

مجموعه کتابهای آی کیو قرن جدید

• ویژه کنکور ۱۴۰۵ •



کنکور حسابان جامع

دهم | یازدهم | دوازدهم

مطابق با سبک جدید سوالات کنکور

مؤلفان: مهندس سجاد عظمی - مهندس مجید رفعتی
علی احمدی قزل دشت

+ کنکور
۱۴۰۴

مجموعه کتاب‌های فرمول بیست ویژه ارتقا و ترمیم معدل نهایی



دکتر آئی کیو
DRIQ.com
کلاس آنلاین



گاج مارکت
gajmarket.com
فروشگاه آنلاین



گاجینو
gajino.com
آموزش آنلاین



به کوشش توان کرد گیتی روان به دانش توان یافت نیکو روان

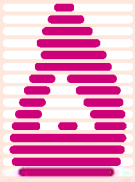
(فردوسی)

- حسابان، برای بسیاری از دانش‌آموزان، درسی چالش‌برانگیز اما سرنوشت‌ساز در مسیر کنکور ریاضی است. «حسابان جامع آیکیو گاج» با هدف فراهم‌کردن یک مسیر روشن و مطمئن برای موفقیت در این درس طراحی شده‌است؛ رویکرد آن، ساده‌سازی مفاهیم دشوار، تقویت مهارت حل مسئله و ارائه پرسش‌هایی است که نه تنها سطح کنکور را پوشش می‌دهند، بلکه افق یادگیری را گسترش می‌دهند.
- اگرچه مسیر موفقیت آسان نیست، اما با برنامه‌ریزی، پشتکار و تکیه بر منابع مناسب، رسیدن به درصد بالا در حسابان کاملاً ممکن است. کتابی که در دست شماست، نه فقط یک منبع کمک‌درسی، بلکه همراهی مطمئن برای مسیر پرچالش کنکور است.
- به شما اطمینان می‌دهیم، با بررسی دقیق تست‌های این کتاب، در کنکور ۱۴۰۵ و حتی بعد از آن، سؤالی خارج از این کتاب و یا سخت‌تر از این سوالات نخواهید دید.
- امید است با تلاش مستمر و بهره‌گیری از این منبع، گام‌های استواری به‌سوی موفقیت بردارید.

برای اینکه بتوانی به بهترین شکل ممکن از این کتاب استفاده کنی، اول باید بدونی که تست‌های این کتاب رو به ترتیب سطح‌بندی اون‌ها پاسخ بدی. پس اول توضیحات کاملی راجع به سطح‌بندی تست‌ها براتون انجام میدیم:

سطح‌بندی تست‌ها

تست‌های جنجالی	تست‌های چالشی	تست‌های قرمز	تست‌های آبی
			
این تست‌ها برای دانش‌آموزانی هست که به فکر درصد بالای ۸۰ بوده و بسیار سخت‌کوش و علاقه‌مند به تست‌های بسیار چالشی هستن. پس این تست‌ها به هیچ عنوان برای همه دانش‌آموزان مناسب نیست. تست‌های TNT بسیار سخت، بسیار چالشی و بسیار پرمحاسبه و خلاقانه بوده و در سال‌های اخیر یک یا دو تست کنکور از این سطح تست‌ها می‌باشد. سؤالات بسیار سخت کنکورهای اخیر باعث شد این سطح‌بندی رو براتون انجام بدیم تا رتبه‌های برتر کنکور هم با دیدن این کتاب لذت ببرن.	بعد از اینکه روی تست‌های آبی و قرمز کامل مسلط شدی، و می‌خواهی بیشتر تلاش کنی و درصد بالاتری به دست بیاری، میتونی سراغ تست‌های IQ+ بری. این تست‌ها سخت، چالشی، ترکیبی و پرمحاسبه بوده و شما رو برای موفقیت در تست‌های سخت کنکور سراسری آماده میکنه. دقت کنید! تست‌های سخت و چالشی کنکورهای سراسری سال‌های قبل هم، جزء این تست‌ها هستن.	تست‌هایی که با رنگ قرمز مشخص شده، تست‌های سطح بالاتر، ترکیبی و با محاسبات بیشتر بوده که برای تسلط بر زوایای مختلف مباحث برای تو طراحی شده‌اند. بعد از حل تست‌های آبی، تست‌های قرمز رو حل کن و خودت رو بیشتر به چالش بکش.	در ابتدا باید تست‌هایی که با رنگ آبی مشخص شده رو جواب بدی. به زبان دیگه، حل تست‌های آبی در گام اول برای هر دانش‌آموزی واجبه. تست‌های آبی، تست‌های مفهومی با محاسبات ساده هستن که اعتماد به نفس تو رو در ابتدا بالا میبرن.



دام‌تستی

طراح‌های کنکور برای اینکه بفهمن روی مباحث مسلطی یا نه، میان در صورت سوال‌ها از عبارت‌هایی استفاده میکنند که تو حتی بعد از حل سوال، گزینه غلط رو جواب بدی. در برخی موارد هم گزینه‌ها رو به گونه‌ای قرار میدن که تو رو به اشتباه بندازن! این موارد رو با آیکون **دام‌تستی** براتون مشخص کردیم که روی همه جنبه‌های پنهان سوال‌ها هم مسلط بشی و روز کنکور، اشتباه نکنی.



عروش سریع‌تر

در حل برخی از سوال‌ها، در کنار روش‌های تشریحی و تستی، میتونی از **عروش سریع‌تر** سوال رو حل کنی. پس سعی کردیم به‌روزترین و خاص‌ترین روش‌های میانبر و سریع‌تر در حل سوال‌ها رو برات بیان کنیم تا پاسخنامه این کتاب، نسبت به کتاب‌های مشابه، متفاوت باشه و جامع‌ترین و کامل‌ترین پاسخنامه رو ببینی.



یه جوهره دیگه! طراح‌های کنکور سراسری، خواسته‌های سوال رو کمی عوض میکنند و در کنکورهای جدید ارزش استفاده میکنند! پس در پاسخنامه کتاب، هر وقت آیکون **یه جوهره دیگه!** رو دیدی، بدون میخوایم تو رو با تمام ایده‌ها و زوایای مختلف اون سوال آشنا کنیم.



هایلایت

درسنامه‌های کاربردی درسنامه‌ها و نکات مهم رو برات در پاسخنامه کتاب **هایلایت** کردیم. در درسنامه‌ها از بیان نکات بیهوده و اضافی پرهیز شده تا خوندن اون‌ها کاربردی‌تر بشه. دیدن جداول و کادربندی‌های به جا، خوندن درسنامه‌ها رو برات لذت‌بخش میکنه.



سرینج

تا جای ممکن، سعی کردیم فصل‌ها رو به مباحث کوچکی تقسیم بکنیم، تا بتونی با دیدن هر تست، به زوایای مختلف و تیپ‌بندی در هر مبحث پی ببری. قبل شروع هر تیپ تست، برای اینکه بدونی قراره با چه مدل تستی روبه‌رو بشی، بهت **سرینج** دادیم. اینجوری در هر آزمون، سرینج هر تست رو به راحتی توی ذهنت پیدا میکنی.

تشکر و قدردانی:

- تشکر ویژه می‌کنم از اساتید عزیزی که در مراحل تالیف، همراه ما بودن به خصوص آقای نریمان فتح‌اللهی که تک‌تک تست‌ها رو با حوصله بررسی کردن. و همچنین تشکر و قدردانی می‌کنیم از اساتید عزیزی که با نظرات و تجربه‌های ارزشمندشون، باعث شدند کتاب بهتری تالیف بشه.
- **اساتید:** معین کرمی، علی مقدم‌نیا، محمد مصطفی ابراهیمی، امید شیری‌نژاد، آرش عمید.

به امید موفقیت‌های بزرگت ...

سجاد عظمتی - مجید رفعتی - علی احمدی

@sajad.azemati

مثلثات



درس اول: مقدمات و مفاهیم اولیه مثلثات

۵۴	۱۵	درجه و رادیان
۵۵	۱۶	نسبت‌های مثلثاتی مهم
۵۹	۱۷	دایره مثلثاتی
۶۱	۱۸	شیب خط و تانژانت

درس دوم: اتحادها و روابط مثلثاتی

۶۲	۱۹	روابط مثلثاتی مقدماتی
۶۴	۲۰	زاویه‌های متمم و مکمل
۶۴	۲۱	زاویه‌های ترکیبی ($\alpha \pm \beta, \pi \pm \alpha, \frac{\pi}{4} \pm \alpha, \dots$)
۶۷	۲۲	روابط 2α
۷۱	۲۳	رابطهٔ طلایی
۷۲	۲۴	کاربردها و نتایج روابط 2α
۷۴	۲۵	نسبت‌های مثلثاتی $\alpha \pm \beta$

درس سوم: توابع متناوب و نمودار ...

۸۰

درس چهارم: معادلات مثلثاتی

۹۰	۲۶	حل معادلات مثلثاتی با کمک روابط 2α
۹۱	۲۷	حل معادلات مثلثاتی شامل کمان‌های $\alpha \pm \beta$
۹۲	۲۸	دسته‌بندی و فاکتورگیری
۹۲	۲۹	معادلات مثلثاتی کسری
۹۴	۳۰	مسائل ترکیبی و خواسته‌های خاص

۳۷۰

پاسخ‌نامهٔ تشریحی



حد، پیوستگی و مجانب



درس اول: مفاهیم اولیه و محاسبهٔ حد توابع

۹۶	۳۱	همسایگی
۹۷	۳۲	فرآیندهای حدی
۱۰۰	۳۳	قضایای حد
۱۰۳	۳۴	ابهام $\frac{0}{0}$
۱۱۰	۳۵	حد مثلثاتی

درس دوم: حد بی‌نهایت و حد در بی‌نهایت

۱۱۴	۳۶	حد بی‌نهایت
۱۱۸	۳۷	حد در بی‌نهایت

درس سوم: مجانب‌های قائم و افقی تابع

۱۲۴	۳۸	مجانب قائم
۱۲۷	۳۹	یافتن مجانب افقی
۱۲۸	۴۰	سؤالات ترکیبی مجانب قائم و افقی

درس چهارم: پیوستگی

۱۳۱	۴۱	مفهوم پیوستگی
۱۳۶	۴۲	نقطهٔ مرزی خاص
۱۳۷	۴۳	پیوستگی در بازه

۴۳۳

پاسخ‌نامهٔ تشریحی



فهرست

تابع



درس اول: مفاهیم تابع

۱۰	۱	شناسایی تابع
۱۱	۲	مقدار تابع
۱۲	۳	دامنه و برد تابع
۱۶	۴	تساوی دو تابع

درس دوم: انتقال و تبدیل نمودار تابع

۱۷	۵	انتقال و قرینه‌یابی
۲۱	۶	انبساط و انقباض نمودار

درس سوم: انواع تابع

۲۳	۲۳	
----	----	--

درس چهارم: توابع صعودی و نزولی

۲۷	۲۷	
----	----	--

درس پنجم: اعمال جبری روی توابع و ترکیب توابع

۳۴	۷	مقداردهی به ترکیب توابع
۳۵	۸	ضابطهٔ ترکیب توابع
۳۸	۹	دامنه و بُرد ترکیب توابع
۳۹	۱۰	وضعیت صعودی و نزولی توابع مرکب

درس ششم: تابع یک‌به‌یک و تابع وارون

۴۲	۱۱	تابع وارون
۴۴	۱۲	محاسبهٔ ضابطهٔ تابع وارون
۴۷	۱۳	برخورد f و f^{-1} و برخورد f^{-1} و g
۴۸	۱۴	ترکیب تابع f و f^{-1} و ترکیب تابع f^{-1} و g

درس هفتم: تقسیم چند جمله‌ای‌ها و بخش‌پذیری

۵۰	۵۰	
----	----	--

۳۱۲

پاسخ‌نامهٔ تشریحی



معادله و تابع درجه دوم

درس اول: معادله درجه دوم

۶۳	مجموع ریشه‌ها، حاصل ضرب ریشه‌ها و ...
۶۴	علامت ریشه‌ها
۶۵	نوشتن معادله درجه دوم
۶۶	معادلات قابل تبدیل به درجه دوم

درس دوم: سهمی و ویژگی‌های آن

۶۷	ویژگی‌های سهمی
۶۸	بررسی سهمی
۶۹	نوشتن معادله سهمی
۷۰	وضعیت سهمی و خط یا وضعیت دو سهمی نسبت به هم
۷۱	گذر از نواحی

پاسخ‌نامه تشریحی ۵۹۸

قدرمطلق و براکت

درس اول: قدرمطلق

۷۲	تعریف و ویژگی‌های قدرمطلق
۷۳	معادلات قدرمطلق
۷۴	نامعادلات قدرمطلق
۷۵	نمودارهای قدرمطلق

درس دوم: جزء صحیح

۷۶	تعریف و ویژگی‌ها
۷۷	معادله و نامعادله شامل جزء صحیح
۷۸	نمودار توابع شامل جزء صحیح

پاسخ‌نامه تشریحی ۶۲۴

توان گویا و عبارت جبری

درس اول: توان گویا و عبارت جبری

۷۹	ریشه و توان
۸۰	مقایسه مقادیر تقریبی ریشه $\sqrt[n]{a}$
۸۱	اعداد با توان گویا
۸۲	قوانین رادیکال‌ها

درس دوم: عبارت‌های جبری

۸۳	اتحادها
۸۴	ساده کردن عبارات رادیکالی
۸۵	گویا کردن

پاسخ‌نامه تشریحی ۶۳۹

مشتق

درس اول: مفهوم هندسی مشتق و ...

درس دوم: تابع مشتق و قوانین محاسبه مشتق

۴۴	قواعد مشتق‌گیری
۴۵	تکنیک‌های مشتق‌گیری
۴۶	مشتق تابع مرکب
۴۷	مشتق مرتبه دوم
۴۸	تعریف مشتق با ظاهری متفاوت!
۴۹	مشتق توابع مثلثاتی
۵۰	معادله خط مماس

درس سوم: مشتق چپ و راست و مشتق‌پذیری

۵۱	مشتق توابع چند ضابطه‌ای
۵۲	مشتق توابع شامل قدرمطلق و جزء صحیح
۵۳	نقاط مشتق ناپذیر، دامنه تابع مشتق و مشتق‌پذیری ...
۵۴	نمودار تابع مشتق

درس چهارم: آهنگ تغییر

پاسخ‌نامه تشریحی ۴۹۲

کاربرد مشتق

درس اول: نقاط بحرانی و اکسترم‌های تابع

۵۵	ارتباط یکنوایی تابع با مشتق آن
۵۶	نقاط بحرانی
۵۷	اکسترم‌های نسبی تابع
۵۸	اکسترم‌های مطلق

درس دوم: بهینه‌سازی

درس سوم: جهت تقعر، نقطه عطف و رسم نمودار تابع

۵۹	جهت تقعر تابع
۶۰	نقطه عطف
۶۱	نمودارشناسی
۶۲	ارتباط نمودارهای f' و f'' و f

پاسخ‌نامه تشریحی ۵۴۴

مجموعه، الگو و دنباله

درس اول: مجموعه های متناهی و نامتناهی

۲۸۰	مجموعه های اعداد	۱۰۵
۲۸۰	بازه ها	۱۰۶
۲۸۲	مجموعه های متناهی و نامتناهی	۱۰۷
۲۸۲	متمم یک مجموعه و مجموعه مرجع	۱۰۸
۲۸۳	قوانین مجموعه ها	۱۰۹
۲۸۵	محاسبه تعداد اعضای مجموعه ها	۱۱۰

درس دوم: الگو و دنباله

۲۸۷	دنباله خطی و درجه ۲	۱۱۱
۲۸۹	چند دنباله خاص (دنباله بازگشتی، فیبوناچی و ...)	۱۱۲

درس سوم: دنباله های حسابی و هندسی

۲۹۱	دنباله حسابی	۱۱۳
۲۹۴	مجموع جملات دنباله حسابی	۱۱۴
۲۹۶	دنباله هندسی	۱۱۵
۲۹۹	مجموع جملات دنباله هندسی	۱۱۶

۶۹۸

پاسخ نامه تشریحی

معادله و نامعادله

درس اول: معادلات گویا و معادلات رادیکالی

۲۴۸	معادلات گویا	۸۶
۲۵۰	مسائل کاربردی معادلات گویا و مستطیل طلایی	۸۷
۲۵۱	معادلات گنگ	۸۸

درس دوم: نامعادلات و تعیین علامت

۲۵۴	تعیین علامت	۸۹
۲۵۵	حل نامعادله	۹۰
۲۵۷	وضعیت دو منحنی	۹۱

۶۵۶

پاسخ نامه تشریحی

هندسه تحلیلی

هندسه مختصات (تحلیلی)

۳۰۲	معادله خط	۱۱۷
۳۰۴	فاصله دو نقطه	۱۱۸
۳۰۸	فاصله نقطه از خط	۱۱۹
۳۱۰	فاصله دو خط موازی	۱۲۰

۷۲۸

پاسخ نامه تشریحی

تابع نمایی و لگاریتمی

درس اول: تابع نمایی و ویژگی های آن

۲۶۰	تابع نمایی	۹۲
۲۶۰	معادلات و نامعادلات تابع نمایی	۹۳
۲۶۲	نمودارهای توابع نمایی	۹۴

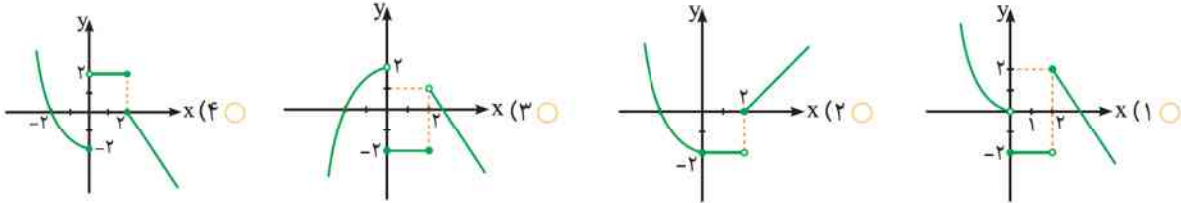
درس دوم: تابع لگاریتمی و ویژگی های آن

۲۶۶	مفهوم لگاریتم	۹۵
۲۶۷	قوانین لگاریتم	۹۶
۲۷۱	دامنه توابع لگاریتمی	۹۷
۲۷۲	نمودار تابع لگاریتمی	۹۸
۲۷۴	معادلات لگاریتمی	۹۹
۲۷۶	نامعادله لگاریتمی	۱۰۰
۲۷۶	حل معادلات نمایی به کمک لگاریتم	۱۰۱
۲۷۷	ضابطه وارون تابع نمایی و لگاریتمی	۱۰۲
۲۷۷	کاربرد توابع نمایی و لگاریتمی	۱۰۳
۲۷۸	ترکیبی های لگاریتم	۱۰۴

۶۷۲

پاسخ نامه تشریحی

۲۳۷ اگر $g(x) = \begin{cases} x^2 & ; x < 0 \\ 1-x & ; 0 \leq x < 2 \\ 1 & ; x \geq 2 \end{cases}$ باشد، نمودار تابع $(f+g)(x)$ کدام است؟



مقداردهی به ترکیب توابع

۲۳۸ اگر $f(x) = x + \sqrt{x}$ و $g = \{(1,2), (5,4), (6,5), (2,3)\}$ باشد، عدد a کدام است؟ $g(f(a)) = 5$

- ۱ (۱) ☐ ۲ (۲) ☐ ۳ (۳) ☐ ۴ (۴) ☐

۲۳۹ اگر $f = \{(0,3), (2,-2), (4,1)\}$ و $g = \{(-1,4), (2,3), (4,2)\}$ باشند، تابع $f \circ g + fog$ کدام است؟

- ۱ (۱) ☐ $\{(2,4), (-1,5)\}$ ☐ ۲ (۲) ☐ $\{(2,4), (-1,5)\}$ ☐ ۳ (۳) ☐ $\{(4,0), (-1,3)\}$ ☐ ۴ (۴) ☐ $\{(4,0), (-1,3)\}$ ☐

۲۴۰ توابع $f = \{(2,1), (3,2), (4,5), (1,7)\}$ و $g = \{(1,2), (3,1), (a,3), (b,1)\}$ مفروض اند. اگر $(4,2) \in fog$ و $(4,1) \in g \circ f$ ، آن گاه

دوتایی (a,b) کدام است؟

- ۱ (۱) ☐ $(3,4)$ ☐ ۲ (۲) ☐ $(4,5)$ ☐ ۳ (۳) ☐ $(4,3)$ ☐ ۴ (۴) ☐ $(5,4)$ ☐

۲۴۱ اگر $f(x) = |x-1| + |2x+1|$ و $g(x) = [-x+1]$ باشند، $g(f(\sqrt{3}-1))$ کدام است؟

- ۱ (۱) ☐ -۲ ☐ ۲ (۲) ☐ -۳ ☐ ۳ (۳) ☐ ۱ ☐ ۴ (۴) ☐ ۲ ☐

۲۴۲ اگر $f(x) = |x|$ و $g(x) = x^2 + 2x + 1$ ، آن گاه $(fog)(1-\sqrt{2}) - (gof)(1-\sqrt{2})$ کدام است؟

- ۱ (۱) ☐ $4(1-\sqrt{2})$ ☐ ۲ (۲) ☐ $4(\sqrt{2}-1)$ ☐ ۳ (۳) ☐ ۴ ☐ $2\sqrt{2}$ ☐ ۴ (۴) ☐

۲۴۳ در تابع با ضابطه $f(x) = [x] + [-x] + \sqrt{\sin \pi x - 1}$ ، مقدار $f(-\frac{1}{4}f(x))$ کدام است؟

- ۱ (۱) ☐ -۱ ☐ ۲ (۲) ☐ ۱ ☐ ۳ (۳) ☐ صفر ☐ ۴ (۴) ☐ تعریف نشده ☐

۲۴۴ اگر $f(x) = 2|x| - x$ و $g(x) = f([x + f(x)])$ باشد، $gof(-\frac{5}{3})$ کدام است؟

- ۱ (۱) ☐ ۴ ☐ -۴ ☐ ۲ (۲) ☐ -۶ ☐ ۳ (۳) ☐ -۶ ☐ ۴ (۴) ☐ ۶ ☐

۲۴۵ اگر خروجی ماشین مقابل برابر $\frac{4}{3}$ باشد، مقدار ورودی آن کدام است؟

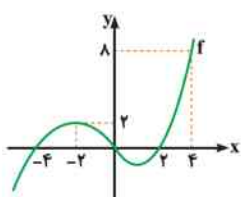


- ۱ (۱) ☐ $\frac{11}{9}$ ☐ ۲ (۲) ☐ $\frac{7}{2}$ ☐ ۳ (۳) ☐ ۴ ☐ ۴ ☐

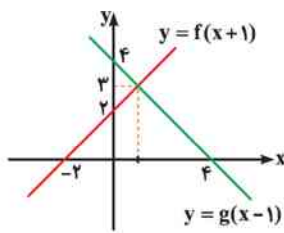
۲۴۶ اگر $f(x) = \begin{cases} x-1 & ; 0 \leq x \leq 2 \\ x+1 & ; -2 \leq x < 0 \end{cases}$ باشد، معادله $f \circ f(x) = 0$ چند ریشه دارد؟

- ۱ (۱) ☐ ۲ (۲) ☐ ۳ (۳) ☐ ۴ (۴) ☐ ۴ ☐

۲۴۷ نمودار تابع $y = f(x)$ به صورت مقابل است. اگر $g(x) = 6 - f(x-3)$ باشد، مقدار $(fog)(1)$ کدام است؟



- ۱ (۱) ☐ ۴ ☐ ۲ (۲) ☐ ۶ ☐ ۳ (۳) ☐ ۲ ☐ ۴ (۴) ☐ ۸ ☐



۲۴۸ نمودار دو تابع $y = f(x+1)$ و $y = g(x-1)$ به صورت مقابل است. مقدار $(g \circ f)(3) + (f \circ g)(-3)$ کدام است؟

- ۵ (۱) ☐
۶ (۲) ☐
۷ (۳) ☐
۸ (۴) ☐

۲۴۹ تابع های $f = \{(a, -2), (-1, b), (1, 0), (3, -4)\}$ و $g(x) = \frac{2x-1}{x+1}$ مفروض اند. اگر gof به صورت $\{-1, c, 1, d\}$ باشد، مقدار bc کدام است؟

- ۱۰ (۴) ☐ ۶ (۳) ☐ ۱۲ (۲) ☐ ۴ (۱) ☐

۲۵۰ اگر $(f \circ g)(x) = x^2 + 3x + 1$ و $(g \circ f)(x) = x^2 - x + 1$ و $f(2) = 1$ باشد، مقدار $f(3)$ کدام است؟

- ۸ (۴) ☐ ۷ (۳) ☐ ۶ (۲) ☐ ۵ (۱) ☐

۲۵۱ اگر $f(x+1) = 2x+1$ و $f(g(x)+x) = 6x+1$ باشد، مقدار $(f \circ g)(3)$ کدام است؟

- ۱۵ (۴) ☐ ۱۳ (۳) ☐ ۱۱ (۲) ☐ ۹ (۱) ☐

۲۵۲ اگر $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1; & x < 2 \\ 3x - 4; & x \geq 2 \end{cases}$ و $g(x) = \begin{cases} f(x+1); & x < 1 \\ f(x-1); & x \geq 1 \end{cases}$ باشد، مقدار $(f \circ g)(1)$ کدام است؟

- ۴ (۴) ☐ ۳ (۳) ☐ ۲ (۲) ☐ ۱ (۱) ☐

ضابطه ترکیب توابع

سرنخ در این بخش، می‌خواهیم با کمک تابع های f و g ، ضابطه تابع fog یا gof رو پیدا کنیم.

