نشرالگو

موج ۲۰

مرحله‌ای و جامع

ویژهٔ آمادگی شرکت در امتحان‌های نهایی و نیم‌سال

هندسه دوازدهم

حمیدرضا ملکی

امتحان‌های درس به درس

امتحان‌های فصل به فصل

امتحان‌های نیم‌سال اول و دوم

امتحان‌های شبیه‌ساز نهایی

امتحان‌های نهایی اخیر

پاسخ‌های تشریحی + کلید تصحیح

پیشگفتار

در ابتدا باید یک خداقوت جانانه به شما دانش‌آموزان عزیز دوازدهمی بگویم که در حال عبور از یکی از سال‌های پرچالش زندگی‌تان هستید. در این مسیر، یکی از اهداف مهم شما کسب نمرهٔ مناسب در امتحان نهایی است. خوشحالم که این کتاب را انتخاب کرده‌اید و با اطمینان به شما می‌گویم که با مطالعهٔ آن، کسب نمرهٔ ۲۰ برای شما آسان می‌شود.

این کتاب کاملاً در چارچوب کتاب درسی نوشته شده است و دارای ویژگی‌های زیر است:

۱ آزمون‌محور است، بدین صورت که فقط با آزمون‌های مختلف و بدون درس‌نامه مطالب کتاب درسی بیان می‌شود؛

۲ پاسخنامهٔ آزمون‌ها بر اساس پاسخنامه‌های امتحانات نهایی بارم‌بندی شده است. شما می‌توانید با مطالعهٔ دقیق آن‌ها به این موضوع پی ببرید که قسمت‌های مهم در نوشتن پاسخ چیست؛

۳ همهٔ مطالب کتاب درسی در آزمون‌ها پوشش داده شده‌اند. در این آزمون‌ها هر مطلب کتاب درسی را در قالب حداقل یک مسئله مشاهده می‌کنید؛

۴ این کتاب برای هر دانش‌آموز در هر سطحی مناسب است. دانش‌آموزان توانمند از این کتاب می‌توانند برای بهبود روش نوشتن خود استفاده کنند. همچنین دانش‌آموزانی که هنوز به هر دلیلی نتوانسته‌اند به مطالب کتاب درسی تسلط پیدا کنند، می‌توانند در زمان کوتاه نمرهٔ مناسبی کسب کنند.

این کتاب دارای ۳۱ آزمون، شامل آزمون‌های ۱۰ نمره‌ای و ۲۰ نمره‌ای است. آزمون‌های درس به درس و فصل به فصل ۱۰ نمره‌ای هستند و آزمون‌های نیمسال اول، نیمسال دوم و جامع (تألیفی و نهایی سال‌های اخیر) ۲۰ نمره‌ای.

نوع آزمون	تعداد آزمون‌ها	سرفصل
درس به درس	۷	هر درس ۱ آزمون
فصل به فصل	۶	هر فصل ۲ آزمون
نیمسال اول	۳	فصل اول و فصل دوم (درس‌های اول و دوم)
نیمسال دوم	۳	فصل دوم (درس سوم) و فصل سوم
جامع - شبیه‌ساز نهایی	۶	تمام کتاب
نهایی ۱۴۰۲	۳	تمام کتاب
شبه‌نهایی و نهایی ۱۴۰۳	۴	تمام کتاب

آزمون‌های جامع کاملاً تألیفی هستند و بودجه‌بندی آن‌ها بر اساس امتحان نهایی است. اما در سایر آزمون‌ها از سؤالات امتحانات نهایی سال‌های گذشته نیز استفاده شده است. این موضوع به ما و شما کمک می‌کند که به مهم‌ترین هدف کتاب برسیم و آن کسب نمرهٔ ۲۰ در امتحان نهایی هندسهٔ ۳ است.

در پایان بر خود لازم می‌دانم از همکاران عزیزمان در نشر الگو، دکتر آریس آقانیانس برای مطالعه و ویراستاری علمی کتاب، خانم فاطمه احدی برای صفحه‌آرایی، خانم مرضیه کریمی برای رسم شکل‌ها و خانم ستین مختار مسئول واحد ویراستاری و حروف‌چینی تشکر و قدردانی کنم.

حمیدرضا ملکی

فهرست مطالب

آزمون‌های درس به درس، فصل به فصل و نیمسال
آزمون ۱: فصل اول – درس اول ۲
آزمون ۲: فصل اول – درس دوم ۳
آزمون ۳: فصل اول (۱) ۴
آزمون ۴: فصل اول (۲) ۵
آزمون ۵: فصل دوم – درس اول ۶
آزمون ۶: فصل دوم – درس دوم ۷
آزمون ۷: نیمسال اول (۱) ۸
آزمون ۸: نیمسال اول (۲) ۱۰
آزمون ۹: نیمسال اول (۳) ۱۲
آزمون ۱۰: فصل دوم – درس سوم ۱۴
آزمون ۱۱: فصل دوم (۱) ۱۵
آزمون ۱۲: فصل دوم (۲) ۱۶
آزمون ۱۳: فصل سوم – درس اول ۱۷
آزمون ۱۴: فصل سوم – درس دوم ۱۸
آزمون ۱۵: فصل سوم (۱) ۱۹
آزمون ۱۶: فصل سوم (۲) ۲۰
آزمون ۱۷: نیمسال دوم (۱) ۲۱
آزمون ۱۸: نیمسال دوم (۲) ۲۳
آزمون ۱۹: نیمسال دوم (۳) ۲۵
آزمون‌های جامع (شبیه‌ساز نهایی و نهایی)
آزمون ۲۰: جامع (۱) – شبیه‌ساز نهایی ۲۷
آزمون ۲۱: جامع (۲) – شبیه‌ساز نهایی ۲۹
آزمون ۲۲: جامع (۳) – شبیه‌ساز نهایی ۳۱
آزمون ۲۳: جامع (۴) – شبیه‌ساز نهایی ۳۳
آزمون ۲۴: جامع (۵) – شبیه‌ساز نهایی ۳۵
آزمون ۲۵: جامع (۶) – نهایی خرداد ۱۴۰۲ .... ۳۷
آزمون ۲۶: جامع (۷) – نهایی شهریور ۱۴۰۲ .... ۳۹
آزمون ۲۷: جامع (۸) – نهایی دی ۱۴۰۲ .... ۴۱
آزمون ۲۸: جامع (۹) – شبه‌نهایی اردیبهشت ۱۴۰۳ .... ۴۳
آزمون ۲۹: جامع (۱۰) – نهایی خرداد ۱۴۰۳ .... ۴۴
آزمون ۳۰: جامع (۱۱) – نهایی شهریور ۱۴۰۳ .... ۴۶
آزمون ۳۱: جامع (۱۲) – نهایی دی ۱۴۰۳ .... ۴۸
پاسخ‌های تشریحی ۵۲

