

درسنامه آموزشی

فصل اول: آشنایی با مبانی ریاضیات

قسمت اول: آشنایی با منطق ریاضی و گزاره‌ها ۱۰

قسمت دوم: ترکیب شرطی، ترکیب دو شرطی و سورها ۱۸

قسمت سوم: مجموعه و زیرمجموعه ۲۷

قسمت چهارم: قوانین و اعمال بین مجموعه‌ها ۳۶

قسمت پنجم: ضرب دکارتی ۴۴

فصل دوم: احتمال

قسمت اول: مبانی احتمال ۵۲

قسمت دوم: احتمال غیر هم‌شانس ۶۵

قسمت سوم: احتمال شرطی، قانون احتمال کل و قانون بیز ۶۸

قسمت چهارم: پیشامدهای مستقل و وابسته ۸۰

فصل سوم: آمار توصیفی

قسمت اول: توصیف و نمایش داده‌ها ۹۰

قسمت دوم: معیارهای گرایش به مرکز ۹۶

قسمت سوم: معیارهای پراکندگی ۱۰۳

فصل چهارم: آمار استنباطی

قسمت اول: جامعه آماری و نمونه ۱۱۰

قسمت دوم: برآورد ۱۱۹

FILM

فصل اول: آشنایی با مبانی ریاضیات

درس اول: آشنایی با منطق ریاضی

درس دوم: جبر مجموعه‌ها

فصل دوم: احتمال

درس سوم: مبانی احتمال

درس چهارم: احتمال غیر هم‌شانس

درس پنجم: احتمال شرطی، قانون احتمال کل و قانون بیز

درس ششم: پیشامدهای مستقل و وابسته

فصل سوم: آمار توصیفی

درس هفتم: توصیف و نمایش داده‌ها

درس هشتم: معیارهای گرایش به مرکز

درس نهم: معیارهای پراکندگی

فصل چهارم: آمار استنباطی

درس دهم: گردآوری داده‌ها

درس یازدهم: برآورد

پرسش‌های چهارگزینه‌ای

فصل اول: آشنایی با مبانی ریاضیات

- قسمت اول: آشنایی با منطق ریاضی و گزاره‌ها ۱۲۶
- قسمت دوم: ترکیب شرطی، ترکیب دو شرطی و سورها ۱۲۸
- قسمت سوم: مجموعه و زیرمجموعه ۱۳۴
- قسمت چهارم: قوانین و اعمال بین مجموعه‌ها (جبر مجموعه‌ها) ۱۳۶
- قسمت پنجم: ضرب دکارتی ۱۴۰

فصل دوم: احتمال

- قسمت اول: مبانی احتمال ۱۶۵
- قسمت دوم: احتمال غیر هم‌شانس ۱۷۲
- قسمت سوم: احتمال شرطی، قانون احتمال کل و قانون بیز ۱۷۴
- قسمت چهارم: پیشامدهای مستقل و وابسته ۱۸۴

فصل سوم: آمار توصیفی

- قسمت اول: توصیف و نمایش داده‌ها ۲۲۸
- قسمت دوم: معیارهای گرایش به مرکز ۲۳۲
- قسمت سوم: معیارهای پراکندگی ۲۳۶

فصل چهارم: آمار استنباطی

- قسمت اول: جامعه آماری و نمونه ۲۵۸
- قسمت دوم: برآورد ۲۶۱

پرسش‌های تشریحی

فصل اول: آشنایی با مبانی ریاضیات

- قسمت اول: آشنایی با منطق ریاضی و گزاره‌ها ۲۷۰
- قسمت دوم: ترکیب شرطی، ترکیب دو شرطی و سورها ۲۷۱
- قسمت سوم: مجموعه و زیرمجموعه ۲۷۲
- قسمت چهارم: قوانین و اعمال بین مجموعه‌ها (جبر مجموعه‌ها) ۲۷۳
- قسمت پنجم: ضرب دکارتی ۲۷۴

فصل دوم: احتمال

- قسمت اول: مبانی احتمال ۲۸۶
- قسمت دوم: احتمال غیر هم‌شانس ۲۸۷
- قسمت سوم: احتمال شرطی، قانون احتمال کل و قانون بیز ۲۸۹
- قسمت چهارم: پیشامدهای مستقل و وابسته ۲۹۱

فصل سوم: آمار توصیفی

- قسمت اول: توصیف و نمایش داده‌ها ۳۰۷
- قسمت دوم: معیارهای گرایش به مرکز ۳۰۹
- قسمت سوم: معیارهای پراکندگی ۳۱۱

فصل چهارم: آمار استنباطی

- قسمت اول: جامعه آماری و نمونه ۳۲۱
- قسمت دوم: برآورد ۳۲۳

بِسْمِ
اللَّهِ
الرَّحْمَنِ
الرَّحِيمِ

بنام خداوند بخشاینده مهربان

﴿اللَّهُمَّ أَخْرِجْنِي مِنْ ظُلُمَاتِ الْوَهْمِ﴾

پروردگارا؛ خارج کن مرا از تاریکی‌های فکر

﴿وَأَكْرِمْنِي بِنُورِ الْفَهْمِ﴾

و به نور فهم مرا گرامی بدار

﴿اللَّهُمَّ افْتَحْ عَلَيْنَا أَبْوَابَ رَحْمَتِكَ﴾

پروردگارا؛ بر ما درهای رحمت را بگشای

﴿وَأَنْشُرْ عَلَيْنَا خَزَائِنَ عُلُومِكَ﴾

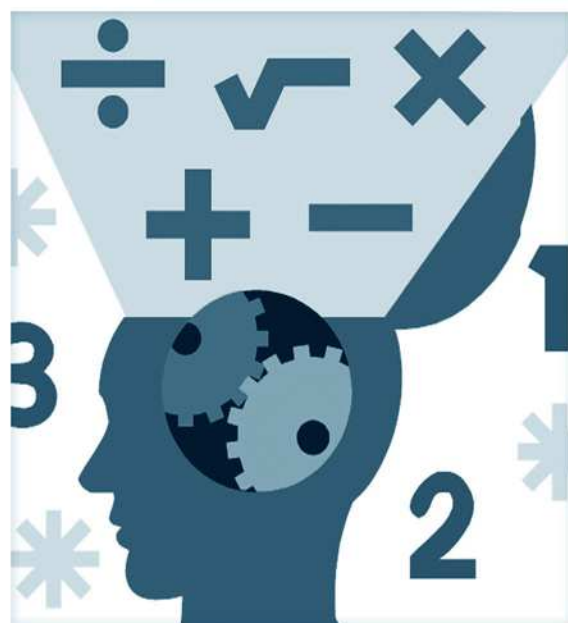
و گنج‌های دانشت را بر ما بگستران

﴿بِرَحْمَتِكَ يَا أَرْحَمَ الرَّاحِمِينَ﴾

به امید رحمت تو ای مهربان‌ترین مهربانان

۱

فصل



آشنایی با مبانی ریاضیات

قسمت اول

Mathematics

فصل

۱

آشنایی با منطق ریاضی و گزاره‌ها

۱۰

فصل اول آمار و احتمال با عنوان آشنایی با مبانی ریاضیات است. این فصل در پنج قسمت به صورت زیر تقسیم شده است:

(۱) آشنایی با منطق ریاضی و گزاره‌ها	(۲) ترکیب شرطی، ترکیب دو شرطی و سورها	(۳) مجموعه و زیرمجموعه
(۴) قوانین و اعمال بین مجموعه‌ها	(۵) ضرب دکارتی	

از فصل اول، ۱۲ نمره در نوبت اول، ۴/۵ نمره در نوبت خرداد و ۵ نمره در نوبت‌های شهریور و دی سؤال طرح می‌شود.

در این قسمت با تعریف منطق ریاضی، گزاره، گزاره‌نما، نقیض گزاره و گزاره‌های هم‌ارز آشنا می‌شویم. بر اساس تعریف گزاره، جدول ارزش گزاره‌ها معرفی می‌شود و همچنین ترکیب بین گزاره‌ها را بررسی می‌کنیم. دو ترکیب عطفی و فصلی بین چند گزاره تعریف می‌شود و هم‌ارزی‌های مهمی که بین آن‌ها وجود دارد را ارائه می‌کنیم.

منطق ریاضی

منطق ریاضی که عده‌ای به آن منطق نمادین نیز می‌گویند، دستور زبان ریاضی یا مطالعه و تحلیل ساختار جمله‌هایی است که در ریاضی به کار برده می‌شود. این شاخه از ریاضیات به بررسی دقیق استدلال‌ها می‌پردازد و اعتبار یک استدلال را مشخص می‌کند.

گزاره

تعریف به جمله‌ای خبری که در حال حاضر یا آینده، دارای ارزش درست یا نادرست (راست یا دروغ) باشد، گزاره می‌گوییم. معمولاً گزاره‌ها را با حروف p, q, r و ... نمایش می‌دهیم.

تعریف درست یا نادرست بودن یک گزاره را ارزش آن گزاره می‌گوییم. ارزش گزاره درست را با حرف «د» یا «T» و ارزش گزاره نادرست را با حرف «ن» یا «F» نمایش می‌دهیم. مثلاً «۱۷ عددی اول است»، یک گزاره با ارزش درست است و «۴۱ عددی زوج است»، یک گزاره با ارزش نادرست است و «کتاب سیر تا پیاز آمار و احتمال را مطالعه کن»، اصلاً گزاره نیست، چون جمله امری است و نه جمله خبری.

نکته ممکن است در برخی از گزاره‌ها نتوانیم ارزش آن را در حال حاضر مشخص کنیم. برای مثال «صدمین رقم بعد از ممیز عدد π ، ۴ می‌باشد». یک گزاره است که در هر صورت فقط یک ارزش دارد.

تذکر جملات امری، پرسشی و عاطفی (نشان‌دهنده احساسات) گزاره نیستند، زیرا خبری را بیان نمی‌کنند، مانند:

به به چه روز خوبی! (ابراز احساسات)

لطفاً موبایل‌های خود را خاموش کنید. (امری)

آیا امروز امتحان است؟ (پرسشی)

مثال از بین جمله‌های زیر گزاره را مشخص کنید و ارزش آن را تعیین کنید.

- ۱) در پرتاب دو سکه احتمال آن‌که هر دو بار «رو» بیاید برابر با $\frac{1}{4}$ است. (آ) آیا حافظ شاعر خوبی است؟ (ب) به به چه گل زیبایی! (ت) ۵۱ عددی اول است. (پ)

۲) عدد $۶۴ + ۷۱۲$ ، عدد مرکب است. (ث)

پاسخ: قسمت (آ) یک گزاره است و ارزش آن درست است. قسمت (ب) گزاره نیست، زیرا یک جمله پرسشی است. قسمت (پ) یک گزاره است و ارزش آن نادرست است، زیرا عدد ۵۱ مضرب ۳ و ۱۷ می‌باشد. قسمت (ت) گزاره نیست، زیرا جمله عاطفی (ابراز احساسات) است. قسمت (ث) یک جمله خبری است و در نتیجه یک گزاره است. ارزش گزاره نیز درست است. زیرا:

$$۷۱۲ + ۶۴ = ۷۱۲ + ۴^۳ = (۷^۴)^۳ + ۴^۳ = (۷^۴ + ۴)((۷^۴)^۲ - ۴ \times ۷^۴ + ۴^۲)$$

عدد $۷۱۲ + ۶۴$ بر $۷^۴ + ۴$ بخش پذیر است و در نتیجه یک عدد مرکب است.

تست: چه تعداد از جمله‌های زیر گزاره می‌باشند؟

- (آ) آیا زمستان هوا سرد است؟
 (ب) لطفاً از کلاس خارج شوید.
 (ث) چه پاییز رنگارنگی!
 (ج) $\pi\sqrt{2}$ عددی گنگ است.
 (ت) مجموع زاویه‌های داخلی پنج‌ضلعی برابر 720° درجه است.