۲۵۳ اگر $f(x) = 2 - |x - 2|$ ، ضابطه تابع $f(f(x))$ برابر کدام است؟

- ۲ - $f(x)$ (۴) ☐ $f(x)$ (۳) ☐ $4 - x$ (۲) ☐ x (۱) ☐

۲۵۴ اگر $f(x) = x^2 + 2x$ و $g(x) = x - 3$ و α و β ریشه های معادله $(g \circ f)(x) = 2$ باشند، مقدار $\alpha^2 + \beta^2$ کدام است؟

- ۲ (۴) ☐ ۱۰ (۳) ☐ ۱۴ (۲) ☐ ۸ (۱) ☐

(داخل ۹۶)

۲۵۵ اگر $f(x) = \frac{2x-1}{x+1}$ و $g(x) = \frac{2x+2}{2-x}$ باشند، آنگاه ضابطه تابع gof کدام است؟

- $2x$ (۴) ☐ x (۳) ☐ $x+1$ (۲) ☐ $x-1$ (۱) ☐

۲۵۶ اگر $f(x) = 2(x^2 - x - 3)$ و $g(x) = 3x+1$ باشند، نمودار دو تابع fog و $f(x+3)$ در چند نقطه متقاطع هستند؟

- ۴ غیرمتقاطع (۴) ☐ ۳ (۳) ☐ ۲ (۲) ☐ ۱ (۱) ☐

۲۵۷ در تابع خطی f اگر $(f \circ f)(x) = f(x-3) + f(x+1)$ باشد، مقدار $f(5)$ کدام است؟

- ۸ (۴) ☐ ۷ (۳) ☐ ۶ (۲) ☐ ۵ (۱) ☐

(خارج ۹۷)

۲۵۸ اگر $f(x) = \frac{2x-1}{x+2}$ و $g(x) = x+4$ باشند، جواب معادله $(g \circ f)(x) = (f \circ g)(x)$ کدام است؟

- ۱, ۷ (۴) ☐ -۱, ۷ (۳) ☐ ۱, -۷ (۲) ☐ -۱, -۷ (۱) ☐

۲۵۹ اگر $f(x) = x^2 + x - 2$ و $g(x) = \frac{1}{y}(x-3)$ مجموعه طول نقاطی از منحنی fog که در زیر محور x ها قرار می‌گیرند، برابر کدام بازه است؟

- (۱, ۵) (۲) ☐ (-۱, ۵) (۳) ☐ (-۲, ۱) (۴) ☐ (۱, ۵) (۹۱) ☐

۲۶۰ اگر $f(x) = [x] + [-x]$ و $g(x) = x^2 + 2x + 4$ باشند، مجموعه جواب معادله $(g \circ f)(x) = 3$ کدام است؟

- $\emptyset$ (۴) ☐ $\mathbb{R} - \mathbb{Z}$ (۳) ☐ $\mathbb{Z}$ (۲) ☐ $\mathbb{R}$ (۱) ☐

۲۶۱ اگر $f(x) = x^2 - 7x + 10$ و $g(x) = [x]$ باشد، نمودار تابع fog در بازه $[a, b]$ زیر محور x ها است. بیش ترین مقدار $b - a$ کدام است؟

- ۲ (۴) ☐ ۳ (۳) ☐ ۴ (۲) ☐ ۵ (۱) ☐

۲۶۲ اگر $f(x) = |x-3|$ و $g(x) = |2x-7|$ باشند، مجموع جواب های معادله $(g \circ f)(x) = 1$ کدام است؟

- ۱۲ (۴) ☐ ۱۹ (۳) ☐ ۱۳ (۲) ☐ ۶ (۱) ☐

۲۶۳ اگر $f(x) = x^2 + x$ و $g(x) = \sqrt{4x+1}$ باشند، مساحت ناحیه محدود به نمودار تابع $g \circ f$ و خط به معادله $y = 3$ کدام است؟ (داخل ۹۵)

- ۳ (۱) ☐ ۴ (۲) ☐ ۴/۵ (۳) ☐ ۶ (۴) ☐

۲۶۴ تابع با ضابطه $g(x) = x - \sqrt{x}$ مفروض است. اگر نمودار تابع f محور x را در دو نقطه به طول‌های ۶ و $-\frac{1}{4}$ قطع کند، آنگاه نمودار تابع $f \circ g$ محور x را با کدام طول قطع می‌کند؟ (خارج ۹۴)

- $\frac{1}{9}, 4$ (۱) ☐ $\frac{1}{4}, 9$ (۲) ☐ $4, \frac{1}{4}$ (۳) ☐ $4, 9$ (۴) ☐

۲۶۵ نمودار تابع g محور x را در نقاطی به طول ۱ و $2\sqrt{2}$ قطع می‌کند. اگر $f(x) = x\sqrt{x}$ باشد، اختلاف طول نقاطی که نمودار تابع $g \circ f$ محور x را قطع می‌کند، کدام است؟ (تجربی نوبت اول ۱۴۰۴)

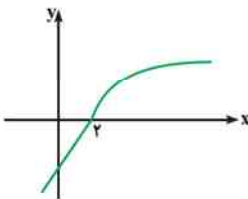
- ۱ (۱) ☐ $\frac{1}{2}$ (۲) ☐ $\sqrt{2}$ (۳) ☐ $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (۴) ☐

۲۶۶ توابع $f(x) = \begin{cases} 3x-12; & x \geq 3 \\ x^2-1; & x < 3 \end{cases}$ و $g(x) = 2x+1$ را در نظر بگیرید. مجموع ریشه‌های معادله $f \circ g(x) = 0$ کدام است؟

- $\frac{1}{3}$ (۱) ☐ $\frac{1}{2}$ (۲) ☐ $\frac{5}{3}$ (۳) ☐ ۲ (۴) ☐

۲۶۷ اگر $f(x) = |\frac{1}{4}x - 1|$ و شکل مقابل نمودار تابع $g(x)$ باشد، معادله $g(f(g(x+2))) = 0$ چند ریشه دارد؟ (ریاضی نوبت اول ۱۴۰۲)

- ۱ (۱) ☐ ۲ (۲) ☐ ۳ (۳) ☐ ۴ (۴) ☐

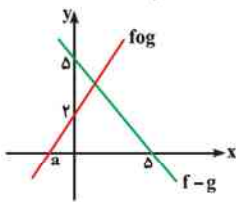


۲۶۸ اگر $f(x) = \begin{cases} 1; & x \geq 0 \\ 0; & x < 0 \end{cases}$ و $g(x) = x^2 - x$ باشد، نمودار دو تابع $y = f \circ g$ و $y = x - f(x)$ در چند نقطه مشترک هستند؟ (شبیه‌ساز تجربی ۱۴۰۰)

- ۱ (۱) ☐ ۲ (۲) ☐ ۳ (۳) ☐ ۴ (۴) ☐

۲۶۹ نمودار دو تابع $f - g$ و $f \circ g$ به صورت مقابل است. اگر $2g(x) = 3f(x) - 14$ باشد، مقدار a کدام است؟

- $\frac{1}{3}$ (۱) ☐ $-\frac{2}{3}$ (۳) ☐ $\frac{2}{3}$ (۲) ☐ $-\frac{1}{3}$ (۴) ☐



بعضی وقتا هم تابع‌های $f \circ g$ و g رو داریم و می‌خوایم ضابطه f رو پیدا کنیم. انواع این سؤالات براتون آوردیم.

۲۷۰ اگر $g(x) = 2x - 1$ و $(f \circ g)(x) = \frac{x}{x-3}$ باشد، مقدار $f(3)$ کدام است؟ (ریاضی داخل ۹۱)

- ۴ (۱) ☐ -۲ (۲) ☐ ۲ (۳) ☐ ۴ (۴) ☐

۲۷۱ اگر $g(x) = 2x + 1$ و $(f \circ g)(x) = 8x^2 + 6x + 5$ باشند، تابع $f(x)$ کدام است؟ (خارج ۹۵)

- $2x^2 + 3x + 1$ (۱) ☐ $2x^2 - 2x + 3$ (۲) ☐ $2x^2 - x + 4$ (۳) ☐ $2x^2 + x + 3$ (۴) ☐

۲۷۲ اگر $f(2x-3) = 4x^2 - 14x + 13$ باشد، ضابطه $f(x)$ برابر کدام است؟ (داخل ۹۷)

- $x^2 - x + 3$ (۱) ☐ $x^2 - 2x - 1$ (۲) ☐ $x^2 - 2x + 1$ (۳) ☐ $x^2 - x + 1$ (۴) ☐

۲۷۳ اگر $f(x-3) = x^2 - 4x + 5$ باشد، آنگاه $f(1-x)$ کدام است؟

- $x^2 + 1$ (۱) ☐ $x^2 + 3$ (۲) ☐ $x^2 + 4x + 5$ (۳) ☐ $x^2 - 4x + 5$ (۴) ☐

۲۷۴ اگر $g(x) = 2x - 3$ و $(f \circ g)(x) = (2x+1)g(x) + 6x$ باشد، معادله محور تقارن تابع $y = f(x)$ کدام است؟

- $x = -2$ (۱) ☐ $x = -7$ (۲) ☐ $x = 5$ (۳) ☐ $x = -3/5$ (۴) ☐

۲۷۵ اگر $f(x) = 2x + 3$ و $g(f(x)) = 8x^2 + 22x + 20$ باشند، ضابطه تابع $f \circ g$ کدام است؟ (ریاضی خارج ۹۲)

- $2x^2 - 7x + 3$ (۱) ☐ $2x^2 - 3x + 7$ (۲) ☐ $4x^2 - 2x + 13$ (۳) ☐ $4x^2 - 4x + 11$ (۴) ☐

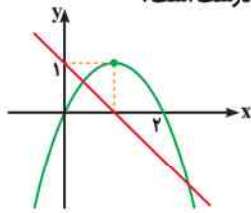
۲۷۶ اگر $(g \circ f)(x) = 3f(x) + 4$ و $(f \circ g)(x) = 2g^2(x) + g(x) + 1$ باشد، کم‌ترین مقدار تابع $(f - g)(x)$ کدام است؟

- ۳ (۱) ☐ $3/5$ (۲) ☐ ۳ (۳) ☐ $-3/5$ (۴) ☐

۲۷۷ اگر $f(x) = 2x^2 + x$ و $(g \circ f)(x) = 6 - 3x - 6x^2$ باشد، نمودار تابع $y = g(x)$ از کدام ناحیه دستگاه مختصات نمی‌گذرد؟

- اول (۱) ☐ دوم (۲) ☐ سوم (۳) ☐ چهارم (۴) ☐

۲۷۸ نمودار تابع درجه دوم $f \circ g$ و تابع خطی g به صورت مقابل است. چه تعداد از عبارت‌های زیر در مورد تابع $y = f(x)$ درست است؟



الف) محور y ها را در دو نقطه با طول مثبت قطع می‌کند.

ب) فقط از ناحیه دوم دستگاه مختصات نمی‌گذرد.

پ) بیش‌ترین مقدار آن برابر ۱ است.

- ۱ (۱) ☐ ۲ (۲) ☐ ۳ (۳) ☐ ۴ (۴) ☐ ۵ (۵) ☐

(شبیه‌ساز تجربی ۹۷ و ۱۴۰۱)

۲۷۹ اگر $f(x^2 - x) = x^4 - 2x^3 + x^2 + 5$ باشد، ضابطه تابع $y = f(x)$ کدام است؟

- ۱ (۱) $2x^2 + 5$ ☐ ۲ (۲) $x^2 + 5$ ☐ ۳ (۳) $x^2 + 5x$ ☐ ۴ (۴) $-x^2 + 5$ ☐

۲۸۰ اگر $f\left(\frac{x^2 - 2}{x}\right) = x^2 + x - 4 - \frac{2}{x} + \frac{4}{x^2}$ باشد، ضابطه $y = f(x)$ کدام است؟

- ۱ (۱) $x^2 - \frac{2}{x}$ ☐ ۲ (۲) $x^2 + \frac{2}{x}$ ☐ ۳ (۳) $x^2 - x$ ☐ ۴ (۴) $x^2 + x$ ☐

توی سؤالای زیر تابع‌های f و g رو داریم و می‌خوایم ضابطه g رو پیدا کنیم.

۲۸۱ دو تابع $f(x) = \frac{x+a}{x-1}$ و $(f \circ g)(x) = \frac{5x-2}{3x+1}$ را در نظر بگیرید. اگر $g(1) = -1$ باشد، مقدار a کدام است؟

- ۱ (۱) ☐ ۲ (۲) ☐ ۳ (۳) ☐ ۴ (۴) ☐

(تجربی خارج ۹۱)

۲۸۲ با توجه به ماشین شکل مقابل، اگر $g(x) = 3x + 4$ باشد، مقدار $f(5)$ کدام است؟



- ۱ (۱) ☐ ۲ (۲) ☐ ۳ (۳) ☐ ۴ (۴) ☐

۲۸۳ اگر $f(x) = 4x^2 + 16x + 18$ و $(f \circ g)(x) = x^2 + 2x + 3$ باشد، ضابطه تابع خطی g با شیب منفی کدام است؟

- ۱ (۱) $-\frac{1}{2}x + 1$ ☐ ۲ (۲) $-x + \frac{5}{2}$ ☐ ۳ (۳) $-\frac{1}{2}x - \frac{5}{2}$ ☐ ۴ (۴) $-\frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$ ☐

۲۸۴ اگر $f(x) = \frac{2x+1}{x+1}$ و $(f \circ g)(x) = \frac{2x}{x+1}$ باشد، تابع $g(x)$ کدام است؟

- ۱ (۱) $\frac{x+1}{2}$ ☐ ۲ (۲) $\frac{x-1}{2}$ ☐ ۳ (۳) $\frac{2x+1}{2}$ ☐ ۴ (۴) $\frac{2x-1}{2}$ ☐

(تجربی خارج ۹۰)

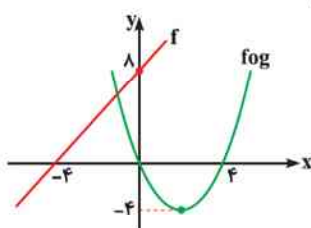
۲۸۵ اگر $f(x) = x^2 - x - 2$ و $f(g(x)) = x^2 + x - 2$ ، آن‌گاه $(f+g)(x)$ کدام گزینه می‌تواند باشد؟

- ۱ (۱) $x^2 - 1$ ☐ ۲ (۲) $x^2 + 1$ ☐ ۳ (۳) $x^2 - 2x$ ☐ ۴ (۴) $x^2 + 2x$ ☐

۲۸۶ اگر f تابعی اکیداً نزولی و $f \circ f(x) = 4x - 3$ و $f \circ g(x) = x^2 - x + 3$ باشند، بیشترین مقدار تابع $y = g(x)$ کدام است؟

- ۱ (۱) $\frac{1}{4}$ ☐ ۲ (۲) $\frac{1}{8}$ ☐ ۳ (۳) $\frac{1}{6}$ ☐ ۴ (۴) $\frac{1}{2}$ ☐

۲۸۷ نمودار تابع خطی f و تابع درجه دوم $f \circ g$ به صورت مقابل است. معادله محور تقارن تابع g کدام است؟



- ۱ (۱) $x = -1$ ☐ ۲ (۲) $x = 1$ ☐ ۳ (۳) $x = -2$ ☐ ۴ (۴) $x = 2$ ☐

دامنه و بُرد، ترکیب توابع

سریخ توی سؤالای دامنه تابع مرکب، خواستون به استفاده از گزینه‌ها باشه. ولی اگر سوال جوری طرح بشه که مجبور بشید دامنه رو پیدا کنید، لازمه اول دامنه تابع f و g رو جداگانه حساب کنید.

۲۸۸ اگر $f(x) = \frac{2x-1}{x-1}$ و $g(x) = \frac{3x-4}{x+2}$ و دامنه تابع $f \circ g$ برابر $\mathbb{R} - \{a, b\}$ باشد، مقدار $a + b$ کدام است؟

- ۱ (۱) ☐ $\frac{1}{2}$ (۲) ☐ $\frac{3}{4}$ (۳) ☐ ۲ (۴) ☐

۲۸۹ اگر $f(x) = \sqrt{5-x}$ و $g(x) = x^2 + 4x$ باشند و دامنه تابع $f \circ g$ به صورت بازه $[a, b]$ باشد، مقدار $a \times b$ کدام است؟

- ۱ (۱) ☐ -۳ (۲) ☐ -۵ (۳) ☐ ۳ (۴) ☐ ۵

(داخل ۹۶)

۲۹۰ اگر $f(x) = \frac{1+x^2}{1-x^2}$ و $g(x) = \sqrt{x-x^2}$ باشند، دامنه تابع $g \circ f$ کدام است؟

- ۱ (۱) ☐ $(0, 1)$ (۲) ☐ $\{0\}$ (۳) ☐ $(-1, 1)$ (۴) ☐ $\mathbb{R} - \{0, -1\}$

۲۹۱ اگر $f(x) = \sqrt{x+|x|}$ و $g(x) = \frac{1}{x^2-4x}$ باشند، دامنه تابع $g \circ f$ کدام است؟

- ۱ (۱) ☐ $(0, 8) \cup (8, +\infty)$ (۲) ☐ $\mathbb{R} - \{0, 8\}$ (۳) ☐ $\mathbb{R} - \{0\}$ (۴) ☐ $(0, +\infty)$

۲۹۲ اگر $f(x) = \sqrt{3-x}$ و $g(x) = \log_2(x^2+2x)$ باشند، دامنه تابع $f \circ g$ کدام است؟

- ۱ (۱) ☐ $[-2, 4]$ (۲) ☐ $[-2, 0]$ (۳) ☐ $[-4, -1] \cup (1, 2]$ (۴) ☐ $[-4, -2) \cup (0, 2]$

(خارج ۹۴)

۲۹۳ اگر $f(x) = \frac{x}{\sqrt{-x^2+x+2}}$ و $g(x) = (\frac{1}{x})^x$ باشند، دامنه تابع $f \circ g$ کدام است؟

- ۱ (۱) ☐ $(-\frac{1}{2}, +\infty)$ (۲) ☐ $(\frac{1}{2}, +\infty)$ (۳) ☐ $(-2, 0)$ (۴) ☐ $(-1, \frac{1}{2})$

۲۹۴ اگر $f(x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$ و $g(x) = \tan x; |x| < \frac{\pi}{4}$ باشد، دامنه تابع $f \circ g$ کدام است؟

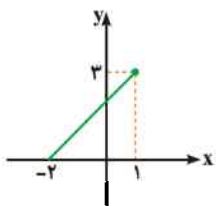
- ۱ (۱) ☐ $[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$ (۲) ☐ $(-1, 0) \cup (0, 1)$ (۳) ☐ $(-\frac{\pi}{4}, 0) \cup (0, \frac{\pi}{4})$ (۴) ☐ $[-1, 1]$

۲۹۵ اگر $f(2x+1) = 3x-2$ و $g(x) = 4x-3$ باشد، آنگاه دامنه تابع $f \circ g$ کدام است؟

- ۱ (۱) ☐ $[-1, 3]$ (۲) ☐ $(\frac{5}{3}, \frac{5}{2})$ (۳) ☐ $(\frac{1}{2}, \frac{5}{3})$ (۴) ☐ $(\frac{5}{3}, \frac{13}{3})$

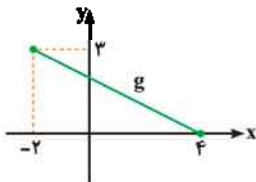
۲۹۶ نمودار تابع $y = f(x)$ به صورت مقابل است. دامنه تابع $y = (f \circ f)(x)$ شامل چند عدد صحیح است؟

- ۱ (۱) ☐ ۲ (۲) ☐ ۴ (۳) ☐ بی شمار (۴) ☐



۲۹۷ اگر $f(x) = \frac{x+1}{\sqrt{-x^2+6x-8}}$ و نمودار تابع g به صورت مقابل باشد، دامنه تابع $f \circ g$ شامل چند عدد صحیح است؟

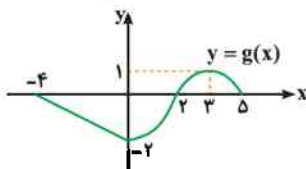
- ۱ (۱) ☐ ۲ (۲) ☐ ۳ (۳) ☐ ۶ (۴) ☐ ۷



سریخ سؤالات زیر مربوط به بُرد تابع $f \circ g$ هستند. برای حل این سؤال، حتماً به نمودار تابع f (تابع بیرونی) توجه کنید.

۲۹۸ تابع f با دامنه $[0, 3]$ و بُرد $[-2, 2]$ را در نظر بگیرید. اگر نمودار تابع g به صورت زیر باشد، بُرد تابع $g \circ f$ شامل چند عدد صحیح است؟

- ۱ (۱) ☐ ۲ (۲) ☐ ۳ (۳) ☐ ۴ (۴) ☐



(داخل ۹۹)

۳۹۹ اگر $f(x) = 2x - [2x]$ و $g(x) = -x^2 + 4x$ باشند، بُرد تابع gof کدام است؟

- (۱) $(0, 2)$ (۲) $(0, 3)$ (۳) $(0, 4)$ (۴) $(1, 4)$

(خارج ۹۹)

۳۰۰ اگر $f(x) = [x] - x$ و $g(x) = \frac{1-2x}{x+1}$ باشند، بُرد تابع gof ، کدام است؟

- (۱) $(-1, 1)$ (۲) $(-1, 1]$ (۳) $(1, +\infty)$ (۴) $(-\infty, 1]$

۳۰۱ iq دو تابع $f(x) = \log_2^x$ و $g(x) = \lambda x - x^2$ را در نظر بگیرید. اگر مجموعه A و B به ترتیب دامنه و بُرد تابع fog باشند، مجموعه $A \cap B$ دارای چند عضو صحیح است؟

- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵

۳۰۲ iq بُرد تابع $f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(1 - \cos^2 x)$ کدام است؟

- (۱) $(0, +\infty)$ (۲) $(0, +\infty)$ (۳) $(0, \frac{1}{2})$ (۴) $(0, 1]$

۳۰۳ اگر $f(x) = |2x - 3| + 1$ و $g(x) = 1 + 2\sin^2 x$ باشند، بُرد تابع fog کدام است؟

- (۱) $[2, 4]$ (۲) $[1, 3]$ (۳) $[1, 4]$ (۴) $[0, 3]$

۳۰۴ iq اگر $f(x) = \log_2^x + \log_3^x$ و $g(x) = 3^{x+1}$ باشد، بُرد تابع gof کدام است؟

- (۱) $(0, +\infty)$ (۲) $(0, 3] \cup [27, +\infty)$ (۳) $(0, \frac{1}{27}] \cup [\frac{1}{3}, +\infty)$ (۴) $(0, \frac{1}{3}] \cup [27, +\infty)$

وضعیت صعودی و نزولی توابع مرکب

۳۰۵ اگر $f = \{(1, 3), (2, -1), (3, 0), (0, 1)\}$ و $g = \{(-1, 4), (0, 1), (3, 2)\}$ باشند، چه تعداد از توابع زیر غیریکنوا هستند؟

- الف fog ب fof پ gof
(۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

۳۰۶ اگر f تابعی اکیداً صعودی با دامنه $(-6, 4]$ باشد، دامنه تابع $y = \frac{x}{\sqrt{f(x+2)} - f(3-2x)}$ شامل چند عدد صحیح است؟

- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۵ (۴) ۷

۳۰۷ iq اگر f تابعی اکیداً صعودی با دامنه $\mathbb{R}$ باشد، دامنه تابع $y = \frac{2x+5}{\sqrt{f(4-|x|)} - f(|x-2|)}$ شامل چند عدد طبیعی است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۳۰۸ iq تابع f اکیداً نزولی و دامنه آن مجموعه‌ای از مقادیر منفی است. اگر $f(m^2 - m - 5) < f(-3 + 2m - m^2)$ باشد، m دارای چند مقدار

(ریاضی داخل ۱۴۰۲)

صحیح است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) صفر

۳۰۹ iq اگر $f(x)$ تابعی اکیداً نزولی با دامنه $[-4, 5]$ باشد، دامنه تابع $y = \log(f(x+1) - f(2-x))$ کدام است؟

- (۱) $(0, 5, 6]$ (۲) $[-4, 0, 5)$ (۳) $(0, 5, 5]$ (۴) $[-3, 0, 5)$

۳۱۰ نمودار تابع اکیداً صعودی $y = f(x)$ از نقطه $A(6, 3)$ می‌گذرد. اگر $g(x) = x^2 - x$ باشد، مجموعه جواب نامعادله $(\text{fog})(x) \leq 3$ شامل

(شبه‌ساز کنکور ۱۴۰۲)

چند عدد صحیح است؟

- (۱) ۵ (۲) ۳ (۳) ۷ (۴) ۶

۳۱۱ iq تابع اکیداً نزولی $y = f(x)$ با دامنه $[0, 4]$ و بُرد $[1, 4]$ را در نظر بگیرید. اگر $f(2) = 3$ و $f^{-1}(2) = 3$ باشد، مجموعه جواب نامعادله

(شبه‌ساز کنکور ۱۴۰۲)

$1 \leq (\text{fof})(x) \leq 2$ شامل چند عدد صحیح است؟

- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵

(شبه‌ساز کنکور ۱۴۰۲)

۳۱۲ TNT اگر $f(x) = x + \sqrt{x} - 2$ باشد، مجموعه جواب نامعادله $\text{fof}(x) \leq f(\sqrt{x})$ شامل چند عدد صحیح است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

فصل اول

درس ششم:

تابع یک به یک و تابع وارون

CHAPTER 1

سریع مقدمه بخش وارون تابع، شناسایی یک به یکی توابع است.

