

● تقدیم

از عمق قلبم، تقدیم به دستای پدرم و نگاه مادرم

● مقدمه ناشر ●

نمی‌دونم تا حالا این کلیپ رو دیدین که یه آدمی یه دکمه‌ای رو می‌زنه بعد ماشینش هی جمع می‌شه و به اصطلاح تا می‌شه تا جایی که ماشینی که سوارش شده بود می‌شه اندازه یه قوطی کبریت! البته این یه کلیپ ساختگیه و بشر به دنبال این علم کوچک و کم حجم‌سازیه اما این که حالا جنس فلزی که تو ماشین به کار رفته و قطعاتش چه‌طور باشه و ... بشر هنوز بهش نرسیده اما خب آرزوشه که برسه!

جالبه بدونین که ما خیلی‌سبزی در تولید کتاب به این علم رسیدیم 😊 یعنی این‌قدر حَفَنیم ها ...

اومدیم کتابای ریاضی و آمار رو براتون هی تا کردیم و تا کردیم و تا کردیم، تا شده این کتاب جیبی و جمع‌وجور که الآن دستتونه. 😊

از آقای سعید عزیزخانی که خیلی‌خیلی وقت گذاشتن و کلی روش و فرمولای خاص به کار بردن تا کتاب ریاضی و آمار یازدهم بشه یه کتاب جیبی، خیلی‌خیلی سپاس‌گزاریم.
از همهٔ دوستان فعال و کاردرست واحد تألیف و تولید خیلی‌سبز هم حسابی ممنونیم.

به امید تو جیب جاشدن همه‌چی

● مقدمه مؤلف ●

سلام به همتون، امیدوارم این مقدمه رو بخونید که خیلی برام مهمه. کتاب جیبی ریاضی و آمار ۲ که من خیلی براش زحمت کشیدم و خط به خطش رو چندین مرتبه نوشتم و خوندم و اصلاح کردم که بهترین باشه برای خودش و البته ادعا دارم که هست. چندتا ویژگی از این کتاب رو در ادامه بخونیم:

❶ همهٔ مطالب، خیلی خفن طبقه‌بندی شدن و تو هر دسته توضیحات کاملی برای فهمیدن مطلب آوردم.

❷ بعد از هر دسته تستی مربوط به اون دسته گذاشتم که یا تألیفی هست (دسترنج خودمه 😊) یا از تست‌های کنکور انسانی

❸ تقریباً همهٔ تست‌های کنکور انسانی داخل، خارج، نوبت دوم و نوبت اول از سال ۹۸ تا ۱۴۰۳ رو براتون آوردم.

❹ حل تشریحی تست‌ها این قدر کامل هست که خودم کیف می‌کنم، بعضی‌ها هم که با دو یا سه روش حل شدن.

راستشو بخواید این کتاب قرار بود برای جمع‌بندی باشه اما من طوری نوشتمش که هم برای جمع‌بندی خوبه هم برای

یادگیری مطالب چون برای درس‌نامه‌هاش وقت گذاشتم.

در ادامه از تیم تولید خیلی سبز، ویراستاران عزیز و مدیر تألیف محترم کمال تشکر را دارم.

بخونید و لذت‌شو ببرید اگر نظرتون در مورد این کتاب رو بهم بگید بدونید که خیلی خوشحال می‌شم. برای ارتباط با من هر کدوم از مسیرها رو دوست داشتید انتخاب کنید:

✉ Saeed.azizkhani7@gmail.com

📷 Sa - Azizkhani

● فهرست ●

فصل ۱ آشنایی با منطق و استدلال ریاضی

درس اول: گزاره‌ها و ترکیب گزاره‌ها ۸

درس دوم: استدلال ریاضی ۲۶

فصل ۲ تابع

درس اول: توابع ثابت، چند ضابطه‌ای و همانی ۳۴

درس دوم: توابع پلکانی و قدرمطلق ۵۰

درس سوم: اعمال بر روی توابع ۶۸

فصل ۳ آمار

درس اول: شاخص‌های آماری ۷۹

درس دوم: سری‌های زمانی ۹۴

۱۰۳

ضمیمه

درس ۲ استدلال ریاضی

استدلال ریاضی

برای تبدیل عبارتهای توصیفی به زبان ریاضی کافی است مجهول جمله را x در نظر گرفته و رابطه خواسته شده را بنویسیم. برای نوشتن این عبارتها به صورت ریاضی اصطلاحات زیر را باید بشناسیم:

عبارت ریاضی	توصیف فارسی
$2x$	دو برابر
$\frac{x}{2}$	نصف
$\frac{x}{3}$	ثلث
$\frac{x}{4}$	ربع
$\frac{x}{5}$	خمس
x^2	مربع یا مجذور
x^3	مکعب
$\sqrt{x}$	جذر یا ریشه دوم
$\sqrt[3]{x}$	جذر با فرجه ۳ یا ریشه سوم
$\frac{1}{x}$	معکوس



مثال: عبارتهای ریاضی مربوط به توصیفهای زیر را بنویسید.