آزمون ۱

موضوع آزمون: فصل اول - درس اول

صفحهٔ پاسخ: ۵۲

امتحان نهایی: هندسهٔ ۳	رشته: ریاضی و فیزیک	تألیفی	مدت امتحان: ۷۰ دقیقه

ردیف	سؤالات	نمره
۱	الف) اگر $A=\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$، آن‌گاه A^5 برابر .... است. ب) اگر $A=\begin{bmatrix} x-1 & 2 \\ z+2 & y \end{bmatrix}$ یک ماتریس اسکالر باشد، حاصل $x+y+z$ برابر .... است. پ) اگر $A=[a_{ij}]_{3\times5}$ و $B=[b_{ij}]_{5\times3}$، آن‌گاه AB ماتریسی از مرتبهٔ .... است. ت) هر ماتریس اسکالر 3×3 با هر ماتریس هم‌مرتبه با آن، تعویض‌پذیر است. (درست - نادرست)	۱
۲	ماتریس‌های $A=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} y+1 & x \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ را در نظر بگیرید. اگر $A-2B=\begin{bmatrix} 6 & -5 \\ 6 & z-1 \end{bmatrix}$، آن‌گاه مقادیر x، y و z را به‌دست آورید.	۱/۲۵
۳	اگر $A=[a_{ij}]_{3\times3}$ و $B=[b_{ij}]_{3\times3}$ به صورت $a_{ij}=\begin{cases} i & i\ge j \\ j & i<j \end{cases}$ و $b_{ij}=\begin{cases} i^2 & i>j \\ 0 & i=j \\ i-j & i<j \end{cases}$ باشند، ماتریس $2A-B$ را محاسبه کنید.	۱/۵
۴	دو ماتریس $A=\begin{bmatrix} 0 & m-2 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & n+1 \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ n & 0 & m \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$ مفروض‌اند. اگر A یک ماتریس قطری باشد، حاصل AB را محاسبه کنید. (خرداد ۱۴۰۰)	۱
۵	اگر $A=[a_{ij}]_{3\times2}$ به‌طوری که $a_{ij}=\begin{cases} 1 & i>j \\ -1 & i=j \\ j & i<j \end{cases}$ و $B=\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$، آن‌گاه حاصل دو ماتریس AB و BA را به‌دست آورید.	۱/۵
۶	با استفاده از ویژگی‌های ضرب ماتریس‌ها و ماتریس همانی I درستی رابطهٔ زیر را ثابت کنید: (دی ۱۴۰۱) $(A-3I)^2=A^2-6A+9I$	۱
۷	اگر دو ماتریس مربعی A و B به صورت $A=[3i-2j]_{3\times3}$ و $B=\begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$ باشند. (شهریور ۱۴۰۱ با تغییر) الف) ماتریس A را به صورت آرایش مستطیلی بنویسید. ب) ماتریس‌های AB و B^2 را محاسبه کنید.	۱/۵
۸	مقدار m را طوری بیابید که دو ماتریس $A=\begin{bmatrix} 2 & m \\ 5 & m+1 \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} m & 0 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$ تعویض‌پذیر باشند.	۱/۲۵
	موفق و سربلند باشید	جمع نمره ۱۰

آزمون ۳

موضوع آزمون	صفحات پاسخ
فصل اول (۱)	۵۳ تا ۵۴

امتحان نهایی: **هندسهٔ ۳**	رشته: **ریاضی و فیزیک**	**تألیفی**	مدت امتحان: **۷۰ دقیقه**

