times\frac{11}{\text{رضا}}\times\frac{10}{\text{محمد}}$$

**گام دوم**

- از ردیف اول که ۳ صندلی دارد، یکی را انتخاب می‌کنیم: $\binom{3}{1}$
- از ردیف دوم که ۴ صندلی دارد، یکی را انتخاب می‌کنیم: $\binom{4}{1}$
- از ردیف سوم که ۵ صندلی دارد، یکی را انتخاب می‌کنیم: $\binom{5}{1}$
- حالا باید این ۳ نفر را در ۳ صندلی که در مراحل قبل انتخاب کردیم، قرار دهیم که !۳ حالت دارد.

پس تعداد حالات مطلوب برابر است با:

$$n(A)=\binom{3}{1}\times\binom{4}{1}\times\binom{5}{1}\times 3!=3\times 4\times 5\times 6$$

**گام سوم** احتمال وقوع A برابر است با:

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{3\times\cancelto{1}{4}\times\cancelto{1}{5}\times 6}{\cancelto{1}{12}\times 11\times\cancelto{2}{10}}=\frac{6}{22}=\frac{3}{11}$$