ساختار کتاب

کتاب شب امتحان **هندسه (۱) دهم** از ۴ قسمت اصلی تشکیل شده است که به صورت زیر است:

۱- آزمون‌های نوبت اول: آزمون‌های شمارهٔ ۱ تا ۴ این کتاب مربوط به مباحث نوبت اول است که خودش به دو قسمت تقسیم می‌شود:

الف) آزمون‌های طبقه‌بندی‌شده: آزمون‌های شمارهٔ ۱ و ۲ را فصل به فصل طبقه‌بندی کرده‌ایم، بنابراین شما به راحتی می‌توانید پس از خواندن هر فصل از درس‌نامه، تعدادی سؤال را بررسی کنید. حواستان باشد این آزمون‌ها هم، ۲۰ نمره‌ای و مثل یک آزمون کامل هستند. برای این آزمون‌ها در کنار سؤالات، **نکات مشاوره‌ای** نوشتیم. این نکات به شما در درس‌خواندن قبل از امتحان و پاسخگویی به آزمون در زمان امتحان کمک می‌کنند.

ب) آزمون‌های طبقه‌بندی‌نشده: آزمون شمارهٔ ۳ و ۴ را طبقه‌بندی نکرده‌ایم تا دو آزمون نوبت اول مشابه آزمونی را که معلمتان از شما خواهد گرفت، ببینید.

۲- آزمون‌های نوبت دوم: آزمون‌های شمارهٔ ۵ تا ۱۲ از کل کتاب و مطابق امتحان نهایی طرح شده‌اند. این قسمت هم، خودش به ۲ بخش تقسیم می‌شود:

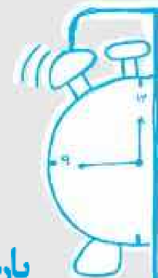
الف) آزمون‌های طبقه‌بندی‌شده: آزمون‌های شمارهٔ ۵ تا ۸ را که برای نوبت دوم طرح شده‌اند هم طبقه‌بندی کرده‌ایم. با این کار باز هم می‌توانید پس از خواندن هر فصل تعدادی سؤال مرتبط را پاسخ دهید. هر کدام از این آزمون‌ها هم، ۲۰ نمره دارند در واقع در این بخش، شما ۴ آزمون کامل را می‌بینید. این آزمون‌ها هم **نکات مشاوره‌ای** دارند.

ب) آزمون‌های طبقه‌بندی‌نشده: آزمون‌های شمارهٔ ۹ تا ۱۲ را طبقه‌بندی نکرده‌ایم؛ پس، در این بخش با ۴ آزمون نوبت دوم مواجه خواهید شد. این آزمون‌ها شامل امتحان نهایی خرداد ۱۴۰۳، شبیه‌ساز امتحان نهایی خرداد ۱۴۰۳ و دو آزمون چالشی‌تر با عنوان «بیست پلاس» است.

۳- پاسخ‌نامهٔ تشریحی آزمون‌ها: در پاسخ تشریحی آزمون‌ها تمام آن‌چه را که شما باید در امتحان بنویسید تا نمرهٔ کامل کسب کنید، برایتان نوشته‌ایم. پاسخ‌ها مطابق با فرمت پاسخ‌برگ مورد تایید آموزش و پرورش دارای ریزبارم‌بندی و آدرس مبحثی می‌باشند.

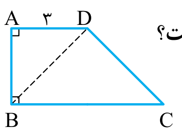
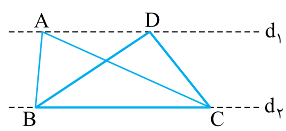
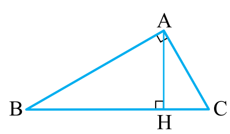
۴- درس‌نامهٔ کامل شب امتحانی: این قسمت برگ برندهٔ شما نسبت به کسانی است که این کتاب را نمی‌خوانند در این قسمت تمام آن‌چه را که شما برای گرفتن نمرهٔ عالی در امتحان هندسه (۱) نیاز دارید، تنها در ۹ صفحه آورده‌ایم، بخوانید و لذتش را ببرید!

فهرست



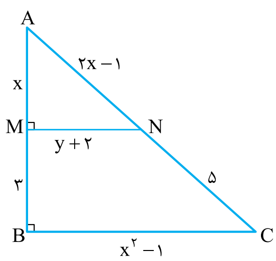
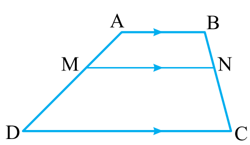
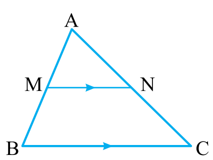
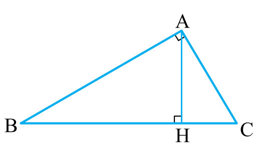
بارم‌بندی درس هندسه (۱)

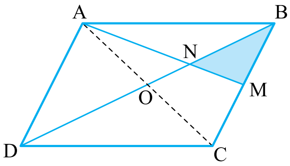
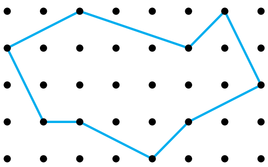
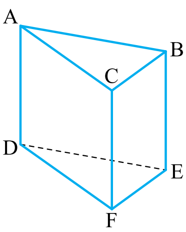
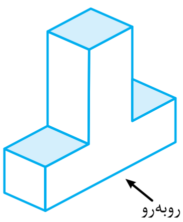
فصل‌ها	پایانی نوبت اول	نوبت دوم خرداد، شهریور و دی‌ماه
اول	۹ نمره	۳ نمره
دوم	۱۱ نمره	۷ نمره
سوم	—	۶ نمره
چهارم	—	۴ نمره
جمع	۲۰ نمره	۲۰ نمره