ردیف	سؤالات	نمره
۱	**الف)** هر دو ماتریس هم‌مرتبه را می‌توان در هم ضرب کرد. (درست - نادرست) **ب)** در معادلهٔ ماتریسی $AX = B$، اگر A وارون‌پذیر باشد، آن‌گاه $X = BA^{-1}$. (درست - نادرست) **پ)** اگر A و B دو ماتریس ۲×۲ باشند آن‌گاه: $\|AB\| = \|A\|\|B\|$. (درست - نادرست) (دی ۱۴۰۰) **ت)** اگر در ماتریس قطری همهٔ درایه‌های روی قطر اصلی با هم برابر باشند، آن را ماتریس .... می‌نامند. (شهریور ۱۴۰۲) **ث)** اگر A یک ماتریس ۳×۳ باشد و $\|A\| = ۲$، آن‌گاه $\|۵A\|$ برابر .... است. **ج)** اگر $A_{۳\times۵}$ و $B_{۵\times۳}$ دو ماتریس باشند، آن‌گاه AB از مرتبهٔ .... و BA از مرتبهٔ .... است.	۲
۲	**به موارد زیر پاسخ دهید.** **الف)** دترمینان ماتریس $A = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{bmatrix}$ را به‌دست آورید. **ب)** وارون ماتریس $A = \begin{bmatrix} -۱ & ۲ \\ ۳ & -۴ \end{bmatrix}$ را محاسبه کنید.	۱
۳	**ماتریس‌های** $A = \begin{bmatrix} ۳ & ۲ \\ ۱ & ۵ \end{bmatrix}$ **و** $B = \begin{bmatrix} y+۲ & x+۱ \\ ۲ & ۳ \end{bmatrix}$ **را در نظر بگیرید. اگر** $A+B = \begin{bmatrix} ۴ & ۵ \\ ۳ & ۸ \end{bmatrix}$ **باشد، آن‌گاه مقادیر** x **و** y **را به‌دست آورید.** (خرداد ۱۴۰۲)	۱
۴	**اگر** $A = [a_{ij}]_{۳\times۳}$ **به صورت** $a_{ij} = \begin{cases} i-j & i>j \\ ۰ & i=j \\ i+j & i<j \end{cases}$ **باشد، ماتریس** $A^۲ - ۲I$ **را محاسبه کنید.**	۱/۷۵
۵	**به ازای چه مقادیری از** m **دستگاه معادلات** $\begin{cases} (m+۱)x - ۴y = ۲ \\ (-۲m+۱)x + ۶y = ۳ \end{cases}$ **جواب منحصر به فرد دارد.**	۱
۶	**در تساوی** $\begin{bmatrix} x & ۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ -۲ & -۳ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ ۱ \end{bmatrix} = ۰$**، مقدار** x **را بیابید.** (شهریور ۱۴۰۲)	۱/۲۵
۷	**اگر** $A = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & \|A\| \\ ۱ & \|A\| & ۱ \\ ۱ & ۲ & ۰ \end{bmatrix}$ **باشد، مقدار** $\|A\|$ **را بیابید.** (خرداد ۱۴۰۲)	۱
۸	**اگر** A **یک ماتریس** ۳×۳ **باشد و** $\|A\| = -۴$**، آن‌گاه مقدار** $\|۲A^{-1}\|$ **را به‌دست آورید.**	۱
	موفق و سربلند باشید **جمع نمره**	۱۰

آزمون ۹

موضوع آزمون	صفحات پاسخ
نیمسال اول (۳)	۵۹ تا ۶۱

امتحان نهایی: هندسهٔ ۳	رشته: ریاضی و فیزیک	تألیفی	مدت امتحان: ۱۳۰ دقیقه

ردیف	سؤالات	نمره
	سؤالات فصل اول	
۱	**الف)** اگر $\begin{bmatrix} y-1 & 2 \\ -5 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & x+1 \\ -5 & 3 \end{bmatrix}$، آن‌گاه $x+y$ برابر .... است. **ب)** اگر A و B دو ماتریس مربعی هم‌مرتبه باشند، آن‌گاه $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$ همواره برقرار است. (درست - نادرست) (شهریور ۱۴۰۰ با تغییر) **پ)** اگر A یک ماتریس مربعی از مرتبه ۳ باشد و $\|A\| = 2$، آن‌گاه $\|3A\|$ برابر .... است. **ت)** اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 3 & -4 & 1 \end{bmatrix}$، آن‌گاه $\|2A\|$ برابر .... است.	۱/۵
۲	اگر ماتریس مربعی A از مرتبهٔ ۳ به صورت $A=[a_{ij}]_{3\times3}$ که $a_{ij} = \begin{cases} i+j & i=j \\ j & i>j \\ 0 & i<j \end{cases}$ و $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \\ 5 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ باشد، (خرداد ۱۴۰۱ با تغییر) **الف)** ماتریس A را به صورت آرایش مستطیلی بنویسید. **ب)** دترمینان ماتریس B را محاسبه کنید.	۱/۲۵
۳	ماتریس $A=[a_{ij}]_{2\times2}$ به صورت $a_{ij} = \begin{cases} i^2 - j & i>j \\ i+j & i\leq j \end{cases}$ داده شده است. ماتریس A^{-1} را به‌دست آورید. (شهریور ۱۴۰۲)	۱/۲۵
۴	اگر $A = \begin{bmatrix} 0 & a & 4 \\ 0 & -1 & b \\ -3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 \\ c & 2 & 3 \\ 5 & 0 & 0 \end{bmatrix}$، آن‌گاه مقادیر a، b و c را طوری به‌دست آورید که حاصل‌ضرب AB ماتریس قطری باشد.	۱/۲۵
۵	در تساوی ماتریسی $\begin{bmatrix} -1 & -4 \\ 10 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} A$، ماتریس A را به‌دست آورید.	۱/۵
۶	اگر $3A = \begin{bmatrix} -5 & \|A\| \\ 4\|A\| & 1 \end{bmatrix}$ باشد، مقدار $\|A^{-1}\|$ را محاسبه کنید. (شهریور ۱۴۰۲)	۱/۵
۷	مقدار m را طوری بیابید که دستگاه معادلات $\begin{cases} -mx - 12y = 2 \\ 3x + my = -1 \end{cases}$ جواب نداشته باشد.	۱/۵
۸	اگر A و B دو ماتریس هم‌مرتبه و تعویض‌پذیر باشند، نشان دهید: $(A+B)(A-B) = A^2 - B^2$	۰/۷۵

