فصل اول

تابع

(۱۴ پیمانه)

مرجع کتاب درسی:
ریاضی ۳- فصل اول
صفحه‌های ۱ تا ۲۹

با درخت دانش، گام به گام پیشرفت خود را ارزیابی کنید.

گام اول: میزان تسلط خود را با رنگ مشخص کنید.
آبی: مسلطم.
سبز: نسبتاً مسلطم.
زرد: مسلط نیستم.
گام‌های بعدی: اگر در گام اول دانش خود را در حد رنگ زرد ارزیابی کردید اما در نوبت‌های بعدی پیشرفت کردید، می‌توانید خانه‌های سبز یا آبی را رنگ کنید. هرگاه به رنگ‌ها نگاه کنید متوجه می‌شوید در کدام قسمت‌ها نیاز به تمرین بیش‌تر دارید.

تابع

۷۰ سؤال امتحانی شناسنامه‌دار
۱۴ پیمانه‌ی ۵ سؤالی

	آبی	سبز	زرد	تعداد پیمانه	
۱	توابع چندجمله‌ای - توابع صعودی و نزولی			۳ پیمانه ۱۵ سؤال	۱ توابع چندجمله‌ای - تابع درجه ۳ ۲ توابع صعودی و توابع نزولی
۲	ترکیب توابع			۸ پیمانه ۴۰ سؤال	۱ ترکیب توابع ۲ تبدیل نمودار توابع ۳ رسم نمودار تابع $f(kx)$ با استفاده از نمودار $f(x)$
۳	تابع وارون			۳ پیمانه ۱۵ سؤال	

۱ توابع چندجمله‌ای – توابع صعودی و نزولی

درس و سؤال‌های طراحی شده‌ی این فصل: فرهاد حامی
گزینش و چیدمان سؤال‌ها: فرزانه دانایی

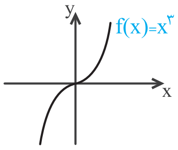
ریاضی ۳– صفحه‌های ۲ تا ۱۰

۱ توابع چندجمله‌ای – تابع درجه ۳

توابع چندجمله‌ای ◄ هر تابع به معادله‌ی $f(x)=ax^n+bx^{n-۱}+cx^{n-۲}+...+k$ را که در آن a، b، c، ... و k اعداد حقیقی، n یک عدد صحیح نامنفی و $a\neq ۰$ است را یک تابع چندجمله‌ای از درجه‌ی n می‌نامیم، به عنوان مثال:

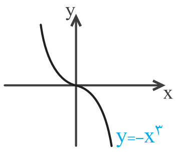
$y=۲x^۶-۵x^۴$ ، $y=x^۲-۲x$ ، $y=\frac{۱}{۲}x^۲+۵x$ ، $y=۵x+۱$ ، $y=۳$

توجه دامنه‌ی توابع چندجمله‌ای، مجموعه‌ی اعداد حقیقی است.



تابع درجه‌ی سوم ◄ هر تابع به معادله‌ی $f(x)=ax^۳+bx^۲+cx+d$ ،$(a\neq ۰)$ یک تابع درجه‌ی سوم نامیده می‌شود. یک حالت خاص از آن $f(x)=x^۳$ با نمودار روبه‌روست. در این تابع دامنه و برد، اعداد حقیقی است.

تیپ ۱ امتحانی رسم نمودار تابع با ضابطه‌ی $y=(x+a)^۳+b$: با استفاده از خواص انتقال و تقارن می‌توانیم نمودار تابع با ضابطه‌ی $y=(x+a)^۳+b$ را به کمک نمودار تابع $y=x^۳$ رسم کنیم. برای رسم آن ابتدا نمودار تابع $y=x^۳$ را a واحد به راست برای $a<۰$ یا a واحد به چپ برای $a>۰$ و سپس b واحد به بالا برای $b>۰$ و یا b واحد به پایین برای $b<۰$ انتقال می‌دهیم.

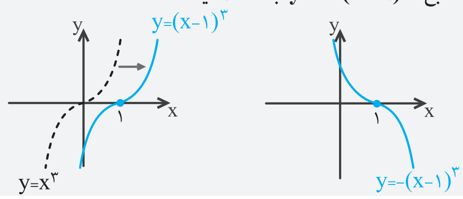


توجه نمودار تابع $y=-x^۳$، قرینه‌ی نمودار تابع $y=x^۳$ نسبت به محور x هاست، پس نمودار آن به شکل مقابل است.

● **مثال:** به کمک نمودار تابع $y=x^۳$، نمودار توابع زیر را رسم کنید.

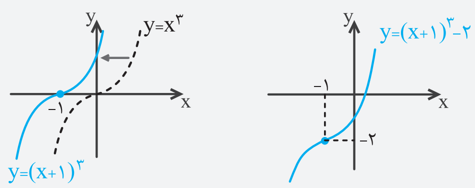
(b) $y=-(x-۱)^۳$

○ حل: ابتدا نمودار تابع $y=x^۳$ را یک واحد به راست انتقال داده تا تابع $y=(x-۱)^۳$ به‌دست آید و سپس قرینه‌ی آن را نسبت به محور x ها رسم می‌کنیم تا تابع $y=-(x-۱)^۳$ به دست آید.



(a) $y=(x+۱)^۳-۲$

○ حل: کافی است نمودار تابع $y=x^۳$ را یک واحد به چپ و سپس ۲ واحد به پایین انتقال دهیم.



توجه در مواردی لازم است ابتدا ضابطه‌ی داده شده را با استفاده از اتحاد مکعب دوجمله‌ای به شکل $y=\pm(x+a)^۳+b$ تبدیل کنیم. به عنوان مثال تابع با ضابطه‌ی $y=-x^۳+۳x^۲-۳x$ را به شکل زیر بازنویسی می‌کنیم:

$y=-(x^۳-۳x^۲+۳x)=-(x^۳-۳x^۲+۳x-۱+۱)=-(x-۱)^۳-۱$

سؤالات امتحانی	مرجع
۱. درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید.	
الف) نمودار تابع $y=x^۳$ در بازه‌ی $(۰\,,۱)$ پایین‌تر از نمودار تابع $y=x^۲$ قرار دارد. (زنجان– نمونه شهدا– دی ۹۹)	ریاضی ۳– صفحه‌ی ۴– مشابه فعالیت– ب
ب) نمودار تابع $y=x^۳$ برای تمام x های نامنفی، بالای نمودار تابع $y=x^۲$ قرار دارد. (همدان– دارالفنون– دی ۹۹)	ریاضی ۳– صفحه‌ی ۴– فعالیت– الف
۲. در جاهای خالی، عبارت مناسب بنویسید.	
الف) دامنه‌ی توابع چندجمله‌ای، مجموعه‌ی .... است. (کرمانشاه– شهید مفتح– دی ۹۹)	ریاضی ۳– صفحه‌ی ۲– متن درس
ب) اگر تابع $y=x^۳$ را سه واحد به چپ و ۵ واحد به بالا منتقل کنیم، ضابطه‌ی تابع عبارت است از: .... (زنجان– شاهد فاطمیه– دی ۹۹)	ریاضی ۳– صفحه‌ی ۵– مکمل کار در کلاس
۳. به کمک نمودار تابع $y=x^۳$، نمودار تابع $y=(x+۲)^۳-۱$ را رسم و دامنه و برد آن را مشخص کنید. (اردبیل– شایسته– دی ۹۹)	ریاضی ۳– صفحه‌ی ۱۰– مشابه تمرین ۱

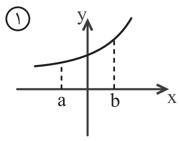
		مرجع
۴. نمودار تابع $y=-(x-۲)^۳$ را رسم کنید.	(کرمان - پروین اعتصامی - دی ۹۹)	ریاضی ۳- صفحه‌ی ۴- فعالیت - پ
۵. نمودار تابع $f(x)=x^۳-۳x^۲+۳x-۲$ را رسم کنید.	(شیراز - فرزانگان حضرت زینب (س) - دی ۹۸)	ریاضی ۳- صفحه‌ی ۱۰- مکمل تمرین ۱

۲ توابع صعودی و توابع نزولی

در تابع f روی یک بازه با حرکت روی نمودار از چپ به راست:

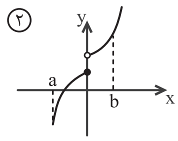
۱ اکیداً صعودی است، هرگاه همواره رو به بالا حرکت کنیم. (شکل‌های ۱ و ۲)

۲ صعودی است، هرگاه رو به پایین حرکت نکنیم. (شکل ۳)



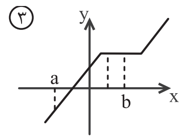
$f(a)<f(b)$

اکیداً صعودی



$f(a)<f(b)$

اکیداً صعودی

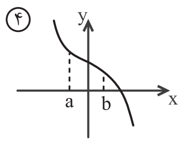


$f(a)\le f(b)$

صعودی ولی غیراکید

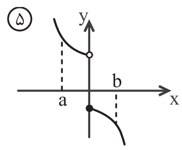
۳ اکیداً نزولی است، هرگاه همواره رو به پایین حرکت کنیم. (شکل‌های ۴ و ۵)

۴ نزولی است، هرگاه رو به بالا حرکت نکنیم. (شکل ۶)



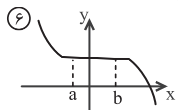
$f(a)>f(b)$

اکیداً نزولی



$f(a)>f(b)$

اکیداً نزولی



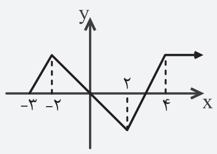
$f(a)\ge f(b)$

نزولی ولی غیراکید

توجه با توجه به تعریف، هر تابع اکیداً صعودی (اکیداً نزولی)، صعودی (نزولی) است ولی عکس آن همواره صحیح نیست. در شکل ۳، تابع صعودی است ولی اکید نیست زیرا در دامنه‌ی خود در بازه‌ای ثابت است.