ردیف		نمره
	فصل اول	
۱	زاویهٔ xOy داده شده است. نیمساز این زاویه را با استفاده از خط‌کش و پرگار رسم کنید. *مراحل رسم را با دقت بیان کنید.*	۱/۵
۲	در جاهای خالی کلمات یا عبارت‌های مناسب قرار دهید تا گزاره‌ای درست حاصل شود: الف) هر نقطه روی عمودمنصف یک پاره‌خط، .... به یک فاصله است. ب) اگر نقطه‌ای از دو ضلع یک زاویه به یک فاصله باشد، آن نقطه .... قرار دارد. پ) اگر در قضیه‌ای جای فرض و حکم را عوض کنیم، .... حاصل می‌شود. ت) ارزش درستی نقیض یک گزاره .... ارزش درستی خودِ گزاره است. *ویژگی‌های نیمساز و عمودمنصف را به خاطر داشته باشید.*	۱
۳	با توجه به این‌که در مستطیل، طول قطرها برابرند و قطرها یکدیگر را نصف می‌کنند، مستطیلی رسم کنید که طول یک ضلع آن ۸ و طول قطر آن ۱۰ باشد. *رسم مثلث قائم‌الزاویه‌ای که وتر و یک ضلع آن معلوم است.*	۱/۵
۴	در چهارضلعی شکل مقابل، زاویه‌های A و B قائمه و BD نیمساز زاویهٔ $A\hat{B}C$ است. اگر $AD = ۳$ باشد، فاصلهٔ نقطهٔ D از BC کدام است؟  ۱) ۳ ۲) ۱/۵ ۳) ۴/۵ ۴) می‌تواند هر مقداری باشد.	۰/۵
۵	قضیه: ثابت کنید سه نیمساز زاویه‌های داخلی هر مثلث در یک نقطه همرس هستند. *ویژگی نقطه‌ای روی نیمساز را به خاطر بیاورید.*	۱/۵
۶	اگر در مثلث ABC داشته باشیم $\hat{C} > \hat{B}$، با استفاده از برهان غیرمستقیم (برهان خلف) ثابت کنید: $AB > AC$. *در برهان خلف، حکم را باید نقض کنیم.*	۱/۵
۷	با ارائهٔ مثالی نقض، هر یک از حکم‌های زیر را رد کنید: الف) در هر مثلث، اندازهٔ بزرگ‌ترین زاویه از دو برابر کوچک‌ترین زاویه، کوچک‌تر است. ب) اگر A زیرمجموعهٔ B باشد، آن‌گاه B زیرمجموعهٔ A نیست.	۱
	فصل دوم	
۸	از تناسب‌های $\frac{y-1}{4} = \frac{2}{2x-2} = \frac{7}{3x+5}$ مقادیر x و y را پیدا کنید. *یکی از ویژگی‌های مهم تناسب، خاصیت طرفین وسطین است.*	۱
۹	در شکل مقابل، دو خط d_1 و d_2 موازی هستند. اگر مساحت مثلث BCD برابر $20\ cm^2$ و $AC = 8\ cm$ باشد، فاصلهٔ نقطهٔ B از AC چند سانتی‌متر است؟  *باید ویژگی‌های مهم مساحت مثلث‌هایی با قاعده‌های برابر یا ارتفاع برابر را به خاطر داشته باشیم.*	۱/۵
۱۰	قضیهٔ تالس را بیان و اثبات کنید. *نوشتن فرض و حکم یادت نره.*	۲
۱۱	در یک روز آفتابی طول سایهٔ درختی که عمود بر سطح زمین است، ۱۲ متر و در همان لحظه طول سایهٔ حسن که عمود بر زمین ایستاده است ۲/۴ متر می‌باشد. اگر طول قد حسن ۱/۸ متر باشد، ارتفاع درخت چند متر است؟	۱/۵
۱۲	قضیه: هرگاه اندازه‌های دو ضلع از مثلثی با اندازه‌های دو ضلع از مثلثی دیگر متناسب و زاویهٔ بین این ضلع‌ها برابر باشند، آن‌گاه آن دو مثلث، متشابه‌اند. *یادمان باشد که روی یکی از مثلث‌ها، مثلثی همنهشت با دیگری رسم می‌کنیم.*	۱/۵
۱۳	در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC که در رأس A قائمه است، ارتفاع AH را رسم کرده‌ایم. اگر $BH = ۱۶$ و $CH = ۹$ باشد، اندازهٔ پاره‌خط‌های AH، AB و AC را بیابید.  *ویژگی‌های ارتفاع وارد بر وتر در مثلث قائم‌الزاویه را به خاطر بیاورید.*	۱/۵
۱۴	مثلثی به طول اضلاع ۶، ۸ و ۱۰ با مثلث دیگری که کوچک‌ترین ارتفاع آن برابر ۸ است، متشابه می‌باشد. محیط و مساحت مثلث دوم را بیابید. *نسبت محیط دو مثلث متشابه و نسبت مساحت دو مثلث متشابه را به خاطر بیاورید.*	۱/۵
۱۵	در دو مثلث ABC و DEF، $\hat{A} = \hat{D}$، $AB = 2DE$ و $AC = 2DF$ است. نسبت $\frac{EF}{BC}$ چه‌قدر است؟	۱
	موفق باشید — جمع نمرات	۲۰

آزمون ۹	هندسه (۱)	رشته: ریاضی فیزیک	تاریخ آزمون: خرداد ۱۴۰۳
	نوبت دوم	پایهٔ دهم	مدت آزمون: ۱۲۰ دقیقه