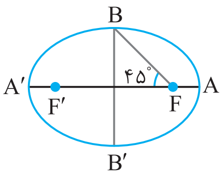
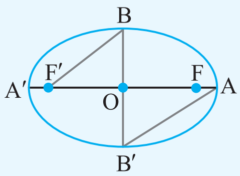
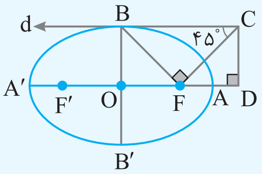
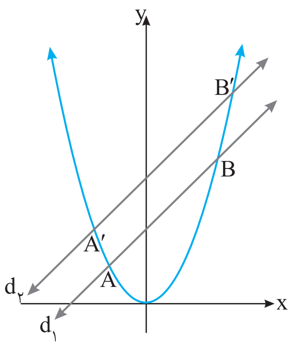
ردیف	سؤالات	نمره
	سؤالات فصل دوم	
۹	الف) اگر صفحهٔ P با مولد سطح مخروطی موازی باشد، در این صورت فصل مشترک صفحه و سطح مخروطی .... است. ب) نقطهٔ $A(۱,-۲)$ در .... دایرهٔ به معادلهٔ $x^۲+y^۲-۲x+۲y=۰$ قرار دارد. (خرداد ۱۴۰۱) پ) مکان هندسی نقاطی از صفحه که از دو خط متقاطع به یک فاصله‌اند، .... است. ت) رابطهٔ ضمنی $x^۲+y^۲+ax+by+c=۰$ معادلهٔ یک دایره است اگر و تنها اگر	۱/۵
۱۰	دو نقطهٔ A و B و خط d که شامل هیچ‌یک نیست در صفحه مفروض‌اند. نقطه‌ای بیابید که از A و B به یک فاصله و از خط d به فاصلهٔ ۳ سانتی‌متر باشد (بحث کنید). (شهریور ۱۴۰۱)	۱/۵
۱۱	الف) معادلهٔ دایره‌ای گذرنده از دو نقطهٔ $A(۱,۲)$ و $B(۳,۰)$ را بنویسید که مرکز آن روی خط به معادلهٔ $y=۲x-۱$ باشد. ب) معادلهٔ دایره‌ای را بنویسید که نقطهٔ $O(-۱,-۱)$ مرکز آن باشد و روی خط به معادلهٔ $x+y=۱$ وتری به طول ۲ ایجاد کند.	۳/۵
۱۲	وضعیت دو دایره به معادله‌های $x^۲+y^۲-۲x+۳y=۳$ و $x^۲+y^۲-۲x+y=۱۱$ را نسبت به هم مشخص کنید.	۱/۷۵
۱۳	در نقطهٔ $A(۲,۳)$ روی دایرهٔ به معادلهٔ $x^۲+y^۲-۲x-۲y=۳$ مماسی بر آن رسم کرده‌ایم. معادلهٔ این خط مماس را به‌دست آورید. (شهریور و دی ۱۴۰۰)	۱/۲۵
	موفق و سربلند باشید جمع نمره	۲۰

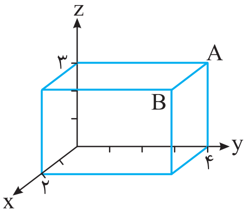
آزمون ۱۸

موضوع آزمون: نیمسال دوم (۲)

صفحات پاسخ: ۶۸ تا ۶۹

امتحان نهایی: هندسهٔ ۳	رشته: ریاضی و فیزیک	تألیفی	مدت امتحان: ۱۳۰ دقیقه

ردیف	سؤالات	نمره
	سؤالات فصل دوم	
۱	الف) در یک بیضی با طول قطرهای بزرگ و کوچک ۸ و ۶، فاصلهٔ کانونی برابر .... است. ب) خروج از مرکز بیضی مقابل برابر .... است.  پ) در هر سهمی بازتاب هر پرتو نور موازی محور سهمی که به بدنهٔ داخلی و آینهای سهمی بتابد، از .... می‌گذرد. ت) مجموع فاصله‌های هر نقطهٔ دلخواه درون بیضی از کانون‌ها کوچک‌تر از طول قطر بزرگ بیضی است. (درست - نادرست)	۱/۵
۲	در بیضی مقابل، خروج از مرکز برابر $\frac{۴}{۵}$ اســت. نســبت مساحت مثلث OBF' به مساحت مثلث OAB' را بیابید. (دی ۱۴۰۲) 	۱
۳	دو نقطهٔ A و B روی یک بیضی با کانون‌های F و F' قرار دارند. A به کانون F' و B به کانون F نزدیک‌تر است. اگر دو پاره‌خط AF و BF' یکدیگر را درون بیضی قطع نکنند و $AF'=BF$، نشان دهید دو پاره‌خط AF و BF' موازی‌اند (شکل رسم کنید).	۱/۵
۴	در بیضی مقابل، خط d در رأس B مماس شــده اســت. در کانون F عمودی بر BF رسم شــده اســت تا d را در نقطهٔ C قطع کند. از C نیز عمودی رسم شده است که امتداد قطر بزرگ را در نقطهٔ D قطع کند. اگر $B\hat{C}F=۴۵^\circ$، آن‌گاه مقدار $\frac{AD}{AF}$ را به‌دست آورید. 	۲
۵	اگر نقطهٔ $A(۲,۳)$ رأس سهمی و $y=۷$ معادلهٔ خط هادی باشد: (خرداد ۱۴۰۰) الف) معادلهٔ سهمی را به‌دست آورید. ب) مختصات کانون سهمی را بیابید.	۱/۲۵
۶	یک دیش مخابراتی به شکل سهموی با دهانهٔ دایره‌ای به قطر ۶۰ واحد و گودی (عمق) ۹ واحد مفروض است. فاصلهٔ کانونی این دیش را به‌دست آورید. (خرداد ۱۴۰۰)	۰/۷۵
۷	مطابق شکل، سهمی $y=x^۲$ و دو خط موازی $d_۱: y=۲x+۳$ و $d_۲: y=۲x+۸$ را که با ســهمی متقاطع‌اند، در نظر بگیرید. فرض کنید نقطهٔ M وســط AB و نقطهٔ M' وسـط $A'B'$ باشد. الف) مختصات M و M' را به‌دست آورید. ب) معادلهٔ خط گذرنده از MM' را بنویسید و بگویید چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟ 	۲