تیپ ۲ امتحانی شناخت یکنوایی در نمودار: وقتی نمودار یک تابع داده شده، برای تعیین فواصل یکنوایی، باید ببینیم در یک بازه با افزایش x از چپ به راست، نمودار به چه سمتی حرکت می‌کند، به بالا، صعودی، به پایین، نزولی و اگر ثابت است، هم صعودی و هم نزولی است.

• مثال: وضعیت یکنوایی تابع زیر را بررسی کنید.



○ حل: در بازه‌های $[-۳,-۲]$ و $[۲,۴]$ تابع f اکیداً صعودی (صعودی) است.

در بازه‌ی $[-۲,۲]$، تابع f اکیداً نزولی (نزولی) است.

در بازه‌ی $[۲,+\infty)$، تابع f صعودی است ولی اکیداً صعودی نیست زیرا شامل تابع ثابت است.

در بازه‌ی $[۴,+\infty)$ تابع f ثابت است، پس هم صعودی و هم نزولی است.

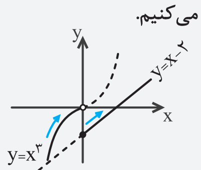
تابع در دامنه‌ی خود یعنی بازه‌ی $[-۳,+\infty)$ غیریکنواست، یعنی نه صعودی است و نه نزولی.

تیپ ۳ امتحانی تعیین یکنوایی توابع با رسم نمودار آنها: وقتی ضابطه‌ی یک تابع در اختیار باشد، با رسم نمودار آن می‌توانیم در مورد یکنوایی آن نظر دهیم.

• مثال: یکنوایی توابع زیر را بررسی کنید.

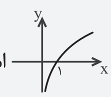
(c) $y=\begin{cases} x^۳ & , \quad x<۰ \\ x-۲ & , \quad x\ge ۰ \end{cases}$

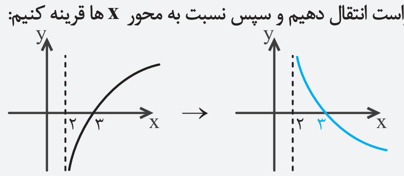
○ حل: هر یک از ضابطه‌ها را در دامنه‌ی داده شده رسم می‌کنیم.



با توجه به نمودار، تابع در هر یک از بازه‌های $(-\infty,۰)$ و $(۰,+\infty)$ اکیداً صعودی است ولی در دامنه‌ی خود یعنی $\mathbf{R}$، غیریکنواست.

(b) $y=-\log_۲(x-۲)$

○ حل: برای رسم نمودار کافی است نمودار تابع $y=\log_۲^x$ را که به شکل  است، ۲ واحد به راست انتقال دهیم و سپس نسبت به محور x ها قرینه کنیم:

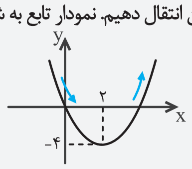


با توجه به نمودار، تابع در بازه‌ی $(۲,+\infty)$ اکیداً نزولی است.

(a) $y=x^۲-۴x$

○ حل: ابتدا می‌نویسیم: $y=(x-۲)^۲-۴$

کافی است نمودار تابع $y=x^۲$ را ۲ واحد به راست و ۴ واحد به پایین انتقال دهیم. نمودار تابع به شکل زیر است:



با توجه به نمودار، تابع در بازه‌ی $[۲,+\infty)$ اکیداً صعودی و در بازه‌ی $(-\infty,۲]$ اکیداً نزولی است.

سؤالات امتحانی

مرجع

۶. درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید.

الف) تابع ثابت در یک بازه، هم صعودی و هم نزولی محسوب می‌شود. (امتحان نهایی – دی ۹۷)
ریاضی ۳- صفحه‌ی ۷- متن درس

ب) تابع $y=-x^{3}+2$ در دامنه‌ی تعریفش، صعودی است. (امتحان نهایی – شهریور ۹۸)
ریاضی ۳- صفحه‌ی ۹
مشابه کار درکلاس ۲- پ

پ) تابع $f(x)=\frac{1}{x}$ در R اکیداً نزولی است. (مشهد- شاهد فاطمیه- دی ۹۹)
ریاضی ۳- صفحه‌ی ۹
مکمل کار در کلاس ۲

ت) هر تابع یک به یک، اکیداً یکنواست. (یزد- فرزانگان- دی ۹۸)
ریاضی ۳- صفحه‌ی ۱۰
مرتبط با فعالیت- پ

ث) هر تابعی که اکیداً یکنوا باشد، حتماً تابعی یک به یک است. (ایلام- رازی- دی ۹۹)
ریاضی ۳- صفحه‌ی ۱۰
مرتبط با فعالیت- پ

۷. در جاهای خالی، گزینه‌ی مناسب داخل پرانتز را انتخاب کنید.

الف) تابع $y=(x+1)^{3}$ در دامنه‌ی تعریف خود .... (صعودی، نزولی) است. (امتحان نهایی – خرداد ۹۸)
ریاضی ۳- صفحه‌ی ۹
مکمل کار در کلاس ۲

ب) تابع $y=(\frac{1}{2})^{x}$ تابعی .... (صعودی، نزولی) و تابع $y=\log_{2}^{x}$ تابعی .... (صعودی، نزولی) است.
(گرگان- میررحیم- دی ۹۹)
ریاضی ۳- صفحه‌ی ۱۰- مکمل تمرین ۴

پ) تابع $y=-x^{3}-2$ در دامنه‌ی تعریف خود .... (صعودی، نزولی) است.
(اهواز- نمونه دولتی فدک- دی ۹۹)
ریاضی ۳- صفحه‌ی ۹
مشابه کار در کلاس ۲- پ

ت) تابع $y=x^{2}|x|$ در کل دامنه‌اش.......... (صعودی، نزولی، غیریکنوا) است. (مشهد- کانون علم- دی ۹۹)
ریاضی ۳- صفحه‌ی ۱۰- مکمل تمرین ۵

۸. در جاهای خالی، عبارت مناسب قرار دهید.

الف) تابعی که در یک بازه، هم صعودی و هم نزولی محسوب می‌شود، تابع .... نامیده می‌شود.
(امتحان نهایی – دی ۹۸)
ریاضی ۳- صفحه‌ی ۷- متن درس

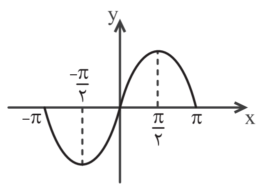
ب) به تابعی که اکیداً صعودی یا اکیداً نزولی باشد، تابع .... می‌گویند.
(تهران- نمونه دولتی شهید نواب صفوی- دی ۹۹)
ریاضی ۳- صفحه‌ی ۷- متن درس

پ) تابع $y=|x-2|$ در بازه‌ی .... نزولی است. (اصفهان- صائب اصفهانی- دی ۹۹)
ریاضی ۳- صفحه‌ی ۸- مکمل مثال

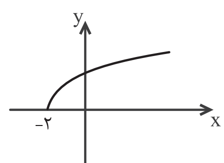
ت) تابع $f(x)=2x-x^{2}$ روی بازه‌ی .... اکیداً نزولی است. (کرمان- پروین اعتصامی- دی ۹۹)
ریاضی ۳- صفحه‌ی ۹
مکمل کار در کلاس ۲

ث) اگر تابع $y=ax+b$ هم صعودی و هم نزولی باشد، مقدار a برابر است با ....
(زاهدان- نمونه فرهنگ- دی ۹۹)
ریاضی ۳- صفحه‌ی ۹
مکمل کار در کلاس ۲

۹. هر کدام از توابع زیر در چه بازه‌هایی اکیداً صعودی و در چه بازه‌هایی اکیداً نزولی است؟



(الف)



(ب)

(کرمانشاه- شهید مفتح- دی ۹۹)
ریاضی ۳- صفحه‌ی ۸
کار در کلاس ح و خ

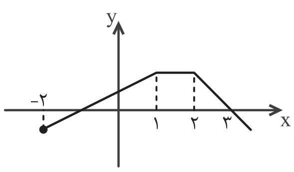
۱۰. با توجه به شکل، به سؤال‌های زیر پاسخ دهید.