نهایی خرداد ۱۴۰۳

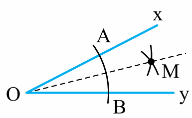
ردیف		نمره
۱	درستی یا نادرستی هر یک از عبارات زیر را مشخص کنید: الف) مجموع زاویه‌های داخلی هر چهارضلعی محدب، ۳۶۰ درجه است. ب) در هر مثلث، نسبت اندازه‌های هر دو ضلع، با نسبت ارتفاع وارد بر آن‌ها برابر است. پ) اگر دو قطر یک چهارضلعی هم‌اندازه باشند، آن چهارضلعی مستطیل است. ت) در فضا دو خط عمود بر یک خط، با هم موازی‌اند.	۱
۲	جاهای خالی را با عبارات (کلمات) مناسب کامل کنید: الف) عمودمنصف وتر یک دایره از .... دایره می‌گذرد. ب) اگر نسبت مساحت‌های دو شکل متشابه $\frac{9}{25}$ باشد، در این صورت نسبت تشابه برابر با .... است. پ) واسطهٔ هندسی مثبت بین دو عدد ۳ و ۱۲ برابر با .... است. ت) شکل حاصل از تقاطع نیمسازهای داخلی یک متوازی‌الاضلاع .... می‌باشد. ث) خط راستی که اشتراک دو صفحهٔ متقاطع است، .... آن دو صفحه نامیده می‌شود.	۱/۲۵
۳	با استفاده از برهان خلف، ثابت کنید اگر در مثلثی دو زاویه نابرابر باشند، ضلع روبه‌رو به زاویهٔ بزرگ‌تر، بزرگ‌تر است از ضلع روبه‌رو به زاویهٔ کوچک‌تر.	۱
۴	روش رسم خط عمود بر یک خط از نقطه‌ای غیرواقع بر آن را توضیح دهید. (با رسم شکل)	۱
۵	آیا گزارهٔ «هر دو مثلث که مساحت‌های برابر داشته باشند، همنهشت‌اند.» درست است؟ چرا؟	۰/۵
۶	در شکل مقابل، مقادیر x و y را بیابید.  	۱/۲۵
۷	در ذوزنقهٔ مقابل MN با قاعده‌ها موازی است. با رسم قطر AC، تناسب داده‌شده را ثابت کنید: $\frac{AM}{MD}=\frac{BN}{NC}$  	۰/۷۵
۸	قضیهٔ اساسی تشابه: در شکل مقابل MN موازی BC است. ثابت کنید مثلث AMN با مثلث ABC متشابه است.  	۱/۵
۹	در مثلث قائم‌الزاویهٔ روبه‌رو ثابت کنید دو مثلث ABH و ACH متشابه‌اند و به کمک آن نشان دهید AH واسطهٔ هندسی بین BH و HC است.  	۱/۷۵
۱۰	طول اضلاع یک مثلث ۷، ۸ و ۱۲ سانتی‌متر بوده و طول بزرگ‌ترین ضلع مثلثی متشابه با آن ۱۶ سانتی‌متر است. محیط مثلث دوم را به دست آورید.	۱
۱۱	ثابت کنید در متوازی‌الاضلاع، هر دو زاویهٔ مجاور، مکمل‌اند.	۰/۷۵
۱۲	ثابت کنید در هر مثلث قائم‌الزاویه، اندازهٔ میانهٔ وارد بر وتر، نصف اندازهٔ وتر است.	۱/۲۵
۱۳	در یک لوزی، اندازهٔ هر ضلع $2\sqrt{10}$ و نسبت اندازه‌های دو قطر $\frac{1}{3}$ است. مساحت لوزی را پیدا کنید.	۱/۲۵

ردیف	سؤال	بارم
۱۴	در متوازی‌الاضلاع ABCD، M وسط ضلع BC بوده و پاره‌خط AM قطر BD را در نقطهٔ N قطع کرده است. نشان دهید: $S_{BNM} = \frac{1}{12} S_{ABCD}$  	۱/۲۵
۱۵	با توجه به مساحت چندضلعی‌های شبکه‌ای، مساحت شکل مقابل را محاسبه کنید. 	۱
۱۶	در هر مورد مشخص کنید شکل حاصل از دوران چه خواهد بود؟ تصویر مناسبی رسم کنید: الف) دوران یک مستطیل حول طول آن. ب) دوران یک مثلث قائم‌الزاویه حول یک ضلع زاویهٔ قائمه.	۱/۲۵
۱۷	منشور سه‌پهلوی روبه‌رو را در نظر بگیرید و به سؤالات زیر پاسخ دهید. الف) یک خط متنافر با CF نام ببرید. ب) یک خط موازی با CF نام ببرید. پ) دو صفحهٔ موازی نام ببرید.  	۰/۷۵
۱۸	الف) سطح مقطع استوانه با صفحهٔ مایلی که با قاعده‌های استوانه متقاطع نباشد، به چه شکل است؟ تصویر مناسبی رسم کنید. ب) در شکل مقابل نمای بالا، روبه‌رو و سمت چپ را رسم کنید.  	۱/۵
	موفق باشید — جمع نمرات	۲۰

پاسخ‌نامهٔ تشریحی

آزمون شمارهٔ ۱ (نوبت اول)

۱- به مرکز O و شعاع دلخواه، کمانی می‌زنیم تا نیم‌خط Ox را در نقطهٔ A و نیم‌خط Oy را در نقطهٔ B قطع کند. (۰/۵) دو کمان مساوی به مراکز A و B و شعاع دلخواه ولی بیشتر از نصف AB، می‌زنیم تا یکدیگر را در نقطهٔ M قطع کنند. (۰/۵) نقطهٔ O را به نقطهٔ M وصل می‌کنیم. خطی که از O و M می‌گذرد، نیمساز زاویهٔ xOy است. (۰/۵) *(فصل ۱ـ ترسیم‌های هندسی)*



۲- الف) از دو سر آن پاره‌خط (۰/۲۵) *(فصل ۱ـ ترسیم‌های هندسی)*

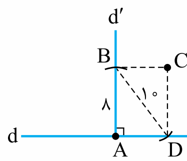
ب) روی نیمساز آن زاویه (۰/۲۵) *(فصل ۱ـ استدلال)*

پ) عکس قضیه (۰/۲۵) ت) مخالف (۰/۲۵) *(فصل ۱ـ استدلال)*

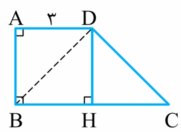
۳- خط d را رسم می‌کنیم و روی آن نقطهٔ A را در نظر می‌گیریم.

- از نقطهٔ A خطی را بر خط d عمود می‌کنیم (خط d'). (۰/۵)
- به مرکز A و شعاع ۸ کمانی می‌زنیم تا خط d' را در نقطهٔ B قطع کند. (۰/۲۵)
- به مرکز B و شعاع ۱۰ کمانی می‌زنیم تا خط d را در نقطهٔ D قطع کند. (۰/۲۵)
- از نقاط B و D خطوطی را به ترتیب موازی با خطوط d و d' رسم می‌کنیم و نقطهٔ برخورد آن‌ها را C می‌نامیم. چهارضلعی ABCD همان مستطیل موردنظر است. (۰/۵)

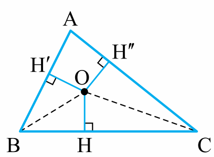
(فصل ۱ـ ترسیم‌های هندسی)



۴- گزینهٔ «۱» (۰/۵) هر نقطه روی نیمساز یک زاویه از دو ضلع آن زاویه به یک فاصله است، پس فاصلهٔ D از BC برابر با DH و فاصلهٔ D از AB برابر با $AD = ۳$ است. در نتیجه $DH = AD = ۳$. *(فصل ۱ـ ترسیم‌های هندسی)*



۵- نیمسازهای زوایای داخلی B و C را رسم می‌کنیم تا یکدیگر را در نقطهٔ O قطع کنند. از نقطهٔ O بر اضلاع مثلث عمودهایی رسم می‌کنیم. (۰/۲۵) با توجه به ویژگی نقاط روی نیمساز داریم:



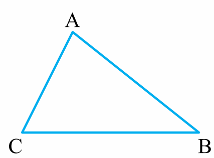
O روی نیمساز زاویهٔ داخلی B قرار دارد $\Rightarrow OH = OH'$ (۰/۲۵)

O روی نیمساز زاویهٔ داخلی C قرار دارد $\Rightarrow OH = OH''$ (۰/۲۵)

$\Rightarrow OH' = OH''$ (۰/۲۵)

پس نقطهٔ O روی نیمساز زاویهٔ داخلی A نیز قرار دارد، زیرا فاصلهٔ آن از دو ضلع زاویهٔ A، برابر است و این ویژگی را تنها نقاط روی نیمساز A دارا هستند، (۰/۲۵) پس هر سه نیمساز از نقطهٔ O می‌گذرند و همرس‌اند. (۰/۲۵) *(فصل ۱ـ ترسیم‌های هندسی)*

۶- فرض کنیم AB بزرگ‌تر از AC نباشد (فرض خلف) (۰/۲۵) در این صورت دو حالت ممکن است رخ دهد:



$AB = AC$ (۰/۲۵) $\xrightarrow[\text{متساوی‌الساقین}]{\text{مثلث}} \hat{B} = \hat{C} \Rightarrow$ این تناقض است. (۰/۲۵)

یا

$AB < AC$ (۰/۲۵) $\xrightarrow{\text{بنابر قضیه}} \hat{C} < \hat{B} \Rightarrow$ این تناقض است. (۰/۲۵)

چون در هر دو حالت بالا با فرض قضیه به تناقض می‌رسیم، پس فرض خلف باطل است و $AB > AC$ می‌باشد. (۰/۲۵) *(فصل ۱ـ استدلال)*

۷- الف) در مثلث به زوایای ۳۰°، ۷۰° و ۸۰° بزرگ‌ترین زاویه از دو برابر کوچک‌ترین زاویه، بزرگ‌تر است. (۰/۵)

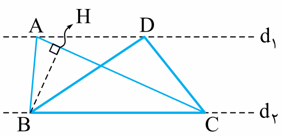
ب) در حالتی که دو مجموعهٔ A و B مساوی باشند، هم A زیرمجموعهٔ B است و هم B زیرمجموعهٔ A است. (۰/۵) *(فصل ۱ـ استدلال)*

۸- $\frac{۷}{۳x+۵}=\frac{۲}{۲x-۲}\Rightarrow ۱۴x-۱۴=۶x+۱۰$ (۰/۲۵) $\Rightarrow ۸x=۲۴\Rightarrow x=۳$ (۰/۲۵)

$\frac{۲}{۲(۳)-۲}=\frac{y-۱}{۴}\Rightarrow ۸=۴y-۴$ (۰/۲۵) $\Rightarrow y=۳$ (۰/۲۵)

(فصل ۲ـ نسبت و تناسب)

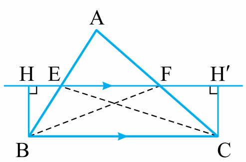
۹- چون دو خط d_1 و d_2 موازی‌اند، پس فاصلهٔ نقاط A و D تا خط d_2 یکسان است؛ یعنی ارتفاع‌های وارد بر ضلع BC در دو مثلث ABC و BCD برابر است (۰/۵) و این دو مثلث هم‌مساحت‌اند. (۰/۲۵)



$S_{ABC}=S_{DBC}=۲۰$ (۰/۲۵) $\Rightarrow \frac{۱}{۲}BH\times ۸=۲۰$ (۰/۲۵) $\Rightarrow BH=۵$ (۰/۲۵)

(فصل ۲ـ نسبت و تناسب)

۱۰- اگر خطی موازی با یکی از اضلاع مثلث، دو ضلع دیگر آن را قطع کند، روی آن دو ضلع، پاره‌خط‌های متناظرِ متناسب ایجاد می‌کند. (۰/۵)



فرض	$EF \parallel BC$ (۰/۲۵)
حکم	$\frac{AE}{EB}=\frac{AF}{FC}$ (۰/۲۵)

$EF \parallel BC \Rightarrow BH=CH' \Rightarrow \frac{۱}{۲}EF\times BH=\frac{۱}{۲}EF\times CH'$ (۰/۲۵)

$\Rightarrow S_{BEF}=S_{CEF}$ (۰/۲۵) (۱)

عمودی که از F بر ضلع AB وارد می‌شود هم ارتفاع مثلث AEF و هم ارتفاع مثلث BEF است.

$\Rightarrow \frac{S_{AEF}}{S_{BEF}}=\frac{AE}{BE}$ (۰/۲۵) (۲)

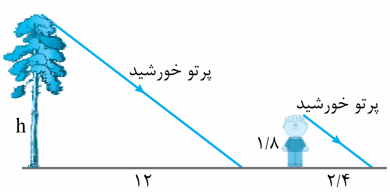
عمودی که از E بر ضلع AC وارد می‌شود هم ارتفاع مثلث AEF و هم ارتفاع مثلث CEF است.

$\Rightarrow \frac{S_{AEF}}{S_{CEF}}=\frac{AF}{FC}$ (۰/۲۵) (۳)

$(۱),(۲),(۳)\Rightarrow \frac{AE}{BE}=\frac{AF}{FC}$ (۰/۵)

(فصل ۲ـ قضیهٔ تالس)

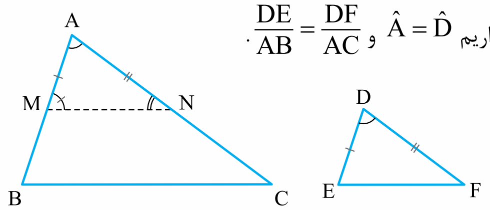
۱۱- چون پرتوهای خورشید با هم موازی و درخت و شخص نیز با هم موازی‌اند، پس دو مثلث متشابه‌اند. (۰/۵)



$\frac{h}{۱/۸}=\frac{۱۲}{۲/۴}$ (۰/۵) $\Rightarrow \frac{h}{۳}=\frac{۱۲}{۴}$ (۰/۲۵) $\Rightarrow ۴h=۳\times ۱۲ \Rightarrow h=۹$ (۰/۲۵)

(فصل ۲ـ تشابه مثلث‌ها)

۱۲- بنا بر فرض مسئله داریم $\hat{A}=\hat{D}$ و $\frac{DE}{AB}=\frac{DF}{AC}$.