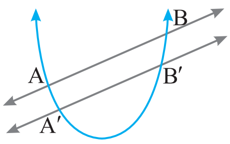
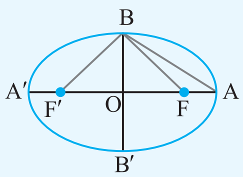
ردیف	سؤالات	نمره
	سؤالات فصل سوم	
۸	الف) در شکل مقابل معادلهٔ یال AB به صورت .... است.  ب) زاویهٔ بین بردارهای غیرصفر $\vec{a}$ و $\vec{b}$، برابر θ است. در کدام‌یک از موارد زیر حاصل‌ضرب داخلی آن‌ها بیشترین مقدار را دارد؟ (خرداد ۱۴۰۲) ۱) $\theta=0$ ۲) $\theta=\frac{2\pi}{3}$ ۳) $\theta=\frac{\pi}{2}$ ۴) $\theta=\frac{\pi}{3}$ پ) حجم متوازی‌السطوحی که روی بردارهای واحد $\vec{i}$، $\vec{j}$ و $\vec{k}$ بنا می‌شود، برابر .... است. (دی ۱۴۰۲) ت) اگر دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ بر هم عمود باشند، آن‌گاه تصویر قائم $\vec{a}$ و $\vec{b}$ برابر .... است.	۱/۲۵
۹	شکل کلی (نمودار) مربوط به رابطهٔ $-2\leq x<-1, x+y^2\leq 0$ را در فضای دوبعدی رسم کنید.	۱
۱۰	اگر $\vec{a}=(1,-3,4)$ و $\vec{b}=3\vec{i}-4\vec{j}+2\vec{k}$ باشند، آن‌گاه تصویر قائم بردار $\vec{a}$ بر امتداد بردار $\vec{a}-\vec{b}$ را بیابید. (دی ۱۴۰۲)	۱/۵
۱۱	ثابت کنید دو بردار غیرصفر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ با هم موازی‌اند اگر و تنها اگر $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0}$.	۱/۲۵
۱۲	اگر سه بردار $\vec{a}=(m,-1,1)$، $\vec{b}=(1,-1,1)$ و $\vec{c}=(1,m,-1)$ در یک صفحه واقع باشند، مقدار m را بیابید. (شهریور ۱۴۰۲)	۱/۲۵
۱۳	اگر برای دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ داشته باشیم $\lvert\vec{a}\rvert=4$، $\lvert\vec{b}\rvert=6$ و $\lvert 2\vec{a}\times\vec{b}\rvert=12\sqrt{15}$، آن‌گاه $\vec{a}\cdot(\vec{a}+\vec{b})$ را به‌دست آورید.	۱/۷۵
۱۴	سه بردار $\vec{a}=2\vec{i}+3\vec{j}-\vec{k}$ و $\vec{b}=\vec{i}+\vec{k}$ و $\vec{c}=(0,2,1)$ را در نظر بگیرید: (دی ۱۴۰۱) الف) طول بردار $2\vec{b}-\vec{c}$ را به‌دست آورید. ب) مساحت متوازی‌الاضلاعی که روی دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}+\vec{c}$ ایجاد می‌شود را به‌دست آورید.	۲
	موفق و سربلند باشید — جمع نمره	۲۰

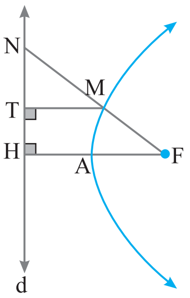
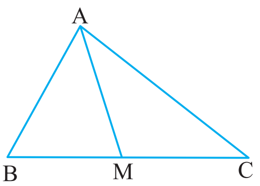
آزمون ۲۴

موضوع آزمون: جامع (۵) - شبیه‌ساز نهایی

صفحات پاسخ: ۷۸ تا ۷۹

امتحان نهایی: هندسهٔ ۳	رشته: ریاضی و فیزیک	تألیفی	مدت امتحان: ۱۳۰ دقیقه

ردیف	سؤالات	نمره
	سؤالات فصل اول	
۱	الف) دترمینان ماتریس $\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & -۱ \\ ۳ & ۰ & ۲ \\ ۴ & -۱ & ۱ \end{bmatrix}$ برابر .... است. ب) اگر A و B دو ماتریس هم‌مرتبه باشند، آن‌گاه $A^۲-B^۲=(A+B)(A-B)$. (درست - نادرست)	۰/۷۵
۲	اگر $A=[a_{ij}]_{۳\times۳}$ به‌طوری که $a_{ij}=\begin{cases} -j & i\geq j \\ j-۱ & i<j \end{cases}$، آن‌گاه $A^۲+I$ را به‌دست آورید.	۱/۵
۳	اگر $-۲A=\begin{bmatrix} \|A\|+۱ & ۱-\|A\| \\ \|A\|-۱ & ۱۴ \end{bmatrix}$، آن‌گاه $\|۳A^{-۱}\|$ را به‌دست آورید.	۱/۷۵
۴	مقدارهای x را طوری بیابید که تساوی زیر برقرار باشد: $\begin{bmatrix} x & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & x \\ -۱ & ۲ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -۶ \\ ۱ \end{bmatrix}=۰$	۱
۵	دستگاه معادلات $\begin{cases} ۳x+۵y=۷ \\ ۲y-۵x=۹ \end{cases}$ را با استفاده از ماتریس وارون حل کنید.	۱
	سؤالات فصل دوم	
۶	الف) اگر صفحهٔ P با مولد سطح مخروطی موازی باشد، سطح مقطع ایجاد شده .... است. ب) مکان هندسی مراکز همهٔ دایره‌هایی با شعاع ثابت که بر خط d در صفحه مماس‌اند، .... است. پ) سطح مقطع یک سطح استوانه‌ای می‌تواند مستطیل باشد. (درست - نادرست) ت) هرچه خروج از مرکز بیضی به صفر نزدیک شود، شکل بیضی به دایره نزدیک‌تر می‌شود. (درست - نادرست) ث) مطابق شکل دو خط موازی، سهمی را قطع کرده‌اند. خط گذرنده از وسط‌های AB و $A'B'$ موازی محور تقارن سهمی است. (درست - نادرست)  	۱/۵
۷	از نقطهٔ $A(۲,۳)$ روی دایرهٔ به معادلهٔ $x^۲+y^۲-۲x-۲y=۳$ ، خط مماسی بر دایره رسم کرده‌ایم. معادلهٔ این خط مماس را به‌دست آورید.	۱/۲۵
۸	معادلهٔ مکان هندسی مراکز دایره‌هایی به شعاع ۱ را بنویسید که بر دایرهٔ به معادلهٔ $x^۲+y^۲+۲x-۴y=۴$ مماس خارج باشند.	۱/۲۵
۹	در بیضی مقابل با کانون‌های F و F' ، قطرهای بزرگ و کوچک به ترتیب AA' و BB' هستند. اگر مساحت مثلث BFF' چهار برابر مساحت مثلث BAF باشد، خروج از مرکز بیضی را به‌دست آورید.  	۱