الف) تابع در چه بازه‌ای اکیداً صعودی است؟

ب) تابع در چه بازه‌ای صعودی است؟

پ) تابع در چه بازه‌ای نزولی است؟

ت) تابع در چه بازه‌ای ثابت است؟



(کرمانشاه- دانشگاه رازی- دی ۹۹)
ریاضی ۳- صفحه‌ی ۱۰- مشابه تمرین ۳

سؤالات امتحانی	مرجع
۱۱. نمودار تابع $y=-\log_{۲}^{x}+۲$ را رسم کنید و صعودی و نزولی بودن آن را مشخص کنید. (تهران - ممتاز حنان - دی ۹۹)	ریاضی ۳ - صفحه‌ی ۱۰ - تمرین ۴
۱۲. نمودار توابع زیر را رسم کنید و سپس تعیین کنید در چه بازه‌هایی صعودی و در چه بازه‌هایی نزولی‌اند. الف) $y=۲x+\lvert x\rvert$ ب) $y=-\sqrt{x}+۱$ (دزفول - حجاب - دی ۹۹)	ریاضی ۳ - صفحه‌ی ۹ مکمل کار در کلاس ۲
۱۳. نمودار تابع زیر را رسم کرده و وضعیت یکنوایی تابع را بررسی کنید. $f(x)=\begin{cases} x^{۳} & , x>۰ \\ x-۱ & , x\le ۰\end{cases}$ (تهران - نمونه دولتی شهید نواب صفوی - دی ۹۹)	ریاضی ۳ - صفحه‌ی ۱۰ - مکمل تمرین ۲
۱۴. نمودار تابع زیر را رسم کنید و بازه‌هایی را که در آنها تابع صعودی، نزولی یا ثابت است، مشخص کنید. $f(x)=\begin{cases} -۲x-۳ & , x<-۴ \\ ۳ & , -۴\le x<۲ \\ ۳x-۲ & , x\ge ۲\end{cases}$ (اصفهان - شاهد صارمیه - دی ۹۹)	ریاضی ۳ - صفحه‌ی ۱۰ - تمرین ۲
۱۵. نمودار تابع $f(x)=\begin{cases} x^{۲}-۱ & , x\ge ۱ \\ x+۲ & , ۰\le x<۱ \\ -x^{۳}+۱ & , x<۰\end{cases}$ را رسم کنید و مشخص کنید تابع f در چه بازه‌هایی اکیداً صعودی و در چه بازه‌هایی اکیداً نزولی است. (گرگان - شاهد - دی ۹۹)	ریاضی ۳ - صفحه‌ی ۱۰ - مکمل تمرین ۲

۲ ترکیب توابع

ریاضی ۳ - صفحه‌های ۱۱ تا ۲۳

۱ ترکیب توابع

تعریف: اگر f و g دو تابع باشند، آنگاه ترکیب دو تابع f و g به صورت مقابل تعریف می‌شود: $(fog)(x)=f(g(x))$

شرط تشکیل این تابع آن است که اشتراک برد تابع g و دامنه‌ی تابع f، تهی نباشد. در این صورت دامنه‌ی تابع برابر است با:

$$D_{fog}=\left\{x\in D_g \mid g(x)\in D_f\right\}$$

توجه در نماد ترکیب دو تابع، پرانتز نشان می‌دهد که کدام تابع اول وارد محاسبه می‌شود، یعنی:

$$(gof)(x)=g(f(x))$$

اول f بعد g

تیپ ۱ امتحانی محاسبه‌ی مقدار تابع مرکب $(fog)(a)$: برای محاسبه‌ی $(fog)(a)$ داریم: $(fog)(a)=f(g(a))$، پس ابتدا مقدار تابع g را در a محاسبه کرده و سپس مقدار تابع f را در $g(a)$ می‌یابیم. اگر f در $g(a)$ تعریف نشود $(fog)(a)$ تشکیل نمی‌شود.

توجه سؤالات این تیپ، می‌تواند به صورت نمودار، جدول، زوج مرتب یا ضابطه مطرح شود. به مثال‌های داده شده توجه کنید.

● **مثال:** با توجه به جدول زیر، مقادیر خواسته شده را بیابید.

x	۱	۳	۲-	۷
f(x)	۲	۶	۵	۱۱
g(x)	۱-	۹	۱۱	۳

الف) $(fog)(۷)$

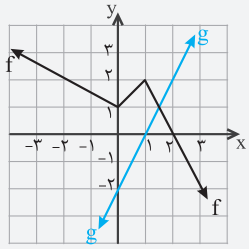
ب) $(go(g-f))(۳)$

○ حل: الف) $(fog)(۷)=f(g(۷))$، از آنجا که $g(۷)=۳$، پس $f(g(۷))=f(۳)=۶$، بنابراین $(fog)(۷)=۶$.

ب) از آنجا که $(go(g-f))(۳)=g((g-f)(۳))$، پس ابتدا باید $(g-f)(۳)$ را بیابیم، یعنی: $(g-f)(۳)=g(۳)-f(۳)=۹-۶=۳$

بنابراین $(g-f)(۳)=۳$، پس $g((g-f)(۳))=g(۳)=۹$.

● **مثال:** با توجه به نمودارهای توابع f و g در شکل مقابل به سؤالات زیر پاسخ دهید:



الف) مقدار $(gof)(-۲)$ را بیابید.

ب) اگر $f(g(a))=-۲$ باشد، a را بیابید.

○ **حل:** الف) $(gof)(-۲)=g(f(-۲))$، مطابق شکل $f(-۲)=۲$، پس: $(gof)(-۲)=g(۲)$، مطابق شکل $g(۲)=۲$، بنابراین $(gof)(-۲)=۲$.

ب) فرض می‌کنیم $g(a)=t$، پس $f(t)=-۲$، باید در شکل ببینیم مقدار تابع f، به ازای چه مقداری از x برابر -۲ می‌شود که برابر $x=۳$ است، بنابراین $g(a)=۳$، از آنجا که g یک تابع خطی با عرض از مبدأ -۲ و طول از مبدأ ۱ است، پس معادله‌ی آن برابر است با:

$$\frac{x}{۱}+\frac{y}{-۲}=۱\Rightarrow \frac{-۱}{۲}y=۱-x\Rightarrow y=۲(x-۱)\Rightarrow g(x)=۲x-۲\Rightarrow g(a)=۳\Rightarrow ۲a-۲=۳\Rightarrow a=\frac{۵}{۲}$$

● **مثال:** اگر $f=\{(۰,-۱),(۲,-۳),(۴,۵)\}$ و $g=\{(-۳,۴),(۵,۱),(۱,۲)\}$، آنگاه تابع gof را بیابید.

○ **حل:** از آنجایی که $(gof)(a)=g(f(a))$، پس خواهیم داشت:

$(gof)(۰)=g(f(۰))=g(-۱)$ تعریف نمی‌شود:

$$\left.\begin{array}{l}(gof)(۲)=g(f(۲))=g(-۳)=۴\to(۲,۴)\in gof\\(gof)(۴)=g(f(۴))=g(۵)=۱\to(۴,۱)\in gof\end{array}\right\}\Rightarrow gof=\{(۲,۴),(۴,۱)\}$$

تیپ ۲ امتحانی تشکیل ضابطه‌ی تابع مرکب و دامنه‌ی آن: برای تشکیل تابع fog وقتی ضابطه‌ی دو تابع f و g داده شده است، از آنجا که $(fog)(x)=f(g(x))$ باید هر جا در تابع f به جای x قرار دهیم $g(x)$. به عنوان مثال اگر $f(x)=۲x+۱$ و $g(x)=۵x-۳$، آنگاه:

$$(fog)(x)=f(g(x))=f(۵x-۳)=۲(۵x-۳)+۱=۱۰x-۵\ ,\ x\in R$$
$$(gof)(x)=g(f(x))=g(۲x+۱)=۵(۲x+۱)-۳=۱۰x+۲\ ,\ x\in R$$

۱ در حالت کلی $(fog)(x)\neq(gof)(x)$

۲ در نوشتن ضابطه‌ی ترکیب دو تابع، دامنه‌ی آن را با استفاده از تعریف یافته و در کنار تابع ترکیب می‌نویسیم.

● **مثال:** اگر $f(x)=۲\sqrt{۴-x}$ و $g(x)=\sqrt{x-۲}$ باشند، به سؤالات زیر پاسخ دهید.

الف) دامنه‌ی تابع gof را بیابید.

ب) تابع gof را تشکیل دهید.

پ) مقدار $(gof)(-۵)-(fog)(۳)$ را تعیین کنید.

○ **حل:** الف) از آنجا که $D_{gof}=\{x\in D_f\,|f(x)\in D_g\}$، ابتدا دامنه‌ی f و g را می‌یابیم. دامنه‌ی تابع f با شرط نامنفی بودن زیر رادیکال از حل نامعادله‌ی $۴-x\geq۰$ یا $x\leq۴$ برابر $D_f=(-\infty,۴]$ و دامنه‌ی تابع g به طریق مشابه از حل نامعادله‌ی $x-۲\geq۰$ یا $x\geq۲$ برابر $D_g=[۲,+\infty)$ است، پس:

$$D_{gof}=\{x\in D_f\,|f(x)\in D_g\}=\{x\in(-\infty,۴]\,|\underbrace{۲\sqrt{۴-x}\in[۲,+\infty)}\}$$
$$۲\sqrt{۴-x}\geq۲\Rightarrow\sqrt{۴-x}\geq۱\Rightarrow ۴-x\geq۱\Rightarrow x\leq۳$$
$$D_{gof}=\{x\leq۴\,|x\leq۳\}=(-\infty,۳]$$

ب) برای تشکیل تابع $(gof)(x)=g(f(x))$، کافی است در تابع g، به جای x، $f(x)$ را قرار دهیم، پس داریم:

$$(gof)(x)=g(f(x))=g(۲\sqrt{۴-x})=\sqrt{۲\sqrt{۴-x}-۲}$$

پ) برای محاسبه‌ی مقدار خواسته شده داریم:

$$(gof)(-۵)-(fog)(۳)=g(f(-۵))-f(g(۳))$$

$f(-۵)=۲\sqrt{۴-(-۵)}=۲\sqrt{۹}=۶$ و $g(۳)=\sqrt{۳-۲}=۱$، پس:

$$=g(۶)-f(۱)=\sqrt{۶-۲}-۲\sqrt{۴-۱}=۲-۲\sqrt{۳}$$

● **مثال:** اگر $f(x)=۲x+a$ و $g(x)=۲x^۲+bx$، اعداد طبیعی a و b را طوری بیابید که داشته باشیم: $(gof)(x)=۸x^۲+۱۴x+۵$

○ **حل:** تابع gof را تشکیل می‌دهیم:

$$(gof)(x)=g(۲x+a)=۲(۲x+a)^۲+b(۲x+a)=۲(۴x^۲+۴ax+a^۲)+۲bx+ba=۸x^۲+۸ax+۲a^۲+۲bx+ab$$
$$=۸x^۲+(۸a+۲b)x+۲a^۲+ab\quad(۱)$$

با متحد قرار دادن (۱) با معادله‌ی $(gof)(x)=۸x^۲+۱۴x+۵$، خواهیم داشت:

$$\begin{cases}۸a+۲b=۱۴\\۲a^۲+ab=۵\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}۴a+b=۷\Rightarrow b=۷-۴a\\۲a^۲+ab=۵\xrightarrow{b=۷-۴a}۲a^۲+a(۷-۴a)=۵\to-۲a^۲+۷a-۵=۰\xrightarrow[a\in N]{\text{مجموع ضرایب صفر}}a=۱\end{cases}$$

از $a=۱$ در $b=۷-۴a$، نتیجه می‌شود $b=۳$.