روی اضلاع AB و AC پاره‌خط‌های AM و AN را به ترتیب مساوی DE و DF جدا می‌کنیم و سپس M را به N وصل می‌کنیم (۰/۲۵). مشخص است که مثلث AMN با مثلث DEF به حالت «ض ز ض» همنهشت است، (۰/۲۵) پس:

$$\frac{DE}{AB}=\frac{DF}{AC}\ (۰/۲۵) \Rightarrow \frac{AM}{AB}=\frac{AN}{AC}\ (۰/۲۵)$$

$$\xrightarrow{\text{عکس تالس}} MN \parallel BC \Rightarrow \begin{cases}\hat{M}=\hat{B}\\ \hat{N}=\hat{C}\end{cases}\ (۰/۲۵)$$

بنابراین تمام زاویه‌های دو مثلث ABC و AMN برابرند و در نتیجه متشابه‌اند و چون دو مثلث AMN و DEF همنهشت هستند، پس دو مثلث ABC و DEF نیز متشابه‌اند. (۰/۲۵)

(فصل ۲ ـ تشابه مثلث‌ها)

۱۳- روابط طولی در مثلث قائم‌الزاویه را می‌نویسیم:

$$AH^۲=BH\times CH=۱۶\times ۹ \Rightarrow AH=۱۲\ (۰/۵)$$

$$AB^۲=BH\times BC=۱۶\times ۲۵ \Rightarrow AB=۲۰\ (۰/۵)$$

$$AC^۲=CH\times BC=۹\times ۲۵ \Rightarrow AC=۱۵\ (۰/۵)$$

(فصل ۲ ـ روابط طولی در مثلث قائم‌الزاویه)

۱۴- با توجه به این‌که $(۶)^۲+(۸)^۲=(۱۰)^۲$، پس مثلث داده‌شده قائم‌الزاویه است و مثلث دوم نیز که با آن متشابه است نیز قائم‌الزاویه می‌باشد. (۰/۲۵)

از طرفی در مثلث قائم‌الزاویه کوچک‌ترین ارتفاع، ارتفاع وارد بر وتر است و نسبت این دو ارتفاع نظیر هم، همان نسبت تشابه دو مثلث است. (۰/۲۵) اگر فرض کنیم h ارتفاع وارد بر وتر در مثلث اول باشد، با توجه به روابط طولی در مثلث قائم‌الزاویه داریم:

$$h\times ۱۰=۶\times ۸ \Rightarrow h=۴/۸\ (۰/۲۵)$$

$$k=\frac{۸}{۴/۸}=\frac{۵}{۳}\ (\text{نسبت تشابه})\ (۰/۲۵)$$

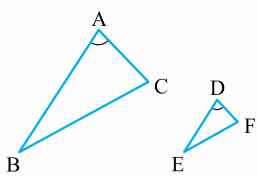
$$\frac{\text{محیط مثلث دوم}}{\text{محیط مثلث اول}}=k \Rightarrow \frac{\text{محیط مثلث دوم}}{۱۰+۸+۶}=\frac{۵}{۳} \Rightarrow \text{محیط مثلث دوم}=۴۰\ (۰/۲۵)$$

$$\frac{\text{مساحت مثلث دوم}}{\text{مساحت مثلث اول}}=k^۲ \Rightarrow \frac{\text{مساحت مثلث دوم}}{\frac{۱}{۲}\times ۶\times ۸}=(\frac{۵}{۳})^۲$$

$$\Rightarrow \text{مساحت مثلث دوم}=\frac{۲۰۰}{۳}\ (۰/۲۵)$$

(فصل ۲ ـ کاربردهایی از تالس و تشابه)

۱۵-



$$\left.\begin{array}{l} AB=۲DE \Rightarrow \frac{AB}{DE}=۲ \\ AC=۲DF \Rightarrow \frac{AC}{DF}=۲\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}\frac{AB}{DE}=\frac{AC}{DF}\ (۰/۲۵)\\ \hat{A}=\hat{D}\ (۰/۲۵)\end{array}\right\}$$

پس دو مثلث ABC و EDF به حالت تناسب دو ضلع و تساوی زاویهٔ بین آن دو ضلع متشابه‌اند (۰/۲۵). در نتیجه:

$$\frac{BC}{EF}=۲ \Rightarrow \frac{EF}{BC}=\frac{۱}{۲}\ (۰/۲۵)$$

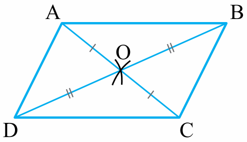
(فصل ۲ ـ تشابه مثلث‌ها)

آزمون شمارهٔ ۲ (نوبت اول)

۱- فرض کنیم از متوازی‌الاضلاع ABCD اندازهٔ ضلع DC و اندازه‌های قطرها داده شده است.

الف) ابتدا پاره‌خط DC را به اندازهٔ داده‌شده رسم می‌کنیم.

ب) دو کمان به مراکز C و D و شعاع‌های نصف اندازهٔ قطر AC و نصف اندازهٔ قطر BD می‌زنیم و محل برخورد آن‌ها را O می‌نامیم. (۰/۲۵)



پ) C و D را به O وصل کرده و به اندازهٔ خودشان ادامه می‌دهیم تا به A و B برسیم. (۰/۵)

ت) A را به B، D و B، و C را به C وصل می‌کنیم.

چهارضلعی ABCD متوازی‌الاضلاع موردنظر است. (۰/۲۵) (رسم شکل ۰/۵)

(فصل ۱ ـ ترسیم‌های هندسی)

۲- می‌دانیم در هر مثلث هر ضلع از مجموع دو ضلع دیگر کوچک‌تر است (۰/۲۵)؛ پس:

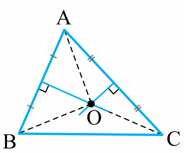
$$\left.\begin{array}{l} x+۷<۲x+۱+۹-۲x \Rightarrow x<۳\ (۰/۲۵)\\ ۲x+۱<x+۷+۹-۲x \Rightarrow x<۵\ (۰/۲۵)\\ ۹-۲x<x+۷+۲x+۱ \Rightarrow \frac{۱}{۵}<x\ (۰/۲۵)\end{array}\right\} \xrightarrow{\cap} \frac{۱}{۵}<x<۳\ (۰/۵)$$

(فصل ۱ ـ نامساوی در مثلث)