 ۳۱۳ اگر رابطه $f = \{(1, 4), (4, 5), (1, a^2 + 3a), (b, |2a + 3|)\}$ نمایش دهنده یک تابع یک به یک باشد، مقدار $b + a$ کدام می تواند باشد؟

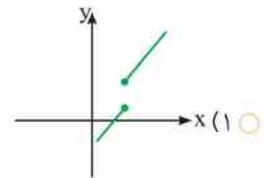
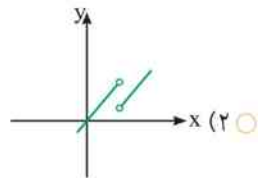
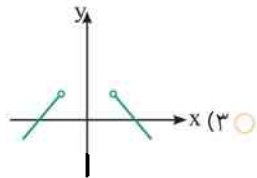
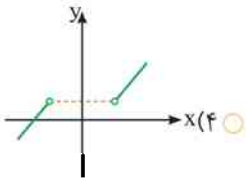
۴ (۴)

۵ (۳)

۹ (۲)

۶ (۱)

۳۱۴ کدام یک از نمودارهای زیر، نمایش تابعی یک به یک است؟



۳۱۵ کدام جمله صحیح است؟

(۱) جمع دو تابع یک به یک، قطعاً تابعی یک به یک است.

(۲) تابع با دامنه ۳ عضوی و برد ۲ عضوی، قطعاً غیر یک به یک است.

 (۳) اگر f تابعی یک به یک باشد، f^K ($K \in \mathbb{N}$) نیز تابعی یک به یک است.

 (۴) اگر $|f|$ تابعی یک به یک باشد، f می تواند یک به یک نباشد.

۳۱۶ کدام تابع زیر یک به یک است؟

$$y = 2|x| - x \quad (۴)$$

$$y = |2x| - 2x \quad (۳)$$

$$y = |x| + 2x \quad (۲)$$

$$y = |2x| + x \quad (۱)$$

۳۱۷ کدام تابع زیر یک به یک است؟

$$y = [x + [x]] \quad (۴)$$

$$y = x[x] \quad (۳)$$

$$y = x + [x] \quad (۲)$$

$$y = x - [x] \quad (۱)$$

۳۱۸ کدام تابع زیر یک به یک است؟

$$y = \sqrt{|x| - 2} \quad (۴)$$

$$y = |\sqrt{x} - 2| \quad (۳)$$

$$y = x^3 + 2x \quad (۲)$$

$$y = x^2 + 2x \quad (۱)$$

۳۱۹ کدام تابع غیر یک به یک است؟

$$y = \left(\frac{2}{3}\right)^x \quad (۴)$$

$$x + y + 1 = 0 \quad (۳)$$

$$y = \sqrt[3]{x - 5} \quad (۲)$$

$$y = x^3 - 4x + 1 \quad (۱)$$

 ۳۲۰ تابع با ضابطه $y = |x^3|$ چگونه است؟

(۱) نزولی

(۲) صعودی

(۴) یک به یک

(۳) غیر یک به یک

۳۲۱ کدام تابع زیر یک به یک نیست؟

$$y = \sqrt{x} + x^4 \quad (۴)$$

$$y = \log x + x^3 \quad (۳)$$

$$y = x + \left(\frac{1}{x}\right)^x \quad (۲)$$

$$y = \sqrt[3]{x} + x \quad (۱)$$

 ۳۲۲ اگر $f(x) = m^2x^2 + 2x - x^2 + m$ تابعی همواره یک به یک باشد، حداکثر مقدار $f(3/5)$ کدام است؟

۹ (۴)

۸ (۳)

۷ (۲)

۶ (۱)

(داخل ۹۵)

۳۳۳ iq تابع $f(x) = ax^2 - (a+2)x + 3 - a$ در بازه $(-2, -1)$ یک به یک است. حدود a کدام است؟

- ☐ (۱) $R - (-\frac{2}{3}, -\frac{2}{5})$
☐ (۲) $(-\frac{2}{3}, -\frac{2}{5})$
☐ (۳) $[-\frac{2}{3}, -\frac{2}{5}]$
☐ (۴) $R - [-\frac{2}{3}, -\frac{2}{5}]$

۳۳۴ به ازای کدام مقدار b ، تابع $y = \frac{2x+b}{x+3+b}$ غیر یک به یک است؟

- ☐ (۱) -3
☐ (۲) -6
☐ (۳) -4
☐ (۴) -1

۳۳۵ اگر تابع $f(x) = 2x + m^2x - 3mx + 1$ همواره غیر یک به یک باشد، m کدام می تواند باشد؟

- ☐ (۱) -1
☐ (۲) $+2$
☐ (۳) $+3$
☐ (۴) -4

۳۳۶ اگر $f(x) = \begin{cases} 2x+1 & x \geq 1 \\ x+a & x < 1 \end{cases}$ تابعی یک به یک باشد، a چند مقدار طبیعی می تواند داشته باشد؟

- ☐ (۱) 1
☐ (۲) 2
☐ (۳) 3
☐ (۴) صفر

۳۳۷ اگر $g(x) = \begin{cases} x^2 - 5 & x > 2 \\ \sqrt{x-a} & a \leq x \leq 2 \end{cases}$ تابعی یک به یک باشد، حداقل مقدار a کدام است؟

- ☐ (۱) -5
☐ (۲) -4
☐ (۳) -7
☐ (۴) -6

۳۳۸ به ازای کدام مقادیر k تابع $f(x) = \begin{cases} 4x+1 & x > k \\ x-5 & x \leq k \end{cases}$ یک به یک نیست؟

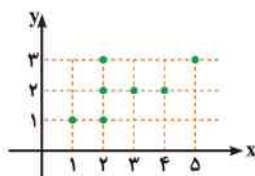
- ☐ (۱) $[1, 2]$
☐ (۲) $(-\infty, -2)$
☐ (۳) $(3, 4]$
☐ (۴) $[0, 1]$

۳۳۹ iq تابع $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x-b} & b \leq x \leq 0 \\ \sqrt{x+a} & x > 0 \end{cases}$ یک به یک است. کدام یک می تواند (a, b) باشد؟

- ☐ (۱) $(2, -4)$
☐ (۲) $(4, 2)$
☐ (۳) $(-2, 4)$
☐ (۴) $(-2, -4)$

سرنخ ممکنه تابعی یک به یک نباشه، اما با محدود کردن دامنه بشه ارزش تابعی یک به یک ساخت.

۳۳۵ با حذف حداقل چند نقطه از نمودار مقابل یک تابع یک به یک خواهیم داشت؟



- ☐ (۱) 1
☐ (۲) 2
☐ (۳) 3
☐ (۴) 4

۳۳۱ دامنه تابع $f(x) = 2x^2 - 16x + \sqrt{x}$ را به کدام بازه زیر محدود کنیم تا تابعی یک به یک باشیم؟

- ☐ (۱) $[-6, 6]$
☐ (۲) $(-\infty, 5]$
☐ (۳) $(3, 6]$
☐ (۴) $[5, +\infty)$

۳۳۲ تابع $f(x) = (2x+1)^2 + 2(3x-1) - 3$ در بازه $(-\infty, m]$ یک به یک است. بیشترین مقدار m کدام است؟

- ☐ (۱) $-1/5$
☐ (۲) $-1/25$
☐ (۳) -1
☐ (۴) $-1/75$

۳۳۳ تابع $f(x) = \sin(\frac{x}{y})$ در کدام دامنه زیر یک به یک است؟

- ☐ (۱) $(\frac{\pi}{y}, \frac{3\pi}{y})$
☐ (۲) $(0, 2\pi)$
☐ (۳) $(\frac{2\pi}{y}, \frac{3\pi}{y})$
☐ (۴) $(0, \pi)$

۳۳۴ تابع $f(x) = ||x^2 - 1| - 1|$ با کدام دامنه زیر یک به یک است؟

- ☐ (۱) $[-1, 1]$
☐ (۲) $[-\sqrt{2}, -1]$
☐ (۳) $[0, \sqrt{2}]$
☐ (۴) $[1, +\infty)$

۳۳۵ بازه $[a, b]$ بزرگترین بازه ای است که تابع $f(x) = |2x-4| + |2x| + 1$ در آن یک به یک نیست. این بازه شامل چند عدد صحیح است؟

- ☐ (۱) 1
☐ (۲) 2
☐ (۳) 3
☐ (۴) صفر

۳۳۶ تابع $f(x) = |x-a| + a$ در بازه $[1, 5]$ یک به یک است. حدود a در کدام گزینه آمده است؟

- ☐ (۱) $IR - (-5, -1)$
☐ (۲) $IR - (-5, 0)$
☐ (۳) $IR - (1, 5)$
☐ (۴) $IR - \{1, 5\}$

۳۳۷ اگر $g(x)$ تابعی یک به یک با دامنه $\mathbb{R}$ باشد، دامنه تابع با ضابطه $f(x) = \frac{3x+4}{g(x)-g(x^2-3)}$ شامل چند عدد حقیقی نیست؟

- ۱ (۱) ☐ ۲ (۲) ☐ ۳ (۳) ☐ ۴ (۴) ☐

۳۳۸ اگر f تابع یک به یک روی مجموعه اعداد حقیقی باشد، معادله $f(2^x) = f(x^2)$ چند جواب مثبت دارد؟

- ۱ (۱) ☐ ۲ (۲) ☐ ۳ (۳) ☐ ۴ (۴) ☐

تایع وارون

سریخ توی بعضی سؤالا، از تعریف تایع وارون سؤال می پرسن، چند تا با هم ببینیم.

۳۳۹ وارون تابع $y = x^3 - x + 1$ از کدام نقطه عبور می کند؟ (داخل ۱۴۰۱)

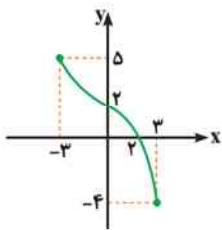
- ۱ (۱) ☐ $(-1, -2)$ ☐ $(\frac{5}{8}, \frac{1}{2})$ ☐ $(1, 2)$ ☐ $(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{8})$ ☐ ۴ (۴) ☐

۳۴۰ اگر نقطه $(-\frac{1}{8}, -\frac{3}{5})$ روی تایع وارون تایع $y = \frac{x}{a+a|x|}$ باشد، مقدار a کدام است؟ (تجربی نوبت دوم ۱۴۰۳)

- ۱ (۱) ☐ $\frac{5}{27}$ ☐ ۵ (۲) ☐ ۳ (۳) ☐ $\frac{3}{5}$ ☐ ۴ (۴) ☐

۳۴۱ نمودار تایع f با دامنه $[-3, 3]$ به صورت مقابل است. اگر $\frac{f^{-1}(5)}{f(a)+f^{-1}(0)} = -\frac{3}{4}$ باشد، مقدار a کدام است؟

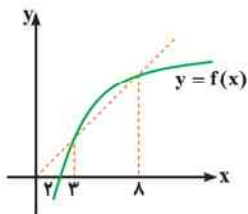
- ۱ (۱) ☐ صفر ☐ ۱ (۲) ☐ -1 (۳) ☐ $\frac{1}{2}$ (۴) ☐



۳۴۲ شکل زیر، نمودار تایع $y = f(x)$ و نیمساز ناحیه اول و سوم را نشان می دهد. دامنه تابع با ضابطه

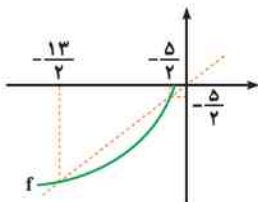
$$y = \sqrt{x - f^{-1}(x)}$$

- ۱ (۱) ☐ $(0, 2]$ ☐ $[2, 3]$ (۲) ☐ $[2, 8]$ (۳) ☐ $[3, 8]$ (۴) ☐



۳۴۳ شکل زیر، نمودار تایع f را نشان می دهد. دامنه تابع $y = \sqrt{\frac{f^{-1}(x)}{x - f^{-1}(x)}}$ شامل چند عدد صحیح است؟ (تجربی نوبت دوم ۱۴۰۳)

- ۱ (۱) ☐ ۲ (۲) ☐ ۴ (۳) ☐ ۵ (۴) ☐



سریخ این قسمت مبحث پر تکرار کنکورهای اخیر که باید مقدار تایع وارون رو در یک نقطه پیدا کنید. توی سه چهار سؤال اول نکته ها را یاد می گیرین، بعدش کلی تست قشنگارو می خونیم.

۳۴۴ فرض کنید $g(x)$ وارون تابع $f(x) = -x + \sqrt{-2x}$ باشد. حاصل $g(4) - g(12)$ کدام است؟ (شبیه ساز تجربی ۹۹)

- ۱ (۱) ☐ -10 ☐ ۶ (۲) ☐ 10 ☐ -6 (۴) ☐

۳۴۵ اگر $g(x)$ وارون تابع $f(x) = 1 + x - 2\sqrt{x}$, $x \geq 1$ باشد، $(g \circ g)(1)$ کدام است؟ (نوبت اول ۱۴۰۲)

- ۱ (۱) ☐ ۴ (۲) ☐ ۹ (۳) ☐ صفر (۴) ☐

۳۴۶ اگر $f(x-1) = \log_3^{(x+1)}$ و $g(x) = 2\cos(\frac{\pi x}{2})$ باشد، مقدار $(f^{-1} \circ g)(4)$ کدام است؟

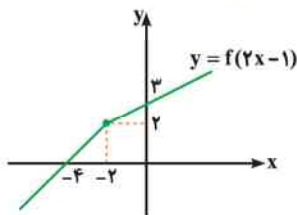
- ۷ (۴) ☐ -۱ (۳) ☐ ۲ (۲) ☐ ۱ (۱) ☐

۳۴۷ اگر $f^{-1}(x) = \frac{x}{1+|x|}$ و $g(x) = \sqrt{x} - 1$ باشد، حاصل $(f + g^{-1})(-\frac{2}{5})$ کدام است؟

- $-\frac{11}{75}$ (۴) ☐ $-\frac{23}{75}$ (۳) ☐ $-\frac{11}{25}$ (۲) ☐ $-\frac{23}{25}$ (۱) ☐

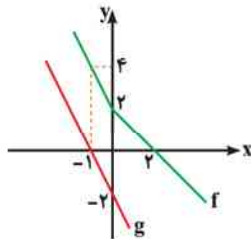
۳۴۸ اگر $f(x) = \begin{cases} 6-2x; & x < 2 \\ 4-x; & x \geq 2 \end{cases}$ و $g(x) = \begin{cases} 2x-3; & x < 0 \\ x-4; & x \geq 0 \end{cases}$ باشد، مقدار $f \circ g^{-1}(-5) + g \circ f^{-1}(-2)$ کدام است؟

- ۱۲ (۴) ☐ ۱۰ (۳) ☐ ۸ (۲) ☐ ۷ (۱) ☐



۳۴۹ نمودار تابع $y = f(2x-1)$ به صورت مقابل است. مقدار $\frac{f^{-1}(2) + f^{-1}(3)}{f(-5)}$ کدام است؟

- ۷ (۱) ☐ ۲ (۲) ☐ -۳ (۳) ☐ ۵ (۴) ☐



۳۵۰ با توجه به نمودارهای دو تابع f و g در شکل مقابل، حاصل $g \circ f^{-1}(-2) + g^{-1} \circ f(-1)$ چقدر است؟

(شبه‌ساز خارج ۱۴۰۱)

- ۱۶ (۱) ☐ -۱۴ (۲) ☐ -۱۳ (۳) ☐ -۱ (۴) ☐

۳۵۱ به ازای کدام مقدار a ، نمودار تابع وارون تابع $f(x) = x^3 + 6x^2 + ax + 1$ خط $10y - x = -10$ را در نقطه‌ای به عرض ۱ قطع می‌کند؟

- ۵ (۴) ☐ ۹ (۳) ☐ ۱۲ (۲) ☐ ۱۵ (۱) ☐

۳۵۲ وارون تابع $f(x) = \sqrt{x-2}\sqrt{mx-1}$ در دامنه محدود، خط $y = 12 - x$ را در نقطه‌ای به عرض ۱۰ قطع می‌کند. مقدار $f(m+4)$ کدام است؟

- ۱ (۴) ☐ ۲ (۳) ☐ $\frac{1}{f}$ (۲) ☐ $\frac{1}{f}$ (۱) ☐

۳۵۳ وارون تابع $y = x^2 + \sqrt{b-ax}$ خط $y = x - 4$ را در نقطه $(a, -1)$ قطع می‌کند. مقدار $a - b$ کدام است؟

(تجربی نوبت اول ۱۴۰۴)

- ۴ (۴) ☐ ۲ (۳) ☐ -۴ (۲) ☐ -۲ (۱) ☐

۳۵۴ دو تابع با ضابطه‌های $(2, 5), (3, 4), (1, 6), (4, 7), (8, 1)$ و $f(x) = 2x - 5$ و $g = \{(2, 5), (3, 4), (1, 6), (4, 7), (8, 1)\}$ باشد، $(f^{-1} \circ g)(a) = 6$ اگر a کدام است؟

- ۴ (۴) ☐ ۳ (۳) ☐ ۲ (۲) ☐ ۱ (۱) ☐

۳۵۵ اگر $f = \{(\frac{1}{9}, -1), (\frac{1}{3}, 1), (-\frac{1}{4}, 3), (\frac{1}{4}, -3)\}$ و $g(x) = -|x|\sqrt{x}$ و $f \circ g^{-1}(a) = -3$ باشد، مقدار a کدام است؟

(تجربی نوبت اول ۱۴۰۳)

- $\frac{1}{8}$ (۴) ☐ $-\frac{1}{8}$ (۳) ☐ $\frac{1}{9}$ (۲) ☐ $-\frac{1}{9}$ (۱) ☐

۳۵۶ اگر $f(x) = \begin{cases} \sqrt{5x+9}; & x \geq 3 \\ 2x-x^2; & x < 3 \end{cases}$ و $g = \{(5, 2), (7, 3), (1, 4), (3, 6), (9, 1)\}$ مفروض‌اند. اگر $(f^{-1} \circ g^{-1})(a) = 8$ باشد، a کدام است؟

- ۷ (۴) ☐ ۶ (۳) ☐ ۳ (۲) ☐ ۲ (۱) ☐

۳۵۷ دو تابع $f = \{(2, 5), (6, 3), (3, 7), (4, 1), (1, 9)\}$ و $g(x) = \frac{x}{x-1}$ مفروض‌اند. اگر $f^{-1}(g(2a)) = 6$ باشد، a کدام است؟

- $\frac{5}{2}$ (۴) ☐ $\frac{3}{2}$ (۳) ☐ $\frac{3}{f}$ (۲) ☐ $\frac{1}{f}$ (۱) ☐

(خارج ۹۸)

۳۵۸ اگر $f(x) = \frac{2}{5}x - 4$ و $g(x) = x^3 + x$ باشند، مقدار $(g^{-1} \circ f^{-1})(8)$ کدام است؟

- ۳ (۴) ☐ $2/5$ (۳) ☐ ۲ (۲) ☐ $1/5$ (۱) ☐

(ریاضی داخل ۹۹)

 ۳۵۹ اگر $f(x) = x + \sqrt{x}$ و $g(x) = \frac{9x+6}{1-x}$ باشند، مقدار $(g^{-1} \circ f^{-1})(20)$ کدام است؟

- ☐ ۱) $\frac{2}{5}$ ☐ ۲) $\frac{3}{5}$ ☐ ۳) $\frac{4}{3}$ ☐ ۴) $\frac{3}{4}$

 ۳۶۰ اگر $f(x) = \frac{2x+1}{3}$ و $g(x) = \frac{2x+a}{a-x}$ باشند و $(fog^{-1})(-1) = -\frac{11}{3}$ باشد، مقدار a کدام است؟

- ☐ ۱) ۱ ☐ ۲) ۲ ☐ ۳) ۳ ☐ ۴) ۴

(ریاضی داخل ۹۸)

 ۳۶۱ اگر $f = \{(1,2), (2,5), (3,4), (4,6)\}$ و $g = \{(2,3), (4,2), (5,6), (3,1)\}$ باشند. تابع $\frac{g}{g \circ f^{-1}}$ کدام است؟

- ☐ ۱) $\{(4,2), (5,2)\}$ ☐ ۲) $\{(4,2), (3,5)\}$ ☐ ۳) $\{(5,2), (2,4)\}$ ☐ ۴) $\{(3,5), (2,4)\}$

 ۳۶۲ اگر $f = \{(1,2), (2,5), (3,4), (4,6)\}$ و $g = \{(2,3), (4,2), (5,6), (3,1)\}$ دوتا تابع باشند، بُرد تابع $f - (g^{-1} \circ f)$ کدام است؟

- ☐ ۱) $\{-1, 4\}$ ☐ ۲) $\{2, 3\}$ ☐ ۳) $\{3, 4\}$ ☐ ۴) $\{2, -1\}$

(ریاضی خارج ۹۸)

 ۳۶۳ اگر $f(x+1) = \frac{g(x)-1}{x}$ و $g^{-1}(x) = 1-x$ باشند، مقدار $(fog)(2)$ کدام است؟

- ☐ ۱) -۱ ☐ ۲) ۲ ☐ ۳) -۳ ☐ ۴) -۵

 ۳۶۴ اگر $f(x) = x^2 + 4x + 15$ و $(fog)(x) = x^3 g(x) + 4g(x)$ باشد، مقدار $g^{-1}(3)$ کدام است؟

- ☐ ۱) ۲ ☐ ۲) ۶ ☐ ۳) ۳ ☐ ۴) ۱

 ۳۶۵ اگر $f(a) = b$ باشد، همیشه نتیجه گرفت $f^{-1}(b) = a$ هستش! این ویژگی در حالت کلی تر هم قابل استفاده است.

 ۳۶۵ اگر $f(x^3 + 2x) = 2^x - 14$ باشد، مقدار $f^{-1}(2)$ کدام است؟

- ☐ ۱) ۱۶ ☐ ۲) ۱۴ ☐ ۳) ۷۲ ☐ ۴) ۵۴

 ۳۶۶ اگر $f^{-1}\left(\frac{x+2}{x-1}\right) = x^3 - 1$ باشد، مقدار $f(7)$ کدام است؟

- ☐ ۱) ۱ ☐ ۲) ۲ ☐ ۳) ۳ ☐ ۴) ۴

 ۳۶۷ تابع f با ضابطه $f(x) = x - \frac{1}{2x}$ بر دامنه $(0, +\infty)$ مفروض است. نمودار تابع f^{-1} نیمساز ناحیه دوم را با کدام طول قطع می کند؟

- ☐ ۱) $-\frac{3}{2}$ ☐ ۲) $-\frac{3}{4}$ ☐ ۳) -۱ ☐ ۴) $-\frac{1}{2}$

(تجربی خارج ۹۹ و مشابه داخل ۹۹)

 ۳۶۸ اگر $g(x) = f(x) + \sqrt{f(x)}$ و $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{2x}$ باشند، آنگاه حاصل $g^{-1}(6)$ کدام است؟

- ☐ ۱) ۱ ☐ ۲) ۲ ☐ ۳) ۳ ☐ ۴) ۴

(داخل ۸۹)

 ۳۶۹ اگر $g(x) = f(3x-4)$ و $f^{-1}(x) = x + \sqrt{x}$ باشند، حاصل $g^{-1}(16)$ کدام است؟

- ☐ ۱) ۵ ☐ ۲) ۶ ☐ ۳) ۷ ☐ ۴) ۸

محاسبه ضابطه تابع وارون

 این بخش رو با وارون کردن تابع های خطی شروع می کنیم. فقط کافیہ جای x و y رو عوض کنید!