الف) حاصل ضرب عددی در خودش به علاوه ۳، بزرگتر از خودش است.
ب) معکوس نصف مربع عددی، از ۳ برابر ریشه سوم آن واحد بیشتر است.

پاسخ: عدد مورد نظر را x در نظر می گیریم:

$$\text{الف)} \quad x \xrightarrow[\text{خودش}]{\text{حاصل ضرب عدد در}} x \times x = x^2 \xrightarrow[\text{به علاوه ۳}]{\text{}} x^2 + 3$$

$$\xrightarrow[\text{عدد است}]{\text{بزرگتر از خود}} x^2 + 3 > x$$

$$\text{ب)} \quad \left\{ \begin{array}{l} x \xrightarrow{\text{مربع عدد}} x^2 \xrightarrow{\text{نصف}} \frac{x^2}{2} \xrightarrow{\text{معکوس}} \frac{2}{x^2} = A \\ x \xrightarrow{\text{ریشه سوم}} \sqrt[3]{x} \xrightarrow{\text{۳ برابر}} 3\sqrt[3]{x} = B \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow A = B + 2 \Rightarrow \frac{2}{x^2} = 3\sqrt[3]{x} + 2$$

تست: با کدام شرط، استدلال گزاره زیر، درست است؟

(سراسری نوبت اول ۱۴۰۲)

«در یک مستطیل با اضلاع a و b ، اگر اندازه a ، $\frac{16}{9}$ برابر شود، اندازه قطر $\frac{4}{3}$ برابر می شود.»

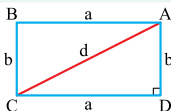
$$b = a \quad (1)$$

$$b = \frac{4}{3}a \quad (2)$$

$$b = \frac{16}{9}a \quad (3)$$

(۴) برای هر مستطیلی این گزاره درست است.

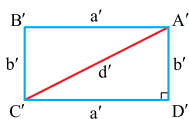
پاسخ: گزینه ۲» مطابق با شکل مقابل مستطیلی به طول a ، عرض b و قطر d رسم می کنیم:



در مثلث ADC رابطه فیثاغورس را به شکل زیر می نویسیم:

$$d^2 = a^2 + b^2$$

در حالت دوم اندازه a ، $\frac{16}{9}$ برابر می شود یعنی: $a' = \frac{16}{9}a$ و اندازه d ، $\frac{4}{3}$ برابر می شود یعنی: $d' = \frac{4}{3}d$ و اندازه b ، بی تغییر باقی می ماند،



یعنی: $b' = b$ ، a' و d' به ترتیب طول، عرض و قطر مستطیل جدید هستند. مستطیل جدید را به شکل مقابل در نظر گرفته و در مثلث $A'D'C'$ رابطه فیثاغورس

$$d'^2 = a'^2 + b'^2 \Rightarrow \left(\frac{4}{3}d\right)^2 = \left(\frac{16}{9}a\right)^2 + b^2 \quad \text{را می نویسیم:}$$

$$\Rightarrow \frac{16}{9}d^2 = \frac{256}{81}a^2 + b^2$$

$$\xrightarrow{d^2 = a^2 + b^2} \frac{16}{9}(a^2 + b^2) = \frac{256}{81}a^2 + b^2$$

$$\Rightarrow \frac{16}{9}a^2 + \frac{16}{9}b^2 = \frac{256}{81}a^2 + b^2$$

$$\Rightarrow \frac{16}{9}b^2 - b^2 = \frac{256}{81}a^2 - \frac{16}{9}a^2 \Rightarrow \frac{7}{9}b^2 = \frac{112}{81}a^2$$

$$\Rightarrow b^2 = \frac{16}{9}a^2 \xrightarrow{\text{جذر}} b = \frac{4}{3}a$$

$$p \Rightarrow q \text{ :مقدمه ۱}$$

استدلال استثنایی

استدلال گزاره شرطی $p \Rightarrow q$ به شکل p :مقدمه ۲ را قیاس $\therefore q$

استثنایی می گوئیم که براساس یک روش درست استدلال می کند و نتیجه آن زمانی درست است که مقدمه ۱ آن درست باشد. ($\therefore$ نماد نتیجه است.)



گزاره ترکیبی قیاس استثنایی به صورت $((p \Rightarrow q) \wedge p) \Rightarrow q$ است. در ادامه یک نمونه از قیاس استثنایی را ببینیم:

مقدمه ۱: اگر باران ببارد، آن گاه زمین خیس می شود.