۱) صفر
 ۲) ۱
 ۳) ۲
 ۴) ۳
پاسخ: (آ) یک جمله پرسشی است، بنابراین گزاره نیست. (ب) یک گزاره است، هر چند گنگ یا گویا بودن $\pi\sqrt{2}$ بر ما معلوم نباشد. (پ) یک جمله امری است، پس گزاره نیست. (ت) یک گزاره با ارزش نادرست است، زیرا مجموع زاویه‌های داخلی پنج‌ضلعی $540^\circ = (5-2) \times 180^\circ$ می‌باشد. (ث) یک جمله عاطفی است، بنابراین گزاره نیست، در نتیجه (ب) و (ت) گزاره هستند و گزینه (۳) صحیح می‌باشد.

در برخی از جمله‌های فبری متغیر وجود دارد که به ازای متغیرهای مختلف دارای ارزش درست یا نادرست می‌شوند. چنین جملات فبری را گزاره‌نما می‌گوییم. دامنه و مجموعه جواب گزاره‌نما را در ادامه تعریف می‌کنیم.

گزاره‌نما

تعریف هر جمله خبری که شامل یک یا چند متغیر است و با جایگذاری مقادیری به جای متغیر به یک گزاره تبدیل شود، گزاره‌نما نامیده می‌شود. گزاره‌نماها را بر حسب تعداد متغیر به کار رفته در آن‌ها، گزاره‌نماهای یک‌متغیره، دومتغیره و ... می‌نامیم. مثلاً « $2x + 3y \geq 9$ » یک گزاره‌نمای دومتغیره است.

مثال: کدام یک از جمله‌های زیر گزاره‌نما است؟ در صورتی که جمله گزاره‌نما باشد، چند متغیره بودن آن را مشخص کنید.

- (آ) x عددی زوج است.
 (ب) حاصل جمع دو برابر عددی با عدد دیگری برابر با ۷ است.
 (ت) نامعادله $x^2 \geq 1$ دارای بی‌شمار جواب طبیعی است.
پاسخ: (آ) x عددی زوج است. اگر به جای x عدد ۲ قرار بگیرد، ارزش جمله خبری درست است و اگر به جای x عدد ۳ قرار بگیرد، ارزش جمله خبری نادرست است. پس این جمله یک گزاره‌نما است که دارای یک متغیر x است، پس یک گزاره‌نمای یک‌متغیره می‌باشد.
 (ب) این جمله متغیر ندارد و گزاره‌نما نیست، بلکه گزاره‌ای با ارزش درست است.
 (پ) عدد اول را x و عدد دوم را y در نظر می‌گیریم، در این صورت «حاصل جمع دو برابر عددی با عدد دیگری برابر ۷ است.» به صورت $2x + y = 7$ می‌باشد. در این جمله مثلاً می‌توانیم x را مساوی یک قرار دهیم. حال اگر $y = 5$ ، آن‌گاه $2(1) + 5 = 7$ و ارزش جمله خبری درست است اما اگر $y = 2$ ، آن‌گاه $2(1) + 2 \neq 7$ و ارزش جمله خبری نادرست است. پس این جمله یک گزاره‌نما می‌باشد که به دلیل وجود دو متغیر x و y در جمله، یک گزاره‌نما با دو متغیر است.
 (ت) جمله خبری «نامعادله $x^2 \geq 1$ دارای بی‌شمار جواب طبیعی است» هر چند دارای متغیر است اما یک گزاره است که ارزش آن درست است. (تمام اعداد طبیعی در نامعادله $x^2 \geq 1$ صدق می‌کنند.)

توجه کنید که عبارت « $x \in \mathbb{R} : x^2 \geq 1$ » یک گزاره‌نما است. این عبارت به ازای $x = 2$ تبدیل به گزاره با ارزش درست $2^2 \geq 1$ می‌شود و به ازای $x = 0$ ، تبدیل به یک گزاره با ارزش نادرست $0^2 \geq 1$ می‌شود.

تست: کدام یک از گزاره‌نماهای زیر یک گزاره‌نمای دومتغیره است؟

- ۱) a بلندترین قله آسیا است.
 ۲) x پایتخت کشور y است.
 ۳) ۴ واسطه هندسی بین ۲ و ۸ است.
 ۴) z جذر عدد ۵ می‌باشد.
پاسخ: (۱) یک گزاره‌نمای یک‌متغیره است، زیرا فقط به جای متغیر a می‌توانیم اسم قله‌ها را بنویسیم و جواب آن می‌تواند درست یا نادرست باشد.
 (۲) یک گزاره‌نمای دومتغیره است، زیرا به جای x اسم شهر و به جای y اسم کشور قرار می‌گیرد که می‌تواند به یک گزاره، با ارزش درست یا نادرست تبدیل شود.
 (۳) یک گزاره خبری است.
 (۴) یک گزاره‌نما با متغیر (z) می‌باشد که به جای آن می‌تواند یک عدد حقیقی قرار بگیرد و ارزش گزاره آن درست یا نادرست باشد.
 پس گزینه (۲) صحیح است.

دایمانه متغیر گزاره نما و مجموعه جواب گزاره نما

تعریف در هر گزاره نما به مجموعه مقادیری که می توان آن ها را به جای متغیرهای گزاره نما قرار داد تا این که گزاره نما تبدیل به گزاره شود، دایمانه متغیر گزاره نما می گوئیم و آن را با حرف D نمایش می دهیم.

تعریف در هر گزاره نما به مجموعه عضوهایی از دایمانه متغیر که به ازای آن ها، گزاره نما تبدیل به گزاره ای با ارزش درست شود، مجموعه جواب گزاره نما می گوئیم و آن را با حرف S نمایش می دهیم و همواره داریم $S \subseteq D$

مثال: دایمانه متغیر و مجموعه جواب را در گزاره نماهای زیر مشخص کنید.

ا) عددی فرد است.

ب) $5x^2 + 7x - 12 = 0$

پ) در پرتاب یک تاس، احتمال پیشامد A برابر $\frac{1}{4}$ است.

پاسخ: ا) دایمانه متغیر گزاره نما مجموعه اعداد صحیح است ($D = \mathbb{Z}$) و مجموعه جواب آن اعداد فرد صحیح $S = \{\dots, -3, -1, 1, 3, \dots\}$ است.

ب) دایمانه متغیر گزاره نما اعداد حقیقی است ($D = \mathbb{R}$) و مجموعه جواب آن $S = \{1, -\frac{12}{5}\}$ است. (دقت کنید که دایمانه همه معادله ها مجموعه اعداد حقیقی است مگر آن که در صورت سؤال محدود شده باشد).

پ) مجموعه تمام زیرمجموعه های $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ، دایمانه متغیر است و هیچ پیشامدی مانند A وجود ندارد که $P(A)$ برابر $\frac{1}{4}$ شود. بنابراین:

$$S = \emptyset$$

تست: مجموعه جواب گزاره نما $(x, y \in \mathbb{N}, 3x + 5y = 36)$ چند عضو دارد؟

۱) ۲

۱) صفر

۲) ۳

۲) ۳

پاسخ: مجموعه جواب، تمام زوج مرتب های به صورت (a, b) است که در آن a, b دو عدد طبیعی اند و تساوی $3a + 5b = 36$ برقرار است. جواب های معادله به صورت مقابل است:

$(a, b): (7, 3), (2, 6)$

بنابراین مجموعه جواب به صورت $S = \{(7, 3), (2, 6)\}$ می باشد که دارای ۲ عضو است و در نتیجه گزینه (۳) صحیح است.

توجه کنید برای به دست آوردن جواب ها می بایست عددگذاری کنیم اما $3a$ و 36 دو عدد مضرب ۳ هستند و در نتیجه $5b$ باید مضرب ۳ باشد و از آن جا به نتیجه مضرب ۳ بودن عدد b می رسیم. پس به جای b ، اعداد ۳ و ۶ و ... قرار می دهیم و مقدار a را به دست می آوریم.

جدول ارزش گزاره ها

هر گزاره دارای ارزش درست یا نادرست است. ارزش هر گزاره مانند p را در جدولی مطابق شکل روبه رو نشان می دهیم:

p
د
ن

جدول ارزش دو گزاره p و q با هم به صورت روبه رو است که طبق جدول، دارای ۴ حالت است:

p	q
د	د
د	ن
ن	د
ن	ن

n گزاره

نکته ارزش هر گزاره دو حالت دارد. بنابراین جدول ارزش های n گزاره با توجه به اصل ضرب دارای $2^n = 2 \times 2 \times \dots \times 2$ حالت می باشد. به عنوان مثال

جدول ارزش ۴ گزاره، $2^4 = 16$ حالت دارد.

تست: تعداد سطرهای جدول ارزش گزاره‌ها مربوط به ۶ گزاره چند برابر تعداد سطرهای جدول ارزش گزاره با ۳ گزاره می‌باشد؟

۱) ۳

۲) ۴

۳) ۸

۴) ۱۶

پاسخ: تعداد سطرهای جدول ارزش گزاره‌ها مربوط به ۶ گزاره، $2^6 = 64$ و تعداد سطرهای جدول ارزش گزاره‌ها مربوط به ۳ گزاره، $2^3 = 8$ می‌باشد.

بنابراین نسبت آن‌ها برابر است با $\frac{64}{8} = \frac{2^6}{2^3} = 2^3 = 8$ و در نتیجه گزینه (۳) صحیح است.

مثال: در جدول ارزش گزاره‌ها برای ۵ گزاره، در چند سطر، دقیقاً ۴ گزاره درست وجود دارد؟

p	q	r	s	t
د	د	د	د	ن
د	د	د	ن	د
د	د	ن	د	د
د	ن	د	د	د
ن	د	د	د	د

پاسخ: در ۵ سطر به صورت روبه‌رو، ۴ گزاره از ۵ گزاره درست و یکی نادرست است:

از ترکیب نیز می‌توانیم به جواب برسیم. از ۵ گزاره، ۴ گزاره درست است، پس باید از

بین ۵ گزاره، ۴ گزاره را انتخاب کنیم و ارزش آن‌ها را درست در نظر بگیریم، این کار به

$$= 5 \quad \left(\begin{matrix} 5 \\ 4 \end{matrix} \right) \text{ طریق امکان پذیر است.}$$

نقیض یک گزاره

نقیض گزاره p را به صورت $\sim p$ می‌نویسیم و آن را «چنین نیست که p » می‌خوانیم. به علامت « $\sim$ » ناقض گفته می‌شود و «چنین نیست که» خوانده می‌شود. مثلاً: «مجموع زاویه‌های داخلی هر متوازی‌الاضلاع 360° است.» یک گزاره است که نقیض آن برابر است با «چنین نیست که مجموع زاویه‌های داخلی هر متوازی‌الاضلاع 360° باشد.» که معادل است با «مجموع زاویه‌های داخلی هر متوازی‌الاضلاع 360° نیست.»

مثال: گزاره « $2 < 5$ » را دو بار نقیض کنید.

$$p: (2 < 5) \Rightarrow \sim p: (2 \not< 5) \Rightarrow \sim p: (2 \geq 5) \Rightarrow \sim(\sim p): (2 \not\geq 5) \Rightarrow \sim(\sim p): (2 < 5)$$

پاسخ:

تست: نقیض گزاره « $2 = 3$ » معادل کدام عبارت نیست؟

۱) چنین نیست که ۲ مساوی ۳ است.

۲) ۲ مساوی ۳ نیست.

۳) چنین نیست که ۲ مساوی ۳ نیست.