(داخل ۹۷)

 ۳۷۰ قرینه خطی به معادله $3y - 2x = 4$ را نسبت به خط $y = x$ ، خط d می نامیم. عرض از مبدأ خط d کدام است؟

- ☐ ۱) -۲ ☐ ۲) -۱ ☐ ۳) ۱ ☐ ۴) ۲

 ۳۷۱ نمودار وارون تابع $f(x) = \frac{x-3}{2}$ را در راستای محور y ها، 6 واحد به سمت پایین انتقال می دهیم. اگر A نقطه تلاقی نمودار منحنی حاصل با نمودار f باشد، فاصله A از مبدأ مختصات کدام است؟

- ☐ ۱) $2\sqrt{5}$ ☐ ۲) $\sqrt{5}$ ☐ ۳) $2\sqrt{2}$ ☐ ۴) $\sqrt{2}$

 ۳۷۲ فاصله نقطه $A(7,1)$ از نمودار وارون تابع $f(x) = \frac{2}{3}x + 2$ کدام است؟

- ☐ ۱) $\sqrt{7}$ ☐ ۲) $\sqrt{11}$ ☐ ۳) $\sqrt{13}$ ☐ ۴) $\sqrt{15}$

۳۷۳ تابع $f(x) = 2x - 1$ را در نظر بگیرید. اگر $f(x) - f^{-1}(x) = g(x + 1)$ باشد، نمودار تابع $y = g(x)$ از کدام ناحیه دستگاه مختصات نمی‌گذرد؟

- (۱) اول (۲) دوم (۳) سوم (۴) چهارم

۳۷۴ ضابطه وارون تابع $f(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 3}$ به کدام صورت است؟

- (۱) $y = x - 2; x \neq 3$ (۲) $y = x - 2; x \neq 1$ (۳) $y = x + 2; x \neq 3$ (۴) $y = x + 2; x \neq 1$

۳۷۵ اگر دو خط به معادلات $ax + by = 8$ و $2x - 3y = b$ نسبت به نیمساز ربع اول متقارن باشند، $a + b$ کدام است؟

- (۱) ± 3 (۲) ± 2 (۳) $2, -3$ (۴) $-2, 3$

۳۷۶ iq تابع خطی f با ضابطه $f(x) = \frac{3x-1}{a}$ را در نظر بگیرید. اگر $f(3f^{-1}(x)) = 3x + 5$ باشد، مقدار a کدام است؟

- (۱) $\frac{3}{5}$ (۲) $\frac{2}{5}$ (۳) $-\frac{3}{5}$ (۴) $-\frac{2}{5}$

سریخ تست‌های زیر مربوط به وارون کردن تابع‌های رادیکالی و درجه دوم و درجه سوم است. توی این سؤال‌ها به محدود کردن دامنه توجه کنید.

۳۷۷ ضابطه وارون تابع $y = 2 - \sqrt{x-1}$ به کدام صورت است؟

- (۱) $y = x^2 - 4x + 5; x \leq 2$ (۲) $y = -x^2 + 4x - 5; x \leq 2$

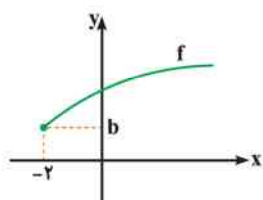
- (۳) $y = x^2 - 4x + 5; x \geq 1$ (۴) $y = -x^2 + 4x - 5; x \geq 1$

۳۷۸ قرینه نمودار تابع $y = 2 + \sqrt{x-1}$ را نسبت به خط $y = x$ رسم کرده و سپس نمودار حاصل را ۲ واحد در جهت مثبت محور x ها و ۳ واحد در جهت منفی محور y ها انتقال می‌دهیم و آن را $y = g(x)$ می‌نامیم. مقدار $g(4)$ کدام است؟

(تجربی داخل ۱۴۰۰)

- (۱) ۳ (۲) -3 (۳) -2 (۴) -4

۳۷۹ نمودار تابع $f(x) = 1 + \sqrt{x+a}$ به صورت زیر است. نمودار این تابع را ابتدا نسبت به محور y ها و سپس نسبت به خط $y = x$ قرینه می‌کنیم و آن را $g(x)$ می‌نامیم. مقدار $g(a+b)$ کدام است؟



- (۱) صفر

- (۲) ۱

- (۳) -2

- (۴) -4

۳۸۰ نمودار تابع $y = \sqrt[3]{x}$ را ۲ واحد به طرف x های مثبت و ۱ واحد به طرف y های مثبت انتقال می‌دهیم. نمودار وارون تابع حاصل از کدام ناحیه دستگاه مختصات نمی‌گذرد؟

- (۱) اول (۲) دوم (۳) سوم (۴) چهارم

۳۸۱ ضابطه وارون تابع $f(x) = (x-2)^2 + 6x$ در بزرگ‌ترین بازه‌ای که تابع در آن اکیداً صعودی است. کدام است؟

- (۱) $-1 - \sqrt{x-3}$ (۲) $-1 + \sqrt{x-3}$ (۳) $2 + \sqrt{x-6}$ (۴) $2 - \sqrt{x-6}$

۳۸۲ iq ضابطه وارون تابع $f(x) = -2 + \sqrt{x-3}$ در بازه‌ای که نمودار آن زیر محور x ها قرار دارد، کدام است؟

- (۱) $x^2 + 4x + 7; -2 \leq x < 0$ (۲) $x^2 + 4x + 7; 3 \leq x < 7$

- (۳) $x^2 - 6x + 4; 0 \leq x \leq 3$ (۴) $x^2 - 6x + 4; x \geq 0$

۳۸۳ iq ضابطه وارون تابع $f(x) = -x^2 + 2x$ در بازه‌ای که بالای نیمساز ربع اول و سوم قرار دارد، کدام است؟

- (۱) $1 + \sqrt{1-x}; 0 < x < 1$ (۲) $1 + \sqrt{1-x}; x < 1$ (۳) $-1 - \sqrt{1-x}; 0 < x < 1$ (۴) $1 - \sqrt{1-x}; 0 < x < 1$

۳۸۴ iq نمودار تابع $y = x^2 - 2x; x \geq 1$ را ابتدا نسبت به محور y ها و سپس نسبت به نیمساز ناحیه اول و سوم قرینه می‌کنیم. ضابطه تابع حاصل کدام است؟

- (۱) $-1 - \sqrt{x-1}$ (۲) $-1 + \sqrt{x-1}$ (۳) $-1 - \sqrt{x+1}$ (۴) $-1 + \sqrt{x+1}$

۳۸۵ iq اگر $g(x) = 2x + 1$ و $(fog)(x) = (2x-1)g(x)$ باشد، ضابطه وارون تابع $y = f(x)$ با شرط $x \leq 1$ کدام است؟

- (۱) $y = 1 - \sqrt{x-1}$ (۲) $y = 1 + \sqrt{x-1}$ (۳) $y = 1 - \sqrt{x+1}$ (۴) $y = 1 + \sqrt{x+1}$

(ریاضی داخل ۱۴۰۱)

۳۸۶ تابع $f(x) = x^2 \sqrt{x^2}$ در یک بازه، نزولی است. ضابطه وارون تابع در این بازه، کدام است؟

- ☐ (۱) $-\sqrt{x}; x \geq 0$
☐ (۲) $-\sqrt{x^3}; x \leq 0$
☐ (۳) $-\sqrt[3]{x}; x \leq 0$
☐ (۴) $-\sqrt{x^3}; x \geq 0$

(تجربی نوبت اول ۱۴۰۳)

۳۸۷ اگر $y = \frac{x+2}{4} - \frac{\sqrt{x+1}}{2}$ ضابطه تابع وارون $y = ax + a\sqrt{x}$ باشد، مقدار a کدام است؟

- ☐ (۱) ۲
 ☐ (۲) ۳
 ☐ (۳) ۴
 ☐ (۴) ۹

(شبیه‌ساز ریاضی ۱۴۰۲)

۳۸۸ $f(x) = \sqrt{x+2}\sqrt{x-1}$ ضابطه وارون کدام است؟

- ☐ (۱) $x^2 - 2x + 2; x \geq 1$
☐ (۲) $x^2 - 2x; x \geq 1$
☐ (۳) $x^2 + 2x + 2; x \geq -1$
☐ (۴) $x^2 + 2x; x \geq -1$

(شبیه‌ساز ریاضی خارج ۱۴۰۲)

۳۸۹ ضابطه وارون تابع $f(x) = \sqrt{x} \sqrt{\frac{1}{4}x - 1}$ در دامنه محدود کدام است؟

- ☐ (۱) $2\sqrt{4x+4} + 2$
☐ (۲) $2\sqrt{4x+4} - 2$
☐ (۳) $2\sqrt{x^2+1} + 2$
☐ (۴) $2\sqrt{x^2+1}$

سریخ تابع‌های قدرمطلق هم در حالت کلی وارون‌پذیر نیستند و برای وارون کردن آن‌ها باید به محدودیت دامنه توجه کنید!

(تجربی خارج ۱۴۰۱)

۳۹۰ تابع با ضابطه $y = \sqrt{(x+1)^2} - |3x-6|$ در یک بازه نزولی است. ضابطه وارون تابع در این بازه، کدام است؟

- ☐ (۱) $-\frac{1}{2}x - 7; x \geq 2$
☐ (۲) $-\frac{1}{2}x + \frac{7}{2}; x \leq 3$
☐ (۳) $-2x + 14; x \leq 3$
☐ (۴) $-2x - \frac{14}{3}; x \geq 2$

(داخل ۹۴)

۳۹۱ نمودار تابع $y = |2x-6| - |x+4| + x$ در بازه‌ای اکیداً نزولی است. ضابطه وارون آن در این بازه کدام است؟

- ☐ (۱) $-x+6; x \leq -4$
☐ (۲) $-x+5; x \geq 2$
☐ (۳) $-\frac{1}{2}x+1; -4 \leq x \leq -3$
☐ (۴) $-\frac{1}{2}x+1; -4 \leq x \leq 1$

۳۹۲ تابع f با ضابطه $f(x) = |2x-4| - |x+1| + x$ را در بازه‌ای اکیداً نزولی در نظر بگیرید. نمودار تابع f^{-1} و خط $y = x+1$ با کدام طول متقاطع هستند؟

- ☐ (۱) ۱
 ☐ (۲) $\frac{1}{3}$
☐ (۳) $\frac{1}{2}$
☐ (۴) غیرمتقاطع (شبیه‌ساز ۹۹)

۳۹۳ دو تابع $f(x) = 3 - \sqrt{x+1}$ و $g(x) = x^2 - 2x$ را در نظر بگیرید. ضابطه وارون تابع $y = (f \circ g)(x)$ در بازه‌ای که نمودار آن اکیداً نزولی می‌باشد، کدام است؟

- ☐ (۱) $-x+3; x \leq 1$
☐ (۲) $-x+4; x \leq 1$
☐ (۳) $-x+3; x \leq 3$
☐ (۴) $-x+4; x \leq 3$

(داخل ۹۴)

۳۹۴ تابع با ضابطه $y = x|x-2|$ در یک بازه، نزولی است. ضابطه وارون آن در این بازه کدام است؟

- ☐ (۱) $1 - \sqrt{1+x}; x \leq 0$
☐ (۲) $1 - \sqrt{1-x}; x \leq 1$
☐ (۳) $1 + \sqrt{1-x}; 0 \leq x \leq 1$
☐ (۴) $1 - \sqrt{1-x}; 0 \leq x \leq 1$

۳۹۵ اگر $[x] = -1$ باشد، ضابطه وارون تابع $y = |x^2 - 1|$ کدام است؟

- ☐ (۱) $\sqrt{x-1}; 0 < x \leq 1$
☐ (۲) $-\sqrt{x-1}; 0 < x \leq 1$
☐ (۳) $\sqrt{1-x}; 0 \leq x < 1$
☐ (۴) $-\sqrt{1-x}; 0 \leq x < 1$

سریخ چندتا هم وارون تابع دوضابطه‌ای ببینیم.

(داخل ۹۶)

۳۹۶ ضابطه وارون تابع $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & ; x \geq 0 \\ -\sqrt{-x} & ; x < 0 \end{cases}$ کدام است؟

- ☐ (۱) $-x^2$
☐ (۲) x^2
☐ (۳) $x|x|$
☐ (۴) $-x|x|$

۳۹۷ ضابطه وارون تابع $f(x) = \begin{cases} 3x+1; & x > 1 \\ 2x+2; & x \leq 1 \end{cases}$ به صورت $f^{-1}(x) = \begin{cases} a(x-1); & x > c \\ bx-1; & x \leq c \end{cases}$ است. مقدار $f^{-1}(\frac{b}{a})$ کدام است؟

- ۱) $\frac{3}{2}$ (۱) $\frac{1}{4}$ (۲) $-\frac{1}{3}$ (۳) $\frac{1}{3}$ (۴) $-\frac{1}{2}$

۳۹۸ اگر $f(x) = \begin{cases} x[x]; & -1 < x < 0 \\ 2^x; & 0 \leq x < 2 \end{cases}$ باشد، ضابطه وارون آن کدام است؟

- ۱) $f^{-1}(x) = \begin{cases} -x; & 0 < x < 1 \\ \log_2 x; & 1 < x < 2 \end{cases}$ (۱)
 ۲) $f^{-1}(x) = \begin{cases} -x; & 0 < x < 1 \\ \log_2 x; & 1 \leq x < 2 \end{cases}$ (۲)
 ۳) $f^{-1}(x) = \begin{cases} x; & -1 < x < 0 \\ \log_2 x; & 1 \leq x < 2 \end{cases}$ (۳)
 ۴) $f^{-1}(x) = \begin{cases} x; & 0 < x < 1 \\ \log_2 x; & 1 \leq x < 2 \end{cases}$ (۴)

سرنخ به روش خیلی خوب برای وارون کردن تابع های هموگرافیک داریم که برای حل تست های زیر ارزش استفاده کنید و لذت ببرید.

۳۹۹ ضابطه وارون تابع $f(x) = \frac{3x+2}{x-1} + 2$ کدام است؟

- ۱) $\frac{x+2}{x-3} - 2$ (۱) $\frac{x}{x-5}$ (۲) $\frac{x+2}{x-3} + 2$ (۳) $\frac{x}{x+5}$ (۴)

۴۰۰ تابع f با دامنه $\mathbb{R} - \{a\}$ و بُرد $\mathbb{R} - \{-2\}$ مفروض است. اگر $f^{-1}(x) = \frac{5x-3}{bx+4}$ باشد، مقدار ab کدام است؟

- ۱) -2 (۱) $2/5$ (۲) -4 (۳) 5 (۴)

۴۰۱ اگر $f \circ f(x) = \frac{af(x)+1}{2f(x)-1}$ و $f^{-1}(0) = -2$ باشد، ضابطه وارون تابع $g(x) = \frac{4x+1}{2x+a}$ کدام است؟

- ۱) $\frac{-1}{2}x+1$ (۱) $\frac{-x+2}{2x-4}$ (۲) $\frac{-4x+1}{2x+4}$ (۳) $\frac{-x+2}{2x-4}$ (۴) وارون پذیر نیست.

۴۰۲ تابع $f(2x+4) = \frac{4x-6}{2x+a}$ را در نظر بگیرید. اگر $f(x) = f^{-1}(x)$ باشد، مقدار a کدام است؟

- ۱) -4 (۱) -2 (۲) 4 (۳) 2 (۴)

۴۰۳ اگر $x = \frac{f(x)-3x}{f(x)+4}$ باشد، ضابطه تابع $f^{-1}(x)$ کدام است؟

- ۱) $\frac{x-1}{x+7}$ (۱) $\frac{x}{x+7}$ (۲) $\frac{x+1}{x-7}$ (۳) $\frac{x}{x-7}$ (۴)

۴۰۴ ضابطه وارون تابع $f(x) = \frac{x}{1+|x|}$ به صورت $f^{-1}(x) = \frac{ax}{1-|x|}$ است. مقدار $a \times b$ کدام است؟

- ۱) -1 (۱) 1 (۲) -2 (۳) 2 (۴)

برخورد f و f^{-1} و برخورد f^{-1} و g

سرنخ توی تست های زیر، می خواهیم نقطه برخورد f^{-1} و g رو بررسی کنیم.

۴۰۵ اگر $f(x) = x^2 - 2x - 3$; $x \geq 1$ باشد، نمودارهای دو تابع f^{-1} و $g(x) = \frac{x-9}{2}$ با کدام طول متقاطع هستند؟

- ۱) 21 (۱) 15 (۲) 18 (۳) 21 (۴)

۴۰۶ اگر $x < \frac{3}{2}$; $f(x) = x^2 - 3x + 1$ و $g^{-1}(x) = 3x - 4$ باشند، نمودارهای دو تابع f^{-1} و g در نقطه ای با کدام طول متقاطع اند؟

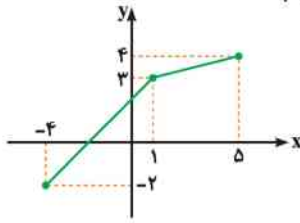
- ۱) 1 (۱) 2 (۲) -1 (۳) -2 (۴)

۴۰۷ اگر $f(x) = x^2 - 4x + 1$; $x \geq 2$ باشد، نمودار تابع $y = 1 - f^{-1}(x)$ و $g(x) = \sqrt{f(x)+3}$ در نقطه A متقاطع اند. فاصله نقطه A از مبدأ

مختصات کدام است؟

- ۱) $2\sqrt{2}$ (۱) $\sqrt{2}$ (۲) $2\sqrt{3}$ (۳) $\sqrt{6}$ (۴)

۴۰۸ IQ نمودار تابع f با دامنه $[-4, 5]$ به صورت مقابل است. نمودارهای دو تابع f^{-1} و $g(x) = x + |x - 2|$ در چند نقطه



مقاطع هستند؟

۱ (۱) ☐

۲ (۲) ☐

۳ (۳) ☐

۴ (۴) ☐ متقاطع نیستند.

سریخ برای حل تست‌های مربوط به برخورد f و f^{-1} به صعودی بودن تابع f توجه کنید.

۴۰۹ اگر $f(x) = x^2 + 2x + 1$ با دامنه $(-1, +\infty)$ مفروض باشد، نمودارهای دو تابع f و f^{-1} در چند نقطه متقاطع اند؟ (داخل ۹۲)

۱ (۱) ☐ ۲ (۲) ☐ ۳ (۳) ☐ ۴ (۴) ☐ غیرمتقاطع

۴۱۰ فرض کنید M نقطه تلاقی منحنی $y = \sqrt{x+3} - 1$ با تابع وارون خود باشد. فاصله نقطه M از مبدأ مختصات، کدام است؟ (خارج ۱۴۰۰)

۱ (۱) ☐ $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ۲ (۲) ☐ $\sqrt{2}$ ۳ (۳) ☐ ۳ ۴ (۴) ☐ $2\sqrt{2}$

۴۱۱ نمودار تابع $f(x) = \frac{x+4}{x-2}$ با دامنه $\mathbb{R} - \{2\}$ نمودار وارون خود را با کدام طول قطع می‌کند؟ (خارج ۹۶)

۱ (۱) ☐ $-4, -1$ ۲ (۲) ☐ $4, -1$ ۳ (۳) ☐ $-4, 1$ ۴ (۴) ☐ $4, 1$

۴۱۲ فاصله نقطه تقاطع تابع $y = x^3 + 3x - 12$ با وارون خود، از مبدأ مختصات کدام است؟ (خارج ۱۴۰۱)

۱ (۱) ☐ $2\sqrt{3}$ ۲ (۲) ☐ $\sqrt{3}$ ۳ (۳) ☐ $2\sqrt{2}$ ۴ (۴) ☐ $\sqrt{2}$

۴۱۳ IQ نمودار وارون تابع $y = \log_4(2^{x+2} + 32)$ نمودار خود را در نقطه A قطع می‌کند. فاصله نقطه A از مبدأ مختصات کدام است؟

۱ (۱) ☐ $2\sqrt{2}$ ۲ (۲) ☐ $3\sqrt{2}$ ۳ (۳) ☐ $5\sqrt{2}$ ۴ (۴) ☐ $3\sqrt{3}$

۴۱۴ IQ نمودار تابع $f(x) = \sqrt{1-\sqrt{1+x}}$ ، در چند نقطه تابع وارون خود را قطع می‌کند؟ (ریاضی نوبت دوم ۱۴۰۳)

۱ (۱) ☐ ۴ ۲ (۲) ☐ ۳ ۳ (۳) ☐ ۲ ۴ (۴) ☐ ۱

ترکیب تابع f و f^{-1} و ترکیب تابع f^{-1} و g

سریخ به نظرتون $f \circ f^{-1}$ و $f^{-1} \circ f$ با هم برابرند؟ بریم ببینیم با هم.

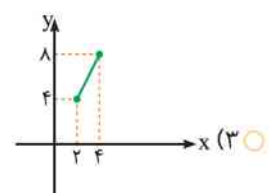
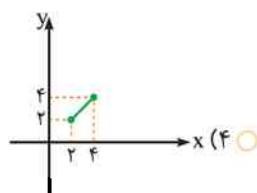
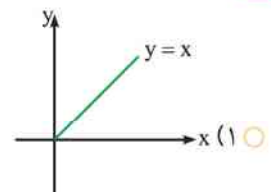
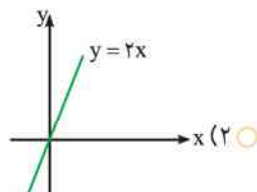
۴۱۵ تابع $f(x) = 2 - \sqrt{x-1}$ را در نظر بگیرید. کدام رابطه نادرست است؟

۱ (۱) ☐ $(f^{-1} \circ f)(1) = 1$ ۲ (۲) ☐ $(f \circ f^{-1})(1) = 1$ ۳ (۳) ☐ $(f^{-1} \circ f)(3) = 3$ ۴ (۴) ☐ $(f \circ f^{-1})(3) = 3$

۴۱۶ در کدام تابع زیر رابطه $(f^{-1} \circ f)(x) = (f \circ f^{-1})(x)$ برقرار نیست؟

۱ (۱) ☐ $f(x) = x^2 - 4x + 6; x \geq 2$ ۲ (۲) ☐ $f(x) = 1 + 2^x$ ۳ (۳) ☐ $f(x) = 1 + \frac{1}{x-1}$ ۴ (۴) ☐ $f(x) = 2 + \sqrt{x-2}$

۴۱۷ اگر $f(x) = 4x - x^2; x \geq 2$ باشد، نمودار تابع $y = (f^{-1} \circ f)(x) + (f \circ f^{-1})(x)$ کدام است؟



۳۱۸ اگر $f^{-1}(3x+1) = g(\frac{x+3}{4})$ قابل تعریف باشد، مقدار $(fog)(3)$ کدام است؟

- ۲۸ (۴) ☐ ۲۴ (۳) ☐ ۱۸ (۲) ☐ ۱۲ (۱) ☐

۳۱۹ با توجه به ماشین مقابل، اگر $f(x) = 3 - \sqrt{x+1}$ باشد، آنگاه نمودار تابع $y = g(x)$ در کدام بازه زیر محور x ها است؟

- $x \rightarrow \boxed{f} \rightarrow \boxed{g} \rightarrow x$
- (۸, +∞) (۲) ☐ [-۱, ۸) (۱) ☐
(۲, ۴) (۴) ☐ (۲, ۳] (۳) ☐

(ریاضی داخل ۱۴۰۱)

۳۲۰ iq اگر $f(x) = \frac{\sqrt{2}x}{3x - \sqrt{2}}$ باشد، حاصل $f \circ f \circ f(\sqrt{2})$ کدام است؟

- ۴ (۴) ☐ $\sqrt{2}$ (۳) ☐ $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (۲) ☐ $\frac{1}{2}$ (۱) ☐

۳۲۱ iq اگر $f(x) = x + \sqrt{x} + 3$ باشد، نمودار دو تابع $f \circ f^{-1}$ و $y = \sqrt{-x+6}$ در نقطه‌ای با کدام طول متقاطع هستند؟
(۴) غیرمتقاطع اند. ☐ ۴ (۳) ☐ ۲ (۲) ☐ ۱ (۱) ☐

سریخ چندتا سؤال هم از وارون کردن ترکیب دو تابع ببینیم.