مقدمه ۲: امروز باران باریده است.

∴ زمین خیس شده است.

استدلال مغالطه

گاهی از قیاس استثنایی به شکل نادرست استفاده می شود و منجر به نتیجه گیری نادرست می شود. به این گونه استدلالات که گزاره شرطی

$p \Rightarrow q$: مقدمه ۱

$p \Rightarrow q$ را به صورت q : مقدمه ۲ استدلال می کند، مغالطه
∴ p

می گوئیم. (∴ نماد نتیجه است.)

گزاره ترکیبی استدلال مغالطه به صورت $((p \Rightarrow q) \wedge q) \Rightarrow p$ است. در ادامه یک نمونه قیاس مغالطه می بینیم:

مقدمه ۱: اگر باران ببارد، آن گاه زمین خیس می شود.

مقدمه ۲: زمین خیس شده است.

∴ امروز باران باریده است.

جیب دوتی: تو استثنایی، مقدمه ۲، مقدم گزاره شرطی موجود در مقدمه ۱ و

تو مغالطه، مقدمه ۲، تالی گزاره شرطی موجود در مقدمه ۱ هست.

تست: در استدلال $(-3)^2 > 0$: مقدمه ۲ نوع استدلال و نتیجه $-3 > 0$ مقدمه ۱ $x > 0 \Rightarrow x^2 > 0$ آن کدام است؟

- (۱) استدلال استثنایی و نتیجه آن درست است.
- (۲) استدلال استثنایی و نتیجه آن نادرست است.
- (۳) استدلال مغالطه و نتیجه آن درست است.
- (۴) استدلال مغالطه و نتیجه آن نادرست است.

پاسخ: گزینه «۴» در مقدمه ۲، تالی گزاره شرطی موجود در مقدمه ۱ آمده، در واقع گزاره ترکیبی به صورت $(p \Rightarrow q) \wedge q \Rightarrow p$ است، بنابراین استدلال از نوع مغالطه است و با توجه به این که مقدمه ۱ و مقدمه ۲ آن درست است اما نتیجه نهایی نادرست و $-3 < 0$ است.

اثبات گزاره شرطی $p \Rightarrow q$ به کمک عکس نقیض آن

اگر اثبات گزاره شرطی $p \Rightarrow q$ سخت باشد، می توان عکس نقیض آن یعنی $\sim q \Rightarrow \sim p$ را اثبات کرد و در این صورت گزاره شرطی $p \Rightarrow q$ نیز اثبات می شود. به عنوان مثال برای اثبات گزاره «اگر n^2 زوج باشد، آن گاه n زوج است ($n \in \mathbb{Z}$)» از گزاره «اگر n فرد باشد، آن گاه n^2 نیز فرد است.» استفاده می کنیم. برای اثبات گزاره داده شده داریم:

$$n \text{ فرد است} \Rightarrow n = 2k + 1 \Rightarrow n^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1$$

$$= 2(\underbrace{2k^2 + 2k}_{k'}) + 1 \Rightarrow n^2 = 2k' + 1 \text{ فرد است.}$$

یافتن محل خطا در محاسبات یک استدلال

گاهی در یک استدلال یا اثبات ریاضی دچار خطا می شویم. برای پیدا کردن محل خطا محاسبات را مرحله به مرحله بررسی می کنیم. به عنوان مثال



یک دانش آموز ادعا کرده معادله $x^2 + x = 0$ یک ریشه دارد و مراحل اثبات را به ترتیب زیر ارائه کرده است:

فاکتورگیری از x : مرحله (۱) $x(x+1) = 0$

تقسیم دو طرف تساوی بر x : مرحله (۲) $\frac{x(x+1)}{x} = \frac{0}{x}$

یافتن معادله نهایی: مرحله (۳) $x+1=0$

پیدا کردن ریشه: مرحله (۴) $x = -1$

این دانش آموز نمی تواند در مرحله دوم، دو طرف تساوی را بر x تقسیم کند، چون همان طور که در زیر می بینید یکی از ریشه های این معادله $x = 0$ است و نمی تواند در مخرج کسر قرار بگیرد:

$$x^2 + x = 0 \Rightarrow x(x+1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x+1 = 0 \Rightarrow x = -1 \end{cases}$$

جیب دولی: یکی از مشکلات اصلی تو محاسبات اینه که دو طرف تساوی رو به عبارتی تقسیم می کنن که برابر صفر هست.

تست: با چیدن قطعات یک پازل در کنار هم، مربعی به مساحت a ساخته می شود. این پازل طوری طراحی شده است که با تغییر چینش بعضی قطعات می توان یک مثلث قائم الزاویه به مساحت b نیز درست کرد. دانش آموزی استدلال زیر را در مورد رابطه بین a و b نوشته است. ایراد این استدلال در کدام گام است؟

(سراسری نوبت دوم ۱۴۰۲)

۱) $a = b$

۲) $a^2 = ab$ طرفین تساوی گام ۱ را در a ضرب کرده است.