تیپ ۳ امتحانی معلوم بودن fog و عدم وجود f یا g: اگر یکی از دو تابع وجود نداشته باشد ولی تابع مرکب معلوم باشد، یکی از دو حالت زیر را داریم:

① f و fog معلوم و g مجهول: در این حالت در تابع f، $f(g(x))$ را تشکیل داده و دو طرف را مساوی هم قرار می‌دهیم.

● مثال: اگر $f(x)=۳x+۱$ و $(fog)(x)=\dfrac{۲x-۱}{x+۱}$، آنگاه $g(x)$ را بیابید.

○ حل: در تابع $f(x)=۳x+۱$، با تشکیل $f(g(x))$ به رابطه‌ی $f(g(x))=۳g(x)+۱$ می‌رسیم، بنابراین:

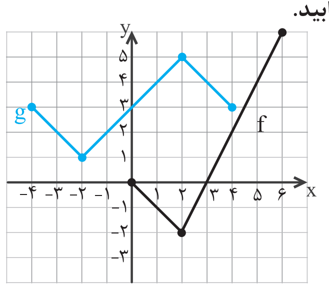
$$\begin{cases} f(g(x))=\dfrac{۲x-۱}{x+۱} \\ f(g(x))=۳g(x)+۱ \end{cases} \xrightarrow[\text{سمت راست‌ها هم برابرند}]{\text{سمت چپ‌ها برابر، پس}} \dfrac{۲x-۱}{x+۱}=۳g(x)+۱ \Rightarrow \dfrac{۲x-۱}{x+۱}-۱=۳g(x) \Rightarrow \dfrac{۲x-۱-x-۱}{x+۱}=۳g(x) \Rightarrow g(x)=\dfrac{x-۲}{۳(x+۱)}$$

② g و fog معلوم و f مجهول: در این حالت فرض می‌کنیم $g(x)=t$، x را برحسب t می‌یابیم و جایگذاری می‌کنیم، سپس $f(t)$ را برحسب t می‌نویسیم و برای محاسبه‌ی $f(x)$، در رابطه‌ی به‌دست آمده به جای t، x قرار می‌دهیم.

● مثال: اگر $g(x)=۳x-۲$ و $(fog)(x)=۵x-۳$، آنگاه $f(x)$ را بیابید.

○ حل: با توجه به اینکه $f(g(x))=۵x-۳$، پس $f(۳x-۲)=۵x-۳$، با فرض $۳x-۲=t$ خواهیم داشت:

$$x=\frac{t+۲}{۳} \to f(t)=۵(\frac{t+۲}{۳})-۳ \Rightarrow f(t)=\frac{۵}{۳}t+\frac{۱}{۳} \Rightarrow f(x)=\frac{۵}{۳}x+\frac{۱}{۳}$$

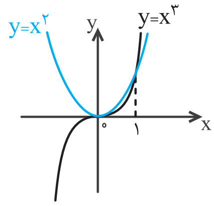
سؤالات امتحانی	مرجع
۱۶. درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید. الف) اگر f و g دو تابع غیرمساوی باشند، آنگاه تساوی $(fog)(x)=(gof)(x)$ هیچ‌گاه برقرار نمی‌شود. (اردبیل – سما – دی ۹۹)	ریاضی ۳ – صفحه‌ی ۲۲ – تمرین ۴ – ب
ب) اگر $f(۲)=۶$ و $g(۱)=۲$، آنگاه: $(fog)(۱)=۱۲$. (سمنان – ریحانه‌النبی – دی ۹۹)	ریاضی ۳ – صفحه‌ی ۲۲ مشابه تمرین ۴ – پ
۱۷. در جاهای خالی، عبارت مناسب بنویسید. الف) تابع $h(x)=(۲x^۲-۵x+۱)^۲$ به صورت ترکیب دو تابع $f(x)=(۲x^۲-۵x+۱)$ و $g(x)=$ .... است. (امتحان نهایی – دی ۹۷)	ریاضی ۳ – صفحه‌ی ۲۲ – مشابه تمرین ۶
ب) اگر $f(x)=\sqrt{x+۷}$ و $g(x)=۲x-۱$، مقدار عددی $(fog)(\frac{۳}{۲})$ برابر با .... است. (مشهد – کانون علم – دی ۹۹)	ریاضی ۳ – صفحه‌ی ۲۲ مشابه تمرین ۴ – ت
۱۸. با توجه به نمودار توابع f و g، مقادیر زیر را در صورت وجود بیابید. الف) $f(g(۲))$ ب) $g(f(۰))$ پ) $(gof)(۴)$ ت) $(fog)(۰)$ ث) $(gog)(-۲)$ ج) $(fof)(۴)$ 	ریاضی ۳ – صفحه‌ی ۲۳ – مکمل تمرین ۸
۱۹. اگر $f(x)=۴x-۱$ و $g(x)=۲x+k$، آنگاه k را طوری بیابید که داشته باشیم: $(gof)(x)=۸x+۱۰$ (امتحان نهایی – دی ۹۵)	ریاضی ۳ – صفحه‌ی ۲۳ – مشابه تمرین ۹
۲۰. اگر $f(x)=x+a$ و $g(x)=ax^۲+bx$، آنگاه a و b را طوری بیابید که داشته باشیم: $(fog)(x)=x^۲+۴x+۱$ (امتحان نهایی – شهریور ۹۲)	ریاضی ۳ – صفحه‌ی ۲۳ – مکمل تمرین ۹

	مرجع
۲۱. اگر $f(x)=3x+2$ و $g(x)=x^2+1$، آنگاه مقدار x را از معادله‌ی $(fog)(x)=8$ بیابید.	ریاضی ۳- صفحه‌ی ۲۳- مشابه تمرین ۹
۲۲. اگر $f(x)=3x+5$ و $h(x)=3x^2+3x+2$، آنگاه تابع g را طوری بیابید که $fog=h$.	ریاضی ۳- صفحه‌ی ۲۲- مشابه تمرین ۳
۲۳. اگر $g(x)=2x-3$ و $(fog)(x)=4(x^2-4x+5)$ باشد، ضابطه‌ی تابع $f(x)$ را به دست آورید. (اهواز- نمونه دولتی فدک- دی ۹۹)	ریاضی ۳- صفحه‌ی ۲۲- مکمل تمرین ۳
۲۴. اگر $f(x)=\frac{x}{1-x}$ و $(fog)(x)=\frac{x+2}{x}$ باشد، ضابطه‌ی $g(x)$ را به دست آورید. (اصفهان- نمونه دولتی ابن سینا- دی ۹۸)	ریاضی ۳- صفحه‌ی ۲۲- مکمل تمرین ۳
۲۵. اگر $f(x)=\sqrt{x-1}$ و $g(x)=2x^2-1$ باشد، دامنه‌ی تابع $fog(x)$ را با استفاده از تعریف به دست آورید. **(امتحان نهایی- شهریور ۹۸)**	ریاضی ۳- صفحه‌ی ۱۴- مثال ۲
۲۶. توابع $f(x)=\frac{x+3}{2x}$ و $g(x)=3x-1$ را در نظر بگیرید. دامنه‌ی fog را با استفاده از تعریف به دست آورید. **(امتحان نهایی- دی ۹۷)**	ریاضی ۳- صفحه‌ی ۱۴ مکمل کار در کلاس
۲۷. دو تابع $f(x)=\sqrt{x-4}$ و $g(x)=\frac{1}{x^2-1}$ را در نظر بگیرید. دامنه‌ی تابع gof را با استفاده از تعریف به دست آورید. **(امتحان نهایی- خرداد ۹۸)**	ریاضی ۳- صفحه‌ی ۲۲ مشابه تمرین ۲- ب
۲۸. اگر $f(x)=\frac{x+3}{x-4}$ و $g(x)=\frac{1}{x-1}$ باشد، به کمک تعریف دامنه‌ی fog را به دست آورید. (تهران- قدس- دی ۹۹)	ریاضی ۳- صفحه‌ی ۱۴ مشابه کار در کلاس
۲۹. توابع $f(x)=\sqrt{3-x}$ و $g(x)=\sqrt{x-5}$ مفروض‌اند. دامنه و ضابطه‌ی تابع $(fog)(x)$ را به دست آورید. (شیراز- فرزانگان حضرت زینب (س)- دی ۹۸)	ریاضی ۳- صفحه‌ی ۲۲ مشابه تمرین ۲- پ
۳۰. اگر $f=\{(1,3),(-2,5),(0,7),(3,-4)\}$ و $g=\{(1,4),(3,1),(0,0),(5,-2)\}$ آنگاه مقدار عبارت‌های زیر را در صورت وجود بیابید. الف) $(fog)(0)$ ب) $(gof)(-2)$ پ) $(fof)(1)$ ت) $(gog)(3)$	ریاضی ۳- صفحه‌ی ۲۲- مکمل تمرین ۱
۳۱. با توجه به ماشین مقابل: ورودی $\rightarrow \boxed{2x+1} \rightarrow \boxed{\sqrt{x}+2} \rightarrow$ خروجی الف) اگر ورودی ۴ باشد، خروجی را بیابید. ب) اگر خروجی ۵ باشد، ورودی را بیابید.	ریاضی ۳- صفحه‌ی ۱۲- کادر پایین صفحه
۳۲. اگر $f=\{(1,2),(3,4),(7,8)\}$ و $g=\{(2,5),(4,10),(3,12)\}$ باشد، دامنه‌ی gof را تعیین کنید. (گرگان- میررحیم- دی ۹۹)	ریاضی ۳- صفحه‌ی ۲۲- مکمل تمرین ۱
۳۳. اگر $f=\{(-2,4),(0,-1),(3,5),(5,2)\}$ و $g=\{(-1,4),(1,2),(2,0),(3,-1)\}$ باشد، تابع fog و gof را در صورت امکان تشکیل دهید. آیا این دو تابع به دست آمده، برابرند؟ (اردبیل- شهید پیرزاده- دی ۹۹)	ریاضی ۳- صفحه‌ی ۲۲- مشابه تمرین ۱
۳۴. اگر $g(x)=\sqrt{2x^2-1}$ و $f=\{(2,-1),(-3,0),(-1,1),(3,-5)\}$ باشند، زوج‌های مرتب gof را بنویسید. (اصفهان- دکتر محمد شفیعی- دی ۹۹)	ریاضی ۳- صفحه‌ی ۲۲- مکمل تمرین ۱
۳۵. فرض کنید $f(x)=x^3+2$ و $g=\{(10,1),(1,4),(3,5)\}$. در صورتی که $(gof)(a)=4$، مقدار a را بیابید.	ریاضی ۳- صفحه‌ی ۱۳- مکمل مثال