ردیف	سؤالات	نمره
۱۰	نقطهٔ P درون بیضی با طول قطر بزرگ $۲a$ و کانون‌های F و F' است. نشان دهید $PF+PF'<۲a$.	۰/۷۵
۱۱	سهمی به معادلهٔ $۴y^{۲}-۱۲y+۲۴x-۱۵=۰$ مفروض است. ابتدا معادلهٔ متعارف آن را بنویسید و سپس مختصات رأس و کانون و معادلهٔ خط هادی را به‌دست آورید.	۱/۲۵
۱۲	در شکل روبه‌رو سهمی با کانون F، رأس A و خط هادی d رسم شده است. از کانون F به نقطهٔ دلخواه M روی سهمی وصل کرده و امتداد می‌دهیم تا خط d را در نقطهٔ N قطع کند. از M و F بر d عمود کرده‌ایم. ثابت کنید: $\frac{FN}{FA}=\frac{۲NT}{TH}$ 	۱
	سؤالات فصل سوم	
۱۳	الف) معادلهٔ خط گذرنده از نقطهٔ $A(-۱,۲,-۳)$ و موازی محور yها به‌صورت .... است. ب) صفحهٔ به معادلهٔ $x=۲$ بر محور yها عمود است. (درست - نادرست) پ) اگر $A(۱,۲,۳)$، $B(۲,۳,۴)$ و $C(۳,۴,۵)$ و نقطهٔ M وسط BC باشد، آن‌گاه بردار $\overrightarrow{AM}$ برابر .... است. 	۱/۲۵
۱۴	شکل کلی (نمودار) مربوط به رابطهٔ $x>-۱, ۱\geq y^{۲}+x$ را در فضای دوبعدی رسم کنید.	۰/۷۵
۱۵	ثابت کنید اگر دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ بر هم عمود باشند، آن‌گاه تصویر قائم $\vec{a}$ بر $\vec{b}$ برابر بردار صفر است.	۰/۷۵
۱۶	مقدار m را طوری بیابید که مساحت مثلث ساخته شده توسط بردارهای $\vec{a}=-۲\vec{j}+۳\vec{k}$ و $\vec{b}=\vec{i}+۳\vec{j}-m\vec{k}$ برابر $\frac{\sqrt{۱۳}}{۲}$ باشد.	۱/۵
۱۷	اندازهٔ زاویهٔ بین دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ بین ۹۰° و ۱۸۰° است. اگر $\|\vec{a}\|=۴$، $\|\vec{b}\|=۶$ و $\|\vec{a}\times\vec{b}\|=۶\sqrt{۱۵}$، آن‌گاه حاصل $(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{a}$ را به‌دست آورید.	۱/۷۵
	جمع نمره موفق و سربلند باشید	۲۰

پاسخ تشریحی آزمون (۲۴)

۱ الف) ۱۵ (۰/۵) ب) نادرست (۰/۲۵)

۲ ابتدا ماتریس A را نمایش می‌دهیم:

$$A=\begin{bmatrix}-1&1&2\\-1&-2&2\\-1&-2&-3\end{bmatrix} \ (0/5)$$

$$A^2=\begin{bmatrix}-1&1&2\\-1&-2&2\\-1&-2&-3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1&1&2\\-1&-2&2\\-1&-2&-3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2&-7&-6\\1&-1&-12\\6&9&3\end{bmatrix} \ (0/5)$$

$$A^2+I=\begin{bmatrix}-2&-7&-6\\1&-1&-12\\6&9&3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1&-7&-6\\1&0&-12\\6&9&4\end{bmatrix} \ (0/5)$$

۳ ابتدا از طرفین تساوی دترمینان می‌گیریم:

$$|-2A|=\begin{vmatrix}|A|+1&1-|A|\\|A|-1&14\end{vmatrix}\Rightarrow(-2)^2|A|=14|A|+14+(|A|-1)^2$$

$$4|A|=|A|^2+12|A|+15\Rightarrow|A|^2+8|A|+15=0 \ (0/25)$$

$|A|=-3$ یا -5 (۰/۵)

از طرفی چون $|A^{-1}|=\frac{1}{|A|}$ (۰/۲۵)، پس $|A^{-1}|=-\frac{1}{3}$ یا $-\frac{1}{5}$ (۰/۲۵)

در نتیجه $|3A^{-1}|=3^2|A^{-1}|=-3$ یا $-\frac{9}{5}$ (۰/۵)

۴ ابتدا دو ماتریس اول را در هم ضرب می‌کنیم.