۳) $a^2 - b^2 = ab - b^2$ b^2 را از طرفین تساوی گام ۲ کم کرده است.

۴) $(a-b)(a+b) = (a-b)b$

طرفین تساوی گام ۳ را تجزیه کرده است.

$$۵) \frac{(a-b)(a+b)}{(a-b)} = \frac{(a-b)b}{(a-b)}$$

طرفین تساوی گام ۴ را بر $a - b$ تقسیم کرده است.

۶) $b + b = b$ به جای a طبق گام ۱، مقدار b را قرار داده است.

۷) $\frac{2b}{b} = \frac{b}{b}$ طرفین تساوی گام ۶ را بر b تقسیم کرده است.

۸) $2 = 1$

۷ (۴)

۶ (۳)

۵ (۲)

۳ (۱)

پاسخ: گزینه «۲» با توجه به فرض سؤال $a = b$ است، بنابراین نتیجه می گیریم:

پس دانش آموز نمی تواند در مرحله یا گام پنجم دو طرف تساوی را بر $(a - b)$ تقسیم کند، چون مخرج کسر نمی تواند صفر باشد.

ضمیمہ



فصل ۱: آشنایی با منطق و استدلال ریاضی

۱. تعریف گزاره و مفاهیم مربوط به آن

گزاره	هر جمله خبری را که بتوانیم به آن ارزش درست یا نادرست بدهیم گزاره می‌گوییم (لزومی ندارد قطعاً ارزش گزاره را بدانیم). گزاره‌ها را با حروف p, q, r و ... نمایش می‌دهیم. جملات سؤالی، امری، سلیقه‌ای و احساسی گزاره نیستند. به عنوان مثال جملات زیر گزاره نیستند: (۱) سن تو چه قدر است؟ (سؤالی) (۲) تو باید درس بخوانی. (امری) (۳) موز میوه بسیار خوشمزه‌ای است. (سلیقه‌ای) (۴) می‌دانم که تو من را دوست داری. (احساسی)
نقیض گزاره	نقیض گزاره « p » را با نماد « $\sim p$ » نمایش می‌دهیم و آن را به صورت «نقیض p » یا «چنین نیست که p » می‌خوانیم. برای ساخت نقیض یک گزاره کافی است فعل آن را نفی کنیم.
گزاره‌های هم‌ارز	به گزاره‌هایی که ارزش آن‌ها یکسان باشد هم‌ارز می‌گوییم. هم‌ارز بودن گزاره‌های p و q را به صورت $p \equiv q$ نمایش می‌دهیم.

۲. ترکیب گزاره‌ها

- الف)** ترکیب عطفی p و q ($p \wedge q$): فقط زمانی درست است که هر دو درست باشند.
- ب)** ترکیب فصلی p و q ($p \vee q$): فقط زمانی نادرست است که هر دو نادرست باشند.
- پ)** ترکیب شرطی p و q : (p مقدم و q تالی - $p \Rightarrow q$): اگر p (مقدم) نادرست یا q (تالی) درست باشد، درست است.
- ت)** ترکیب دوشروطی p و q ($p \Leftrightarrow q$): فقط زمانی درست است که p و q هم‌ارز باشند.



p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \Rightarrow q$	$p \Leftrightarrow q$
د	د	د	د	د	د
د	ن	ن	د	ن	ن
ن	د	ن	د	د	ن
ن	ن	ن	ن	د	د

۳. خواص ترکیب عطفی و فصلی

خواص ترکیب عطفی	خواص ترکیب فصلی
ترکیب عطفی هر گزاره با خودش برابر همان گزاره است. $p \wedge p \equiv p$	ترکیب فصلی هر گزاره با خودش برابر همان گزاره است. $p \vee p \equiv p$
ترکیب عطفی خاصیت جابه‌جایی دارد. $p \wedge q \equiv q \wedge p$	ترکیب فصلی خاصیت جابه‌جایی دارد. $p \vee q \equiv q \vee p$
ترکیب عطفی هر گزاره‌ای با T، همان گزاره است. $p \wedge T \equiv p$	ترکیب فصلی هر گزاره‌ای با T، درست است. $p \vee T \equiv T$
ترکیب عطفی هر گزاره‌ای با F، نادرست است. $p \wedge F \equiv F$	ترکیب فصلی هر گزاره‌ای با F، همان گزاره است. $p \vee F \equiv p$
ترکیب عطفی هر گزاره با نقیضش نادرست است. $p \wedge \sim p \equiv F$	ترکیب فصلی هر گزاره با نقیضش درست است. $p \vee \sim p \equiv T$