۴) $\sim(2 = 3) \equiv (2 \neq 3)$

پاسخ: گزینه‌های (۱)، (۲) و (۳) نقیض گزاره « $2 = 3$ » است و تنها گزینه (۴) است که نقیض این گزاره نمی‌باشد. بنابراین گزینه (۴) صحیح است.

ارزش نقیض یک گزاره

p	$\sim p$	$\sim(\sim p)$
د	ن	د
ن	د	ن

ارزش دو گزاره یکسان است.

اگر ارزش گزاره p درست باشد، در این صورت ارزش گزاره $\sim p$ نادرست است و وقتی که

ارزش گزاره p نادرست باشد، ارزش نقیض آن درست است. جدول ارزش گزاره‌های P ،

$\sim P$ و $\sim(\sim P)$ به صورت مقابل است:

گزاره‌های هم‌ارز منطقی

اگر دو گزاره p و q همواره ارزش یکسان داشته باشند (هر دو درست یا هر دو نادرست)، در این صورت می‌گوییم دو گزاره p و q هم‌ارز منطقی هستند و می‌نویسیم $P \equiv q$ و می‌خوانیم « p هم‌ارز است با q ».

نکته: دو گزاره p و $\sim(\sim p)$ دارای ارزش یکسان هستند و در نتیجه هم‌ارز منطقی هستند، پس:

$$p \equiv \sim(\sim p)$$

از ترکیب دو یا چند گزاره به وسیلهٔ رابط‌های گزاره‌ای، گزاره‌های مرکب به وجود می‌آیند. چهار ترکیب عطفی، فصلی، شرطی و دو شرطی تعریف می‌کنیم و برای آن‌ها ارزش درست و نادرست تعیین می‌کنیم.

رابطه‌های گزاره‌ای

رابطه‌های گزاره‌ای عبارتند از «و»، «یا»، «اگر - آنگاه» و «اگر و فقط اگر» که گزاره‌های ساده را به هم مربوط می‌کنند.

ترکیب گزاره‌ها

عبارت «عدد ۳ فرد است و عدد ۴ زوج است» یک گزاره مرکب با رابط گزاره‌ای «و» است و عبارت «عدد ۳ فرد است و عدد ۵ فرد است و عدد ۷ فرد است و ...» گزاره مرکب نیست، زیرا تعداد گزاره‌ها محدود نیست.

تست: چه تعداد از گزاره‌های زیر مرکب است؟

«اگر $5 \leq 7$ آنگاه ۲ عدد زوج است.»

«اعداد 2^{100} و $1 + 2^{100}$ اعدادی فرد هستند.»

«تهران پایتخت ایران است یا تعداد ماشین‌ها در تهران از تعداد ماشین‌ها در اصفهان بیش‌تر است.»

« a عدد صحیح است یا ۳ عدد فرد است.»

۱

۲

۳

۴

پاسخ: گزاره‌های «اگر $5 \leq 7$ آنگاه ۲ عدد زوج است.» و «تهران پایتخت ایران است یا تعداد ماشین‌ها در تهران از تعداد ماشین‌ها در اصفهان بیش‌تر است.» گزاره مرکب هستند، زیرا از دو گزاره تشکیل شده‌اند که در آن‌ها از رابطه‌های گزاره‌ای استفاده شده است. هم‌چنین گزاره « 2^{100} و $1 + 2^{100}$ اعدادی فرد هستند.» یک گزاره مرکب است که از حرف ربط «و» استفاده شده است. a عددی صحیح است، یک گزاره‌نما است و نه گزاره، در نتیجه « a عددی صحیح است یا ۳ عدد فرد است.» نمی‌تواند یک گزاره مرکب باشد. پس گزینه (۳) صحیح است.

ترکیب عطفی دو گزاره

«محمد دانشگاه قبول شد و سعید عضو تیم والیبال مدرسه است.» یک گزاره مرکب است که از ترکیب دو گزاره ساده «محمد دانشگاه قبول شد.» و «سعید عضو تیم والیبال مدرسه است.» با حرف ربط «و» تشکیل شده است. چنین گزاره‌های مرکبی را ترکیب عطفی می‌گوییم.

تعریف هرگاه p و q دو گزاره باشند، گزاره مرکب « $p \wedge q$ » را که خوانده می‌شود « p و q »، ترکیب عطفی دو گزاره می‌گوییم. در این‌جا به رابط منطقی «و» که با « $\wedge$ » نشان می‌دهیم، عاطف گفته می‌شود.

ارزش ترکیب عطفی دو گزاره

نکته ارزش ترکیب عطفی دو گزاره را وقتی درست در نظر می‌گیریم که ارزش هر دو گزاره p و q درست باشد و در بقیه حالات ارزش $p \wedge q$ را نادرست در نظر می‌گیریم. به عبارتی دیگر در گزاره عطفی اگر حداقل ارزش یک گزاره نادرست باشد، ارزش گزاره عطفی نیز نادرست است.

p	q	$p \wedge q$
د	د	د
د	ن	ن
ن	د	ن
ن	ن	ن

جدول ارزش گزاره $p \wedge q$ به صورت روبه‌رو است:

نکته اگر p یک گزاره باشد، آنگاه یکی از دو گزاره p و $\sim p$ درست و دیگری نادرست است

و در نتیجه ترکیب عطفی $p \wedge \sim p$ همواره نادرست است، بنابراین:

$$p \wedge \sim p \equiv F$$

هم‌چنین داریم:

نکته ترکیب عطفی n گزاره $p_1, \dots, p_n$ را به صورت $p_1 \wedge p_2 \wedge \dots \wedge p_n$ نمایش می‌دهیم

و این گزاره مرکب وقتی درست است که ارزش همه گزاره‌های به کار رفته در آن درست باشند.

(مشابه تمرین کتاب درسی)

مثال: ارزش گزاره‌های مرکب زیر را مشخص کنید.

$$b) \left(\frac{4}{16} = \frac{1}{4}\right) \wedge \left(\frac{5}{3} < \frac{7}{4}\right)$$

a) $\sqrt{2}$ عددی گویا و $\sqrt{7}$ عددی گنگ است.

پاسخ: آ) ارزش گزاره « $\sqrt{2}$ عددی گویا است.» نادرست است و ارزش گزاره « $\sqrt{7}$ عددی گنگ است.» درست است، پس ارزش گزاره ترکیب عطفی

آن‌ها نادرست است.

ب) ارزش گزاره « $\frac{5}{3} < \frac{7}{4}$ » درست است و ارزش گزاره « $\frac{4}{16} = \frac{1}{4}$ » درست است، پس ارزش گزاره ترکیب عطفی آن‌ها نیز درست است.

$$|x-1|+(x+2y)^2=0$$

مثال: مقادیر x و y را چنان بیابید که داشته باشیم:

پاسخ: چون $(x+2y)^2 \geq 0$ و $|x-1| \geq 0$ ، بنابراین تساوی بالا وقتی برقرار است که:

$$((x+2y)^2=0) \wedge (|x-1|=0) \Rightarrow \begin{cases} x-1=0 \Rightarrow x=1 \\ x+2y=0 \Rightarrow 1+2y=0 \Rightarrow 2y=-1 \Rightarrow y=-\frac{1}{2} \end{cases}$$

در نتیجه رابطه بالا وقتی درست است که $y = -\frac{1}{2}$ و $x = 1$ باشد.

ترکیب فصلی دو گزاره

« $\sqrt{5}$ عددی اول است یا $\sqrt{5}$ عددی حقیقی است.» یک گزاره مرکب است که از ترکیب دو گزاره ساده « 2 عددی اول است.» و « $\sqrt{5}$ عددی حقیقی است.» با حرف ربط «یا» تشکیل شده است. چنین گزاره‌های مرکبی را ترکیب فصلی می‌گوییم.

تعریف هرگاه p و q دو گزاره باشند، گزاره مرکب « p یا q » را به صورت « $p \vee q$ » می‌نویسیم و به آن ترکیب فصلی دو گزاره می‌گوییم. در این جا به رابط منطقی «یا» که به صورت « $\vee$ » نوشته می‌شود، فاصل گفته می‌شود.

نکته ارزش گزاره مرکب « $p \vee q$ » وقتی نادرست است که ارزش هر دوی p و q نادرست باشد و در بقیه حالات، ارزش « $p \vee q$ » درست است. به عبارت دیگر، در ترکیب فصلی اگر حداقل ارزش یک گزاره درست باشد، ارزش ترکیب فصلی درست است و در حالت کلی، ترکیب فصلی n گزاره $p_1, \dots, p_n$ که به صورت $p_1 \vee p_2 \vee \dots \vee p_n$ می‌باشد، وقتی نادرست است که ارزش تمام n گزاره $p_1, \dots, p_n$ نادرست باشند.

p	q	$p \vee q$
د	د	د
د	ن	د
ن	د	د
ن	ن	ن

جدول ارزش گزاره « $p \vee q$ » به صورت روبه‌رو است:

نکته هرگاه ارزش یک گزاره مرکب همواره درست باشد، ارزش منطقی آن « T » و اگر همواره نادرست

باشد، ارزش منطقی آن « F » است.

نکته اگر p یک گزاره دلخواه باشد، آن‌گاه: $p \vee p \equiv T$ ، $p \vee T \equiv T$ ، $p \vee F \equiv p$

مثال: ارزش گزاره‌های زیر را مشخص کنید.

$$\left(\frac{1}{3} \neq \frac{2}{6}\right) \vee \left(\frac{36}{18} = 2\right)$$

$$(-3 \in \mathbb{Z}) \vee (2 \in \mathbb{Q})$$

$$(A \not\subseteq A \vee \emptyset \not\subseteq A)$$

« 4 یک عدد اول یا 4 عدد مرکب است.»

پاسخ: (آ) ارزش گزاره « $(2 \in \mathbb{Q})$ » درست و ارزش گزاره « $(-3 \in \mathbb{Z})$ » نیز درست است، پس ارزش گزاره ترکیب فصلی آن‌ها نیز درست است.

(ب) ارزش گزاره « $(\frac{36}{18} = 2)$ » درست و ارزش گزاره « $(\frac{1}{3} \neq \frac{2}{6})$ » نادرست است، پس ارزش گزاره ترکیب فصلی آن‌ها درست است.

(پ) ارزش گزاره « 4 یک عدد اول است.» نادرست است و ارزش گزاره « 4 یک عدد مرکب است.» درست است، پس ارزش گزاره ترکیب فصلی آن‌ها درست است.

(ت) ارزش گزاره « $\emptyset \not\subseteq A$ » نادرست است و ارزش گزاره « $A \not\subseteq A$ » نادرست است، پس ارزش گزاره ترکیب فصلی آن‌ها نادرست است.

نکته هرگاه a و b دو عدد حقیقی باشند به طوری که $a \times b = 0$ ، در این صورت $a = 0$ یا $b = 0$ ، یعنی:

$$a, b \in \mathbb{R}, a \times b = 0 \Rightarrow (a = 0) \vee (b = 0)$$

در بیان نکته قبل از ترکیب فصلی دو گزاره استفاده کرده‌ایم که برای حل معادلات به کار می‌رود.

به عنوان مثال برای حل معادله درجه دوم $x^2 - 4x = 0$ داریم:

$$x^2 - 4x = 0 \Rightarrow x(x - 4) = 0 \Rightarrow x = 0 \vee x - 4 = 0 \Rightarrow x = 0 \vee x = 4$$

مثال: اگر ارزش گزاره‌های p و q درست و گزاره‌ای با ارزش نادرست باشد، ارزش گزاره مرکب « $(\sim p \vee q) \wedge (\sim r \wedge q)$ » را مشخص کنید.