۳- عمودمنصف‌های اضلاع AB و AC را رسم می‌کنیم و نقطهٔ برخورد آن‌ها را O می‌نامیم. (۰/۲۵) با توجه به ویژگی نقاط روی عمودمنصف داریم:

$$\left.\begin{array}{l} \text{قرار دارد AB روی عمودمنصف ضلع } O \Rightarrow OA=OB\ (۰/۲۵)\\ \text{قرار دارد AC روی عمودمنصف ضلع } O \Rightarrow OA=OC\ (۰/۲۵)\end{array}\right\}$$

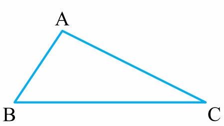
$$\Rightarrow OB=OC\ (۰/۲۵)$$



پس نقطهٔ O روی عمودمنصف ضلع BC هم قرار دارد؛ زیرا از دو سر پاره‌خط BC به یک فاصله است (۰/۲۵)، در نتیجه هر سه عمودمنصف از نقطهٔ O می‌گذرند؛ یعنی در نقطهٔ O همرس‌اند. (۰/۲۵)

(فصل ۱ ـ ویژگی عمودمنصف)

۴- می‌دانیم در یک مثلث، ضلعی که بزرگ‌تر است، زاویهٔ مقابلش نیز بزرگ‌تر است.



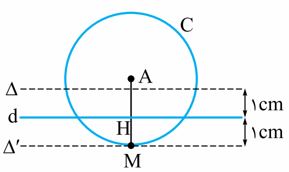
$$\text{بزرگ‌ترین ضلع } BC \Rightarrow \left.\begin{cases} BC>AB \Rightarrow \hat{A}>\hat{C}\ (۰/۲۵)\\ BC>AC \Rightarrow \hat{A}>\hat{B}\ (۰/۲۵)\end{cases}\right\} \xrightarrow{+} ۲\hat{A}>\hat{B}+\hat{C}\ (۰/۲۵)$$

به دو طرف رابطهٔ بالا مقدار $\hat{A}$ را اضافه می‌کنیم.

$$۳\hat{A}>\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}\ (۰/۲۵) \Rightarrow ۳\hat{A}>۱۸۰^\circ \Rightarrow \hat{A}>۶۰^\circ\ (۰/۲۵)$$

(فصل ۱ ـ نامساوی در مثلث)

۵- گزینهٔ «۳» (۰/۵) نقاطی که از خط d به فاصلهٔ ۱cm باشند روی دو خط به موازات d و در دو طرف آن هستند. (خط‌های Δ و Δ′).



نقاطی که از A به فاصلهٔ ۳ هستند روی دایره‌ای به مرکز A و شعاع ۳ قرار دارند (دایرهٔ C).

نقاط مشترک دایرهٔ C و دو خط Δ و Δ′ جواب‌های مسئله هستند. چون مسئله فقط باید سه جواب داشته باشد، پس دایره یکی از خط‌ها را قطع می‌کند و بر دیگری مماس است. اگر خط Δ′ بر دایره در نقطهٔ M مماس باشد، فاصلهٔ A از Δ′ برابر ۳ = AM است و چون فاصلهٔ Δ′ از d برابر ۱ است، پس فاصلهٔ A از خط d برابر ۲ است (AH = ۲).

(فصل ۱ ـ ترسیم‌های هندسی)

۶- الف) نادرست (۰/۲۵)؛ زیرا مثلاً دو عدد $۱+\sqrt{۲}$ و $۲-\sqrt{۲}$ هر دو گنگ هستند ولی مجموع آن‌ها عدد ۳ است و گنگ نیست. (۰/۵)

ب) نادرست (۰/۲۵)؛ زیرا مثلاً در مثلث قائم‌الزاویه نقطهٔ همرسی ارتفاع‌ها، همان رأس زاویهٔ قائمه و روی مثلث است یا در مثلثی که زاویهٔ منفرجه داشته باشد، نقطهٔ همرسی ارتفاع‌ها بیرون مثلث واقع می‌شود. (۰/۵) (ذکر یک مورد کافی است.)

(فصل ۱ ـ مثال نقض)

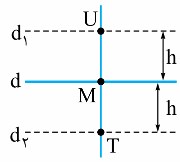
فصل ۱: ترسیم‌های هندسی و استدلال

چند نکته در ترسیمات هندسی

۱ چون اغلب از دایره برای ترسیم استفاده می‌شود لازم دیدیم بدون این که وارد مبحث مکان‌های هندسی شویم، تعریفی از آن را ارائه دهیم.

دایره، مجموعه نقاطی از صفحه است که از یک نقطهٔ ثابت به فاصله‌ای ثابت باشند؛ آن نقطهٔ ثابت را مرکز دایره و آن فاصلهٔ ثابت را شعاع دایره می‌نامند.

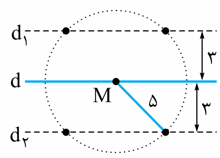
۲ مجموعه نقاطی از صفحه که از یک خط ثابت مانند d به فاصلهٔ ثابت h باشند، روی دو خط موازی با d هستند. برای رسم این دو خط، از نقطهٔ دلخواه M روی خط d عمودی بر آن رسم می‌کنیم و در دو طرف نقطهٔ M پاره‌خط‌های MU و MT را به اندازهٔ h جدا می‌کنیم و از نقطه‌های U و T دو خط بر پاره‌خط UT عمود می‌کنیم تا خط‌های d_1 و d_2 به دست آیند؛ این دو خط با d موازی‌اند و هر نقطه از این دو خط، فاصله‌اش از d برابر h می‌باشد.



مثال: **خط d و نقطهٔ M روی آن را در نظر بگیرید. نقطه‌ای پیدا کنید که از خط d به فاصلهٔ ۳ و از نقطهٔ M به فاصلهٔ ۵ باشد.**

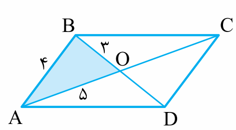
پاسخ: نقاطی که از خط d به فاصلهٔ ۳ هستند، روی دو خط موازی با آن قرار دارند و در شکل، این دو خط با d_1 و d_2 نمایش داده شده‌اند.

نقاطی که از M به فاصلهٔ ۵ هستند روی دایره‌ای به مرکز M و شعاع ۵ قرار دارند. نقاط برخورد دو خط d_1 و d_2 با این دایره، همان نقاط موردنظر می‌باشند. مشاهده می‌کنید که مسئله دارای چهار جواب است.