پاسخ تشریحی فصل اول

حسین حاجیلو

۱. الف) درست است. همانطور که در شکل دیده می‌شود، در بازه‌ی $(۰\,,\,۱)$ نمودار تابع $y=x^۳$ زیر نمودار تابع $y=x^۲$ قرار دارد.



ب) نادرست است. از روی نمودار بالا معلوم است به ازای $x>۱$، نمودار تابع $y=x^۳$ بالای نمودار $y=x^۲$ قرار دارد، نه تمام x های نامنفی.

۲. الف) R

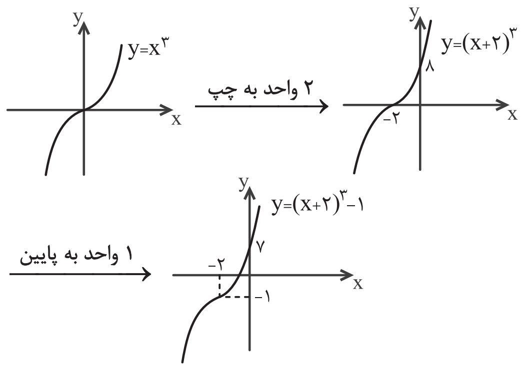
ب) $y=(x+۳)^۳+۵$

توضیح:

$$y=x^۳ \xrightarrow{\text{۳ واحد به چپ}} y=(x+۳)^۳$$

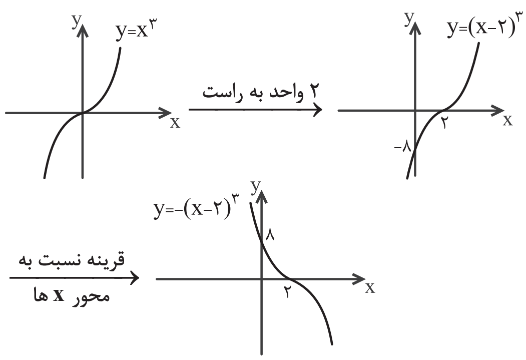
$$\xrightarrow{\text{۵ واحد به بالا}} y=(x+۳)^۳+۵$$

۳.



با توجه به نمودار اخیر، دامنه و برد این تابع، هر دو برابر R است.

۴.



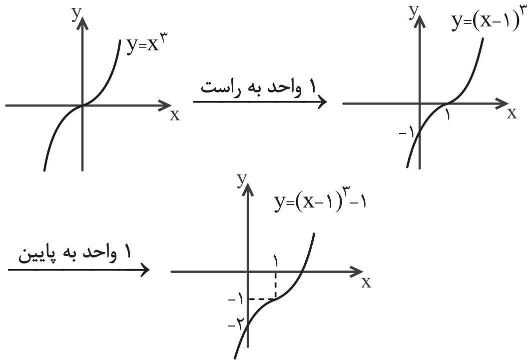
۵. با استفاده از اتحاد مکعب دوجمله‌ای، می‌دانیم:

$$(x-۱)^۳=x^۳-۳x^۲+۳x-۱$$

پس:

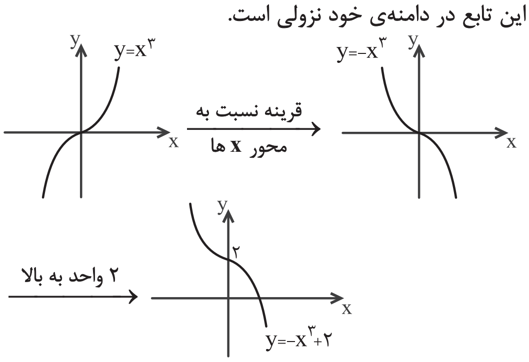
$$f(x)=x^۳-۳x^۲+۳x-۲=(x^۳-۳x^۲+۳x-۱)-۱$$

$$=(x-۱)^۳-۱$$



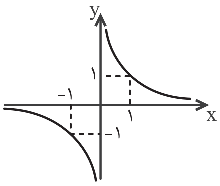
۶. الف) درست است. تابع ثابت را هم می‌توان صعودی و هم می‌توان نزولی در نظر گرفت.

ب) نادرست است. نمودار تابع $y=-x^۳+۲$ نشان می‌دهد که این تابع در دامنه‌ی خود نزولی است.



زیرا با افزایش مقدار x، مقدار y کاهش می‌یابد.

پ) نادرست است. اگر بپذیریم که تابع $f(x)=\frac{۱}{x}$ در R نزولی اکید است، یعنی برای هر $a\,,\,b\in R$، اگر $b>a$ آنگاه $f(b)<f(a)$.



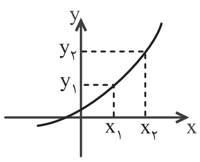
اما به عنوان مثال نقض در نظر بگیرید $a=-۱$ و $b=۱$ که در این صورت $f(b)>f(a)$.

ت) نادرست است. به عنوان مثال نقض، تابع زیر را در نظر بگیرید:

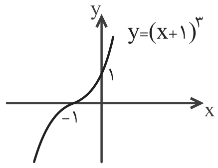
$$f=\{(-۱\,,\,۲)\,,\,(۰\,,\,۰)\,,\,(۱\,,\,۱)\}$$

این تابع یک به یک است ولی نه صعودی است، نه نزولی.

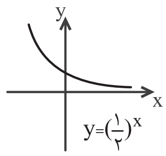
ث) درست است. توابع اکیداً یکنوا، حتماً یک به یک هستند زیرا در آنها هر دو x متمایز، لزوماً y های متمایز دارند.



۷. الف) صعودی. نمودار این تابع نشان می‌دهد که صعودی است.

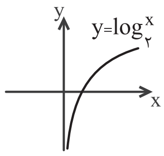


ب) نزولی - صعودی. نمودار تابع نمایی $y=(\frac{۱}{۲})^x$، به صورت مقابل است:



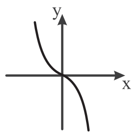
پس تابع $y=(\frac{۱}{۲})^x$، تابعی نزولی است.

نمودار تابع لگاریتمی $y=\log_۲^x$ به صورت مقابل است.



پس تابع $y=\log_۲^x$، تابعی صعودی است.

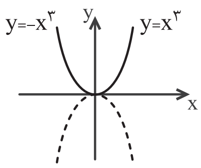
پ) نزولی. نمودار تابع $y=-x^۳$ به شکل



است که ملاحظه می‌کنید نزولی است. نمودار $y=-x^۳-۲$ هم شبیه $y=-x^۳$ است با این تفاوت که دو واحد به پایین منتقل می‌شود که چنین انتقالی تأثیری در صعودی یا نزولی بودن آن ندارد.

ت) غیریکنوا. تابع را به‌صورت دوضابطه‌ای نوشته، نمودار آن را رسم می‌کنیم.

$$y=x^۲|x|=\begin{cases} x^۲(x)=x^۳ & ;\ x\geq ۰ \\ x^۲(-x)=-x^۳ & ;\ x<۰\end{cases}$$

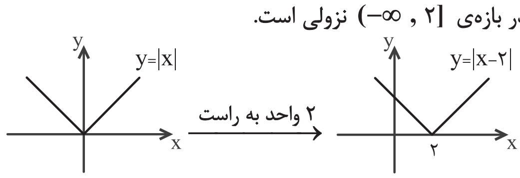


همانطور که می‌بینید این تابع در $(-\infty,۰]$ نزولی و در $[۰,+\infty)$ صعودی است، پس در کل دامنه‌اش (یعنی R) غیریکنواست.