پاسخ: $\sim p$ گزاره‌ای با ارزش نادرست و q گزاره‌ای با ارزش درست است، بنابراین ارزش ترکیب فصلی آن‌ها درست است. $\sim r$ و q گزاره‌هایی با ارزش درست هستند و در نتیجه ارزش ترکیب عطفی آن‌ها درست است.

$$\sim p \vee q \equiv F \vee T \equiv T, \sim r \wedge q \equiv T \wedge T \equiv T \Rightarrow (\sim p \vee q) \wedge (\sim r \wedge q) \equiv T \wedge T \equiv T$$

تست: اگر ارزش گزاره مرکب $(\sim p \wedge q) \wedge r$ درست باشد، ارزش کدام گزاره مرکب زیر درست است؟

- ۱) $(p \wedge q) \wedge (\sim r)$ ۲) $\sim (p \vee q) \vee r$
۳) $(p \vee r) \wedge (\sim r \vee q)$ ۴) $(\sim p \wedge p) \wedge (r \wedge q)$

پاسخ: وقتی که ارزش گزاره مرکب عطفی درست است، آن گاه ارزش هر دو گزاره درست می‌باشند، بنابراین ارزش گزاره‌های $\sim p \wedge q$ و r درست هستند. همچنین با توجه به درست بودن گزاره مرکب عطفی $\sim p \wedge q$ ، ارزش گزاره‌های $\sim p$ و q درست می‌باشد و در نتیجه ارزش گزاره‌های p و r به صورت زیر می‌باشد:

$$p \equiv F, q \equiv T, r \equiv T$$

ارزش هر یک از گزاره‌ها را مشخص می‌کنیم:

$$\begin{aligned} ۱) (p \wedge q) \wedge (\sim r) &\equiv \overbrace{(F \wedge T)}^F \wedge F \equiv F \\ ۲) \sim (p \vee q) \vee r &\equiv \sim \overbrace{(F \vee T)}^T \vee F \equiv F \vee F \equiv F \\ ۳) (p \vee q) \wedge (\sim r \vee q) &\equiv \overbrace{(F \vee T)}^T \wedge \overbrace{(F \vee T)}^T \equiv T \wedge T \equiv T \\ ۴) \underbrace{(\sim p \wedge p)}_F \wedge (r \wedge q) &\equiv F \end{aligned}$$

بنابراین گزینه (۳) صحیح است.

نکته: به دو هم‌ارزی مقابل، قوانین دموگران در منطق ریاضی می‌گوییم. از این دو قانون برای نقیض کردن گزاره‌های مرکب عطفی و فصلی استفاده می‌کنیم.

$$\begin{cases} \sim (p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q \\ \sim (p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q \end{cases}$$

(اثبات این قوانین در تمرین‌ها آمده است.)

مثلاً نقیض گزاره $(2 < 7) \vee (2 = 7)$ برابر است با $(2 < 7) \wedge (2 \neq 7)$.

$$\sim (2 \leq 7) \equiv (2 \neq 7) \wedge (2 < 7) \equiv (2 \neq 7) \wedge (2 \geq 7) \equiv 2 > 7$$

هم‌ارزی‌های منطقی بین گزاره‌های مرکب

در ادامه برخی از هم‌ارزی‌های منطقی به صورت قوانین آورده شده است. این قوانین به کمک جدول ارزش گزاره‌ها اثبات می‌شوند اما با حفظ کردن و استفاده از آن‌ها در حل تست‌ها، گزاره‌های هم‌ارز را به دست می‌آوریم.

$$\begin{cases} p \vee q \equiv q \vee p \\ p \wedge q \equiv q \wedge p \end{cases}$$

۱ قوانین جابه‌جایی

$$\begin{cases} (p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r) \\ (p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r) \end{cases}$$

۲ قوانین شرکت‌پذیری (جابه‌جایی پرانتزها)

$$\begin{cases} p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r) \\ p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r) \end{cases}$$

۳ قوانین توزیع‌پذیری (پخش‌ی)

$$\begin{cases} p \wedge (p \vee q) \equiv p \\ p \vee (p \wedge q) \equiv p \end{cases}$$

۴ قوانین جذب

درستی قوانین جذب را می‌توان به کمک جدول ارزش گزاره‌ها انجام داد. اما به کمک قوانین قبلی نیز می‌توان آن‌ها را ایجاد کرد.

$$p \wedge (p \vee q) \equiv p$$

$$p \wedge (p \vee q) \equiv (p \vee F) \wedge (p \vee q) \xrightarrow{\text{فاکتورگیری}} p \vee \underbrace{(F \wedge q)}_F \equiv p \vee F \equiv p$$

می‌دانیم $p \vee F \equiv p$ است، بنابراین:

$$\begin{cases} p \wedge (\sim p \vee q) \equiv p \wedge q \\ p \vee (\sim p \wedge q) \equiv p \vee q \end{cases}$$

۵ قوانین شبه‌جذب

درستی قوانین شبه جذب به کمک توزیع‌پذیری امکان‌پذیر است:

$$p \wedge (\sim p \vee q) \equiv \underbrace{(p \wedge \sim p)}_F \vee (p \wedge q) \equiv F \vee (p \wedge q) \equiv p \wedge q$$

مثال: با استفاده از جدول ارزش گزاره‌ها، نشان دهید هم‌ارزی‌های منطقی زیر برقرار هستند.

$$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$$

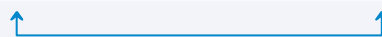
۱ قانون توزیع‌پذیری

$$p \wedge (\sim p \vee q) \equiv p \wedge q$$

۲ قانون شبه‌جذب

پاسخ: (آ) برای اثبات هم‌ارزی دو گزاره $p \vee (q \wedge r)$ و $(p \vee q) \wedge (p \vee r)$ ، باید نشان دهیم که این دو گزاره مرکب در همه حالت‌ها دارای ارزش یکسان هستند.

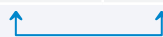
p	q	r	$q \wedge r$	$p \vee (q \wedge r)$	$p \vee q$	$p \vee r$	$(p \vee q) \wedge (p \vee r)$
د	د	د	د	د	د	د	د
د	د	ن	ن	د	د	د	د
د	ن	د	ن	د	د	د	د
د	ن	ن	ن	د	د	د	د
ن	د	د	د	د	د	د	د
ن	د	ن	ن	ن	د	ن	ن
ن	ن	د	ن	ن	ن	د	ن
ن	ن	ن	ن	ن	ن	ن	ن



در نتیجه $p \vee (q \wedge r)$ هم‌ارز منطقی $(p \vee q) \wedge (p \vee r)$ می‌باشد.

(ب)

p	q	$\sim p$	$\sim p \vee q$	$p \wedge (\sim p \vee q)$	$p \wedge q$
د	د	ن	د	د	د
د	ن	ن	ن	ن	ن
ن	د	د	د	ن	ن
ن	ن	د	د	ن	ن



در نتیجه $p \wedge (\sim p \vee q)$ هم‌ارز منطقی $p \wedge q$ می‌باشد.

از تست‌های پرکار سال‌های اخیر، هم‌ارز بودن دو گزاره است.

تست: گزاره مرکب $\sim(\sim p \wedge \sim p) \vee (r \wedge \sim p)$ با کدام گزاره زیر هم‌ارز منطقی است؟

۲ F

۱ T

۴ $p \vee r$

۳ $\sim p \vee r$

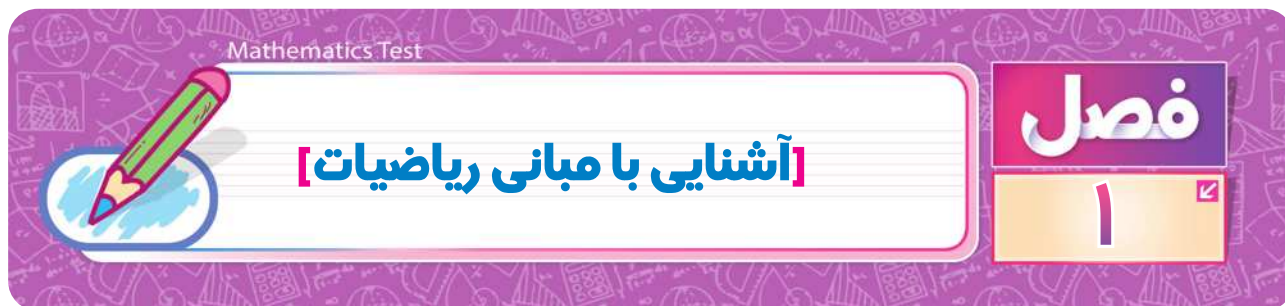
پاسخ: چون گزاره مرکب $p \wedge p$ با گزاره p هم‌ارز منطقی‌اند، داریم:

$$\sim p \wedge \sim p \equiv \sim p$$

شبه جذب

$$\sim(\sim p \wedge \sim p) \vee (r \wedge \sim p) \equiv \sim(\sim p) \vee (r \wedge \sim p) \equiv p \vee (r \wedge \sim p) \equiv p \vee r$$

بنابراین گزینه (۴) درست است.



قسمت اول: آشنایی با منطق ریاضی و گزاره‌ها

گزاره و گزاره‌نما

۱. کدام یک از گزینه‌های زیر یک گزاره است؟
- ۱ به امید موفقیت در کنکور سراسری.
 - ۲ آیا تیم ملی فوتبال ایران همیشه قهرمان آسیا است؟
 - ۳ عدد $1 + 2^{1396}$ یک عدد مرکب است.
 - ۴ عدد ۱۰۰۰ عدد بزرگی است.
۲. کدام یک از عبارتهای زیر یک گزاره نیست؟
- ۱ صدمین رقم بعد از ممیز عدد $\sqrt{2}$ برابر با ۵ است.
 - ۲ پیشامد زیرمجموعه‌ای از فضای نمونه‌ای است.
 - ۳ هر معادله درجه دوم دو ریشه حقیقی متمایز دارد.
 - ۴ ای کاش می‌توانستیم هوای سالمی داشته باشیم.
۳. کدام گزاره زیر دارای ارزش نادرست است؟
- ۱ آمار، مجموعه‌ای از اعداد، ارقام و اطلاعات است.
 - ۲ در پرتاب یک تاس، احتمال آن‌که تاس مضرب ۳ بیاید، برابر با $\frac{1}{3}$ است.
 - ۳ عدد $5^{18} + 8$ ، عددی اول است.
 - ۴ عدد ۱۲۳۴۵۳، عددی مرکب است.
۴. کدام یک از گزینه‌های زیر نادرست است؟
- ۱ گزاره یک جمله خبری با ارزش درست است.
 - ۲ جملات امری، پرسشی و عاطفی گزاره نیستند.
 - ۳ گزاره‌نما، هر جمله خبری است که شامل یک یا چند متغیر باشد.
 - ۴ منطق ریاضی، دستور زبان ریاضی یا مطالعه و تحلیل ساختار جمله‌هایی است که در ریاضی به کار برده می‌شود.
۵. کدام یک از جملات زیر گزاره‌نما نیست؟
- ۱ حاصل جمع ۳ برابر عددی با ۲ برابر عدد دیگر برابر ۱۰ است.
 - ۲ 12 عددی مرکب است.
 - ۳ a مضرب ۵ است.
 - ۴ $\frac{3x+1}{4} \leq 2$
۶. مجموعه جواب کدام گزاره‌نما با دامنه متغیر داده شده آن برابر است؟
- ۱ $D = \{1, 2\}$, $3x^2 - 5x + 2 = 0$
 - ۲ $D = \mathbb{N}$, x عددی اول است.
 - ۳ $D = (-\infty, 1]$, $\frac{2x+1}{3} \leq 1$
 - ۴ $D = \mathbb{N}$, $\sqrt{x} \in \mathbb{N}$
۷. در گزاره‌نمای «عدد پنج رقمی $2341x$ مضرب ۹ است». دامنه و مجموعه جواب به ترتیب از راست به چپ چند عضو دارند؟
- ۱ ۱۰ - ۱
 - ۲ ۱۰ - ۲
 - ۳ ۹ - ۱
 - ۴ ۹ - ۲
۸. مجموعه جواب گزاره‌نمای « $3x + 5y \leq 14$; $x, y \in \mathbb{N}$ » چند عضو دارد؟
- ۱ ۳
 - ۲ ۴
 - ۳ ۵
 - ۴ ۲

جدول ارزش گزاره‌ها

۹. جدول ارزش n گزاره دارای ۶۴ حالت است. مقدار n کدام است؟
- ۱ ۴
 - ۲ ۷
 - ۳ ۵
 - ۴ ۶
۱۰. جدول ارزش ۵ گزاره، در چند سطر دقیقاً دو گزاره درست وجود دارد؟
- ۱ ۱۰
 - ۲ ۱۵
 - ۳ ۲۱
 - ۴ ۶

۱۱. در جدول ارزش گزاره‌های p, q, r, s, t ، در چند سطر ارزش گزاره‌های p, q یکسان است؟

۲۰ [۴]

۱۶ [۳]

۱۲ [۲]

۱۰ [۱]

ترکیب عطفی و ترکیب فصلی

۱۲ ☆ ارزش کدام گزاره مرکب زیر نادرست است؟

[۱] تهران پایتخت ایران است یا $2^{10} + 1$ عددی اول است.