۳۲۲ دو تابع $f(x) = x^3 + 2$ و $g(x) = \frac{1-x}{x+2}$ را در نظر بگیرید. مقدار $(f^{-1} \circ g)^{-1}(2)$ کدام است؟

- $-\frac{21}{11}$ (۴) ☐ $-\frac{20}{11}$ (۳) ☐ $-\frac{19}{11}$ (۲) ☐ $-\frac{18}{11}$ (۱) ☐

۳۲۳ اگر $f(x) = -5 + \frac{1}{x-1}$ و $g(x) = \frac{x+3}{x+2}$ باشند، ضابطه تابع $g^{-1} \circ f^{-1}$ کدام است؟

- $x+3$ (۴) ☐ $\frac{3x}{x-1}$ (۳) ☐ $\frac{x+1}{3}$ (۲) ☐ $x-3$ (۱) ☐

۳۲۴ iq اگر $(fog)(x) = \frac{3x+1}{x+1}$ و $f^{-1}(4) = 1$ باشد، مقدار $g^{-1}(1)$ کدام است؟

- ۲ (۴) ☐ ۱ (۳) ☐ -۳ (۲) ☐ ۴ (۱) ☐

یادداشت:

فصل اول

درس هفتم:

تقسیم چند جمله‌ای‌ها و بخش‌پذیری

CHAPTER 1

درسته که تقسیم چند جمله‌ای‌ها برهم رو در سال نهم یاد گرفتین، اما در سال دوازدهم به‌طور تخصصی‌تری روش بحث میشه. جالبه بدونین که در سال‌های اخیر پای ثابت کنکور بوده.

۴۲۵ به ازای کدام مقدار a دو عبارت $P(x) = ax^2 + x - 7$ و $f(x) = 2x^3 - x^2 + ax + 3$ در تقسیم بر $x - 2$ هم باقی‌مانده هستند؟

- ☐ ۱۱ (۴) ☐ ۷ (۳) ☐ ۱۰ (۲) ☐ -۹ (۱)

۴۲۶ چند جمله‌ای $f(x) = x^5 - 3x^3 + ax + 5$ بر $x + 2$ بخش‌پذیر است. مقدار a کدام است؟ (تجربی نوبت اول ۱۴۰۴)

- ☐ ۲/۵ (۴) ☐ -۲/۵ (۳) ☐ ۱/۵ (۲) ☐ -۱/۵ (۱)

۴۲۷ به ازای یک مقدار a چند جمله‌ای $P(x) = 2x^4 + ax^3 + 2x^2 - 3x$ بر $2x - 1$ بخش‌پذیر است. در این حالت باقی‌مانده $P(x)$ بر $x + 2$ کدام است؟ (خارج ۹۹)

- ☐ ۶ (۴) ☐ ۴ (۳) ☐ -۸ (۲) ☐ -۱۰ (۱)

۴۲۸ چند جمله‌ای $P(x) = x^3 - 3ax - 7$ بر $x - 1$ بخش‌پذیر است. باقی‌مانده تقسیم چند جمله‌ای $P(x)$ بر $x + 2$ کدام است؟

- ☐ -۱۷ (۴) ☐ -۱۵ (۳) ☐ -۲۷ (۲) ☐ -۲۵ (۱)

۴۲۹ کدام عدد را به حاصل ضرب $x^2 + 5$ و $x - 8$ اضافه کنیم تا حاصل بر $x - 3$ بخش‌پذیر باشد؟

- ☐ ۸۶ (۴) ☐ ۷۰ (۳) ☐ -۱۷ (۲) ☐ ۲۵ (۱)

۴۳۰ اگر $P(x)$ یک چند جمله‌ای و رابطه $P(x) = 2P(-x) + 4x$ برقرار باشد، باقی‌مانده تقسیم $P(x)$ بر $x + 2$ چقدر است؟ (شیبه‌ساز داخل ۹۹)

- ☐ $-\frac{7}{3}$ (۴) ☐ $-\frac{8}{5}$ (۳) ☐ $-\frac{8}{3}$ (۲) ☐ $-\frac{7}{5}$ (۱)

۴۳۱ فرض کنید باقی‌مانده تقسیم چند جمله‌ای $P(x)$ بر $x - 4$ و $x + 2$ به ترتیب ۳ و ۱ باشند، باقی‌مانده تقسیم $P(x)$ بر $x^2 - 2$ کدام است؟

- ☐ ۷ (۱) ☐ ۱ (۲) ☐ ۳ (۳) ☐ -۱ (۴)

۴۳۲ اگر $P(x) = x^3 + mx^2 + (3m - 2)x - 10m - 4$ باشد، باقی‌مانده تقسیم چند جمله‌ای $P(x)$ بر $x + 1$ کدام است؟

- ☐ ۱ (۱) ☐ ۴ (۲) ☐ ۲ (۳) ☐ ۸ (۴)

در سؤال زیر، مقسوم‌علیه ریشه نداره یا ریشه‌هاش به راحتی به دست نمیداد. ولی بازهم میشه به کارایی کرد!

۴۳۳ باقی‌مانده تقسیم $f(x) = 2x^3 - x^2 - 4x + 1$ بر $x^2 + 1$ کدام است؟

- ☐ $2x - 1$ (۱) ☐ $-6x + 2$ (۲) ☐ $-2x + 1$ (۳) ☐ $6x - 2$ (۴)

در سؤالای بعدی، در مورد خارج قسمت پرسیدیم، طبیعیه که برای حل سؤالای زیر باید به محاسبه باقی‌مانده مسلط باشین.

۴۳۴ باقی‌مانده تقسیم چند جمله‌ای $f(x)$ بر $P(x) = x^2 + 4x + 5$ برابر $x + 2$ است. اگر $f(1) = 13$ و $f(-1) = 11$ باشد، خارج قسمت این

تقسیم کدام مورد می‌تواند باشد؟ (خارج ۱۴۰۱)

- ☐ $-x + 2$ (۱) ☐ $2x - 1$ (۲) ☐ $3x - 2$ (۳) ☐ $-2x + 3$ (۴)

۴۳۵ اگر $q(x)$ خارج قسمت تقسیم چندجمله‌ای $f(x) = x^7 - 4x^5 + x^2 + 1$ بر $x+2$ باشد، باقی‌مانده تقسیم $q(x)$ بر $x-1$ کدام است؟

- ۱ (۱) ☐ ۲ (۲) ☐ -۱ (۳) ☐ -۲ (۴) ☐

۴۳۶ iq چندجمله‌ای $P(x) = x^3 + ax^2 + x + b$ بر $x+2$ بخش پذیر بوده و باقی‌مانده تقسیم آن بر $x-1$ برابر ۶ است. اگر $Q(x)$ خارج قسمت

این تقسیم باشد، باقی‌مانده تقسیم چندجمله‌ای $P(x-1) + Q(\frac{x}{2})$ بر $x-2$ کدام است؟

- ۱۵ (۱) ☐ ۱۴ (۲) ☐ ۱۳ (۳) ☐ ۱۲ (۴) ☐

سرنخ در برخی مواقع توان مجهوله، اول تکلیف اونو روشن کنیم.

۴۳۷ عبارت $k + \Delta x^3 - \Delta x^{2n+1} + 2x^{2n} + x^{2n+1}$ به ازای تمام مقادیر n بر $x+2$ بخش پذیر است. باقی‌مانده تقسیم این عبارت بر $x-1$ کدام است؟

- ۱ (۱) ☐ -۹ (۲) ☐ ۱ (۳) ☐ -۱۰ (۴) ☐

۴۳۸ iq باقی‌مانده تقسیم چندجمله‌ای $P(x) = x^3 + x^{\frac{2n+3}{n}} - 2x^{n-3} + 1 + n$ بر $2x-1$ کدام است؟

- ۳/۲۵ (۱) ☐ ۳/۵ (۲) ☐ ۲/۲۵ (۳) ☐ ۲/۵ (۴) ☐

۴۳۹ iq چندجمله‌ای $P(x) = x^{3n+1} + 2x^{3n} + x^6 + 3x^5 + 16a$ به ازای هر عدد طبیعی n بر $x+2$ بخش پذیر است. برای $n=1$ باقی‌مانده

تقسیم $P(x)$ بر x^2+2x-3 کدام است؟ (ریاضی داخل ۱۴۰۱)

- ۱ (۱) ☐ -۵x + ۴۴ (۲) ☐ -۱۵x + ۲۴ (۳) ☐ -۵x + ۳۴ (۴) ☐

سرنخ اکثر سؤالاتی که در کتاب درسی راجع به مقسوم علیه درجه یک یا در این بخش که سابقه کنکور هم داشته راجع به درجات بالاتر بحث کردیم.

۴۴۰ باقی‌مانده تقسیم چندجمله‌ای $P(x)$ بر $x^2 - 3x - 4$ برابر $3x - 4$ است. باقی‌مانده تقسیم $P(x+1)$ بر $x+2$ کدام است؟

- ۱ (۱) ☐ ۷ (۲) ☐ ۱ (۳) ☐ -۱ (۴) ☐

۴۴۱ اگر باقی‌مانده تقسیم $f(x) = ax^3 + bx^2 + 2x + 1$ بر $x^2 - 1$ برابر $x+2$ باشد، باقی‌مانده تقسیم $f(x)$ بر $x+2$ کدام است؟

- ۱ (۱) ☐ ۵ (۲) ☐ -۱ (۳) ☐ ۹ (۴) ☐

۴۴۲ باقی‌مانده تقسیم چندجمله‌ای $P(x) = x^4 + ax^2 + 3x + b$ بر $x^2 - x$ برابر $x+4$ و خارج قسمت آن $Q(x)$ است. باقی‌مانده تقسیم

چندجمله‌ای $4P(x) + Q(x+1)$ بر $x-1$ کدام است؟

- ۲۴ (۱) ☐ ۱۲ (۲) ☐ ۳۶ (۳) ☐ ۴۸ (۴) ☐

۴۴۳ iq در تقسیم چندجمله‌ای $P(x+2) - 3x - 1$ بر $2x^2 - 3x - 1$ خارج قسمت برابر $Q(x)$ و باقی‌مانده صفر است. اگر باقی‌مانده تقسیم $Q(x)$ بر $x+1$

برابر ۲ باشد، باقی‌مانده تقسیم $P(x)$ بر $x-1$ کدام است؟

- ۸ (۱) ☐ ۴ (۲) ☐ ۶ (۳) ☐ ۱۲ (۴) ☐

۴۴۴ iq باقی‌مانده و خارج قسمت تقسیم چندجمله‌ای $P(x)$ بر $x^2 + 2x$ به ترتیب $3x+1$ و $Q(x)$ است. اگر $Q(-2) = 3$ آن‌گاه مقدار باقی‌مانده

تقسیم $P'(x)$ بر $x+2$ کدام است؟ (خارج ۱۴۰۰)

- ۱ (۱) ☐ -۵ (۲) ☐ -۴ (۳) ☐ -۳ (۴) ☐

۴۴۵ iq تابع چندجمله‌ای درجه دوم با ضرایب طبیعی $P(x)$ مفروض است. اگر باقی‌مانده و خارج قسمت تقسیم $P(x)$ بر $P'(x)$ (مشتق تابع $P(x)$)

به ترتیب -2 و $\frac{1}{4}x+1$ باشند، کمترین مقدار مجموع ضرایب $P(x)$ ، کدام است؟ (داخل ۱۴۰۰)

- ۴ (۱) ☐ ۶ (۲) ☐ ۷ (۳) ☐ ۹ (۴) ☐

سرنخ در بعضی مسائل مقسوم علیه ریشه مضاعف دارد. در این سؤال‌ها باید کمی مشتق بلد باشیم.

۴۴۶ iq اگر $f(x) = 2x^3 + ax^2 + bx + 2$ بر $x^2 - 4x + 4$ بخش پذیر باشد، آن‌گاه $2a + 3b$ کدام است؟

- ۱ (۱) ☐ ۲ (۲) ☐ ۳ (۳) ☐ ۴ (۴) ☐

۴۴۷ iq باقی‌مانده $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + 6$ بر $x^2 - 2x + 1$ برابر با $3x+1$ است. مقدار $\frac{b}{a}$ کدام است؟

- ۲ (۱) ☐ -۳ (۲) ☐ ۳ (۳) ☐ ۲ (۴) ☐

سرنخ حالا وقتشه بریم سراغ اتحادها در حالت پیشرفته‌تر!

۴۴۸ عبارت $(x^3 + 2)^9 - (x^3 + x^2 + 1)^9$ به چه تعداد از عبارت‌های زیر بخش پذیر نیست؟

الف) $x+1$	ب) $x-1$	پ) x^2-1	ت) x^2+1
۱ (۱) ☐	۲ (۲) ☐	۳ (۳) ☐	۴ (۴) ☐

۴۴۹ در تساوی $\frac{P(x)}{x^7-1} = \frac{1}{x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+1}$ عبارت $P(x)$ کدام است؟

$$x - 3(4) \qquad -x - 3(3) \qquad -x + 3(2) \qquad x + 3(1)$$

۴۵۰ عبارت $x^2 + 1$ بر کدام عبارت بخش پذیر است؟

$$x^f + 1 \mid (f \circ)$$

$$x^{\delta} + 1 \mid (3 \circ)$$

$$x^{1^{\circ}} + 1 \mid (2 \circ)$$

$$x^2 + 1 \mid (1 \circ)$$

۴۵۱ عبارت $x^{15} - 1$ بر کدام عبارت بخش پذیر است؟

$$x^7 - x + 1 \pmod{19}$$

۴۵۲ به ازای چه مقادیری از n چند جمله‌ای $x^n - a^n$ بر $x + a$ بخش پذیر است؟

○ (۱) هر عدد طبیعی n ○ (۲) مقادیر زوج n ○ (۳) مقادیر فرد n ○ (۴) هیچ مقدار n

۴۵۳ خارج قسمت تقسیم عبارت $x^9 + 1$ بر $x + 1$ به ازای $x = -1$ کدام است؟

$9(4)$
 $-3(3)$
 $6(2)$
 1 صفر

۴۵۴ اگر $Q(x)$ خارج قسمت تقسیم چند جمله‌ای $x^6 - 64$ بر $x + 2$ باشد، مقدار $Q(-2)$ کدام است؟

96(4) $-96(3)$ $192(2)$ $-192(1)$

۴۵۵ اگر $r(x)$ باقیمانده تقسیم $x^4 - x^2 + 1$ بر $x^2 + x + 1$ باشد، مجموع ضرایب چندجمله‌ای $r(x)$ کدام است؟ ($x \neq 1$) (ریاضی نوبت دوم ۱۴۰۳)

$4(4)$ $-2(3)$ $-1(2)$ $1(0)$ صفر

۴۵۶ اگر بزرگ‌ترین عامل مشترک دو چندجمله‌ای $p(x) = x^5 + ax^3$ و $p(x) = x^6 + 3x^3 + 2x^2$ ، دو جمله‌ای $x^n + x^3$ باشد، مقدار na

کدام است؟

 $1(4) \quad 2(3) \quad -1(2) \quad -2(1)$

یادداشت:

۲ ۳۳۶

 ابتدا دامنه توابع f و g را به دست می‌آوریم:

$$f(x) = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}} \rightarrow D_f = (0, +\infty)$$

$$g(x) = \frac{x+\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}} \rightarrow D_g = (0, +\infty)$$

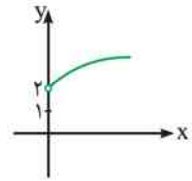
 دامنه تابع $f+g$ برابر $D_{f+g} = D_f \cap D_g = (0, +\infty)$ است.

 اکنون با به دست آوردن ضابطه تابع $f+g$ ، آن را رسم می‌کنیم:

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$$

$$= \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}} + \frac{x+\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}$$

$$= \frac{x+2\sqrt{x}}{\sqrt{x}} = \sqrt{x} + 2$$

 مطابق نمودار، برد تابع $f+g$ برابر $(2, +\infty)$ است.


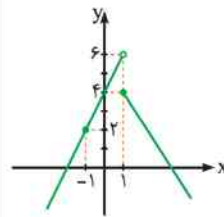
۱ ۳۳۷

 ابتدا ضابطه تابع $f+g$ را به دست می‌آوریم:

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) = \begin{cases} -x+5 & ; x \geq 1 \\ 2x+4 & ; -1 \leq x < 1 \\ 3x+5 & ; x < -1 \end{cases}$$

 اکنون با رسم تابع $f+g$ ، برد آن را

محاسبه می‌کنیم:

 مطابق شکل، برد تابع $f+g$ برابر $(-\infty, 6)$ است.


۱ ۳۳۸

 دامنه تابع f برابر $D_f = [-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$ است. با توجه به دامنه توابع f و

 g ، مقادیر مختلف تابع $y = (\sqrt{f^2 + g})(x)$ را به دست می‌آوریم:

$$x=1: y = \sqrt{(f^2(1) + g(1))} = \sqrt{(2+2) \times 2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$$x=0: y = \sqrt{(f^2(0) + g(0))} = \sqrt{(3+3) \times 3} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$

 بنابراین بیشترین مقدار این تابع، برابر $3\sqrt{2}$ است.

۲ ۳۳۹

 تابع $g(x)$ را با توجه به دامنه تابع f تشکیل می‌دهیم $(D_g = D_f)$:

$$g(2) = 2 + f(2) = 2 + 7 = 9 \quad g(3) = 3 + f(3) = 3 + (-1) = 2$$

$$g(4) = 4 + f(4) = 4 + 2 = 6 \quad g(5) = 5 + f(5) = 5 + 4 = 9$$

$$R_g = \{2, 6, 9\}$$

 اعضای برد تابع g عبارت است از:

بنابراین داریم:

$$\xrightarrow{\text{مجموع اعضای برد}} 2 + 6 + 9 = 17$$

۱ ۳۴۰

مسئله را در دو حالت بررسی می‌کنیم:

 حالت ۱: اگر $x - [x] = 0$ و $[x] + [-x] = 0$ عددی صحیح باشد آن گاه:

است پس:

$$f(x) - g(x) = 0 - 2 = -2 = -1$$

 حالت ۲: اگر x عددی غیر صحیح باشد، آن گاه $[x] + [-x] = -1$ و

$$f(x) - g(x) = -1 - 2^x - [x] \quad \text{پس:} \quad 0 < x - [x] < 1$$

$$0 < x - [x] < 1 \Rightarrow 2^0 < 2^{x-[x]} < 2^1 \Rightarrow 1 < 2^{x-[x]} < 2$$

$$\xrightarrow{x-1} -1 > -2^{x-[x]} > -2 \xrightarrow{-1} -2 > -1 - 2^{x-[x]} > -3$$

 بنابراین اگر x عددی غیر صحیح باشد $-3 < f(x) - g(x) < -2$

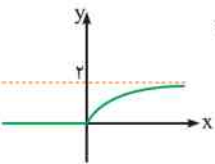
 است، پس برد تابع $f - g$ برابر است با: $R_{f-g} = (-3, -2) \cup \{-1\}$

۲ ۳۳۶

 ابتدا ضابطه تابع $\frac{f}{g}$ را به دست می‌آوریم:

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x+|x|}{|x|+1} = \begin{cases} \frac{2x}{x+2} & ; x \geq 0 \\ 0 & ; x < 0 \end{cases}$$

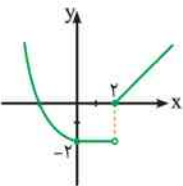
 اکنون با رسم تابع $\frac{f}{g}$ ، بُرد آن را محاسبه می‌کنیم:

 مطابق شکل، برد تابع $\frac{f}{g}$ برابر $[0, 2]$ است.


۲ ۳۳۷

 ابتدا ضابطه تابع $f+g$ را به دست می‌آوریم:

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) = \begin{cases} x^2 - 2 & ; x < 0 \\ -2 & ; 0 \leq x < 2 \\ x - 2 & ; x \geq 2 \end{cases}$$

 اکنون نمودار تابع $f+g$ را رسم می‌کنیم:


۴ ۳۳۸

 ابتدا $g(f(a)) = 5$ را با فلش نمایش می‌دهیم:

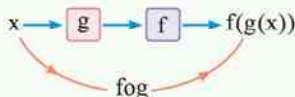
$$a \xrightarrow{f} \odot \xrightarrow{g} 5 \Rightarrow (a, \odot) \in f, (\odot, 5) \in g$$

 حال چون زوج مرتب $(6, 5)$ در تابع g وجود دارد، پس $\odot = 6$ بوده و

 در نتیجه $f(a) = 6 \Rightarrow a + \sqrt{a} = 6 \Rightarrow a = 4$ است: $f(a) = 6$

هویت

 نحوه تشکیل تابع $fog(x)$

 مقادیر $g(x)$ به عنوان ورودی تابع f است.


۳ ۳۳۹

 از آن جایی که اشتراک دامنه توابع f و g به صورت $\{2, 4\}$ است، پس:

$$f \times g = \{(2, -2 \times 3), (4, 1 \times 2)\} = \{(2, -6), (4, 2)\}$$

 حال تابع fog را تشکیل می‌دهیم و داریم:

$$-1 \xrightarrow{g} 4 \xrightarrow{f} 1$$

$$2 \xrightarrow{g} 3 \xrightarrow{f} -2 \Rightarrow fog = \{(-1, 1), (4, -2)\}$$

$$4 \xrightarrow{g} 2 \xrightarrow{f} -2$$

$$\Rightarrow f \times g + fog = \{(4, 0)\}$$

۳ ۲۱۴۴

ابتدا ضابطه تابع $g(x)$ را ساده می‌کنیم:

$$\begin{aligned} g(x) &= f([x + f(x)]) = f([x + 2[x] - x]) = f(2[x]) \\ &= 2[2[x]] - 2[x] = 4[x] - 2[x] = 2[x] \Rightarrow g(x) = 2[x] \\ \text{حال با توجه به این که } f(-\frac{5}{3}) &= -4 + \frac{5}{3} = -\frac{7}{3} \text{ می‌باشد مقدار} \\ g(f(-\frac{5}{3})) &\text{ را به دست می‌آوریم:} \end{aligned}$$

$$g(f(-\frac{5}{3})) = g(-\frac{7}{3}) = 2[-\frac{7}{3}] = 2 \times (-3) = -6$$

۳ ۲۱۴۵

با فرض $f(x) = 2x - 2$ و $g(x) = \frac{x}{\sqrt{x} + 1}$ ، خروجی ماشین، همان خروجی تابع $g \circ f$ است. بنابراین اگر ورودی ماشین را a در نظر بگیریم داریم:

$$g(f(a)) = \frac{f(a)}{3} \Rightarrow \frac{f(a)}{\sqrt{f(a)} + 1} = \frac{f(a)}{3} \Rightarrow f(a) = 4 \Rightarrow 2a - 2 = 4$$

$$\Rightarrow 2a = 6 \Rightarrow a = 3$$

۳ ۲۱۴۶

ابتدا بررسی می‌کنیم تابع $f(x)$ در چه طول‌هایی صفر می‌شود.

$$f(x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1, & 1 \in [0, 2] \quad \checkmark \\ x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1, & -1 \in [-2, 0] \quad \checkmark \end{cases}$$

اگر -1 یا 1 باشد، مقدار $f(x)$ برابر صفر است. بنابراین جواب‌های معادله $f(x) = -1$ و $f(x) = 1$ را به دست می‌آوریم:

$$f(x) = 1 \Rightarrow \begin{cases} x - 1 = 1 \Rightarrow x = 2, & 2 \in [0, 2] \quad \checkmark \\ x + 1 = 1 \Rightarrow x = 0, & 0 \in [-2, 0] \quad \times \end{cases}$$

$$f(x) = -1 \Rightarrow \begin{cases} x - 1 = -1 \Rightarrow x = 0, & 0 \in [0, 2] \quad \checkmark \\ x + 1 = -1 \Rightarrow x = -2, & -2 \in [-2, 0] \quad \checkmark \end{cases}$$

بنابراین معادله $f(x) = 0$ ، جواب قابل قبول دارد.

۴ ۲۱۴۷

برای پیدا کردن $f(g(1))$ باید ابتدا $g(1)$ را پیدا کنیم:

$$\begin{aligned} g(x) &= 6 - f(x - 3) \xrightarrow{x=1} g(1) = 6 - f(-2) \\ \text{نمودار} \quad g(1) &= 6 - 2 = 4 \end{aligned}$$

بنابراین $f(g(1)) = f(4)$ است. طبق نمودار $f(4) = 8$ است، پس: $fog(1) = 8$

۲ ۲۱۴۸

با توجه به شکل صورت سوال $f(x+1) = x+2$ و $g(x-1) = -x+4$ است. حالا ابتدا $f(3)$ و $g(-3)$ را پیدا می‌کنیم:

$$f(x+1) = x+2 \xrightarrow{x=2} f(3) = 2+2 = 4$$

$$g(x-1) = -x+4 \xrightarrow{x=7} g(-3) = 2+4 = 6$$

پس $f(6) + f(4) = g(3) + g(-3)$ است. حالا $f(6)$ و $g(4)$ را پیدا می‌کنیم:

$$f(x+1) = x+2 \xrightarrow{x=5} f(6) = 5+2 = 7$$

$$g(x-1) = -x+4 \xrightarrow{x=9} g(4) = -5+4 = -1$$

پس $f(6) + f(4) = -1 + 7 = 6$ است.