مثال: **متوازی‌الاضلاعی رسم کنید که طول دو قطر آن ۶ و ۱۰ سانتی‌متر و طول یکی از اضلاع آن ۴ سانتی‌متر باشد.**

پاسخ: اگر فرض کنیم متوازی‌الاضلاع شکل زیر، جواب مسئله باشد، با توجه به آن‌که می‌دانیم قطرهای متوازی‌الاضلاع یکدیگر را نصف می‌کنند، آن‌گاه $AO = ۵$ ، $BO = ۳$ و $AB = ۴$ ، پس طول سه ضلع مثلث ABO معلوم‌اند و در نتیجه قابل رسم است (رسم مثلثی را که سه ضلع آن معلوم است می‌دانیم و در این مسئله نیازی به بیان چگونگی رسم آن نیست). پس از رسم این مثلث، AO را از طرف O به اندازهٔ خودش امتداد می‌دهیم تا نقطهٔ C به دست آید و BO را نیز از طرف O به اندازهٔ خودش امتداد می‌دهیم تا نقطهٔ D پدید آید. چهارضلعی $ABCD$ ، متوازی‌الاضلاع موردنظر می‌باشد.

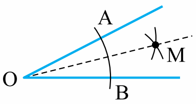


ویژگی نیمساز یک زاویه

نیمساز هر زاویه، مجموعهٔ نقاطی از صفحه است که از دو ضلع آن زاویه به یک فاصله هستند و هر نقطه که از دو ضلع زاویه به یک فاصله باشد، روی نیمساز آن زاویه قرار دارد.

رسم نیمساز یک زاویه

برای رسم نیمساز یک زاویه، دهانهٔ پرگار را به اندازهٔ دلخواه باز می‌کنیم و به مرکز رأس زاویه کمانی می‌زنیم تا اضلاع زاویه را در A و B قطع کند. سپس دهانهٔ پرگار را به اندازه‌ای دلخواه ولی بیشتر از نصف AB باز می‌کنیم و دو کمان به مرکزهای A و B می‌زنیم تا یکدیگر را در M قطع کنند. OM نیمساز زاویه است.

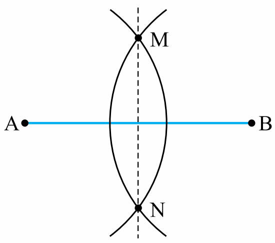


ویژگی عمودمنصف یک پاره‌خط

عمودمنصف هر پاره‌خط، مجموعه نقاطی از صفحه است که از دو سر آن پاره‌خط به یک فاصله هستند و هر نقطه که از دو سر یک پاره‌خط به یک فاصله باشد، روی عمودمنصف آن پاره‌خط قرار دارد.

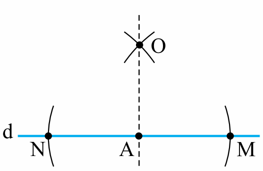
رسم عمودمنصف یک پاره‌خط

برای رسم عمودمنصف یک پاره‌خط مانند AB ، دهانهٔ پرگار را به اندازهٔ دلخواه ولی بیشتر از نصف پاره‌خط باز کرده و به مرکزهای A و B دو کمان می‌زنیم تا یکدیگر را در دو نقطهٔ M و N قطع کنند. امتداد MN عمودمنصف AB است.



رسم خطی عمود بر یک خط از نقطهٔ A روی آن

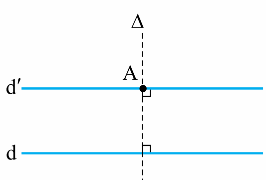
فرض کنیم A روی خط d باشد و بخواهیم از آن عمودی بر d رسم کنیم. برای این منظور به مرکز A و شعاع دلخواه، کمانی می‌زنیم تا d را در M و N قطع کند، سپس دهانهٔ پرگار را به اندازهٔ دلخواه ولی بیشتر از نصف پاره‌خط MN باز می‌کنیم و به مرکزهای M و N دو قوس می‌زنیم تا یکدیگر را در O قطع کنند. امتداد OA بر d عمود است.



اگر نقطهٔ A بیرون خط d باشد، روش کار به همین صورت است.

رسم خطی موازی با یک خط از نقطهٔ A بیرون آن

فرض کنیم A بیرون خط d باشد و بخواهیم از A خطی موازی با d رسم کنیم. برای این منظور ابتدا از A عمودی بر d رسم می‌کنیم (روش این عمل را در بالا توضیح دادیم.) و آن را Δ می‌نامیم، سپس از A عمودی بر Δ رسم می‌کنیم (مانند روش فوق) و آن را d' می‌نامیم. d' با d موازی است.



استدلال و انواع آن

استدلال بر دو نوع است:

۱- استدلال استقرایی: حدس درستی یک حکم کلی براساس صحت آن گزاره در چند حالت محدود را استدلال استقرایی نامند.

۲- استدلال استنتاجی: اثبات درستی یک حکم، براساس نتیجه‌گیری از تعاریف، اصول، قضایا و گزاره‌هایی که درستی آن‌ها را قبلاً پذیرفته‌ایم، استدلال استنتاجی نامند. باید بدانیم که تنها استدلال استنتاجی، استدلالی قابل‌قبول است؛ در واقع عالی‌ترین نوع استدلال، استدلال استنتاجی است.

۳- استدلال با مثال نقض: به مثالی که نشان دهد حکمی کلی نادرست است، مثال نقض می‌گویند.

نقاط همرسی اجزای فرعی مثلث

۱ در هر مثلث، سه نیمساز زاویه‌های داخلی در یک نقطه همرس‌اند. این نقطه همیشه درون مثلث قرار دارد.

۲ سه عمودمنصف اضلاع هر مثلث، در یک نقطه همرس هستند. این نقطه می‌تواند درون مثلث یا روی یکی از اضلاع و یا بیرون مثلث باشد و مرکز دایره‌ای است که از هر سه رأس آن می‌گذرد. اگر هر سه زاویهٔ مثلث حاده باشند، این نقطه درون مثلث قرار دارد. اگر مثلث قائم‌الزاویه باشد، این نقطه وسط وتر است و اگر یک زاویهٔ مثلث منفرجه باشد، این نقطه بیرون مثلث واقع است.

۳ سه ارتفاع هر مثلث در یک نقطه همرس‌اند. نقطهٔ همرسی سه ارتفاع می‌تواند درون، روی یک رأس یا بیرون مثلث باشد. اگر هر سه زاویهٔ مثلث حاده باشند، این نقطه درون مثلث واقع است و اگر مثلث قائم‌الزاویه باشد، این نقطه منطبق بر رأس زاویهٔ قائمه است و اگر دارای یک زاویهٔ مثلث منفرجه باشد، این نقطه بیرون مثلث قرار دارد.