[۲] $2\sqrt{3} - 1$ عددی حقیقی است و جمع هر دو عدد اول دو رقمی زوج است.

[۳] هر جمله خبری که از یک یا چند متغیر باشد، گزاره‌نماست و نقیض گزاره نادرست، گزاره‌ای درست است.

[۴] $2^9 + 2^7$ عددی اول است یا برای هر $n \in \mathbb{N}$ ، $(\frac{1}{3})^n \leq (\frac{1}{4})^n$

۱۳ ارزش کدام گزاره زیر درست است؟

[۱] $(2^2 + 1 > 4) \vee (\frac{1}{4} < \frac{1}{5})$

[۲] $\sim (3^2 > 2^2) \wedge (3 + 1 > 2 + 1)$

[۳] $a \notin \{a, b, c\} \wedge \emptyset \subseteq A$

[۴] $(n \in \mathbb{N}, 2^n > n) \wedge (\frac{3 \times 2}{-4} \in \mathbb{N})$

۱۴ ☆ اگر p, q, r سه گزاره باشند به طوری که p و r درست و q نادرست باشد، ارزش گزاره‌های مرکب $(p \vee r) \vee q$ و $(\sim p \vee q) \wedge r$ به ترتیب و است.

[۱] درست - درست

[۲] درست - نادرست

[۳] نادرست - درست

[۴] نادرست - نادرست

۱۵ اگر p, q, r سه گزاره باشند به طوری که ارزش گزاره p درست و ارزش گزاره‌های r و q نادرست باشند، آنگاه ارزش کدام یک از گزاره‌های مرکب زیر درست است؟

[۱] $(\sim p \vee \sim q) \wedge r$

[۲] $(p \wedge \sim q) \vee (\sim r)$

[۳] $(\sim p \wedge \sim r) \vee q$

[۴] $(q \wedge \sim r) \wedge (\sim p)$

۱۶ ☆ گزاره مرکب $(p \vee q) \wedge r$ در کدام حالت زیر درست است؟

[۱] p درست، q نادرست، r درست

[۲] p درست، q درست، r نادرست

[۳] p نادرست، q درست، r نادرست

[۴] p نادرست، q نادرست، r درست

۱۷ ☆ گزاره‌های p, q, r به صورت زیر تعریف شده‌اند:

p : هر عدد اول دو رقمی، عددی فرد است.

q : هر لوزی یک مربع است.

r : در پرتاب یک تاس، احتمال ظاهر شدن عدد زوج برابر $\frac{1}{4}$ است.

ارزش کدام یک از گزاره‌های مرکب زیر، درست است؟

[۱] $\sim p \vee q$

[۲] $(\sim p \vee \sim q) \wedge \sim r$

[۳] $(\sim p \wedge \sim q) \wedge r$

[۴] $\sim (\sim r \vee q) \vee \sim p$

۱۸ اگر $\sim r$ گزاره‌ای درست باشد، ارزش گزاره $\sim p \wedge (p \vee r)$ کدام است؟

[۱] همیشه درست

[۲] همیشه نادرست

[۳] هم‌ارز منطقی با p

[۴] هم‌ارز منطقی با $\sim p$

۱۹ ☆ اگر p, q, r سه گزاره باشند به طوری که گزاره $\sim p \vee q$ نادرست و گزاره $p \wedge \sim r$ درست باشد، آنگاه کدام حالت درست است؟

[۱] p و q درست و r نادرست

[۲] p درست، q و r نادرست

[۳] p و q نادرست و r درست

[۴] p نادرست، q و r درست

۲۰ اگر گزاره $(\sim p \vee q) \wedge p$ درست باشد، آنگاه کدام گزاره همواره درست است؟

[۱] $\sim p \wedge \sim q$

[۲] $\sim p \wedge q$

[۳] $p \wedge \sim q$

[۴] $p \wedge q$

۲۱ ☆ اگر ارزش گزاره $\sim q \wedge (\sim p \vee q)$ درست باشد، آنگاه ارزش کدام گزاره همواره درست است؟

[۱] p

[۲] q

[۳] $\sim p \wedge p$

[۴] $\sim p \wedge \sim q$

۲۲ ☆ اگر ارزش گزاره $(\sim p \vee r) \wedge p$ درست باشد، ارزش گزاره r چیست؟

[۱] همواره درست است.

[۲] همواره نادرست است.

[۳] r نادرست است در صورتی که p درست باشد.

[۴] r نادرست است در صورتی که p نادرست باشد.

(آزمون نوبت اول - ۱۴۰۲)

۲۳ ☆ کدام گزاره زیر، هم‌ارز منطقی گزاره $(p \wedge r) \vee (q \wedge r) \vee [p \wedge (\sim q \wedge r)]$ است؟

- ۱ q ۲ r ۳ $r \vee p$ ۴ $p \vee q$

۲۴ ☆ هم‌ارز منطقی گزاره $q \vee (q \vee r)$ کدام است؟

- ۱ $\sim q \wedge \sim r$ ۲ $\sim q \vee \sim r$ ۳ $\sim q \vee q \vee \sim r$ ۴ $\sim q$

۲۵ کدام یک از گزاره‌های زیر، هم‌ارز منطقی گزاره $(p \vee \sim q) \wedge [(r \wedge s) \vee (p \vee (\sim q \wedge \sim p))]$ است؟

- ۱ $\sim q \vee (r \wedge s)$ ۲ $p \vee (r \wedge s)$ ۳ $p \vee \sim q$ ۴ p

۲۶ کدام هم‌ارزی زیر نادرست است؟

- ۱ $p \wedge \sim p \equiv F$ ۲ $p \vee F \equiv p$ ۳ $\sim(\sim p \vee q) \equiv p \vee \sim q$ ۴ $p \wedge (p \vee q) \equiv p$

۲۷ ☆ نقیض گزاره مرکب « $\sqrt{2}$ عددی گویا است یا معادله $x^2 - 3x + 2 = 0$ دو ریشه حقیقی ندارد.» کدام است؟

- ۱ $\sqrt{2}$ عددی گنگ است و معادله $x^2 - 3x + 2 = 0$ دو ریشه حقیقی دارد.
۲ $\sqrt{2}$ عددی گنگ است یا معادله $x^2 - 3x + 2 = 0$ دو ریشه حقیقی دارد.
۳ $\sqrt{2}$ عددی گویا است و معادله $x^2 - 3x + 2 = 0$ دو ریشه حقیقی دارد.
۴ $\sqrt{2}$ عددی گویاست یا معادله $x^2 - 3x + 2 = 0$ دو ریشه حقیقی دارد.

۲۸ نقیض گزاره مرکب «ایران در قاره آسیا قرار دارد و عدد ۱۴۷ بر ۷ بخش پذیر است» به کدام صورت زیر است؟

- ۱ ایران در قاره آسیا قرار ندارد یا عدد ۱۴۷ بر ۷ بخش پذیر است.
۲ ایران در قاره آسیا قرار دارد و عدد ۱۴۷ بر ۷ بخش پذیر است.
۳ ایران در قاره آسیا قرار ندارد و عدد ۱۴۷ بر ۷ بخش پذیر نیست.
۴ ایران در قاره آسیا قرار ندارد یا عدد ۱۴۷ بر ۷ بخش پذیر نیست.

قسمت دوم: ترکیب شرطی، ترکیب دوشروطی و سورها

ترکیب شرطی

(برگرفته از کتاب درسی)

۲۹ ☆ ارزش کدام ترکیب شرطی زیر نادرست است؟

- ۱ اگر ۴ عدد فرد باشد، آن‌گاه ۴ مربع کامل نیست.
۲ اگر $\{1\} \in \{1, \{1\}\}$ ، آن‌گاه عدد ۱۹۱۷ عددی اول است.
۳ اگر افلاطون فیلسوف یونانی باشد، آن‌گاه خیام شاعر ایرانی است.
۴ اگر قد یک متغیر کمی گسسته باشد، آن‌گاه ۱۰۰۱ مضرب ۱۱ نیست.

۳۰ ☆ ارزش کدام گزاره مرکب زیر، به انتفای مقدم درست است؟

- ۱ $\sqrt{2}$ عددی گویا است یا ۵ عددی فرد است.
۲ اگر فروردین، ۳۱ روز داشته باشد، آن‌گاه مادرید پایتخت اسپانیا است.
۳ «خورشید به دور زمین می‌چرخد» شرط کافی برای «حدس ریاضی یک گزاره است» می‌باشد.
۴ « $1 + 2^5$ یک عدد زوج است» شرط لازم برای «ابوعلی سینا یک پزشک است» می‌باشد.

۳۱ ☆ p یک گزاره درست و q یک گزاره نادرست است، کدام یک از گزاره‌های زیر درست است؟

- ۱ $p \wedge \sim q$ ۲ $p \wedge q$ ۳ $p \Rightarrow q$ ۴ $\sim q \Rightarrow \sim p$

۳۲ ☆ اگر p نادرست باشد، ارزش گزاره $(p \wedge q) \Rightarrow r$ کدام است؟

- ۱ همواره نادرست ۲ همواره درست
۳ درستی آن بستگی به q دارد. ۴ درستی آن بستگی به r دارد.

۳۳ اگر p درست باشد، ارزش گزاره $(p \vee q) \Rightarrow s$ کدام است؟

- ۱ ارزش آن بستگی به s دارد. ۲ همواره درست ۳ ارزش آن بستگی به q دارد. ۴ همواره نادرست

۳۴ اگر p یک گزاره درست و q گزاره دلخواه باشد، کدام یک از گزاره‌های زیر همواره درست است؟

- ۱ $\sim p \Rightarrow q$ ۲ $p \Rightarrow q$ ۳ $p \Rightarrow \sim p$ ۴ $p \Rightarrow \sim q$

نکته گزاره جمله‌ای است خبری که ارزش آن درست یا نادرست است. جملات امری، عاطفی و پرسشی گزاره نیستند.

گزینه (۱) جمله عاطفی است. گزینه (۲) جمله پرسشی است. گزینه (۳) گزاره است، زیرا عدد $1 + 2^{1396}$ یا یک عدد مرکب است یا یک عدد اول، بنابراین اگر درست یا نادرست بودن آن هم مشخص نباشد، همواره یک گزاره است. گزینه (۴) بزرگ بودن برای اعداد تعریف نشده است پس گزاره نیست.