۲ ۲۱۴۵

با توجه به صورت سؤال داریم:

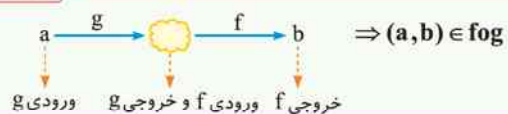
$$(4, 2) \in fog \Rightarrow 4 \xrightarrow{g} 3 \xrightarrow{f} 2 \Rightarrow (3, 2) \in f, (4, 3) \in g$$

چون $(3, 2) \in f$ پس $3 = \bigcirc$. پس $(4, 3) \in g$ و در نتیجه $a = 4$ است. از طرفی:

$$(4, 1) \in gof \Rightarrow 4 \xrightarrow{f} 5 \xrightarrow{g} 1 \Rightarrow (4, 5) \in f, (5, 1) \in g$$

با توجه به این که $(4, 5) \in f$ پس $5 = \bigcirc$ است؛ بنابراین $(5, 1) \in g$ و در نتیجه $b = 5$ خواهد بود. در نتیجه دوتایی (a, b) به صورت $(4, 5)$ است.

هایلایت



۴ به پوره دیگه! طراح می‌تونست توی همین سؤال، بپرسه:

دُبر تابع fog کدام است؟

$$fog = \{(1, 1), (3, 7), (4, 2), (5, 7)\} \Rightarrow R_{fog} = \{1, 2, 7\}$$

۱ ۲۱۴۱

ابتدا $f(\sqrt{3} - 1)$ را به دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} f(x) &= |x - 1| + |2x + 1| \\ \Rightarrow f(\sqrt{3} - 1) &= |\sqrt{3} - 2| + |2(\sqrt{3} - 1) + 1| \\ &= 2\sqrt{3} - 1 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow f(\sqrt{3} - 1) = (2 - \sqrt{3}) + (2\sqrt{3} - 1) = \sqrt{3} + 1$$

حال با جای‌گذاری $\sqrt{3} + 1$ در تابع g داریم:

$$g(f(\sqrt{3} - 1)) = g(\sqrt{3} + 1) = [-(\sqrt{3} + 1) + 1] = [-\sqrt{3}] = -2$$

۱ ۲۱۴۲

ابتدا ضابطه g را به صورت $g(x) = (x+1)^2$ می‌نویسیم و سپس مقادیر $f(1-\sqrt{2})$ و $g(1-\sqrt{2})$ را به دست می‌آوریم:

$$1) f(1-\sqrt{2}) = 1 - \sqrt{2} = \sqrt{2} - 1$$

$$2) g(1-\sqrt{2}) = (1-\sqrt{2}+1)^2 = (2-\sqrt{2})^2 = 6 - 4\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow f(g(1-\sqrt{2})) - g(f(1-\sqrt{2})) = f(6 - 4\sqrt{2}) - g(\sqrt{2} - 1)$$

$$= |6 - 4\sqrt{2}| - (\sqrt{2} - 1 + 1)^2 = 6 - 4\sqrt{2} - 2 = 4(1 - \sqrt{2})$$

۱ ۲۱۴۳

چون عبارت $\sin \pi x - 1$ زیر رادیکال با فرجه ۲ قرار دارد، پس:

$$\sin \pi x - 1 \geq 0 \Rightarrow \sin \pi x \geq 1 \quad (1)$$

از طرفی می‌دانیم مقادیر سینوس همواره در بازه $[-1, 1]$ هستند؛ بنابراین نامساوی (۱) تنها در صورتی برقرار است که $\sin \pi x = 1$ باشد، بنابراین:

$$\sin \pi x = 1 \Rightarrow \pi x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = 2k + \frac{1}{2}, k \in \mathbb{Z}$$

با توجه به مقادیر به دست آمده برای x ، تمام ورودی‌های تابع f ، اعدادی غیر صحیح هستند. همچنین می‌دانیم عبارت $[x] + [-x]$ به ازای مقادیر صحیح برابر صفر و به ازای مقادیر غیر صحیح برابر -1 است، پس:

$$f(x) = \underbrace{[x] + [-x]}_{-1} + \underbrace{\sqrt{\sin \pi x - 1}}_1 = (-1) + 1 = 0$$

$$\Rightarrow f(-\frac{1}{2}f(x)) = f(-\frac{1}{2} \times 0) = f(0) = -1 + 0 = -1$$

۳ به چوره رنگه اطراح می تونست اینجوری بپرسه،
«چواب بزرگ تر معادله $fog(x) = 1$ کدام است؟»

پواب: $2 + \sqrt{2}$

۴ ۲۵۵

در تابع g ، به جای همه x ها، $f(x)$ قرار می دهیم:

$$g(f(x)) = \frac{2f(x)+2}{2-f(x)} = \frac{2(\frac{2x-1}{x+1})+2}{2-(\frac{2x-1}{x+1})} = \frac{\frac{4x-2}{x+1}+2}{\frac{2(x+1)-(2x-1)}{x+1}} = \frac{\frac{4x-2+2x+2}{x+1}}{\frac{2x+2-2x+1}{x+1}} = \frac{6x}{3} = 2x$$

با جای گذاری $x=2$ در تابع gof داریم:
 $g(f(2)) = g(1) = 4$
تنها گزینه ای که به ازای $x=2$ برابر ۴ می شود، گزینه (۴) است.

۲ ۲۵۶

ابتدا ضابطه تابع های $fog(x)$ و $f(x+3)$ را پیدا می کنیم:

$$\begin{aligned} 1) f(g(x)) &= 2((3x+1)^2 - (3x+1) - 3) = 2(9x^2 + 3x - 3) \\ 2) f(x+3) &= 2((x+3)^2 - (x+3) - 3) = 2(x^2 + 5x + 3) \end{aligned}$$

حالا نقاط تلاقی این دو نمودار را پیدا می کنیم:

$$fog(x) = f(x+3) \Rightarrow 2(9x^2 + 3x - 3) = 2(x^2 + 5x + 3)$$

$$\Rightarrow 8x^2 - 2x - 6 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=-\frac{3}{4} \end{cases}$$

پس این دو نمودار در دو نقطه به طول های $x=1$ و $x=-\frac{3}{4}$ متقاطع اند.

۲ ۲۵۷

ضابطه تابع خطی f را به صورت $f(x) = ax + b$ در نظر می گیریم و داریم:

$$\begin{aligned} f(f(x)) &= a(ax+b) + b = a^2x + ab + b \\ \text{حالا با توجه به رابطه } f(f(x)) &= f(x-3) + f(x+1) \text{ داریم:} \\ a^2x + ab + b &= a(x-3) + b + a(x+1) + b \\ \Rightarrow a^2x + ab &= 2ax - 2a + b \\ \Rightarrow \begin{cases} a^2 = 2a \Rightarrow a = 2 \\ ab = -2a + b \Rightarrow 2b = -4 + b \Rightarrow b = -4 \end{cases} \end{aligned}$$

پس $f(x) = 2x - 4$ است و $f(5) = 10 - 4 = 6$ است.

۱ ۲۵۸

با توجه به $f(x) = \frac{2x-1}{x+2}$ و $g(x) = x+4$ ضابطه های $(gof)(x)$ و $(fog)(x)$ را به دست آورده و معادله $(fog)(x) = (gof)(x)$ را حل می کنیم:

$$1) (gof)(x) = g(f(x)) = \frac{2x-1}{x+2} + 4 = \frac{2x-1+4(x+2)}{x+2} = \frac{6x+7}{x+2}$$

۳ ۲۴۹

اعضای تابع gof را پیدا می کنیم:

$$\begin{aligned} a \xrightarrow{f} 2 \xrightarrow{g} 5 \\ -1 \xrightarrow{f} b \xrightarrow{g} \frac{2b-1}{b+1} \\ 1 \xrightarrow{f} -2 \xrightarrow{g} -1 \\ 3 \xrightarrow{f} -4 \xrightarrow{g} 3 \end{aligned}$$

با توجه به صورت سوال، اعضای بُرد تابع gof به صورت $\{-1, 3, 1, 5\}$ است، پس:

$$\begin{aligned} 1) c = 3, \quad 2) \frac{2b-1}{b+1} = 1 \Rightarrow 2b-1 = b+1 \Rightarrow b = 2 \\ \Rightarrow b \times c = 2 \times 3 = 6 \end{aligned}$$

۱ ۲۵۰

می دانیم $f(2) = 1$ است، پس:

$$\begin{aligned} g(f(x)) = x^2 - x + 1 \xrightarrow{x=2} g(f(2)) = 2^2 - 2 + 1 = 3 \\ \Rightarrow g(1) = 3 \end{aligned}$$

حالا در رابطه $fog(x) = x^2 + 3x + 1$ به جای x عدد ۱ می گذاریم:

$$f(g(1)) = 1^2 + 3 + 1 = 5 \xrightarrow{g(1)=3} f(3) = 5$$

۳ ۲۵۱

ابتدا $g(3)$ را پیدا می کنیم:

$$\begin{aligned} f(g(x) + x) = 6x + 1 \xrightarrow{x=3} f(g(3) + 3) = 6 \times 3 + 1 = 19 \\ \text{حالا اگر در رابطه } f(x+1) = 2x+1 \text{ به جای } x \text{ عدد ۹ قرار دهیم، نتیجه} \\ \text{می گیریم } f(10) = 19 \text{ است. پس:} \\ g(3) + 3 = 10 \Rightarrow g(3) = 7 \end{aligned}$$

بنابراین $f(g(3)) = f(7)$ است و داریم:

$$f(x+1) = 2x+1 \xrightarrow{x=6} f(7) = 2(6) + 1 = 13$$

۲ ۲۵۲

ابتدا $f(g(1))$ را محاسبه می کنیم:

$$\begin{aligned} \text{برای پیدا کردن } g(1) \text{ باید در تابع } g(x) = \begin{cases} f(x+1); & x < 1 \\ f(x-1); & x \geq 1 \end{cases} \text{ سراغ} \\ \text{ضابطه پایینی برویم:} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g(1) = f(1-1) = f(0) \xrightarrow{f(x)=x^2+1; x < 2} f(0) = 1 \\ \Rightarrow f(g(1)) = f(f(0)) = f(1) = 1^2 + 1 = 2 \end{aligned}$$

۳ ۲۵۳

ضابطه تابع را تشکیل می دهیم:

$$\begin{aligned} f(f(x)) &= 2 - |f(x) - 2| = 2 - |2 - |x - 2|| - 2| \\ &= 2 - ||x - 2|| = f(x) \end{aligned}$$

۲ ۲۵۴

ابتدا ضابطه تابع gof را به دست می آوریم:

$$\begin{aligned} \begin{cases} f(x) = x^2 + 2x \\ g(x) = x - 3 \end{cases} \Rightarrow g(f(x)) = (x^2 + 2x) - 3 \\ \text{حال معادله } (gof)(x) = 2 \text{ را حل می کنیم:} \end{aligned}$$

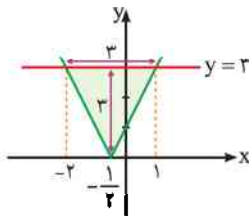
$$\begin{aligned} x^2 + 2x - 3 = 2 \Rightarrow x^2 + 2x - 5 = 0 \Rightarrow \begin{cases} S = \alpha + \beta = -2 \\ P = \alpha \times \beta = -5 \end{cases} \\ \Rightarrow \alpha^2 + \beta^2 = S^2 - 2P = (-2)^2 - 2(-5) = 14 \end{aligned}$$

سب ۳۵۳

ابتدا ضابطه تابع gof را به دست می آوریم:

$$g(f(x)) = \sqrt{f(x^2 + x) + 1} = \sqrt{4x^2 + 4x + 1}$$

$$= \sqrt{(2x+1)^2} = |2x+1|$$



حال نمودار تابع $(gof)(x) = |2x+1|$

و خط $y=3$ را در یک دستگاه مختصات رسم می کنیم و محل برخورد آن ها را مشخص می کنیم:

$$|2x+1|=3 \Rightarrow x=-2, x=1 \Rightarrow S = \frac{1}{2} \times 3 \times 3 = \frac{9}{2} = 4.5$$

سب ۳۵۴

چون نمودار تابع f محور x ها را در دو نقطه با طول های ۶ و $-\frac{1}{4}$ قطع می کند پس $f(6)=0$ و $f(-\frac{1}{4})=0$ است. حال برای مشخص کردن محل برخورد نمودار تابع fog با محور x ها، باید معادله زیر را حل کنیم:

$$f(g(x))=0 \Rightarrow \begin{cases} g(x)=6 \Rightarrow x-\sqrt{x}=6 \Rightarrow x=9 \\ g(x)=-\frac{1}{4} \Rightarrow x-\sqrt{x}=-\frac{1}{4} \Rightarrow x=\frac{1}{4} \end{cases}$$

سب ۳۵۵

چون g محور طول ها را در $x=1$ و $x=2\sqrt{2}$ قطع می کند، پس:

$$g(1)=0, \quad g(2\sqrt{2})=0$$

بنابراین تابع $g(f(x))$ در نقاطی محور x ها را قطع می کند که $f(x)=1$ یا $f(x)=2\sqrt{2}$ باشد،

$$f(x)=1 \Rightarrow x\sqrt{x}=1 \Rightarrow x=1$$

$$f(x)=2\sqrt{2} \Rightarrow x\sqrt{x}=2\sqrt{2} \xrightarrow{\text{توان}} x^3=8 \Rightarrow x=2$$

بنابراین اختلاف طول برابر است با: $2-1=1$

سب ۳۵۶

ابتدا تابع $fog(x)$ را پیدا می کنیم:

$$f(g(x)) = f(2x+1) = \begin{cases} 3(2x+1)-12 & ; 2x+1 \geq 3 \\ (2x+1)^2-1 & ; 2x+1 < 3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(g(x)) = \begin{cases} 6x-9 & ; x \geq 1 \\ 4x^2+4x & ; x < 1 \end{cases}$$

حالا برای حل معادله $fog(x)=0$ هر یک از ضابطه ها را برابر صفر می گذاریم:

$$x \geq 1: 6x-9=0 \Rightarrow x=\frac{3}{2}$$

$$x < 1: 4x^2+4x=0 \Rightarrow 4x(x+1)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=-1 \end{cases}$$

پس مجموع ریشه ها برابر $\frac{3}{2} + 0 + (-1) = \frac{1}{2}$ است.

$$2) (fog)(x) = f(g(x)) = \frac{2(x+4)-1}{(x+4)+2} = \frac{2x+7}{x+6}$$

$$\Rightarrow \frac{6x+7}{x+2} = \frac{2x+7}{x+6} \Rightarrow \frac{(6x+7)(x+6)}{6x^2+42x+42} = \frac{(2x+7)(x+2)}{2x^2+11x+14}$$

$$\Rightarrow 4x^2+32x+28=0 \Rightarrow \underbrace{x^2+8x+7}_{a+c=b} = 0 \Rightarrow x=-1, x=-7$$

می توانستیم از گزینه ها اعداد را جای گذاری کنیم.

سب ۳۵۹

ابتدا ضابطه fog را تشکیل می دهیم:

$$f(g(x)) = \left(\frac{x-3}{2}\right)^2 + \left(\frac{x-3}{2}\right) - 2 = \frac{x^2-4x-5}{4}$$

می دانیم عرض نقاطی از نمودار تابع که زیر محور x ها قرار می گیرند،

$$\frac{x^2-4x-5}{4} < 0 \Rightarrow (x+1)(x-5) < 0 \Rightarrow -1 < x < 5$$

چون $x=4$ و $x=0$ در نامعادله $f(g(x)) < 0$ صدق می کنند؛ پس گزینه (۲) درست است.

سب ۳۶۰

می دانیم $[x] + [-x]$ به ازای x های صحیح برابر صفر و به ازای x های غیر صحیح برابر -1 است، پس دو حالت برای مقادیر x در نظر می گیریم:

$$x \in \mathbb{Z}: g(f(x)) = g(0) = 4$$

$$x \notin \mathbb{Z}: g(f(x)) = g(-1) = 3$$

پس به ازای تمام x های غیر صحیح تابع gof برابر ۳ است.

سب ۳۶۱

می دانیم $f(x) = x^2 - 7x + 10 = (x-2)(x-5)$ است. حالا ضابطه $fog(x)$ را پیدا می کنیم و برای این که ببینیم نمودار آن در کدام بازه زیر محور x ها قرار دارد، خواهیم داشت:

$$f(g(x)) = ([x]-2)([x]-5) < 0 \Rightarrow 2 < [x] < 5$$

چون حاصل $[x]$ مقداری صحیح است، پس $[x]=3$ یا $[x]=4$ است، یعنی:

$$3 \leq x < 5$$

بنابراین نمودار fog در بازه $[3, 5)$ زیر محور x ها قرار دارد و $b-a=5-3=2$ است.

سب ۳۶۲

ضابطه gof را تشکیل می دهیم و آن را برابر ۱ قرار می دهیم:

$$gof(x) = 1 \Rightarrow |2|x-3|-7| = 1 \Rightarrow \begin{cases} 1) 2|x-3|-7=1 \\ 2) 2|x-3|-7=-1 \end{cases}$$

حالا هر یک از معادله های (۱) و (۲) را حل می کنیم:

$$1) 2|x-3|=8 \Rightarrow |x-3|=4 \Rightarrow \begin{cases} x-3=4 \Rightarrow x=7 \\ x-3=-4 \Rightarrow x=-1 \end{cases}$$

$$2) 2|x-3|=6 \Rightarrow |x-3|=3 \Rightarrow \begin{cases} x-3=3 \Rightarrow x=6 \\ x-3=-3 \Rightarrow x=0 \end{cases}$$

پس مجموع جواب های معادله $(gof)(x)=1$ برابر است با:

$$7 + (-1) + 6 + 0 = 12$$

هایلایت

یافتن ضابطه تابع بیرونی با معلوم بودن تابع مرکب

در بعضی از سؤالات، ضابطه تابع مرکب fog و تابع g [تابع درونی] را می‌دهند و ضابطه تابع f [تابع بیرونی] یعنی f(x) را می‌خواهند. برای حل این مدل از سؤالات به ترتیب زیر عمل می‌کنیم:

۱ ضابطه تابع g(x) را برابر t فرض کرده و مقدار x را برحسب t به دست می‌آوریم.

۲ در تابع مرکب داده شده، به جای x عبارت به دست آمده برحسب t را قرار می‌دهیم و تابع f برحسب t یعنی f(t) را به دست می‌آوریم.

۳ در تابع f(t) به جای همه t ها، x می‌گذاریم تا ضابطه f(x) به دست آید.

۴ به پوره دیگه! طراح می‌تونست به سؤال فرید و البته سخت پیرسه. اینجوری: اگر $fog(x) = \frac{x}{x-3}$ و $g(x) = 2x-1$ باشد، بُرد تابع f کدام است؟
 جواب: $f(x) = \frac{x+1}{x-5} \Rightarrow \text{بُرد} = \mathbb{R} - \{1\}$

۳ ۲۷۱

با در نظر گرفتن $g(x) = t$ داریم:

$$2x+1=t \Rightarrow x=\frac{t-1}{2} \Rightarrow f(g(x))=8x^2+6x+5$$

$$\Rightarrow f(t)=8\left(\frac{t-1}{2}\right)^2+6\left(\frac{t-1}{2}\right)+5=2(t^2-2t+1)+3(t-1)+5$$

با ساده کردن عبارت به دست آمده، $f(t)=2t^2-t+4$ می‌شود که با جای گذاری x به جای t، ضابطه تابع f به صورت $f(x)=2x^2-x+4$ خواهد شد.

پرسش سریع با جای گذاری عدد دلخواه $x=0$ در تابع fog داریم:

$$f(g(0))=5 \xrightarrow{g(0)=1} f(1)=5 \Rightarrow \text{گزینه (۳)}$$

۴ به پوره دیگه! طراح می‌تونست پیرسه:

کمترین مقدار تابع f کدام است؟ جواب: $\frac{31}{8}$

معادله محور تقارن تابع f کدام است؟ جواب: $x=\frac{1}{4}$

نمودار تابع f از کدام نواحی دستگاه مختصات نمی‌گذرد؟ جواب: سوم و چهارم

۴ ۲۷۲

$$2x-3=t \Rightarrow x=\frac{t+3}{2} \text{ فرض می‌کنیم } 2x-3=t \text{ باشد، بنابراین:}$$

$$\Rightarrow f(2x-3)=f(t)=4\left(\frac{t+3}{2}\right)^2-14\left(\frac{t+3}{2}\right)+13$$

۲ ۲۶۷

با توجه به نمودار تابع g(x) در صورت سؤال $g(2)=0$ است، پس برای حل معادله داریم:

$$g(f(g(x+2)))=0 \Rightarrow f(g(x+2))=2$$

حالا باید f(x) را برابر ۲ قرار دهیم:

$$f(x)=\left|\frac{1}{3}x-1\right|=2 \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{3}x-1=2 \Rightarrow x=9 \\ \frac{1}{3}x-1=-2 \Rightarrow x=-3 \end{cases}$$

پس باید $g(x+2)$ برابر ۲ یا ۹ باشد:

$$g(x+2)=9 \rightarrow \text{یک جواب}$$

$$g(x+2)=-2 \rightarrow \text{یک جواب}$$

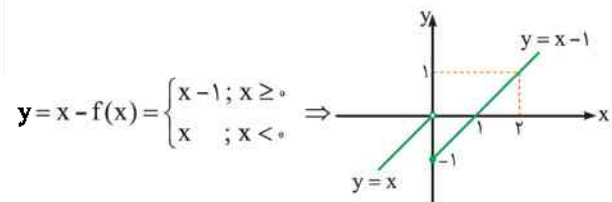
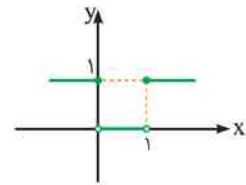
پس معادله دارای ۲ ریشه است.

۱ ۲۶۸

ضابطه تابع‌های $y=fog$ و $y=x-f(x)$ را پیدا می‌کنیم و نمودار آن‌ها را رسم می‌کنیم:

$$f(g(x))=\begin{cases} 1; & x^2-x \geq 0 \\ 0; & x^2-x < 0 \end{cases}$$

$$=\begin{cases} 1; & x \leq 0 \text{ یا } x \geq 1 \\ 0; & 0 < x < 1 \end{cases} \Rightarrow$$



دو نمودار فقط در یک نقطه به طول $x=2$ مشترک هستند.