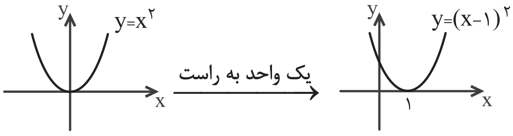
۸. الف) ثابت. تابع ثابت هم صعودی و هم نزولی است.

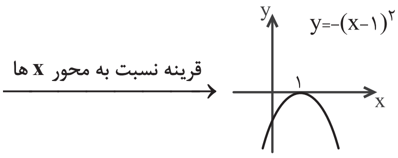
ب) اکیداً یکنوا

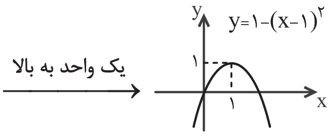
پ) $(-\infty,۲]$. با توجه به نمودار تابع $y=|x-۲|$، این تابع در بازهٔ $(-\infty,۲]$ نزولی است.



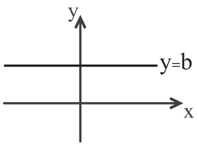
ت) $[۱,+\infty)$. با توجه به نمودار تابع $y=۲x-x^۲=۱-(x-۱)^۲$، این تابع در بازهٔ $[۱,+\infty)$ اکیداً نزولی است.







ث) صفر. $y=ax+b$ یک تابع خطی است؛ می‌دانیم تابعی که هم صعودی و هم نزولی باشد تابع ثابت است و یک تابع خطی زمانی به تابع ثابت تبدیل می‌شود که شیب آن صفر باشد، یعنی اگر تابع $y=ax+b$ ثابت باشد، آنگاه: $a=۰$.



۹. الف) در بازه‌های $[-\pi,-\frac{\pi}{۲}]$ و $[\frac{\pi}{۲},\pi]$، با افزایش مقدار x، مقدار y کاهش می‌یابد، پس تابع در این بازه‌ها اکیداً نزولی است. اما در بازهٔ $[-\frac{\pi}{۲},\frac{\pi}{۲}]$ با افزایش مقدار x، مقدار y هم افزایش می‌یابد، پس تابع در این بازه اکیداً صعودی است.

ب) تابع در بازهٔ $[-۲,+\infty)$ یعنی در کل دامنه‌اش اکیداً صعودی است.

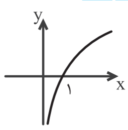
۱۰. الف) در بازهٔ $[-۲,۱]$ با افزایش مقدار x، مقدار y هم افزایش می‌یابد، پس تابع در این بازه، اکیداً صعودی است.

ب) در بازهٔ $[-۲,۲]$ با افزایش مقدار x، مقدار y افزایش می‌یابد یا ثابت می‌ماند، پس تابع در این بازه، صعودی است.

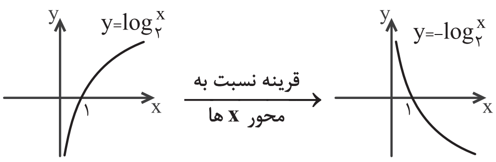
پ) در بازهٔ $[۱,+\infty)$ با افزایش مقدار x، مقدار y کاهش می‌یابد یا ثابت باقی می‌ماند، پس تابع در این بازه، نزولی است.

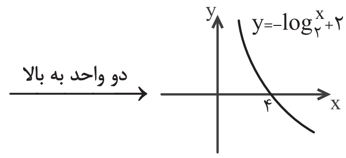
ث) در بازهٔ $[۱,۲]$ مقدار y ثابت است، پس تابع در این بازه، ثابت است.

۱۱. نمودار تابع $y=\log_a^x$ وقتی $a>۱$ است، به‌شکل



است، پس:



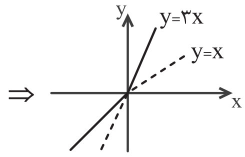


همانطور که در نمودار مشخص است، با افزایش x، مقدار y کاهش می‌یابد، پس این تابع نزولی است.

۱۲. الف) برای رسم نمودار این تابع، آن را به صورت دوضابطه‌ای می‌نویسیم.

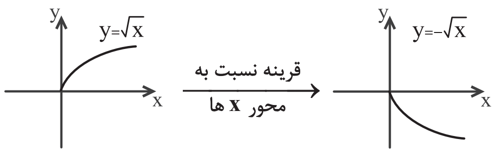
$$y=۲x+|x|=\begin{cases}۲x+x=۳x & ; \quad x\ge ۰\\ ۲x-x=x & ; \quad x<۰\end{cases}$$

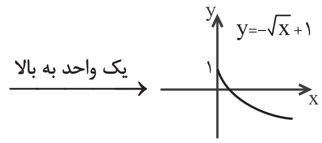
$\Rightarrow$



همانطور که در نمودار می‌بینید، با افزایش x، مقدار y هم افزایش می‌یابد، پس این تابع در R صعودی است.

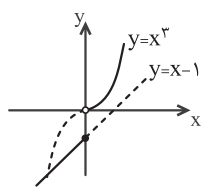
ب)



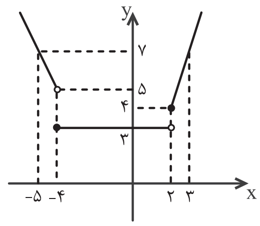


با توجه به نمودار، با افزایش x، مقدار y کاهش می‌یابد، پس این تابع در بازه‌ی $[۰,+\infty)$ نزولی است.

۱۳. از نمودار معلوم است که در کل R، با افزایش x، مقدار y هم افزایش می‌یابد، پس این تابع روی R اکیداً صعودی است.



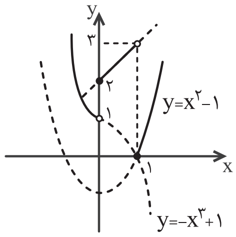
۱۴. هر سه ضابطه خطی هستند، پس با معلوم بودن دو نقطه از آنها و وصل کردن این دو نقطه به هم، نمودار آنها رسم می‌شود.



با توجه به نمودار رسم شده، تابع در بازه‌ی $[-۴,۲)$ ثابت است.

از طرفی در بازه‌ی $(-\infty,۲)$، با افزایش مقدار x، مقدار y کاهش می‌یابد یا ثابت باقی می‌ماند، پس تابع در این بازه نزولی است. در بازه‌ی $[-۴,+\infty)$ با افزایش x، مقدار y ثابت باقی می‌ماند یا افزایش می‌یابد، پس تابع در این بازه صعودی است.

۱۵. با توجه به نمودار تابع، در دو بازه‌ی $[۰,۱)$ و $[۱,+\infty)$، با افزایش x، مقدار y افزایش می‌یابد پس تابع در این دو بازه اکیداً صعودی است.



اما در بازه‌ی $(-\infty,۰)$ با افزایش x، مقدار y کاهش می‌یابد، پس تابع در این بازه اکیداً نزولی است.

۱۶. الف) نادرست است. به عنوان مثال نقض، دو تابع $f(x)=x^۳$ و $g(x)=\sqrt[۳]{x}$ را در نظر بگیرید که داریم:

$$(fog)(x)=f(g(x))=f(\sqrt[۳]{x})=(\sqrt[۳]{x})^۳=x$$

$$(gof)(x)=g(f(x))=g(x^۳)=\sqrt[۳]{x^۳}=x$$

ب) نادرست است. $(fog)(۱)=f(g(۱))=f(۲)=۶$

۱۷. الف) $x^۲$

$$\begin{cases}f(x)=۲x^۲-۵x+۱\\ g(x)=x^۲\end{cases}$$

$$\Rightarrow (gof)(x)=g(f(x))=g(۲x^۲-۵x+۱)=(۲x^۲-۵x+۱)^۲$$

ب) ۳

$f(x)=\sqrt{x+۷}$ و $g(x)=۲x-۱$

$$\Rightarrow (fog)(\frac{۳}{۲})=f(g(\frac{۳}{۲}))=f(۲)=\sqrt{۲+۷}=۳$$

۱۸. الف) با توجه به نمودار، تابع g از نقطه‌ی $(۵,۲)$ می‌گذرد، پس $g(۲)=۵$، بنابراین $f(g(۲))=f(۵)$ و از آنجا که تابع f از نقطه‌ی $(۵,۴)$ می‌گذرد $f(۵)=۴$، یعنی $f(g(۲))=۴$.

ب) با توجه به نمودار، تابع f از نقطه‌ی $(۰,۰)$ می‌گذرد، پس $f(۰)=۰$، بنابراین $g(f(۰))=g(۰)$ و از آنجا که تابع g از نقطه‌ی $(۰,۳)$ می‌گذرد $g(۰)=۳$، یعنی $g(f(۰))=۳$.

پ) می‌دانیم $(gof)(۴)=g(f(۴))$، با توجه به نمودار، تابع f از نقطه‌ی $(۴,۲)$ می‌گذرد، پس $f(۴)=۲$، بنابراین $g(f(۴))=g(۲)$ و از آنجا که تابع g از نقطه‌ی $(۲,۵)$ می‌گذرد $g(۲)=۵$، یعنی $(gof)(۴)=۵$.

ت) می‌دانیم $(fog)(۰)=f(g(۰))$، با توجه به نمودار، تابع g از نقطه‌ی $(۰,۳)$ می‌گذرد، پس $g(۰)=۳$، بنابراین $f(g(۰))=f(۳)$ و از آنجا که تابع f از نقطه‌ی $(۳,۰)$ می‌گذرد $f(۳)=۰$، یعنی $(fog)(۰)=۰$.