گزینه (۱) جمله خبری است و در نتیجه یک گزاره می باشد، هر چند ارزش درست یا نادرستی آن برای ما معلوم نباشد. گزینه (۲)، یک گزاره با ارزش درست است. گزینه (۳)، یک گزاره با ارزش نادرست است، زیرا معادله درجه دوم می تواند فاقد ریشه و یا یک ریشه مضاعف باشد.

گزینه (۱)، تعریف آمار است و در نتیجه ارزش آن درست است. گزینه (۲)، ارزش درست دارد، زیرا:

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, A = \{3, 6\} \Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

گزینه (۳)، نادرست است، زیرا عدد $8 + 5^{18}$ یک عدد مرکب است و آن را می توان به کمک اتحاد چاق و لاغر تجزیه کرد:

$$5^{18} + 8 = (5^6)^3 + 2^3 = (5^6 + 2)(5^{12} - 2 \times 5^6 + 2^2)$$

گزینه (۴) درست است، زیرا عدد 123453 بر ۳ بخش پذیر می باشد. (مجموع ارقام عدد 123453 بر ۳ بخش پذیر است.)

نکته گزاره نما، هر جمله خبری شامل یک یا چند متغیر است و با جایگذاری مقادیری به جای متغیر به یک گزاره تبدیل می شود.

گزاره یک جمله خبری است که در حال حاضر یا آینده، دارای ارزش درست یا نادرست باشد. بنابراین جمله خبری فقط با ارزش درست، یک گزاره نیست، بلکه می تواند با ارزش نادرست باشد.

گزینه (۲) یک گزاره با ارزش درست است (جمله خبری فاقد متغیر می باشد) عبارت گزینه (۱) به صورت $3x + 2y = 10$ می باشد که یک گزاره نما با دو متغیر x و y است.

نکته در هر گزاره نما به مجموعه عضوهایی از دامنه متغیر که به ازای آن ها، گزاره نما تبدیل به گزاره ای با ارزش درست شود، مجموعه جواب گزاره نما می گوئیم و آن را با S نمایش می دهیم.

در گزینه (۱)، فقط به ازای $x = 1$ از دامنه، یک گزاره درست به دست می آید: $3(1)^2 - 5(1) + 2 = 3 - 5 + 2 = 0$

بنابراین مجموعه جواب، $S = \{1\}$ است و در نتیجه: $D \neq S$
در گزینه (۲)، به ازای x های عضو مجموعه $S = \{2, 3, 5, \dots\}$ ، گزاره نما « x عددی اول است» به یک گزاره درست تبدیل می شود و در نتیجه $S \neq D$ می باشد.

برای گزینه (۳)، ابتدا نامعادله را حل می کنیم و مجموعه جواب را به دست می آوریم:

$$\frac{2x+1}{3} \leq 1 \Rightarrow 2x+1 \leq 3 \Rightarrow 2x \leq 2$$

$$\Rightarrow x \leq 1 \Rightarrow S = (-\infty, 1] \Rightarrow S = D$$

در گزینه (۴)، برای x های عضو مجموعه $S = \{1, 4, 9, \dots\}$ ، گزاره نما « $\sqrt{x} \in \mathbb{N}$ » تبدیل به یک گزاره درست می شود و در نتیجه $S \neq D$ می باشد.

x یک رقم است و در نتیجه به جای x می توان هر یک از اعضای مجموعه $D = \{0, 1, 2, \dots, 9\}$ (دامنه) را قرار داد. بنابراین دامنه دارای ۱۰ عضو است. عددی مضرب ۹ است که مجموع رقم های آن مضرب ۹ باشد. مجموع ارقام عدد $2341x$ برابر $10 + x$ است. فقط به ازای $x = 8$ ، مجموع ارقام برابر ۱۸ می شود که عددی مضرب ۹ به دست می آید، پس مجموعه جواب آن $S = \{8\}$ می باشد که دارای یک عضو است.

مجموعه جواب گزاره نما، تمام زوج مرتب هایی است که به ازای آن ها نامساوی $3x + 5y \leq 14$ برقرار باشد. جواب های این نامعادله زوج مرتب های زیر می باشند (x و y باید اعداد طبیعی باشند): $(1, 1), (1, 2), (2, 1), (3, 1)$ بنابراین ۴ جواب برای گزاره نما وجود دارد.

نکته جدول ارزشی n گزاره، 2^n سطر (حالت) دارد.

$$2^n = 64 = 2^6 \Rightarrow n = 6$$

طبق فرض، 2^n برابر ۶۴ است:

از ترکیب برای حل استفاده می کنیم. در جدول ارزش با ۵ گزاره، باید ۲ گزاره درست داشته باشیم. تعداد حالت ها برابر انتخاب ۲ گزاره از ۵ گزاره است:

$$= \binom{5}{2} = \frac{5 \times 4}{2!} = 10$$

می خواهیم ارزش دو گزاره p و q یکسان باشد. یعنی هر دو درست یا هر دو نادرست باشد.

حالت اول: اگر ارزش هر دو گزاره p و q درست باشد، آن گاه $2^3 = 8$ حالت برای ۳ گزاره دیگر وجود دارد. بنابراین ۸ سطر در حالت $p \equiv q \equiv T$ وجود دارد.

حالت دوم: اگر ارزش هر دو گزاره p و q نادرست باشند، مانند حالت قبل، ۸ سطر برای ۳ گزاره دیگر وجود دارد.

در مجموع $8 + 8 = 16$ سطر برای ۵ گزاره وجود دارد که دو گزاره p و q هم ارزش هستند.

۱۲ ۴

نکته اگر حداقل یکی از دو گزاره p یا q ارزش درست داشته باشد، آن‌گاه ترکیب فصلی $p \vee q$ ارزش درست دارد و اگر هر دو گزاره p و q ارزش درست داشته باشند، آن‌گاه ترکیب عطفی $p \wedge q$ ارزش درست دارد.

در گزینه (۱)، ارزش گزاره تهران پایتخت ایران است»، درست است و در نتیجه با صرف نظر از ارزش گزاره دوم، ترکیب فصلی دو گزاره، ارزش درست دارد. هر دو گزاره گزینه (۲) ارزش درست دارند در نتیجه ترکیب عطفی دو گزاره دارای ارزش درست است. (جمع هر دو عدد اول دو رقمی (دو عدد فرد)، زوج است)

در ترکیب عطفی گزینه (۳)، هر دو گزاره دارای ارزش درست می‌باشد و در نتیجه، ارزش آن درست است.

در گزینه (۴)، هر دو گزاره دارای ارزش نادرست و در نتیجه ارزش ترکیب فصلی آن‌ها نادرست است.

$$\text{عدد مرکب} = 8^3 + 3^3 = (8+3)(64-3 \times 8+9) = 2^9 + 2^7$$

$$n \in \mathbb{N}, \left(\frac{1}{p}\right)^n \geq \left(\frac{1}{p}\right)^n$$

۱۳ ۱

گزاره $1 > 4$ ، گزاره‌ای با ارزش درست است و در نتیجه ترکیب فصلی آن با گزاره نادرست $\frac{1}{4} < \frac{1}{5}$ دارای ارزش درست است.

در گزینه (۲)، گزاره « $2^3 > 3^2$ » دارای ارزش درست است و در نتیجه نقیض آن نادرست می‌باشد.

ترکیب عطفی گزاره نادرست با هر گزاره دیگر، دارای ارزش نادرست است.

در گزینه (۳)، گزاره‌ای نادرست است و در نتیجه ترکیب عطفی آن با گزاره درست $\emptyset \subseteq A$ ، ارزش نادرست دارد.

در گزینه (۴)، گزاره $\frac{3 \times 2}{-4} \in \mathbb{N}$ نادرست است و در نتیجه ترکیب عطفی نادرست می‌باشد.

۱۴ ۳

با فرض آن‌که p و r درست و q نادرست باشد، ارزش گزاره‌های خواسته شده را به کمک جدول ارزش گزاره‌ها به دست می‌آوریم.

p	q	r	$\sim p$	$\sim p \vee q$	$(\sim p \vee q) \wedge r$
د	ن	د	ن	ن	ن

p	q	r	$\sim r$	$p \vee \sim r$	$(p \vee \sim r) \vee q$
د	ن	د	ن	د	د

بنابراین ارزش گزاره‌های $(\sim p \vee q) \wedge r$ و $(p \vee \sim r) \vee q$ به ترتیب نادرست و درست است.

۱۵ ۲

جدول ارزش گزاره‌ها را برای هر گزینه می‌نویسیم.

گزینه (۱):

p	q	r	$\sim p$	$\sim q$	$\sim p \vee \sim q$	$(\sim p \vee \sim q) \wedge r$
د	ن	ن	ن	د	د	ن

گزینه (۲):

p	q	r	$\sim q$	$\sim r$	$p \wedge \sim q$	$(p \wedge \sim q) \vee (\sim r)$
د	ن	ن	د	د	د	د

گزینه (۳):

p	q	r	$\sim p$	$\sim r$	$\sim p \wedge \sim r$	$(\sim p \wedge \sim r) \vee q$
د	ن	ن	ن	د	ن	ن

گزینه (۴):

p	q	r	$\sim p$	$\sim r$	$q \wedge \sim r$	$(q \wedge \sim r) \wedge (\sim p)$
د	ن	ن	ن	د	ن	ن

پس گزینه (۲) درست است.

۱۶ ۱

ترکیب عطفی داده شده وقتی درست است که $(p \vee q)$ درست و r نیز درست باشد، برای این‌که ترکیب فصلی $p \vee q$ درست باشد حداقل یکی از گزاره‌های p و q درست باشد، پس فقط گزینه (۱) که p درست و r درست است می‌تواند جواب باشد.

۱۷ ۴

با توجه به ارزش گزاره‌های p ، q و r ، ارزش هر گزاره را تعیین می‌کنیم. p و r گزاره‌هایی درست و q گزاره‌ای نادرست است.

$$\sim p \vee q \equiv F \vee F \equiv F \quad (۱) \text{ ارزش این گزاره نادرست است.}$$

$$(\sim p \vee \sim q) \wedge \sim r \equiv (F \vee T) \wedge F \equiv T \wedge F \equiv F \quad (۲) \text{ ارزش این گزاره نادرست است.}$$

$$(\sim p \wedge \sim q) \wedge r \equiv (F \wedge T) \wedge T \equiv F \wedge T \equiv F \quad (۳) \text{ ارزش این گزاره نادرست است.}$$

$$\sim(\sim r \vee q) \vee \sim p \equiv \sim(F \vee F) \vee F \equiv \sim F \vee F \equiv T \vee F \equiv T \quad (۴) \text{ ارزش این گزاره درست است.}$$

۱۸ ۲

شبه جذب

$$\sim p \wedge (p \vee r) \equiv \sim p \wedge r$$

طبق قانون شبه جذب داریم: چون $\sim r$ درست است پس r نادرست می‌باشد، لذا $\sim p \wedge r$ همیشه نادرست است.

۱۹ ۲

گزاره $\sim p \vee q$ نادرست است، بنابراین هر دو گزاره q و $\sim p$ نادرست می‌باشند. بنابراین q نادرست و p درست است. از طرفی ترکیب عطفی $\sim p \wedge r$ درست است، پس هر دو گزاره $\sim p$ و r درست است. بنابراین p درست و r نادرست است، در نتیجه p درست است و q و r نادرست هستند.