$$\begin{bmatrix}x&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&x\\-1&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x-1&x^2+2\end{bmatrix} \ (0/25)$$

$$\begin{bmatrix}x&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&x\\-1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-6\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x-1&x^2+2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-6\\1\end{bmatrix}$$

$$=-6(x-1)+(x^2+2)=x^2-6x+8=0 \ (0/25)\Rightarrow x=2$$ یا 4 (۰/۵)

۵ ماتریس ضرایب به‌صورت $A=\begin{bmatrix}3&5\\-5&2\end{bmatrix}$ است. پس

$$A^{-1}=\frac{1}{3\times2-5\times(-5)} \ (0/25)\begin{bmatrix}2&-5\\5&3\end{bmatrix}=\frac{1}{31}\begin{bmatrix}2&-5\\5&3\end{bmatrix} \ (0/25)$$

جواب دستگاه از رابطهٔ $X=A^{-1}B$ محاسبه می‌شود. در نتیجه

$$A^{-1}B=\frac{1}{31}\begin{bmatrix}2&-5\\5&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}7\\9\end{bmatrix}=\frac{1}{31}\begin{bmatrix}-31\\62\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1\\2\end{bmatrix} \ (0/25)$$

بنابراین $\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1\\2\end{bmatrix}$. (۰/۲۵)

۶ الف) سهمی (۰/۲۵) ب) دو خط موازی با d (۰/۵)

پ) نادرست (۰/۲۵) ت) درست (۰/۲۵)

ث) درست (۰/۲۵)

۷ ابتدا مختصات مرکز دایره و شعاع آن را محاسبه می‌کنیم.

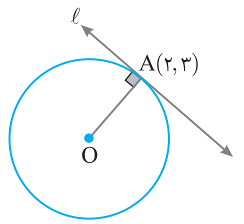
$$x^2+y^2-2x-2y=3\Rightarrow(x-1)^2+(y-1)^2=5$$

$$O(1,1),\ R=\sqrt{5} \ (0/5)$$

(البته می‌توانستیم با استفاده از $O(-\frac{a}{2},-\frac{b}{2})$ و $R=\frac{\sqrt{a^2+b^2-4c}}{2}$ نیز آن‌ها را محاسبه کنیم.) شعاع OA بر خط ℓ عمود است. پس

$$m_{OA}=\frac{3-1}{2-1}=2\Rightarrow m_\ell=-\frac{1}{2} \ (0/25)$$

بنابراین معادلهٔ خط ℓ بدین صورت است: $\ell: y-3=-\frac{1}{2}(x-2)$ (۰/۵)



۸ ابتدا مختصات مرکز و شعاع دایرهٔ داده شده را به‌دست آوریم.

$$x^2+y^2+2x-4y=4\Rightarrow(x+1)^2+(y-2)^2=9$$

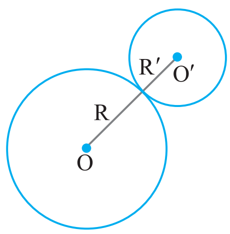
$$O(-1,2),\ R=3 \ (0/5)$$

اگر دایرهٔ $C(O',R')$ بر دایرهٔ $C(O,R)$ مماس خارج باشد، آن‌گاه

$$OO'=R+R' \ (0/25)\Rightarrow OO'=3+1=4$$

پس فاصلهٔ O' از نقطهٔ ثابت O برابر ۴ است. در نتیجه مکان هندسی آن دایرهٔ به مرکز O و شعاع ۴ است. (۰/۲۵)

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=r^2\Rightarrow(x+1)^2+(y-2)^2=16 \ (0/25)$$



۹ ارتفاع دو مثلث برابر $BO=b$ است. همچنین می‌دانیم

$$AF=OA-OF=a-c$$

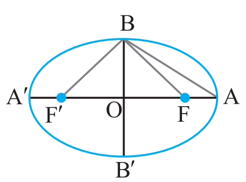
$$S_{BFF'}=\frac{1}{2}BO\times FF'=\frac{1}{2}b(2c)=bc \ (0/25)$$

$$S_{BAF}=\frac{1}{2}BO\times AF=\frac{1}{2}b(a-c) \ (0/25)$$

بنابر فرض $S_{BFF'}=4S_{BAF}$. پس

$$bc=4(\frac{1}{2}b(a-c))\Rightarrow c=2(a-c) \ (0/25)\Rightarrow 3c=2a$$

$$\frac{c}{a}=\frac{2}{3}\Rightarrow e=\frac{2}{3} \ (0/25)$$

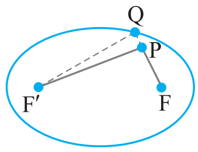


۱۰ در مثلث PQF' داریم

$PF'<PQ+QF'$ (۰/۲۵)

$PF+PF'<PF+PQ+QF'=QF+QF'=۲a$ (۰/۲۵)

$PF+PF'<۲a$ (۰/۲۵)



۱۱ ابتدا معادله را به‌صورت متعارف می‌نویسیم.

$$۴y^۲-۱۲y+۲۴x-۱۵=۰\Rightarrow y^۲-۳y+۶x-\frac{۱۵}{۴}=۰$$

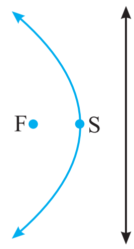
$$(y-\frac{۳}{۲})^۲=-۶x+۶\Rightarrow(y-\frac{۳}{۲})^۲=-۶(x-۱)$$ (۰/۵)

پس رأس سهمی $S(۱,\frac{۳}{۲})$ است. (۰/۲۵) دهانهٔ سهمی رو به چپ است و داریم

$$۴a=۶\Rightarrow a=\frac{۳}{۲}$$

$$F(-a+h,k)=(-\frac{۳}{۲}+۱,\frac{۳}{۲})=(-\frac{۱}{۲},\frac{۳}{۲})$$ (۰/۲۵)