۴ سه میانهٔ هر مثلث در یک نقطه همرس‌اند. این نقطه همیشه درون مثلث واقع است و مرکز ثقل مثلث (گرانیگاه) نامیده می‌شود. با رسم سه میانهٔ هر مثلث، آن مثلث به شش مثلث با مساحت برابر تقسیم می‌شود.

منطق ریاضی

گزارهٔ ساده: هر جملهٔ خبری را یک گزاره می‌نامند؛ به عنوان مثال «علی بزرگ‌تر از محمد است.» حاوی یک خبر است، پس یک گزاره است. اما عبارتی مانند «چه هوای سردی!» حاوی خبر نیست، بلکه جمله‌ای تعجبی است، پس گزاره نیست. یا عبارت‌هایی مانند «به مدرسه می‌روی؟» یا «برو کتابم را بیار!» جمله‌های خبری نیستند (اولی سؤالی و دومی امری است).

ارزش گزاره: هر گزاره می‌تواند درست یا نادرست باشد، گزاره‌ای که درست باشد را با T و گزاره‌ای که نادرست باشد را با F نمایش می‌دهیم. اگر گزاره‌ای مانند P درست باشد، آن را با نماد $P \equiv T$ و اگر نادرست باشد، آن را با نماد $P \equiv F$ نمایش می‌دهیم.

نقیض یک گزاره: اگر p یک گزاره باشد، نقیض آن را با $\sim p$ نمایش می‌دهیم و آن را به صورت روبه‌رو می‌خوانیم: چنین نیست که p

ارزش نقیض هر گزاره، عکس ارزش گزارهٔ اصلی است.

جدول ارزشی مقابل را ملاحظه کنید.

p	~ p
T	F
F	T

برهان خلف (برهان غیرمستقیم): برای اثبات یک حکم به روش برهان خلف، به ترتیب زیر عمل می‌کنیم:

۱ فرض می‌کنیم نقیض حکم درست باشد (فرض خلف).

۲ نشان می‌دهیم که نقیض حکم با حقایق دانسته‌شده یا فرض اولیه در تناقض است (رسیدن به تناقض).

۳ با نادرست‌بودن نقیض حکم، نتیجه می‌گیریم که حکم موردنظر درست است.

مثال **در دو مثلث** ABC **و** $A'B'C'$، **اگر** $AB = A'B'$، $AC = A'C'$ **و** $\hat{A} \neq \hat{A}'$، **آن‌گاه ثابت کنید** $BC \neq B'C'$.

پاسخ می‌خواهیم ثابت کنیم $BC \neq B'C'$. با استفاده از برهان خلف، فرض کنیم $BC = B'C'$ باشد (فرض خلف)، در این صورت دو مثلث ABC و $A'B'C'$ هر سه ضلعشان برابر است، پس همنهشت هستند و در نتیجه باید اجزای متناظر آن‌ها برابر باشند، از جمله باید $\hat{A} = \hat{A}'$ باشد که خلاف فرض است و در نتیجه فرض خلف باطل است و در نتیجه $BC \neq B'C'$.

عکس یک قضیه: اگر در قضیه‌ای جای فرض و حکم را عوض کنیم، گزاره‌ای را که حاصل می‌شود، عکس قضیه می‌نامند. عکس قضیه می‌تواند گزاره‌ای درست یا نادرست باشد. چنان‌چه عکس قضیه‌ای درست باشد، آن را قضیهٔ دوشرطی می‌نامند.

مثال **قضیهٔ زیر را در نظر بگیرید:**

«اگر دو زاویه قائمه باشند، آن‌گاه آن دو زاویه برابرند.» عکس این قضیه را بیان کنید. آیا عکس این قضیه درست است؟ چرا؟

پاسخ فرض این قضیه، قائمه‌بودن دو زاویه و حکم آن، برابری دو زاویه است، پس برای بیان عکس قضیه باید جای فرض و حکم را عوض کنیم، بنابراین عکس این قضیه به صورت زیر است:

«اگر دو زاویه برابر باشند، آن‌گاه آن دو زاویه قائمه هستند.»

به روشنی معلوم می‌شود که این حکم درست نیست، زیرا اگر دو زاویه ۳۸ درجه باشند، هر چند برابرند ولی مطمئناً قائمه نیستند.

نامساوی در مثلث

۱ زاویهٔ خارجی مثلث، از هر زاویهٔ داخلی غیرمجاور به آن بزرگ‌تر است.

۲ اگر در مثلثی دو ضلع نابرابر باشند، زاویهٔ روبه‌رو به ضلع بزرگ‌تر، بزرگ‌تر از زاویهٔ روبه‌رو به ضلع کوچک‌تر است.

۳ اگر در مثلثی دو زاویه نابرابر باشند، ضلع روبه‌رو به زاویهٔ بزرگ‌تر، بزرگ‌تر از ضلع روبه‌رو به زاویهٔ کوچک‌تر است.

۴ اندازهٔ هر ضلع مثلث، از مجموع دو ضلع دیگر آن کوچک‌تر است. (قضیهٔ حمار)

مثال نقض: به مثالی که نشان دهد یک نتیجه‌گیری یا یک حدس کلی نادرست است، مثال نقض گویند.

برای ردکردن یک حکم، کافی است مثالی ارائه دهیم که نشان دهد آن حکم درست نیست، ولی برای اثبات یک حکم کلی، یک یا حتی بی‌شمار مثال نیز کفایت نمی‌کند.

مثال **حکم «مربع عددهای حقیقی، همیشه عددی مثبت است.» را در نظر بگیرید. با ارائهٔ مثالی نقض، نشان دهید این حکم درست نیست.**

پاسخ عدد صفر یک مثال نقض برای این حکم است، زیرا $0^2 = 0 \not> 0$.

فصل ۲ قضیهٔ تالس، تشابه و کاربردهای آن

نسبت و تناسب

تعریف نسبت: اگر a و b دو عدد حقیقی باشند که $b \neq 0$، آن‌گاه کسر $\frac{a}{b}$ را نسبت بین a و b می‌نامند.

تعریف تناسب: اگر دو نسبت $\frac{a}{b}$ و $\frac{c}{d}$ برابر باشند، گوییم این دو کسر متناسب‌اند و با نماد $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ نمایش می‌دهیم.