ث) می‌دانیم $(gog)(-۲)=g(g(-۲))$، با توجه به نمودار، تابع g از نقطه‌ی $(-۲,۱)$ می‌گذرد، پس $g(-۲)=۱$، بنابراین $g(g(-۲))=g(۱)$ و از آنجا که تابع g از نقطه‌ی $(۱,۴)$ می‌گذرد $g(۱)=۴$، یعنی $(gog)(-۲)=۴$.

ج) می‌دانیم $(fof)(۴) = f(f(۴))$، با توجه به نمودار، تابع f از نقطه‌ی $(۴ , ۲)$ می‌گذرد، پس $f(۴) = ۲$، بنابراین $f(f(۴)) = f(۲)$ و از آنجا که تابع f از نقطه‌ی $(۲ , -۲)$ می‌گذرد $f(۲) = -۲$، یعنی $(fof)(۴) = -۲$.

۱۹. می‌دانیم $(gof)(x) = g(f(x))$، پس اگر $f(x) = ۴x - ۱$ و $g(x) = ۲x + k$، آنگاه:

$$g(f(x)) = ۲f(x) + k = ۲(۴x - ۱) + k$$
$$= ۸x + (k - ۲) \quad (*)$$

با توجه به فرض سؤال $(gof)(x) = ۸x + ۱۰$ است که از مقایسه‌ی آن با $(*)$ داریم:

$$k - ۲ = ۱۰ \Rightarrow k = ۱۲$$

۲۰. می‌دانیم $(fog)(x) = f(g(x))$، پس اگر $f(x) = x + a$ و $g(x) = ax^۲ + bx$، آنگاه:

$$f(g(x)) = g(x) + a = ax^۲ + bx + a \quad (*)$$

با توجه به فرض سؤال، $(fog)(x) = x^۲ + ۴x + ۱$ که از مقایسه‌ی آن با $(*)$، داریم:

$$b = ۴ \;,\; a = ۱$$

۲۱. می‌دانیم $(fog)(x) = f(g(x))$، پس اگر $f(x) = ۳x + ۲$ و $g(x) = x^۲ + ۱$، آنگاه:

$$f(g(x)) = ۳g(x) + ۲ = ۳(x^۲ + ۱) + ۲ = ۳x^۲ + ۵$$
$$\xrightarrow{(fog)(x) = ۸} ۳x^۲ + ۵ = ۸ \Rightarrow ۳x^۲ = ۳ \Rightarrow x^۲ = ۱$$
$$\Rightarrow x = \pm ۱$$

۲۲.

$$f(x) = ۳x + ۵$$
$$\Rightarrow (fog)(x) = f(g(x)) = ۳g(x) + ۵ \quad (*)$$

طبق فرض سؤال باید $fog = h$، داریم:

$$h(x) = ۳x^۲ + ۳x + ۲$$
$$\xrightarrow[(*)]{fog = h} ۳g(x) + ۵ = ۳x^۲ + ۳x + ۲$$
$$\Rightarrow ۳g(x) = ۳x^۲ + ۳x - ۳ \xrightarrow{\div ۳} g(x) = x^۲ + x - ۱$$

۲۳.

$$g(x) = ۲x - ۳$$
$$(fog)(x) = ۴(x^۲ - ۴x + ۵)$$
$$\Rightarrow f(g(x)) = ۴(x^۲ - ۴x + ۵)$$
$$\Rightarrow f(۲x - ۳) = ۴x^۲ - ۱۶x + ۲۰ \quad (*)$$

اگر در نظر بگیریم $X = ۲x - ۳$، آنگاه $x = \frac{X + ۳}{۲}$، بنابراین از معادله‌ی $(*)$ داریم:

$$f(X) = ۴\left(\frac{X + ۳}{۲}\right)^۲ - ۱۶\left(\frac{X + ۳}{۲}\right) + ۲۰$$

می‌توانیم ضابطه را ساده‌تر کنیم:

$$f(X) = (X + ۳)^۲ - ۸(X + ۳) + ۲۰ = X^۲ - ۲X + ۵$$

۲۴. با توجه به اینکه $f(x) = \frac{x}{۱ - x}$، پس:

$$(fog)(x) = f(g(x)) = \frac{g(x)}{۱ - g(x)}$$

از طرفی طبق فرض سؤال $(fog)(x) = \frac{x + ۲}{x}$، پس:

$$\Rightarrow \frac{g(x)}{۱ - g(x)} = \frac{x + ۲}{x} \quad (*)$$

از معادله‌ی $(*)$ باید $g(x)$ را به دست آوریم، با طرفین وسطین کردن، داریم:

$$xg(x) = (۱ - g(x))(x + ۲)$$
$$\Rightarrow xg(x) = x + ۲ - xg(x) - ۲g(x)$$
$$\Rightarrow xg(x) + xg(x) + ۲g(x) = x + ۲$$
$$\Rightarrow (۲x + ۲)g(x) = x + ۲ \Rightarrow g(x) = \frac{x + ۲}{۲x + ۲}$$

۲۵. ابتدا دامنه‌ی توابع f و g را به دست می‌آوریم:

$$f(x) = \sqrt{x - ۱} \Rightarrow D_f : x - ۱ \geq ۰ \Rightarrow x \geq ۱$$
$$\Rightarrow D_f = [۱ , +\infty)$$
$$g(x) = ۲x^۲ - ۱ \Rightarrow D_g = R$$

می‌دانیم $D_{fog} = \left\{x \in D_g \,\middle|\, g(x) \in D_f\right\}$، پس:

$$D_{fog} = \left\{x \in R \,\middle|\, \underbrace{(۲x^۲ - ۱) \in [۱ , +\infty)}_{(*)}\right\}$$

از $(*)$ نتیجه می‌گیریم:

$$۲x^۲ - ۱ \geq ۱ \Rightarrow ۲x^۲ \geq ۲ \Rightarrow x^۲ \geq ۱ \Rightarrow x \geq ۱ \text{ یا } x \leq -۱$$
$$\Rightarrow D_{fog} = [۱ , +\infty) \cup (-\infty , -۱]$$

۲۶. ابتدا دامنه‌ی توابع f و g را به دست می‌آوریم:

$$f(x) = \frac{x + ۳}{۲x}$$

ریشه‌ی مخرج: $x = ۰ \Rightarrow D_f : x \neq ۰$

$$g(x) = ۳x - ۱ \Rightarrow D_g = R$$

می‌دانیم $D_{fog} = \left\{x \in D_g \,\middle|\, g(x) \in D_f\right\}$، پس:

$$D_{fog} = \left\{x \in R \,\middle|\, \underbrace{(۳x - ۱) \neq ۰}_{x \neq \frac{۱}{۳}}\right\} = R - \left\{\frac{۱}{۳}\right\}$$

۲۷. ابتدا دامنه‌ی توابع f و g را به دست می‌آوریم:

$$f(x)=\sqrt{x-4} \Rightarrow D_f: x-4\ge 0 \Rightarrow x\ge 4$$

$$g(x)=\frac{1}{x^2-1} \Rightarrow D_g: x^2-1\neq 0 \Rightarrow D_g: x\neq \pm 1$$

می‌دانیم $D_{gof}=\{x\in D_f \mid f(x)\in D_g\}$، پس:

$$D_{gof}=\{x\ge 4 \mid \underbrace{\sqrt{x-4}\neq \pm 1}_{(*)}\}$$

با توجه به (*)، باید:

$\sqrt{x-4}\neq -1$ (همواره برقرار)

$$\sqrt{x-4}\neq 1 \Rightarrow x-4\neq 1^2 \Rightarrow x\neq 5$$

پس:

$$D_{gof}=\{x\ge 4 \mid x\neq 5\}=[4,+\infty)-\{5\}$$
$$=[4,5)\cup(5,+\infty)$$

۲۸. ابتدا دامنه‌ی توابع f و g را به دست می‌آوریم:

$$f(x)=\frac{x+3}{x-4}\Rightarrow D_f: x-4\neq 0 \Rightarrow D_f: x\neq 4$$

$$g(x)=\frac{1}{x-1}\Rightarrow D_g: x-1\neq 0\Rightarrow D_g: x\neq 1$$

می‌دانیم $D_{fog}=\{x\in D_g \mid g(x)\in D_f\}$، پس:

$$D_{fog}=\{x\neq 1 \mid \underbrace{\frac{1}{x-1}\neq 4}_{(*)}\}$$

$$\xrightarrow{(*)} 4(x-1)\neq 1 \Rightarrow 4x-4\neq 1\Rightarrow x\neq \frac{5}{4}$$

$$D_{fog}=\{x\neq 1 \mid x\neq\frac{5}{4}\}=R-\{1,\frac{5}{4}\}$$

۲۹. ابتدا دامنه‌ی توابع f و g را به دست می‌آوریم:

$$f(x)=\sqrt{3-x}\Rightarrow D_f: 3-x\ge 0\Rightarrow x\le 3$$
$$\Rightarrow D_f=(-\infty,3]$$

$$g(x)=\sqrt{x-5}\Rightarrow D_g: x-5\ge 0\Rightarrow D_g: x\ge 5$$

می‌دانیم $D_{fog}=\{x\in D_g \mid g(x)\in D_f\}$، پس:

$$D_{fog}=\{x\ge 5 \mid \underbrace{g(x)\in(-\infty,3]}_{(*)}\}$$

از (*) نتیجه می‌گیریم $\sqrt{x-5}\le 3$، از آنجا که دو طرف نامساوی مثبت هستند، می‌توانیم آنها را به توان دو برسانیم:

$$(\sqrt{x-5})^2\le 3^2 \Rightarrow x-5\le 9\Rightarrow x\le 14$$

$$D_{fog}=\{x\ge 5 \mid x\le 14\}=[5,14]$$

ضابطه‌ی تابع fog را به دست می‌آوریم:

$$(fog)(x)=f(g(x))=f(\sqrt{x-5})=\sqrt{3-\sqrt{x-5}}$$

۳۰. الف) داریم $(fog)(0)=f(g(0))$. از آنجا که $(0,0)\in g$، پس $g(0)=0$ بنابراین:

$$(fog)(0)=f(0)\overset{(0,7)\in f}{=\!=\!=} 7$$

ب) داریم $(gof)(-2)=g(f(-2))$. از آنجا که $(-2,5)\in f$، پس $f(-2)=5$ بنابراین:

$$(gof)(-2)=g(5)\overset{(5,-2)\in g}{=\!=\!=} -2$$

پ) داریم $(fof)(1)=f(f(1))$. از آنجا که $(1,3)\in f$، پس $f(1)=3$ بنابراین:

$$(fof)(1)=f(3)\overset{(3,-4)\in f}{=\!=\!=} -4$$

ت) داریم $(gog)(3)=g(g(3))$. از آنجا که $(3,1)\in g$، پس $g(3)=1$ بنابراین:

$$(gog)(3)=g(1)\overset{(1,4)\in g}{=\!=\!=} 4$$

۳۱. الف)

$$4\to \boxed{2x+1}\xrightarrow{2\times 4+1=9}\boxed{\sqrt{x}+2}\to\sqrt{9}+2=5$$

ب) فرض کنیم به ازای ورودی α، خروجی ۵ باشد، داریم:

$$\alpha\to\boxed{2x+1}\xrightarrow{2\alpha+1}\boxed{\sqrt{x}+2}\to\underbrace{\sqrt{2\alpha+1}+2}_{5}$$

$$\Rightarrow \sqrt{2\alpha+1}+2=5\Rightarrow\sqrt{2\alpha+1}=3$$

$$\xrightarrow{\text{به توان ۲}} 2\alpha+1=9\Rightarrow 2\alpha=8\Rightarrow\alpha=4$$

۳۲. می‌دانیم $D_{gof}=\{x\in D_f \mid f(x)\in D_g\}$؛ به عبارت دیگر دامنه‌ی تابع gof تشکیل می‌شود از x هایی که به ازای آنها $f(x)$ در دامنه‌ی تابع g قرار داشته باشد؛ پس مؤلفه‌های اول تابع f را در نظر گرفته، به ازای هر یک از آنها برقراری این شرط را بررسی می‌کنیم:

$$f=\{(1,2),(3,4),(7,8)\}$$
$$g=\{(2,5),(4,10),(3,12)\}$$

$$x=1\xrightarrow{(1,2)\in f} f(1)=2\in D_g\Rightarrow 1\in D_{gof}$$
$$x=3\xrightarrow{(3,4)\in f} f(3)=4\in D_g\Rightarrow 3\in D_{gof}$$
$$x=7\xrightarrow{(7,8)\in f} f(7)=8\notin D_g$$

پس داریم $D_{gof}=\{1,3\}$.

۳۳.

$$f=\{(-2,4),(0,-1),(3,5),(5,2)\}$$
$$g=\{(-1,4),(1,2),(2,0),(3,-1)\}$$

برای تشکیل fog از مؤلفه‌های اول تابع g شروع کرده و مقدار تابع fog را به ازای هر یک از آنها (در صورت تعریف) به دست می‌آوریم:

$(fog)(-۱) = f(g(-۱)) \xlongequal{(-۱\,,\,۴)\in g} f(۴)$: تعریف نمی‌شود

$(fog)(۱) = f(g(۱)) \xlongequal{(۱\,,\,۲)\in g} f(۲)$: تعریف نمی‌شود

$(fog)(۲) = f(g(۲)) \xlongequal{(۲\,,\,۰)\in g} f(۰) = -۱$

$\Rightarrow (۲\,,\,-۱) \in fog$

$(fog)(۳) = f(g(۳)) \xlongequal{(۳\,,\,-۱)\in g} f(-۱)$: تعریف نمی‌شود

بنابراین داریم:

$fog = \{(۲\,,\,-۱)\}$

برای تشکیل gof از مؤلفه‌های اول تابع f شروع کرده و مقدار تابع gof را به ازای هر یک از آنها (در صورت تعریف) به‌دست می‌آوریم:

$(gof)(-۲) = g(f(-۲)) \xlongequal{(-۲\,,\,۴)\in f} g(۴)$: تعریف نمی‌شود

$(gof)(۰) = g(f(۰)) \xlongequal{(۰\,,\,-۱)\in f} g(-۱) = ۴$

$\Rightarrow (۰\,,\,۴) \in gof$

$(gof)(۳) = g(f(۳)) \xlongequal{(۳\,,\,۵)\in f} g(۵)$: تعریف نمی‌شود

$(gof)(۵) = g(f(۵)) \xlongequal{(۵\,,\,۲)\in f} g(۲) = ۰$

$\Rightarrow (۵\,,\,۰) \in gof$

پس داریم: $gof = \{(۰\,,\,۴)\,,\,(۵\,,\,۰)\}$

ملاحظه می‌کنید که $fog \neq gof$.

---

۳۴. برای تشکیل تابع gof، از آنجا که f به صورت زوج مرتبی داده شده است، از مؤلفه‌های اول f شروع کرده و مقدار تابع gof را به ازای هر یک از آنها (در صورت تعریف) به‌دست می‌آوریم:

$f = \{(۲\,,\,-۱)\,,\,(-۳\,,\,۰)\,,\,(-۱\,,\,۱)\,,\,(۳\,,\,-۵)\}$

$g(x) = \sqrt{۲x^۲ - ۱}$

$(gof)(۲) = g(f(۲)) \xlongequal{(۲\,,\,-۱)\in f} g(-۱) = \sqrt{۲-۱} = ۱$

$\Rightarrow (۲\,,\,۱) \in gof$

$(gof)(-۳) = g(f(-۳)) \xlongequal{(-۳\,,\,۰)\in f} g(۰)$: تعریف نمی‌شود

$(gof)(-۱) = g(f(-۱)) \xlongequal{(-۱\,,\,۱)\in f} g(۱) = \sqrt{۲-۱} = ۱$

$\Rightarrow (-۱\,,\,۱) \in gof$

$(gof)(۳) = g(f(۳))$

$\xlongequal{(۳\,,\,-۵)\in f} g(-۵) = \sqrt{۲\times۲۵-۱} = ۷$

$\Rightarrow (۳\,,\,۷) \in gof$

$\Rightarrow gof = \{(۲\,,\,۱)\,,\,(-۱\,,\,۱)\,,\,(۳\,,\,۷)\}$

---

۳۵. می‌دانیم $(gof)(a) = g(f(a))$. از آنجا که $f(x) = x^۳ + ۲$، داریم $f(a) = a^۳ + ۲$، پس:

$(gof)(a) = g(f(a)) = g(a^۳ + ۲) \xrightarrow{(gof)(a)=۴}$

$g(a^۳ + ۲) = ۴ \Rightarrow (a^۳ + ۲\,,\,۴) \in g$

$\xrightarrow{(۱\,,\,۴)\in g} a^۳ + ۲ = ۱ \Rightarrow a^۳ = -۱ \Rightarrow a = -۱$

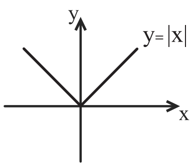
---

۳۶. الف) درست است. برای رسم نمودار $y = kf(x)$ از روی نمودار $y = f(x)$، انبساط یا انقباض در راستای محور yها انجام می‌شود و xها تغییر نمی‌کنند، پس دامنه تغییر نمی‌کند.

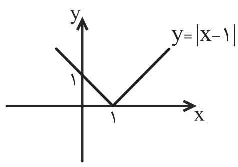
ب) نادرست است. برای رسم نمودار $y = kf(x)$ از روی نمودار $y = f(x)$، انبساط یا انقباض در راستای محور yها انجام می‌شود، بنابراین در حالت کلی yها و در نتیجه بُرد تابع تغییر می‌کند.

پ) نادرست است. برای رسم نمودار $y = -۲f(x)$ از روی نمودار $y = f(x)$، عرض تمام نقاط واقع بر $y = f(x)$ را دو برابر کرده، سپس نسبت به محور xها قرینه می‌کنیم، پس در این فرایند، طول نقاط تغییری نمی‌کند بنابراین نقطه‌ی $(۱\,,\,۲)$ به نقطه‌ی $(۱\,,\,-۴)$ تبدیل می‌شود.

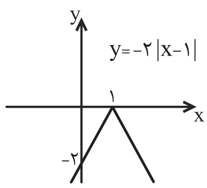
ت) درست است. نمودار تابع f را رسم کرده، برد آن را به‌دست می‌آوریم:



$\Rightarrow$



$\Rightarrow$



$\Rightarrow$ برد : $R = (-\infty\,,\,۰]$

---

۳۷. الف) انقباض. اگر $۰ < k < ۱$، آنگاه نمودار تابع $y = kf(x)$ با انقباض نمودار تابع $y = f(x)$ در راستای محور yها به‌دست می‌آید.

ب) عمودی - منبسط. yهای تابع $y = ۳f(x)$، در مقایسه با تابع $y = f(x)$، سه برابر شده‌اند، یعنی نمودار در جهت محور yها (جهت عمودی)، کشیده (منبسط) شده است.