۴ ۲۶۹

با توجه به شکل صورت سؤال $f(x)-g(x)=-x+5$ است. در ضمن با توجه به رابطه صورت سؤال $2g(x)=3f(x)-14$ است، پس:

$$\begin{cases} f(x)-g(x)=-x+5 \\ 3f(x)-2g(x)=14 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2f(x)+2g(x)=2x-10 \\ 3f(x)-2g(x)=14 \end{cases}$$

از حل دو معادله دو مجهول بالا نتیجه می‌گیریم $f(x)=2x+4$ و $g(x)=3x-1$ است. بنابراین:

$$f(g(x))=2(3x-1)+4=6x+2$$

از طرفی با توجه به نمودار صورت سؤال، $f(g(x))=-\frac{2}{a}x+2$ است، پس:

$$-\frac{2}{a}=6 \Rightarrow a=-\frac{1}{3}$$

۲ ۲۷۰

چون $f(g(x))$ را داریم و $f(3)$ را می‌خواهیم، پس $g(x)$ را برابر ۳ می‌گذاریم:

$$g(x)=3 \Rightarrow 2x-1=3 \Rightarrow x=2$$

حالا در تابع $(fog)(x)$ به جای x عدد ۲ قرار می‌دهیم:

$$f(g(x))=\frac{x}{x-3} \xrightarrow{x=2} f(g(2))=\frac{2}{2-3} \Rightarrow f(3)=-2$$

۳۷۵ ۳

ابتدا ضابطه تابع g را به دست می آوریم. فرض کنیم $f(x) = t$ باشد:

$$2x + 3 = t \Rightarrow x = \frac{t-3}{2} \Rightarrow g(f(x)) = 8x^2 + 22x + 2.$$

$$\Rightarrow g(t) = 8\left(\frac{t-3}{2}\right)^2 + 22\left(\frac{t-3}{2}\right) + 2 = 2(t-3)^2 + 11(t-3) + 2.$$

با ساده کردن عبارت به دست آمده $g(t) = 2t^2 - t + 5$ خواهد شد، که با جای گذاری x به جای t ، ضابطه g به صورت $g(x) = 2x^2 - x + 5$ خواهد شد. پس:

$$f(g(x)) = 2(2x^2 - x + 5) + 3 = 4x^2 - 2x + 13$$

۳۷۶ ۴

با توجه به صورت سؤال داریم:

$$1) g(f(x)) = 3f(x) + 4 \Rightarrow g(x) = 3x + 4$$

$$2) f(g(x)) = 2g^2(x) + g(x) + 1 \Rightarrow f(x) = 2x^2 + x + 1$$

حالا تابع $(f-g)(x)$ را پیدا می کنیم و داریم:

$$y = f(x) - g(x) = (2x^2 + x + 1) - (3x + 4) = 2x^2 - 2x - 3$$

در این سهمی طول رأس برابر $\frac{1}{2a} = \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ است و کم ترین مقدار آن برابر است با:

$$y_{\min} = 2\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 2\left(\frac{1}{2}\right) - 3 = \frac{1}{2} - 1 - 3 = -3\frac{1}{2}$$

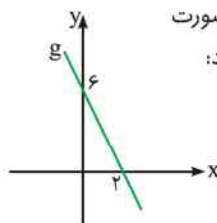
۳۷۷ ۳

ابتدا ضابطه تابع g را مرتب و دسته بندی می کنیم:

$$g(f(x)) = 6 - 3(2x^2 + x) = 6 - 3f(x)$$

پس $g(x) = 6 - 3x$ است و نمودارش به صورت

مقابل است که فقط از ناحیه سوم نمی گذرد:



۳۷۸ ۱

با توجه به نمودار صورت سؤال، سهمی f محور x ها را در دو

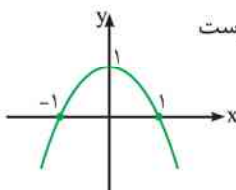
نقطه $x = 0$ و $x = 2$ قطع کرده و نقطه رأس آن $A(1, 1)$ است، پس

نقطه 1 قطع می کند و عرض از مبدأ آن نیز 1 است، پس $g(x) = -x + 1$ است. حالا برای پیدا کردن تابع f داریم:

$$g(x) = -x + 1 = t \Rightarrow x = 1 - t \Rightarrow f(g(x)) = -x^2 + 2x$$

$$\Rightarrow f(t) = -(1-t)^2 + 2(1-t) = -t^2 + 1 \Rightarrow f(x) = -x^2 + 1$$

با توجه به نمودار تابع f ، فقط عبارت (پ) درست است.



۳۷۹ ۲

واضح است که $(x^2 - x)^2 = x^4 - 2x^3 + x^2$ است، پس:

$$f(x^2 - x) = (x^4 - 2x^3 + x^2) + 5 = (x^2 - x)^2 + 5$$

حالا به جای x می توانیم x بگذاریم، یعنی $f(x) = x^2 + 5$ است.

حال عبارت به دست آمده را ساده می کنیم و در انتها به جای t مجدداً x قرار می دهیم:

$$f(t) = 4\left(\frac{t^2 + 6t + 9}{4}\right) - 7t - 21 + 13 = t^2 - t + 1$$

$$\Rightarrow f(x) = x^2 - x + 1$$

با قرار دادن $x = 0$ در ضابطه $f(2x - 3)$ داریم:

$$f(0 - 3) = 4(0)^2 - 7(0) + 13 \Rightarrow f(-3) = 13$$

تنها گزینه ای که با قرار دادن $x = -3$ برابر ۱۳ می شود، گزینه (۴) است.

۳۷۳ ۴

با استفاده از تغییر متغیر داریم:

$$x - 3 = t \Rightarrow x = t + 3 \Rightarrow f(t) = (t + 3)^2 - 4(t + 3) + 5$$

$$\Rightarrow f(t) = t^2 + 6t + 9 - 4t - 12 + 5 \Rightarrow f(x) = x^2 + 2x + 2$$

$$\Rightarrow f(1-x) = (1-x)^2 + 2(1-x) + 2 \Rightarrow f(1-x) = x^2 - 4x + 5$$

می توانیم در تابع $f(x - 3)$ به جای x عبارت $4 - x$ قرار دهیم.

برای عددگذاری در این سؤال ابتدا باید عدد مناسب

را به دست آوریم:

$$x - 3 = 1 - x \Rightarrow x = 2$$

$$\xrightarrow{\text{جای گذاری در } f(x-3)} f(2-3) = 2^2 - 4 \times 2 + 5 \Rightarrow f(-1) = 1$$

با قرار دادن $x = 2$ در ضابطه $f(1-x)$ ، به $f(-1)$ می رسیم و

می دانیم $f(-1) = 1$ است، پس گزینه ای نشان دهنده ضابطه

$f(1-x)$ است که با قرار دادن $x = 2$ در آن، حاصل برابر ۱ شود.

در میان گزینه ها فقط گزینه (۴) این ویژگی را دارد.

۳۷۴ ۴

ابتدا تابع $f \circ g(x)$ را پیدا می کنیم:

$$f \circ g(x) = (2x + 1)g(x) + 6x = (2x + 1)(2x - 3) + 6x$$

$$= 4x^2 + 2x - 3$$

حالا با در نظر گرفتن $g(x) = t$ داریم:

$$2x - 3 = t \Rightarrow x = \frac{t+3}{2} \Rightarrow f(g(x)) = 4x^2 + 2x - 3$$

$$\Rightarrow f(t) = 4\left(\frac{t+3}{2}\right)^2 + 2\left(\frac{t+3}{2}\right) - 3 = (t+3)^2 + (t+3) - 3$$

$$\Rightarrow f(t) = t^2 + 7t + 9$$

با جای گذاری x به جای t ، ضابطه تابع f به صورت $f(x) = x^2 + 7x + 9$ می شود و معادله محور تقارن آن برابر است با:

$$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{7}{2} = -3\frac{1}{2}$$

۲ ۲۸۴

 بهتر است ابتدا ضابطه دو تابع f و fog را ساده تر کنیم:

$$f(x) = \frac{2x+1}{x+1} = \frac{2x+2-1}{x+1} = 2 - \frac{1}{x+1}$$

$$fog(x) = \frac{2x}{x+1} = \frac{2x+2-2}{x+1} = 2 - \frac{2}{x+1}$$

 حالا در تابع $f(x)$ به جای x ها، تابع $g(x)$ قرار می دهیم و آن را با ضابطه fog داده شده در صورت سؤال مقایسه می کنیم:

$$\begin{cases} f(g(x)) = 2 - \frac{1}{g(x)+1} \\ f(g(x)) = 2 - \frac{2}{x+1} \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{g(x)+1} = \frac{2}{x+1}$$

$$\Rightarrow g(x)+1 = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \Rightarrow g(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$$

۱ ۲۸۵

 ابتدا با کمک اتحاد مربع کامل، ضابطه توابع f و fog را ساده می کنیم:

$$f(x) = x^2 - x + \frac{1}{4} - \frac{9}{4} = (x - \frac{1}{2})^2 - \frac{9}{4}$$

$$f(g(x)) = x^2 + x + \frac{1}{4} - \frac{9}{4} = (x + \frac{1}{2})^2 - \frac{9}{4}$$

 حال در تابع f ، به جای همه x ها، $g(x)$ می گذاریم:

$$f(g(x)) = (g(x) - \frac{1}{2})^2 - \frac{9}{4}$$

 از طرفی در صورت سؤال $f(g(x)) = (x + \frac{1}{2})^2 - \frac{9}{4}$ است، پس:

$$(g(x) - \frac{1}{2})^2 - \frac{9}{4} = (x + \frac{1}{2})^2 - \frac{9}{4} \Rightarrow (g(x) - \frac{1}{2})^2 = (x + \frac{1}{2})^2$$

$$\begin{cases} g(x) - \frac{1}{2} = x + \frac{1}{2} \Rightarrow g(x) = x + 1 \\ g(x) - \frac{1}{2} = -x - \frac{1}{2} \Rightarrow g(x) = -x \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (f+g)(x) = (x^2 - x - 2) + (x+1) = x^2 - 1 \\ (f+g)(x) = (x^2 - x - 2) + (-x) = x^2 - 2x - 2 \end{cases}$$

۲ ۲۸۶

 چون ترکیب تابع $f(x)$ با خودش، تابعی خطی است، پس $f(x)$ تابعی خطی بوده و داریم:

$$f(x) = ax + b \Rightarrow f(f(x)) = a(ax + b) + b = a^2x + ab + b$$

 با توجه به صورت سؤال $f(f(x)) = 4x - 3$ است، پس:

$$a^2 = 4 \Rightarrow a = \pm 2 \xrightarrow{\text{فرض می کنیم } a < 0} a = -2$$

$$ab + b = -3 \Rightarrow -2b + b = -3 \Rightarrow -b = -3 \Rightarrow b = 3$$

 پس $f(x) = -2x + 3$ است. حالا با توجه به این که $f(x) = x^2 - x + 3$ است، سراغ پیدا کردن تابع $g(x)$ می رویم:

$$\begin{cases} f(g(x)) = x^2 - x + 3 \\ f(g(x)) = -2g(x) + 3 \end{cases} \Rightarrow -2g(x) + 3 = x^2 - x + 3$$

$$\Rightarrow -2g(x) = x^2 - x \Rightarrow g(x) = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x$$

 طول رأس این سهمی برابر $x = -\frac{\frac{1}{2}}{2(-\frac{1}{2})} = \frac{1}{2}$ و بیشترین مقدار آن برابر است با:

$$f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{4}$$

۴ ۲۸۵

 ابتدا ضابطه $f(\frac{x^2-2}{x}) = x^2 + x - 4 - \frac{2}{x} + \frac{4}{x^2}$ را مرتب و دسته بندی می کنیم:

$$f(x - \frac{2}{x}) = (x^2 + \frac{4}{x^2} - 4) + (x - \frac{2}{x}) = (x - \frac{2}{x})^2 + (x - \frac{2}{x})$$

 حالا به جای $x - \frac{2}{x}$ می گذاریم x ، ببینید:

۱. به پوره رنگه! نمونه های معروف تر و البته ساده تر این سوال رو اینطور مطرح می کنن: اگر $f(x + \frac{1}{x}) = x^2 + \frac{1}{x^2}$ باشد، نمودار تابع $y = f(x)$ در کدام بازه زیر محور x ها است؟

۲ ۲۸۱

 در ضابطه $fog(x)$ به جای x عدد ۱ می گذاریم:

$$f(g(1)) = \frac{5(1)-2}{2(1)+1} = \frac{3}{3} \Rightarrow f(-1) = \frac{3}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{-1+1+a}{-1-1-1} = \frac{3}{3} \Rightarrow -44+4a = -36 \Rightarrow a = 2$$

هایلایت

یافتن ضابطه تابع درونی یا معلوم بودن تابع مرکب

در بعضی از سوالات، ضابطه تابع مرکب fog و تابع f (تابع بیرونی) داده شده و ضابطه تابع g (تابع درونی) یعنی $g(x)$ را می خواهند. برای حل این مدل سوالات به ترتیب زیر عمل می کنیم:

۱. در تابع $f(x)$ به جای همه x ها، $g(x)$ را قرار می دهیم تا $f(g(x))$ به دست آید.

۲. تابع $f(g(x))$ به دست آمده را مساوی با تابع مرکب fog که در مسئله داده شده، قرار می دهیم و معادله حاصل را بر حسب $g(x)$ حل می کنیم.

۲ ۲۸۲

با توجه به ماژین داده شده، $g(f(x)) = 2x$ است. حال برای به دست آوردن $f(5)$ یک بار در تابع $(gof)(x)$ به جای x عدد ۵ می گذاریم و یک بار هم در تابع $g(x)$ به جای x ها، $f(5)$ می گذاریم:

$$\begin{aligned} g(f(5)) &= 2 \times 5 = 10 \Rightarrow 3f(5) + 4 = 10 \Rightarrow f(5) = 2 \\ g(f(5)) &= 3f(5) + 4 \end{aligned}$$

۳ ۲۸۳

ابتدا ضابطه تابع های fog و f را با کمک اتحاد مربع دو جمله ای ساده می کنیم:

$$f(x) = 4(x^2 + 4x + 4) + 2 = 4(x+2)^2 + 2$$

$$fog(x) = x^2 + 2x + 1 + 2 = (x+1)^2 + 2$$

حالا در تابع $f(x)$ به جای x ها، تابع $g(x)$ قرار می دهیم و آن را با ضابطه fog در صورت سؤال مقایسه می کنیم:

$$\begin{cases} f(g(x)) = 4(g(x)+2)^2 + 2 \\ f(g(x)) = (x+1)^2 + 2 \end{cases} \Rightarrow 4(g(x)+2)^2 = (x+1)^2$$

$$\sqrt{\quad} \rightarrow \begin{cases} 2(g(x)+2) = x+1 \Rightarrow g(x) = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2} \quad \times \\ 2(g(x)+2) = -x-1 \Rightarrow g(x) = -\frac{1}{2}x - \frac{5}{2} \quad \checkmark \end{cases}$$

۲ ۲۹۰

ابتدا دامنه تابع های f و g را تعیین می کنیم:

$$f(x) = \frac{1+x^2}{1-x^2} \Rightarrow x \neq \pm 1$$

$$g(x) = \sqrt{x-x^2} \Rightarrow x(1-x) \geq 0 \Rightarrow 0 \leq x \leq 1$$

$$D_{gof} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\} = \{x \neq \pm 1 \mid 0 \leq \frac{1+x^2}{1-x^2} \leq 1\}$$

حال باید جواب نامعادله $0 \leq \frac{1+x^2}{1-x^2} \leq 1$ را مشخص کنیم:

$$1) \frac{1+x^2}{1-x^2} \geq 0 \Rightarrow \frac{1+x^2}{1-x^2} > 0 \Rightarrow 1-x^2 > 0 \Rightarrow x^2 < 1 \Rightarrow -1 < x < 1$$

$$2) \frac{1+x^2}{1-x^2} \leq 1 \Rightarrow \frac{1+x^2}{1-x^2} - 1 \leq 0 \Rightarrow \frac{1+x^2-1+x^2}{1-x^2} \leq 0$$

$$\Rightarrow \frac{2x^2}{1-x^2} \leq 0 \Rightarrow \frac{2x^2}{1-x^2} \geq 0 \Rightarrow 1-x^2 < 0 \Rightarrow 1 < x^2$$

$$\Rightarrow x > 1 \text{ یا } x < -1 \text{ یا } x = 0$$

با توجه به این که اشتراک جواب های به دست آمده از نامعادله برابر

$$D_{gof} = \{x \neq \pm 1 \mid x = 0\} = \{0\} \quad x = 0 \text{ است، پس:}$$

پس $x = \frac{1}{3}$ را در تابع gof قرار می دهیم:

$$g(f(\frac{1}{3})) = g(\frac{5}{3}) = \sqrt{\frac{5}{3} - (\frac{5}{3})^2} = \sqrt{\frac{5}{3}(1 - \frac{5}{3})} = \sqrt{-\frac{10}{9}}$$

پس گزینه های (۱)، (۳) و (۴) حذف می شوند.

۱ ۲۹۱

ابتدا دامنه توابع f و g را مشخص می کنیم. از آن جایی که عبارت $x + |x|$

به ازای $x > 0$ برابر $2x$ و به ازای $x \leq 0$ برابر صفر است، پس $D_f = \mathbb{R}$

است. در تابع کسری g نیز مخرج نباید صفر شود، پس $D_g = \mathbb{R} - \{0, 4\}$

است، بنابراین:

$$D_{gof} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\} \\ = \{x \in \mathbb{R} \mid \sqrt{x+|x|} \neq 0, \sqrt{x+|x|} \neq 4\}$$

تابع f به ازای $x \leq 0$ برابر صفر و به ازای $x = 8$ برابر ۴ می شود، پس:

$$D_{gof} = (0, 8) \cup (8, +\infty)$$

پس گزینه (۱) درست است. چون $x = -1$ و $x = 8$ در تابع gof صدق نمی کنند:

۴ ۲۹۲

ابتدا دامنه تابع های f و g را تعیین می کنیم:

$$f(x) = \sqrt{3-x} \Rightarrow 3-x \geq 0 \Rightarrow 3 \geq x$$

$$g(x) = \log_2(x^2 + 2x) \Rightarrow x(x+2) > 0 \Rightarrow x < -2 \text{ یا } x > 0$$

$$D_{fog} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\} = \{x < -2 \text{ یا } x > 0 \mid \log_2(x^2 + 2x) < 3\}$$

بنابراین باید جواب نامعادله $\log_2(x^2 + 2x) \leq 3$ را مشخص کنیم:

$$\log_2(x^2 + 2x) \leq 3 \Rightarrow x^2 + 2x \leq 2^3$$

$$\Rightarrow x^2 + 2x - 8 \leq 0 \Rightarrow (x-2)(x+4) \leq 0 \Rightarrow -4 \leq x \leq 2$$

۴ ۲۸۷

نمودار تابع fog محور x ها را در دو نقطه به طول های ۴ و صفر

قطع کرده است و چون نقطه رأس آن $(2, -4)$ است، پس

$fog(x) = x^2 - 4x$ می باشد. در ضمن $f(x) = 2x + 8$ است.

حالا ضابطه تابع g را پیدا می کنیم:

$$\begin{cases} f(g(x)) = 2g(x) + 8 \\ f(g(x)) = x^2 - 4x \end{cases} \Rightarrow 2g(x) + 8 = x^2 - 4x$$

$$\Rightarrow g(x) = \frac{1}{2}(x^2 - 4x - 8) \xrightarrow{\text{محور تقارن}} x = -\frac{b}{2a} = -\frac{-4}{2(1)} = 2$$

۱ ۲۸۸

ابتدا دامنه توابع g و f را به دست می آوریم:

$$f(x) = \frac{2x-1}{x-1}; D_f = \mathbb{R} - \{1\}, g(x) = \frac{3x-4}{x+2}; D_g = \mathbb{R} - \{-2\}$$

$$\Rightarrow D_{fog} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\} = \{x \neq -2 \mid \frac{3x-4}{x+2} \neq 1\}$$

$$= \{x \neq -2 \mid x \neq 3\} = \mathbb{R} - \{-2, 3\} \Rightarrow a+b = -2+3 = 1$$

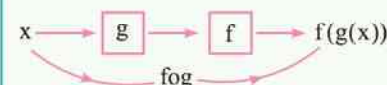
۴ به پوره دیگه! طراح می تونسست اینجوری پیرسه:

اگر $f(x) = \frac{2x-1}{x-1}$ و دامنه تابع fog برابر $\mathbb{R} - \{a, b\}$ باشد، مقدار $a+b$ کدام است؟ جواب: $a+b = 0+1 = 1$

هابلایت

یافتن دامنه تابع مرکب

با توجه به نحوه تشکیل تابع fog مشخص است که $g(x)$ به جای مقادیر ورودی تابع f قرار می گیرد، پس دامنه تابع fog به صورت زیر خواهد بود:



$$\Rightarrow D_{f(g(x))} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\}$$

۲ ۲۸۹

دامنه تابع f برابر $x \leq 5$ و دامنه تابع g برابر $\mathbb{R}$ است. برای پیدا کردن

دامنه تابع fog باید دو شرط زیر را بررسی کنیم:

$$1) x \in D_g \Rightarrow x \in \mathbb{R}$$

$$2) g(x) \in D_f \Rightarrow x^2 + 4x \leq 5 \Rightarrow x^2 + 4x - 5 \leq 0$$

$$\Rightarrow (x-1)(x+5) \leq 0 \Rightarrow -5 \leq x \leq 1$$

از اشتراک مقادیر به دست آمده از (۱) و (۲) نتیجه می گیریم دامنه تابع

fog به صورت بازه $[-5, 1]$ است، پس: $a \times b = -5 \times 1 = -5$

بنابراین دامنهٔ fog برابر می‌شود با:

$$D_{fog} = \{x < -2 \text{ یا } x > 0 \mid -4 \leq x \leq 2\} = [-4, -2) \cup (0, 2]$$

پوش سرختر با قرار دادن $x = -2$ در تابع fog عبارت جلوی لگاریتم صفر می‌شود، پس $x = -2$ نباید در دامنهٔ تابع باشد. بنابراین گزینه‌های (۱)، (۲) و (۳) حذف می‌شوند.

۲۹۳ ۱

ابتدا دامنهٔ تابع‌های f و g را تعیین می‌کنیم:

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{-x^2 + x + 2}} \Rightarrow -x^2 + x + 2 > 0 \Rightarrow \underbrace{x^2 - x - 2}_{(x-2)(x+1)} < 0$$

$$\Rightarrow -1 < x < 2$$

$$g(x) = \left(\frac{1}{x}\right)^x \Rightarrow D_g = \mathbb{R}$$

$$D_{fog} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\} = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < \left(\frac{1}{x}\right)^x < 2\}$$

می‌دانیم همواره $\left(\frac{1}{x}\right)^x > -1$ است. پس کفایت نامعادلهٔ $\left(\frac{1}{x}\right)^x < 2$ را حل کنیم:

$$\left(\frac{1}{x}\right)^x < 2 \Rightarrow (x^{-2})^x < 2 \Rightarrow x^{-2x} < 2^1 \Rightarrow -2x < 1 \Rightarrow x > -\frac{1}{2}$$

پس دامنهٔ fog برابر است با:

$$D_{fog} = \{x \in \mathbb{R} \mid x > -\frac{1}{2}\} = \left(-\frac{1}{2}, +\infty\right)$$

پوش سرختر $x = 0$ در تابع fog صدق می‌کند، پس گزینه‌های (۲) و (۳) حذف می‌شود. $x = 1$ نیز در تابع fog صدق می‌کند، پس جواب گزینهٔ (۱) است.

۲۹۴ ۳

ابتدا دامنهٔ تابع f را به دست می‌آوریم:

$$f(x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x} : 1-x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 \leq 1 \Rightarrow -1 \leq x \leq 1$$

$$x \neq 0 \Rightarrow D_f = [-1, 0) \cup (0, 1]$$

$$D_{fog} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\}$$

$$= \left\{ -\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{4} \mid -1 \leq \tan x \leq 1, \tan x \neq 0 \right\}$$

با توجه به این که $-\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{4}$ است، از آنجا که $-1 \leq \tan x \leq 1$ و $\tan x \neq 0$ نتیجه می‌گیریم $-\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{4}$ است، بنابراین دامنهٔ تابع fog به صورت $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right] \setminus \{0\}$ است.

۲۹۵ ۳

در مرحله اول لازم است دامنه توابع f و g را با توجه به $-1 \leq x \leq 3$ به دست آوریم.

$$f(2x+1) = 3x-2 \Rightarrow -1 \leq x \leq 3 \xrightarrow{x \rightarrow 2x+1} -2 \leq 2x \leq 6$$

$$\xrightarrow{+1} -1 \leq 2x+1 \leq 7 \Rightarrow D_f = [-1, 7]$$

$$g(x) = 4x-3 \Rightarrow -1 \leq x \leq 3 \Rightarrow D_g = [-1, 3]$$

ضابطه $f(x)$ را هم پیدا کنیم وارد مرحله بعدی می‌شویم:

$$f(2x+1) = 3x-2 \xrightarrow[2x+1=t]{x=\frac{t-1}{2}} f(t) = \frac{3t-3}{2} - 2 = \frac{3t-3-4}{2}$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{3x-7}{2}$$

سپس با توجه به تعریف، دامنه تابع fog را به دست می‌آوریم:

$$D_{fog} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\} = \underbrace{\{x \in [-1, 3] \mid -1 \leq 4x-3 \leq 7\}}_I$$

$$(II) \quad -1 \leq 4x-3 \leq 7 \xrightarrow{+3} 2 \leq 4x \leq 10 \xrightarrow{+4} \frac{1}{2} \leq x \leq \frac{5}{2}$$

$$(I) \cap (II) = [-1, 3] \cap \left[\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right] \Rightarrow D_{fog} = \left[\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right]$$

۲۹۶ ۲

با توجه به شکل صورت سؤال، f تابعی خطی با ضابطهٔ $f(x) = x+2$ و دامنهٔ $[-2, 1]$ است، پس:

$$D_{fof} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_f\} = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x \leq 1 \mid -2 \leq f(x) \leq 1\}$$

حال نامعادلهٔ $-2 \leq f(x) \leq 1$ را حل می‌کنیم:

$$-2 \leq x+2 \leq 1 \Rightarrow -4 \leq x \leq -1$$

از اشتراک بازه‌های به دست آمده نتیجه می‌شود $D_{fof} = [-2, -1]$ است که شامل ۲ عدد صحیح می‌باشد.