خط هادی: $x=a+h=\frac{۳}{۲}+۱\Rightarrow x=\frac{۵}{۲}$ (۰/۲۵)



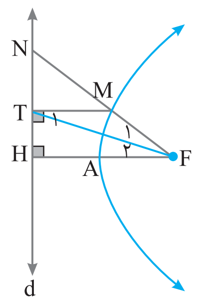
۱۲ روش اول: بنابر تعریف سهمی $MF=MT$. پس مثلث MFT متساوی‌الساقین است. در نتیجه $\hat{F}_۱=\hat{T}_۱$. (۰/۲۵) از طرفی بنابر قضیهٔ خطوط موازی و مورب داریم

$MT||FH$, مورب $FT\Rightarrow\hat{F}_۲=\hat{T}_۱$ (۰/۲۵)

بنابراین $\hat{F}_۱=\hat{F}_۲$ و FT نیمساز زاویهٔ F در مثلث FNH است. (۰/۲۵) بنابر قضیهٔ نیمساز در این مثلث داریم

$$\frac{FN}{FH}=\frac{NT}{TH}\xrightarrow{FH=۲FA}\frac{FN}{۲FA}=\frac{NT}{TH}$$

$$\xrightarrow{\times۲}\frac{FN}{FA}=\frac{۲NT}{TH}$$ (۰/۲۵)



روش دوم: بنابر قضیهٔ تالس و تعمیم آن در مثلث NHF داریم

$$TM||HF\Rightarrow\begin{cases}\frac{NM}{MF}=\frac{NT}{TH}\xrightarrow{MF=MT\ (۰/۲۵)}\frac{NM}{MT}=\frac{NT}{TH}\\ \frac{MT}{FH}=\frac{NM}{NF}\ (۰/۲۵)\Rightarrow\frac{NM}{MT}=\frac{NF}{FH}\end{cases}$$

$$\frac{FN}{FH}=\frac{NT}{TH}$$

چون $FH=۲FA$، (۰/۲۵) پس

$$\frac{FN}{۲FA}=\frac{NT}{TH}\xrightarrow{\times۲}\frac{FN}{FA}=\frac{۲NT}{TH}$$ (۰/۲۵)

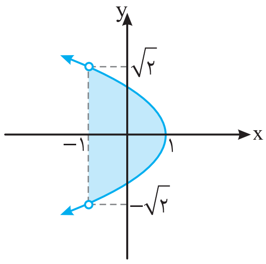
۱۳ الف) $\begin{cases}x=-۱\\z=-۳\end{cases}$ (۰/۵) ب) نادرست (۰/۲۵)

پ) $(\frac{۳}{۲},\frac{۳}{۲},\frac{۳}{۲})$ (۰/۵)

۱۴ ابتدا نمودار $x+y^۲=۱$ را رسم می‌کنیم. این نمودار مربوط به سهمی به معادلهٔ $y^۲=-(x-۱)$ است.

نمودار $y^۲=-(x-۱)$ (۰/۲۵) خطچین $x=-۱$ (۰/۲۵)

قسمت رنگی (۰/۲۵)



۱۵ چون $\vec{a}$ و $\vec{b}$ بر هم عمودند، پس $\vec{a}\cdot\vec{b}=۰$. (۰/۲۵) تصویر قائم $\vec{a}$ بر $\vec{b}$ از رابطهٔ روبه‌رو محاسبه می‌شود: $\vec{a}'=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|^۲}\vec{b}$ (۰/۲۵)

چون $\vec{a}\cdot\vec{b}=۰$، پس $\vec{a}'=\vec{0}$. (۰/۲۵)

۱۶ مساحت مثلث ساخته شده توسط دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ برابر $\frac{۱}{۲}|\vec{a}\times\vec{b}|$ است.

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\ ۰&-۲&۳\\ ۱&۳&-m\end{vmatrix}\ (۰/۲۵)=(۲m-۹)\vec{i}+۳\vec{j}+۲\vec{k}\ (۰/۲۵)$$

$$|\vec{a}\times\vec{b}|=\sqrt{(۲m-۹)^۲+۳^۲+۲^۲}=\sqrt{(۲m-۹)^۲+۱۳}\ (۰/۲۵)$$

چون مساحت مثلث برابر $\frac{\sqrt{۱۳}}{۲}$ است، پس

$$\frac{۱}{۲}|\vec{a}\times\vec{b}|=\frac{\sqrt{۱۳}}{۲}\ (۰/۲۵)\Rightarrow\frac{۱}{۲}\sqrt{(۲m-۹)^۲+۱۳}=\frac{\sqrt{۱۳}}{۲}\ (۰/۲۵)$$

$$\sqrt{(۲m-۹)^۲+۱۳}=\sqrt{۱۳}\Rightarrow(۲m-۹)^۲=۰\Rightarrow۲m-۹=۰\Rightarrow m=\frac{۹}{۲}\ (۰/۲۵)$$

۱۷ فرض کنید اندازهٔ زاویهٔ بین دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ برابر θ باشد.

$$|\vec{a}\times\vec{b}|=|\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta\ (۰/۲۵)\Rightarrow۶\sqrt{۱۵}=۴\times۶\times\sin\theta$$

$$\sin\theta=\frac{\sqrt{۱۵}}{۴}\ (۰/۲۵)\xrightarrow{۹۰^\circ<\theta<۱۸۰^\circ}\cos\theta=-\frac{۱}{۴}\ (۰/۲۵)$$

پس $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta\ (۰/۲۵)=۴\times۶\times(-\frac{۱}{۴})=-۶$ (۰/۲۵)

در نتیجه $(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{a}=|\vec{a}|^۲+\vec{b}\cdot\vec{a}\ (۰/۲۵)=۴^۲+(-۶)=۱۰$ (۰/۲۵)