۲۰ ۴

از خاصیت شبه جذب برای ساده کردن استفاده می‌کنیم:

$$T \equiv (\sim p \vee q) \wedge \overset{\substack{\text{جابه‌جایی} \\ \text{شبه جذب}}}{p \equiv q} \wedge p \equiv p \wedge q$$

۲۱ ۴

دمورگان شبه جذب

$$\sim q \wedge (\sim p \vee q) \equiv \sim q \wedge p \equiv \sim (q \vee p)$$

چون $(q \vee p) \sim$ درست است پس $p \vee q$ نادرست است، لذا p و q هر دو نادرست خواهند بود. پس $p \wedge \sim q$ درست می‌باشد.

۲۲ ۱

چون ارزش گزاره مرکب عطفی $(\sim p \vee r) \wedge p$ درست است پس p درست و $(\sim p \vee r)$ نیز درست است. $\sim p$ نادرست و $p \vee r$ درست است، لذا r درست است.

۲۳ ۲

ابتداء عبارت‌های $(q \wedge r) \vee (p \wedge r)$ و $[p \wedge (\sim q \wedge r)]$ را ساده می‌کنیم:

$$\begin{aligned} -p \wedge (\sim q \wedge r) &\equiv (\sim p \wedge \sim q) \wedge r \equiv (\sim (p \vee q)) \wedge r \\ (q \wedge r) \vee (p \wedge r) &= (q \vee p) \wedge r \end{aligned}$$

حال داریم:

$$\begin{aligned} &[\sim p \wedge (\sim q \wedge r)] \vee (q \wedge r) \vee (p \wedge r) \\ &\equiv (\sim (p \vee q) \wedge r) \vee ((q \vee p) \wedge r) \\ &\equiv \underbrace{(\sim (p \vee q) \vee (p \vee q))}_{T} \wedge r \equiv T \wedge r \equiv r \end{aligned}$$

۲۴ ۳

طبق فرض داریم:

$$(q \vee r) \vee \sim q \equiv (r \vee q) \vee \sim q$$

خاصیت جابه‌جایی:

$$(r \vee q) \vee \sim q \equiv r \vee (q \vee \sim q)$$

خاصیت شرکت‌پذیری:

$$r \vee (q \vee \sim q) \equiv r \vee T \equiv T$$

$$(\sim q \vee q) \vee \sim r \equiv T \vee \sim r \equiv T$$

تنها گزینه همواره درست، گزینه (۳) است.

۲۵ ۳

طبق قانون شبه جذب، گزاره $p \vee (\sim q \wedge \sim p)$ ، هم‌ارز گزاره $p \vee \sim q$ است. بنابراین:

$$p \vee \sim q \stackrel{\text{قانون جذب}}{=} (p \vee \sim q) \vee [(r \wedge s) \wedge (p \vee \sim q)] = \text{گزاره مرکب}$$

۲۶ ۳

یکی از دو گزاره p و $\sim q$ درست و دیگری نادرست است، بنابراین ترکیب عطفی آن‌ها همواره نادرست است:

$$p \wedge \sim p \equiv F$$

$$P \vee F \equiv T \vee F \equiv T \equiv P$$

اگر $P \equiv T$ باشد، آن‌گاه:

$$P \vee F \equiv F \vee F \equiv F \equiv P$$

اگر $P \equiv F$ باشد، آن‌گاه:در هر دو حالت هم‌ارزی $P \vee F \equiv P$ برقرار است.

در گزینه (۳)، قانون دمورگان نادرست نوشته شده است:

$$\sim (\sim p \vee q) \equiv p \wedge \sim q$$

گزینه (۴) قانون جذب است.

۲۷ ۱

طبق قانون دمورگان، نقیض گزاره مرکب فصل $p \vee q$ هم‌ارز گزاره $\sim p \wedge \sim q$ است.

$$p: \sqrt{2}: \text{عددی گویاست.}$$

$$q: \text{معادله } x^2 - 3x + 2 = 0 \text{ دو ریشه حقیقی ندارد.}$$

$$\sim p \wedge \sim q: \sqrt{2}: \text{عددی گنگ است و معادله } x^2 - 3x + 2 = 0 \text{ دو ریشه حقیقی دارد.}$$

۲۸ ۴

برای نقیض کردن ترکیب عطفی $p \wedge q$ از قانون دمورگان استفاده می‌کنیم و می‌نویسیم:

$$\sim (p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$$

↓
ترکیب فصلی

بنابراین نقیض گزاره مرکب داده شده به صورت زیر است:

ایران در قاره آسیا قرار ندارد یا عدد ۱۴۷ بر ۷ بخش پذیر نیست.

۲۹ ۲

نکته در ترکیب شرطی $p \Rightarrow q$ ، اگر p دارای ارزش درست و q ارزش نادرست داشته باشد، آن‌گاه $p \Rightarrow q$ دارای ارزش نادرست است

و در بقیه حالت‌ها، ارزش گزاره درست است.

در گزینه (۱)، p نادرست و q هم نادرست است، پس $p \Rightarrow q$ ارزش درست دارد.

در گزینه (۲)، p درست و q نادرست است (۱۹۱۷ بر ۹ بخش پذیر است)، پس $p \Rightarrow q$ ارزش نادرست دارد.

در گزینه (۳)، هر دو گزاره ارزش درست دارند و در نتیجه ترکیب شرطی آن‌ها دارای ارزش درست است.

در گزینه (۴)، هر دو گزاره ارزش نادرست دارند و در نتیجه ترکیب شرطی آن‌ها دارای ارزش درست است.

۳۰ ۳

در ترکیب شرطی $p \Rightarrow q$ ، اگر p دارای ارزش نادرست باشد، آن‌گاه $p \Rightarrow q$ دارای ارزش درست است (مستقل از ارزش q) و در این صورت می‌گوییم $p \Rightarrow q$ به انتفای مقدم دارای ارزش درست است.

در گزینه (۱)، ترکیب فصلی بین دو گزاره وجود دارد و در نتیجه، انتفای مقدم در آن به کار نمی‌رود.

در گزینه (۲)، گزاره «فرودین، ۳۱ روز دارد» دارای ارزش درست است و در نتیجه، انتفای مقدم در آن به کار نمی‌رود.

در گزینه (۳)، p شرط کافی برای q است به معنی $p \Rightarrow q$ می‌باشد. گزاره «خورشید به دور زمین می‌چرخد» نادرست و در نتیجه ترکیب شرطی داده شده به انتفای مقدم درست است.

در گزینه (۴)، q شرط لازم برای p است به معنی $p \Rightarrow q$ می‌باشد. مقدم گزاره «ابوعلی سینا یک پزشک است» می‌باشد که یک گزاره درست است و در نتیجه، به انتفای مقدم برای این گزاره مرکب شرطی استفاده نمی‌شود.

۳۱ ۱

چون ارزش گزاره q نادرست است، پس ارزش گزاره $\sim q$ درست خواهد بود. ارزش گزاره p و ارزش گزاره $\sim q$ درست است، لذا $p \wedge \sim q$ درست خواهد بود.

۳۲ ۲

چون p نادرست است، پس ترکیب عطفی $p \wedge q$ نادرست است در نتیجه ترکیب شرطی $(p \wedge q) \Rightarrow r$ به انتقای مقدم همواره درست است.

۳۳ ۲

اگر p درست باشد، $p \vee q$ نیز درست است. از طرفی می دانیم، در گزاره شرطی هرگاه تالی درست باشد ارزش ترکیب شرطی $p \Rightarrow T$ همواره درست می باشد.

۳۴ ۱

بررسی گزینه ها:

گزینه (۱): در گزاره $\sim p \Rightarrow q$ چون p درست است، پس $\sim p$ نادرست است. در یک گزاره شرطی اگر مقدم نادرست باشد، ارزش گزاره شرطی به انتقای مقدم درست است.

گزینه (۲): در گزاره شرطی $p \Rightarrow q$ چون p درست است، ارزش گزاره مشخص نیست.

گزینه (۳): در گزاره شرطی $p \Rightarrow \sim p$ چون p درست است، پس $\sim p$ نادرست می باشد. در نتیجه ارزش گزاره شرطی نادرست است.

گزینه (۴): در گزاره شرطی $\sim q \Rightarrow p$ چون p درست است، ارزش گزاره مشخص نیست.

۳۵ ۱

بررسی گزینه ها:

گزینه (۱): در گزاره $r \Rightarrow (\sim p \wedge q)$ چون p درست است، پس $\sim p$ نادرست است. در نتیجه $(\sim p \wedge q)$ نیز نادرست خواهد بود. بنابراین ارزش گزاره شرطی به انتقای مقدم درست است.

گزینه (۲): چون p درست است، پس $\sim p$ نادرست است و ارزش $(\sim p \vee q)$ نامعلوم نیست.

گزینه (۳): چون p درست است ارزش ترکیب عطفی $p \wedge q$ مشخص نیست.

گزینه (۴): چون p درست است ارزش ترکیب فصلی $p \vee q$ درست است ولی ارزش ترکیب شرطی $(p \vee q) \Rightarrow r$ مشخص نیست، زیرا ارزش تالی آن نامعلوم است.

۳۶ ۱

در یک ترکیب شرطی اگر مقدم درست و تالی نادرست باشد، ارزش گزاره شرطی نادرست است. بنابراین در ترکیب شرطی $(q \Rightarrow r)$ باید q درست و r نادرست باشد تا ارزش $(q \Rightarrow r)$ نادرست شود و از طرفی در $p \Rightarrow (q \Rightarrow r)$ باید p درست و $(q \Rightarrow r)$ نادرست باشد تا ارزش $p \Rightarrow (q \Rightarrow r)$ نادرست شود، در نتیجه p و q درست و r نادرست می باشد.

۳۷ ۲

اگر هر دو گزاره $p \Rightarrow q$ و $q \Rightarrow r$ درست باشند، آنگاه ترکیب عطفی $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)$ درست است.

با بررسی گزینه ها، در حالت گزینه (۲)، گزاره های $p \Rightarrow q$ و $q \Rightarrow r$ ارزش درست دارند و در نتیجه گزاره $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)$ درست خواهد بود.

۳۸ ۱۴

یک گزاره شرطی فقط وقتی نادرست است که مقدم درست و تالی نادرست باشد:

$$\underbrace{((\sim p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow \sim q))}_{\text{مقدم}} \Rightarrow \underbrace{p}_{\text{تالی}}$$

یعنی الزاماً p نادرست است. ($\sim p$ درست است)

بررسی گزینه ها:

گزینه (۱): p را درست فرض کرده [نادرستی گزینه (۱)]

گزینه (۲): $\sim p$ را نادرست فرض کرده در صورتی که $\sim p$ درست است.

[نادرستی گزینه (۲)]

گزینه (۳): p را درست فرض کرده [نادرستی گزینه (۳)]

گزینه (۴): p را نادرست فرض کرده (تنها گزینه ای که p را نادرست فرض کرده گزینه ۴ است.)

۳۹ ۳

چون p درست است پس $(p \vee q)$ درست است. چون q نادرست است، پس $r \wedge q$ نادرست خواهد بود، لذا گزاره $(p \vee q) \Rightarrow (r \wedge q)$ نادرست خواهد بود. حال گزینه ها را بررسی می کنیم.

p درست است، پس $p \vee r$ درست می باشد در نتیجه گزینه (۱) جواب نیست. $r \wedge q$ نادرست است. طبق خاصیت جابه جایی $q \wedge r$ نیز نادرست است و $(q \wedge r) \sim$ درست می باشد، در نتیجه گزینه (۲) جواب نیست.

طبق فرض p درست، $\sim p$ نادرست و q نادرست در نتیجه $\sim p \vee q$ نیز نادرست است، پس گزینه (۳) جواب است.

q نادرست پس $\sim q$ درست و p درست در نتیجه $p \wedge \sim q$ همواره درست است، پس گزینه (۴) هم جواب نمی باشد.

۴۰ ۱

یک ترکیب شرطی وقتی نادرست است که مقدم درست و تالی نادرست باشد. $p \vee q$ درست است. چون q نادرست است، پس p درست می باشد، از طرفی $p \wedge r$ نادرست است، چون p درست است، پس r نادرست است.

۴۱ ۳

اگر تالی یک گزاره شرطی درست باشد، ارزش آن ترکیب شرطی همواره درست خواهد بود.

۴۲ ۲

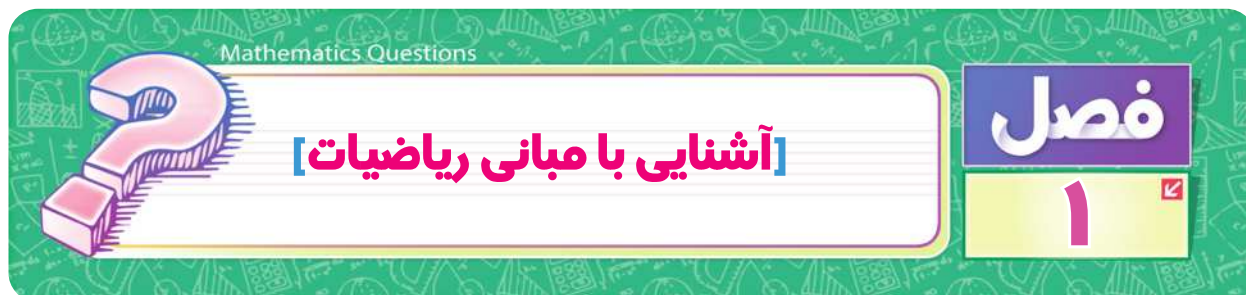
$$p \Rightarrow q \equiv \sim p \vee q$$

نکته

ابتدا معادل گزاره شرطی را می نویسیم، سپس با استفاده از قانون شبه جذب آن را ساده می کنیم.

طبق فرض

$$(p \Rightarrow q) \wedge \sim q \equiv (\sim p \vee q) \wedge \sim q \equiv (\sim q \wedge \sim p) \equiv \uparrow T$$



قسمت اول: آشنایی با منطق ریاضی و گزاره‌ها

۱. در جاهای خالی عدد یا علامت مناسب قرار دهید، به طوری که گزاره‌های حاصل دارای ارزش درست باشند. (تمرین ۱ صفحه ۱۴ کتاب درسی)

- (آ) $(\frac{1}{2})^3 \square (\frac{1}{2})^5$ (ب) $\frac{\square}{\sqrt{3}} = 0$
 (پ) $5 \square \{3, 4, 5\}$ (ت) $y^2 = x^2$ تابع $\square$
 (ث) نمودار تابع $y = x^2$ از نقطه $\square$ می‌گذرد. (ج) $-(x-4)^2 \square 0$
 (چ) اگر $0^\circ < \alpha < 45^\circ$ ، آنگاه $\sin \alpha \square \cos \alpha$. (ح) اگر $x^2 = a$ و $a > 0$ ، آنگاه $x = \square$.

۲. دامنه متغیر هر یک از گزاره‌های زیر، مجموعه اعداد طبیعی است. مجموعه جواب هر یک را بنویسید.

- (آ) $\frac{1}{x-1} < 1$ (ب) $\sqrt{x} = 8$ (پ) $\{2k(k-1) = 0 \mid k \in \mathbb{N}\}$

(مشابه تمرین ۲ صفحه ۱۴ کتاب درسی)

۳. نقیض گزاره‌های زیر را بنویسید.

- (آ) $\sqrt{10} < 10$ (ب) $\frac{15}{3} \leq 3$ (پ) $3 \in \{1, 2, 5\}$
 (ت) $2^5 + 2^3 = 2^8$ (ث) سعدی شاعر ایرانی است. (ج) ۱۹۷۱ عددی اول است.
 (چ) ۳ عددی فرد است یا عدد $\sqrt{2}$ گویا است. (ح) $(2 < \sqrt{6}) \wedge (\sqrt{6} < 5)$

(مشابه تمرین ۴ صفحه ۱۴ کتاب درسی)

۴. جدول زیر را کامل کنید:

گزاره p	گزاره q	ارزش p	ارزش q	ارزش $p \vee q$	ارزش $p \wedge q$
مهر اولین ماه فصل پاییز است.	تهران پایتخت ایران است.	د			
$\sqrt{x}$ یک عبارت چندجمله‌ای نیست.			ن		
هر دنباله یا حسابی است یا هندسی.			د		
				ن	

(مشابه تمرین ۳ صفحه ۱۴ کتاب درسی)

۵. ارزش گزاره‌های مرکب زیر را تعیین کنید.

- (آ) $(11 > 3 + 1) \vee (3^3 = 81)$ (ب) $(-4 < -5) \wedge (4 > 5)$
 (پ) $(\frac{1}{2} \neq \frac{3}{6}) \vee (1 \in \{2, 3, 4\})$ (ت) $(W \not\subseteq Z) \vee (\{2\} \in \{2, 3\})$
 (ث) عدد ۴ زوج است و عدد ۶ مضرب ۳ است.

۶. جدول ارزش گزاره‌های زیر را تشکیل داده و نشان دهید گزاره‌های زیر همواره نادرست هستند.

- (آ) $p \wedge \sim p \equiv F$ (ب) $\sim p \wedge (p \wedge q) \equiv F$ (پ) $p \wedge \sim (p \vee q) \equiv F$

۷. با استفاده از جدول ارزش‌ها نشان دهید هم‌ارزی‌های منطقی زیر برقرار هستند.

- (آ) قوانین جابه‌جایی $p \vee q \equiv q \vee p$ (ب) قوانین شرکت‌پذیری $(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$
 (پ) قوانین توزیع‌پذیری $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

۸. با جدول ارزش‌ها نشان دهید که هم‌ارزی قانون دمورگان در منطق ریاضی برقرار است.

- (آ) $\sim(p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$ (ب) $\sim(p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$

۹. مقادیر x و y را چنان تعیین کنید که داشته باشیم:

ب) $|2x - 1| + |x + y| = 0$

ا) $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 0$

پ) $x^2 + 2x + 1 + y^2 = 0$

(مشابه مثال صفحه ۵ کتاب درسی)

قسمت دوم: ترکیب شرطی، ترکیب دوشروطی و سورها

۱۰. ارزش گزاره‌های شرطی و دوشروطی زیر را مشخص کنید، سپس نقیض هر یک را بنویسید.

ب) π عددی گویا است اگر و تنها اگر $\pi = 3/14$ باشد.

ا) اگر عددی فرد باشد، آن‌گاه ۲۵ فرد است.

ت) $(2^2 = 4) \Leftrightarrow (2^0 = 2)$

پ) ۲ عدد اول نیست، اگر و تنها اگر ۲ مربع کامل است.

ث) اگر عدد ۴ فرد باشد، آن‌گاه ۴ مربع کامل نیست.

۱۱. با استفاده از جدول ارزش گزاره‌ها نشان دهید:

ب) $(p \wedge q) \Rightarrow p \equiv T$

ا) $P \Rightarrow (p \vee q) \equiv T$

۱۲. جدول‌های ارزش گزاره‌های زیر را تشکیل داده و نشان دهید این گزاره‌ها همواره درست هستند.

ب) $[(p \Rightarrow q) \wedge (q \vee p)] \Leftrightarrow q \equiv T$

ا) $p \Rightarrow p \equiv T$

ب) $(p \vee \sim q) \vee (\sim p \vee q) \equiv T$

(تمرین ۶ صفحه ۱۵ کتاب درسی)

۱۳. با استفاده از جدول ارزش‌ها نشان دهید:

ب) $p \vee (q \wedge p) \equiv p$

ا) $p \vee F \equiv p$

ت) $p \Rightarrow (q \Rightarrow r) \equiv (p \wedge q) \Rightarrow r$

پ) $\sim(p \Leftrightarrow q) \equiv \sim p \Leftrightarrow q$

ج) $p \Rightarrow q \equiv \sim q \Rightarrow \sim p$

ث) $p \Rightarrow q \equiv \sim p \vee q$

ح) $\sim(p \Leftrightarrow q) \equiv \sim p \Leftrightarrow q \equiv p \Leftrightarrow \sim q$

چ) $\sim(p \Rightarrow q) \equiv p \wedge \sim q$

د) $p \Rightarrow (q \Rightarrow r) \equiv q \Rightarrow (p \Rightarrow r)$

خ) $(p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r) \equiv (p \vee q) \Rightarrow r$

۱۴. اگر ارزش گزاره $p \Rightarrow \sim q$ نادرست باشد، ارزش هر یک از گزاره‌های زیر را مشخص کنید.

ت) $(\sim p \Rightarrow q) \Rightarrow \sim p$

پ) $(p \vee \sim q) \Rightarrow \sim p$

ب) $\sim p \Rightarrow q$

ا) $(\sim p \vee q) \wedge q$

(مثال صفحه ۹ کتاب درسی)

۱۵. نشان دهید اگر n^2 عددی فرد باشد، آن‌گاه n نیز فرد است.

(تمرین ۷ صفحه ۱۵ کتاب درسی)

۱۶. ثابت کنید هرگاه n عدد صحیح و n^2 مضرب ۳ باشد، آن‌گاه n نیز مضرب ۳ است.

۱۷. با ذکر دلیل، درستی یا نادرستی گزاره‌های سوری زیر را مشخص کنید.

ب) در آمار، هر متغیر کمی یک متغیر گسسته است.

ا) در آمار، هر متغیر گسسته یک متغیر کمی است.

ت) در آمار، بعضی از متغیرهای کمی یک متغیر گسسته هستند.

پ) در آمار، بعضی از متغیرهای گسسته یک متغیر کیفی هستند.

(مشابه کار در کلاس صفحه ۱۲ کتاب درسی)

۱۸. ارزش گزاره‌های سوری زیر را تعیین کنید.

ب) $\forall x \in \mathbb{R} : \tan x \times \cot x = 1$

ا) $\forall x \in \mathbb{N} : x(x+1) = 2k, (k \in \mathbb{N})$

ت) $\exists x \in \mathbb{R} : x^2 + 4 = 0$

ب) $\exists x \in \mathbb{Z} : x^2 + 2x = 0$

ج) $\exists x \in \mathbb{Q}' ; x^2 \in \mathbb{Q}$

ث) $\forall x \in \mathbb{P} : x = 2k+1, (k \in \mathbb{N})$

چ) برای هر عدد طبیعی n ، $n!$ عددی گویاست.

ح) در فضای نمونه‌ای S ، پیشامدی مانند A وجود دارد به طوری که $P(A) > 1$.

(مشابه تمرین ۹ صفحه ۱۵ کتاب درسی)

۱۹. هرگاه $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid -2 \leq x < 2\}$ دامنه متغیر باشد، ارزش گزاره‌های سوری زیر را تعیین کنید.

ب) $\forall x \in A : 2x+1 > -3$

ا) $\forall x \in A : x+3 \leq 4$

ت) $\exists x \in A : \frac{x-1}{2} \geq 1$

پ) $\exists x \in A : \sqrt{x^2+3} = 2$

(مشابه تمرین ۸ صفحه ۱۵ کتاب درسی)

۲۰. گزاره‌های زیر را با استفاده از نمادهای $\forall$ و $\exists$ بنویسید و ارزش آن‌ها را تعیین کنید.

ب) مجذور هر عدد حقیقی منفی، منفی است.

ا) مربع هر عدد حقیقی، مثبت است.

ت) مجذور بعضی از اعداد صحیح با خود آن عدد صحیح مساوی است.

پ) هر عدد صحیحی، گویا است.

ج) بعضی از اعداد حقیقی، گویا نیستند.

ث) هر عدد اول، فرد است.