پوش سرختر به پوره ریگه! طراح می‌توانست همین سؤالو اینطوری بپرسه: «تابع $y = (f \circ f)(x)$ با دامنهٔ $[-2, 1]$ را در نظر بگیرید. دامنهٔ تابع $y = (f \circ f)(x)$ شامل چند عدد صحیح است؟»

۲۹۷ ۱

با توجه به نمودار صورت سؤال $g(x) = -\frac{1}{x}x+2$ و دامنهٔ آن برابر بازهٔ

$[-2, 4]$ است. حالا دامنهٔ تابع $f(x)$ را پیدا می‌کنیم:

$$f(x) = \frac{x+1}{\sqrt{-x^2+6x-8}} : \frac{-x^2+6x-8}{-(x-2)(x-4)} > 0 \Rightarrow 2 < x < 4$$

حالا برای پیدا کردن دامنهٔ تابع fog باید هر دو شرط زیر را بررسی کنیم:

$$1) \quad x \in D_g \Rightarrow x \in [-2, 4]$$

$$2) \quad g(x) \in D_f \Rightarrow 2 < -\frac{1}{x}x+2 < 4 \Rightarrow 0 < -\frac{1}{x}x < 2$$

$$\Rightarrow -4 < x < 0$$

از اشتراک بازه‌های به دست آمده نتیجه می‌گیریم $-2 \leq x < 0$ است که شامل دو عدد صحیح -2 و -1 است.

۲۹۸ ۳

برای پیدا کردن $g \circ f$ ، f یعنی بازهٔ $[-2, 2]$ را به عنوان دامنهٔ تابع g در نظر بگیریم:

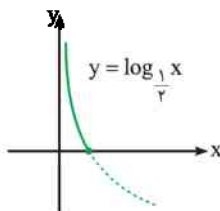
با توجه به نمودار تابع g در بازهٔ $[-2, 2]$ ، f در این بازه برابر $[-2, 0]$ است که شامل ۳ عدد صحیح -2 ، -1 و 0 است.

۳۵۲ ۱

ابتدا ضابطه تابع f را ساده می‌کنیم:

$$f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(1 - \cos^2 x) = \log_{\frac{1}{2}}(\sin^2 x)$$

می‌دانیم $1 \leq \sin x \leq -1$ است، پس $1 \leq \sin^2 x \leq 1$ است. در ضمن چون $\sin^2 x$ جلوی لگاریتم قرار دارد، پس $0 < \sin^2 x \leq 1$ است. حالا به نمودار تابع $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ توجه کنید:



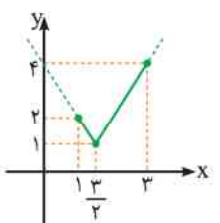
چون در تابع $f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(\sin^2 x)$ عبارت جلوی لگاریتم در بازه $(0, 1]$ قرار دارد، پس بُرد تابع f در این بازه به صورت بازه $[0, +\infty)$ است.

۳۵۳ ۳

می‌دانیم $1 \leq \sin^2 x \leq 1$ است، پس:

$$0 \leq 2 \sin^2 x \leq 2 \Rightarrow 1 \leq 1 + 2 \sin^2 x \leq 3$$

حالا باید بُرد تابع f را به ازای ورودی $[1, 3]$ پیدا کنیم:



$$\Rightarrow R_{fog} = [1, 4]$$

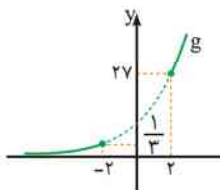
دام‌تستی اگر ابتدا و انتهای بازه $[1, 3]$ رو در تابع f قرار بدی، بُرد تابع fog رو بازه $[2, 4]$ به دست می‌آیی که غلطه!

۳۵۴ ۴

می‌دانیم $\log_x 2 = \frac{1}{\log_2 x}$ است. پس:

$$f(x) = \log_2 x + \frac{1}{\log_2 x}$$

در ضمن می‌دانیم مجموع هر عدد حقیقی با معکوسش در بازه $(2, +\infty)$ یا $(-\infty, -2)$ است. حالا باید بُرد تابع g را به ازای ورودی $(-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$ پیدا کنیم:



$$\Rightarrow R_{gof} = (0, \frac{1}{2}] \cup [27, +\infty)$$

هابلایت

$$x + \frac{1}{x} \geq 2$$

۱ اگر $x > 0$ باشد:

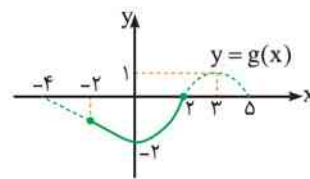
$$x + \frac{1}{x} \leq -2$$

۲ اگر $x < 0$ باشد:

۳۵۵ ۳

به بررسی عبارت‌ها می‌پردازیم:

$$\left\{ \begin{array}{l} -1 \xrightarrow{g} 4 \xrightarrow{f} x \\ 0 \xrightarrow{g} 1 \xrightarrow{f} 3 \\ 3 \xrightarrow{g} 2 \xrightarrow{f} -1 \end{array} \right\} \Rightarrow fog = \{(0, 3), (3, -1)\}$$



هابلایت

یافتن بُرد تابع مرکب

برای به دست آوردن بُرد تابع مرکب fog به ترتیب زیر عمل می‌کنیم:

- ۱ ابتدا بُرد تابع درونی یعنی g را به دست می‌آوریم.
- ۲ بُرد تابع درونی را به عنوان دامنه تابع بیرونی یعنی f در نظر می‌گیریم.
- ۳ سپس بُرد تابع بیرونی را با دامنه جدید به دست می‌آوریم.

۲۹۹ ۲

می‌دانیم $1 < [2x] - [2x] \leq 2x$ است. بنابراین

باید بُرد $g(x) = -x^2 + 4x$ را به ازای ورودی $(0, 1)$ به دست آوریم:

$$\Rightarrow \text{بُرد تابع } g = [0, 3]$$

۳۵۰ ۳

ابتدا ضابطه g را ساده می‌کنیم و سپس تابع gof را به دست می‌آوریم:

$$g(x) = \frac{1-2x}{x+1} = \frac{-2(x+1) + 3}{x+1} = -2 + \frac{3}{x+1}$$

$$\Rightarrow g(f(x)) = -2 + \frac{3}{[x] - x + 1}$$

از طرفی می‌دانیم $1 < [x] - x \leq 0$ پس $0 \leq x - [x] < 1$ بنابراین:

$$0 < [x] - x + 1 \leq 1 \Rightarrow \frac{3}{[x] - x + 1} \geq 3 \Rightarrow -2 + \frac{3}{[x] - x + 1} \geq 1$$

پس بُرد تابع gof به صورت $[1, +\infty)$ است.

عروض سرعتر چون $0 \leq [x] - x < 1$ است، می‌توانستیم نمودار

تابع $g(x) = \frac{1-2x}{x+1}$ را رسم کنیم و بُرد آن را در بازه $(-1, 0)$ به دست آوریم.

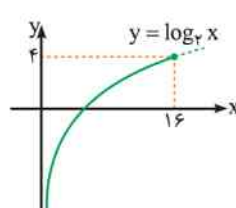
۳۵۱ ۳

دامنه تابع $f(x) = \log_2 x$ برابر $x > 0$ و دامنه تابع $g(x) = \lambda x - x^2$ برابر $\mathbb{R}$ است. حالا دامنه تابع fog را پیدا می‌کنیم:

$$1) x \in D_g \Rightarrow x \in \mathbb{R}$$

$$2) g(x) \in D_f \Rightarrow \lambda x - x^2 > 0 \Rightarrow 0 < x < \lambda$$

پس دامنه تابع fog برابر بازه $A = (0, \lambda)$ است. بُرد تابع $g(x)$ در بازه $(0, \lambda)$ برابر $(0, 16)$ است. حالا برای پیدا کردن محدوده بُرد تابع fog ، می‌توانیم



نمودار تابع f را در بازه $(0, 16)$ رسم کنیم:

$$\Rightarrow \text{بُرد تابع } fog = B = (-\infty, 4]$$

پس $A \cap B = (0, 4]$ است که شامل اعداد صحیح ۱ و ۲ و ۳ و ۴ است.

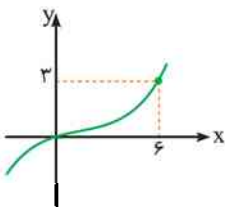
از طرفی دامنه تابع f برابر $[-4, 5]$ است:

$$-4 \leq x+1 \leq 5 \Rightarrow -5 \leq x \leq 4 \quad (2)$$

$$-4 \leq 2-x \leq 5 \Rightarrow -6 \leq -x \leq 3 \Rightarrow -3 \leq x \leq 6 \quad (3)$$

از اشتراک ۳ بازه بالا، محدوده x برابر $[-3, 0/5]$ به دست می آید.

۳۱۰ ۴



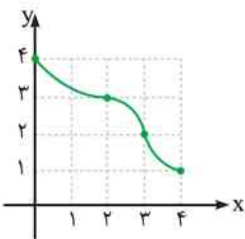
از آن جایی که f تابعی اکیداً صعودی است و از نقطه $A(6, 3)$ می گذرد، نمودار آن را به صورت مقابل فرض می کنیم. با توجه به نمودار، به ازای $x \leq 6$ رابطه $f(x) \leq 3$ برقرار است، پس:

$$f(g(x)) \leq 3 \Rightarrow g(x) \leq 6 \Rightarrow x^2 - x \leq 6 \Rightarrow x^2 - x - 6 \leq 0$$

$$\Rightarrow (x-3)(x+2) \leq 0 \Rightarrow -2 \leq x \leq 3$$

به پوره رنگه! طراح توی همین سوال، میتونست اینجوری پپرسه: «دامنه تابع $y = \sqrt{3 - (f \circ g)(x)}$ کدرا م است؟»

۳۱۱ ۲



با توجه به این که f تابعی اکیداً نزولی، با توجه به این که f تابعی اکیداً نزولی، $D_f = [0, 4]$ و $R_f = [1, 4]$ و $f(3) = 2$ و $f(2) = 3$ نمودار f را به صورت مقابل فرض می کنیم و با توجه به مقادیر تابع داریم:

$$1 \leq f(f(x)) \leq 2 \Rightarrow 3 \leq f(x) \leq 4 \Rightarrow 0 \leq x \leq 2$$

پس مجموعه نامعادله شامل سه عدد صحیح $x = 0, 1, 2$ است.

۳۱۲ ۲

تابع f از جمع دو تابع اکیداً صعودی $y = \sqrt{x} - 2$ و $y = x$ به دست آمده، پس اکیداً صعودی است:

$$f(f(x)) \leq f(\sqrt{x}) \Rightarrow f(x) \leq \sqrt{x} \Rightarrow x + \sqrt{x} - 2 \leq \sqrt{x}$$

$$\Rightarrow x - 2 \leq 0 \Rightarrow x \leq 2$$

از طرفی به دلیل وجود $\sqrt{x}$ ، باید $x \geq 0$ باشد.

حالا دامنه تابع $f \circ f(x)$ را پیدا می کنیم:

$$f(x) \in D_f \Rightarrow x + \sqrt{x} - 2 \geq 0 \Rightarrow (\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 2) \geq 0$$

همواره مثبت

$$\Rightarrow \sqrt{x} - 1 \geq 0 \Rightarrow \sqrt{x} \geq 1 \Rightarrow x \geq 1$$

از اشتراک مقادیر به دست آمده، نتیجه می گیریم $1 \leq x \leq 2$ است که شامل اعداد صحیح $x = 1$ و $x = 2$ می باشد.

۳۱۳ ۳

برای اینکه رابطه f نمایش دهنده یک تابع باشد، باید درزوج مرتب های $(1, a^2 + 3a)$ و $(1, 4)$ مؤلفه های دوم با هم برابر باشند.

$$a^2 + 3a = 4 \Rightarrow a^2 + 3a - 4 = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ a = -4 \end{cases}$$

$$\text{ب) } \begin{cases} 1 \xrightarrow{f} 3 \xrightarrow{f} 0 \\ 2 \xrightarrow{f} -1 \xrightarrow{f} 3 \\ 3 \xrightarrow{f} 0 \xrightarrow{f} 1 \\ 0 \xrightarrow{f} 1 \xrightarrow{f} 3 \end{cases} \Rightarrow \text{f} \circ \text{f} = \{(0, 3), (1, 0), (3, 1)\}$$

$$\text{پ) } \begin{cases} 1 \xrightarrow{f} 3 \xrightarrow{g} 2 \\ 2 \xrightarrow{f} -1 \xrightarrow{g} 4 \\ 3 \xrightarrow{f} 0 \xrightarrow{g} 1 \\ 0 \xrightarrow{f} 1 \xrightarrow{g} 3 \end{cases} \Rightarrow \text{g} \circ \text{f} = \{(1, 2), (2, 4), (3, 1)\}$$

تابع $f \circ g$ نزولی و توابع f و g غیریکنوا هستند.

۳۰۶ ۱

$$f(x+2) - f(3-2x) > 0 \Rightarrow f(x+2) > f(3-2x)$$

$$\Rightarrow x+2 > 3-2x \Rightarrow 3x > 1 \Rightarrow x > \frac{1}{3} \quad (1)$$

از طرفی دامنه تابع f برابر بازه $[-6, 4]$ است:

$$-6 < x+2 \leq 4 \Rightarrow -8 < x \leq 2 \quad (2)$$

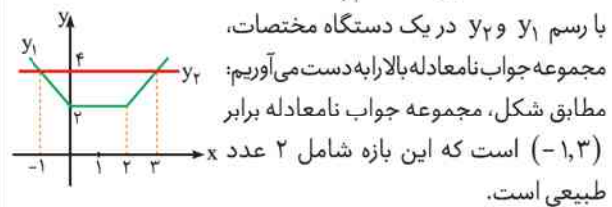
$$-6 < 3-2x \leq 4 \Rightarrow -9 < -2x \leq 1 \Rightarrow -\frac{1}{2} \leq x < \frac{9}{2} \quad (3)$$

از اشتراک ۳ بازه بالا، عدد x برابر $[\frac{1}{3}, 2]$ به دست می آید که این بازه تنها شامل دو عدد صحیح است.

۳۰۷ ۲

$$f(4-|x|) - f(|x-2|) > 0 \Rightarrow f(4-|x|) > f(|x-2|)$$

$$\Rightarrow 4-|x| > |x-2| \Rightarrow \underbrace{|x|}_{y_1} < \underbrace{4-|x-2|}_{y_2}$$



۳۰۸ ۱

$$1) f(m^2 - m - 5) < f(-3 + 2m - m^2) \Rightarrow m^2 - m - 5 > -3 + 2m - m^2 \Rightarrow 2m^2 - 3m - 2 > 0 \Rightarrow (2m+1)(m-2) > 0 \Rightarrow m < -\frac{1}{2} \text{ یا } m > 2$$

در ضمن چون دامنه تابع مجموعه ای از مقادیر منفی است، پس:

$$2) m^2 - m - 5 < 0 \Rightarrow \frac{1-\sqrt{21}}{2} < m < \frac{1+\sqrt{21}}{2}$$

$$3) -3 + 2m - m^2 < 0 \Rightarrow m^2 - 2m + 3 > 0 \Rightarrow \Delta < 0 \Rightarrow \text{همواره برقرار است.}$$

از اشتراک (۱) و (۲) و (۳) مجموعه جواب نامعادله برابر $(\frac{1-\sqrt{21}}{2}, -\frac{1}{2}) \cup (2, \frac{1+\sqrt{21}}{2})$ است که فقط یک مقدار صحیح یعنی $m = -1$ در این بازه قرار دارد.

۳۰۹ ۴

ابتدا دامنه تابع y را به دست می آوریم:

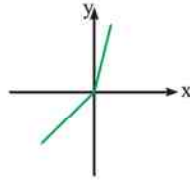
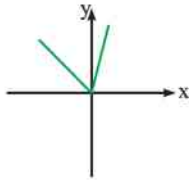
$$f(x+1) - f(2-x) > 0 \Rightarrow f(x+1) > f(2-x)$$

$$\Rightarrow x+1 < 2-x \Rightarrow 2x < 1 \Rightarrow x < \frac{1}{2} \quad (1)$$

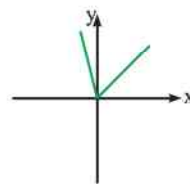
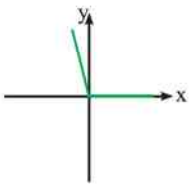
۳۱۶ ۲

نمودار هر یک از توابع داده شده را رسم می‌کنیم:

$$1) y = \begin{cases} 3x & ; x \geq 0 \\ -x & ; x < 0 \end{cases} \quad 2) y = \begin{cases} 3x & ; x \geq 0 \\ x & ; x < 0 \end{cases}$$



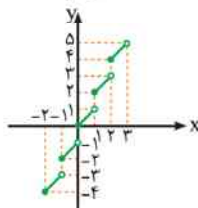
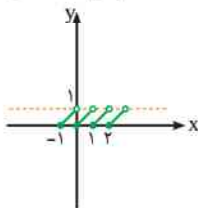
$$3) y = \begin{cases} 0 & ; x \geq 0 \\ -4x & ; x < 0 \end{cases} \quad 4) y = \begin{cases} x & ; x \geq 0 \\ -3x & ; x < 0 \end{cases}$$



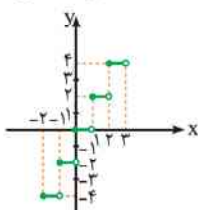
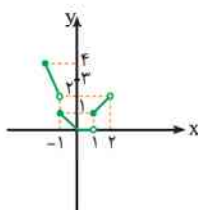
۳۱۷ ۲

نمودار هر یک از توابع داده شده را رسم می‌کنیم:

$$1) y = x - [x] \quad 2) y = x + [x]$$



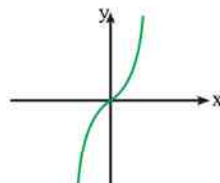
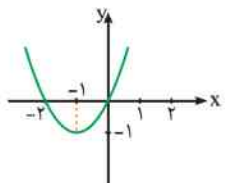
$$3) y = x[x] \quad 4) y = [x + [x]] = [x] + [x] = 2[x]$$



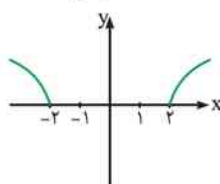
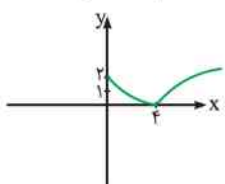
۳۱۸ ۲

نمودار هر یک از توابع داده شده را رسم می‌کنیم:

$$1) y = x^2 + 2x = (x+1)^2 - 1 \quad 2) y = x^3 + 2x$$



$$3) y = |\sqrt{x} - 2| \quad 4) y = \sqrt{|x| - 2}$$



اکنون شرط یک به یک بودن رابطه f را بررسی می‌کنیم:

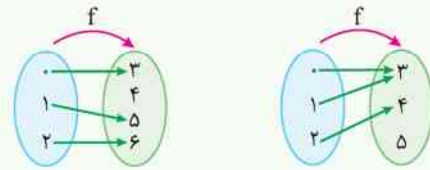
$$a = 1 \rightarrow f = \{(1, 4), (4, 5), (b, 5)\} \rightarrow b = 4 \Rightarrow b + a = 5$$

$$a = -4 \rightarrow f = \{(1, 4), (4, 5), (b, 5)\} \rightarrow b = 4 \Rightarrow b + a = 0$$

هابلیت

تابع یک به یک

اگر در یک رابطه تشکیل شده از زوج مرتب‌ها، به صورت (x, y) ، به ازای هر x فقط یک y داشته باشیم، آن رابطه یک تابع است. هم چنین اگر در تابع، به ازای هر y فقط یک x داشته باشیم، به این تابع، یک به یک گویند.



تابع است و یک به یک نیست. تابع یک به یک است.

اگر تابع f به صورت مجموعه‌ای از زوج مرتب‌ها به شکل (x, y) باشد، به شرطی یک به یک است که هیچ دو x مختلفی دارای y یکسان نباشند. مثلاً تابع $f = \{(1, 2), (3, 0), (4, 2)\}$ یک به یک نیست، زیرا دو زوج مرتب $(4, 2)$ ، $(1, 2)$ دارای مؤلفه دوم یکسان هستند. نمودار تابع f به شرطی یک به یک است که هر خط موازی محور x ها، نمودار را حداکثر در یک نقطه قطع کند.

توابع اکیداً صعودی و اکیداً نزولی، یک به یک هستند.

۳۱۴ ۴

می‌دانیم برای اینکه یک تابع، یک به یک باشد، باید هر خط افقی، نمودار تابع را حداکثر در یک نقطه قطع کند. در بین گزینه‌ها، تنها نمودار تابع گزینه (۴) این ویژگی را دارد.

۳۱۵ ۲

به بررسی همه گزینه‌ها می‌پردازیم:

(۱) دو تابع $f(x) = x$ و $g(x) = -x$ را در نظر بگیرید. هر دو تابع $f(x)$ و $g(x)$ یک به یک هستند، اما مجموع آنها یعنی $(f + g)(x) = f(x) + g(x) = x - x = 0$ یک تابع غیر یک به یک است. (۲) می‌دانیم برای اینکه تابع یک به یک باشد، باید تعداد اعضای دامنه و برد با هم برابر باشند، بنابراین تابع با دامنه ۳ عضوی و برد ۲ عضوی، قطعاً غیر یک به یک است.

(۳) تابع یک به یک $f(x) = x$ را در نظر بگیرید. اگر $k = 2$ باشد، $f^2(x) = x^2$ تابعی یک به یک نیست.

(۴) وقتی $|f|$ یک به یک است، یعنی قدر مطلق هیچ دو اندازه تابعی با هم برابر نشده است، بنابراین خود تابع f نیز حتماً یک به یک بوده است.

۱ ۳۱۹

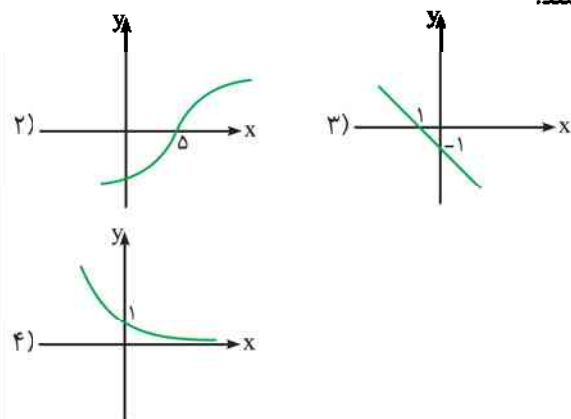
می‌دانیم تابع یک‌به‌یک، هر خط افقی $y = k$ را باید حداکثر در یک نقطه قطع کند.

با بررسی گزینه (۱) داریم:

$$x^3 - 4x + 1 = k \xrightarrow{k=1} x^3 - 4x + 1 = 1 \Rightarrow x^3 - 4x = 0$$

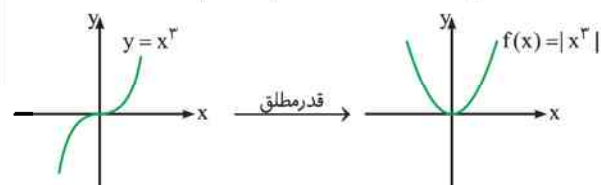
$$\Rightarrow x(x^2 - 4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \\ x = -2 \end{cases}$$

چون تابع موجود در گزینه (۱)، خط افقی $y = 1$ را در ۳ نقطه قطع کرده، بنابراین تابع یک‌به‌یک نیست. باقی گزینه‌ها، نمایانگر یک تابع یک‌به‌یک هستند.



۳ ۳۲۰

ابتدا نمودار تابع $f(x) = |x^3|$ را رسم می‌کنیم.



با توجه به نمودار تابع f ، غیر یکنوا است. از طرفی چون خطی موازی محور x ‌ها وجود دارد که نمودار را در بیش از یک نقطه قطع کند (مثلاً خط $y = 1$) پس تابع یک‌به‌یک نیست و در نتیجه وارون ناپذیر است.

۲ ۳۲۱

مجموع دو تابع اکیداً صعودی، خود یک تابع اکیداً صعودی و یک‌به‌یک است. توابع موجود در گزینه‌های (۱)، (۳) و (۴) از جمع دو تابع اکیداً صعودی به دست آمده‌اند. بنابراین یک‌به‌یک و وارون پذیراند. تابع موجود در گزینه (۲)، مجموع یک تابع صعودی و یک تابع نزولی است.

و نقاط $(0, 1)$ و $(-1, 1)$ با عرضی یکسان روی آن واقع شده‌اند، بنابراین یک‌به‌یک و وارون پذیر نیست.

۳ ۳۲۲

می‌دانیم توابع درجه دو، توابعی غیر یک‌به‌یک هستند، برای اینکه تابع $f(x)$ یک تابع یک‌به‌یک باشد، باید ضریب x^2 برابر صفر شود:

$$f(x) = m^2 x^2 + 2x - x^2 + m = f(x) = (m^2 - 1)x^2 + 2x + m \rightarrow \begin{cases} f(x) = 2x + 1 \\ f(x) = 2x - 1 \end{cases} \Rightarrow m^2 - 1 = 0 \Rightarrow m = \pm 1$$

$$\begin{aligned} f(3/5) &= 2(3/5) + 1 = 8 \\ f(3/5) &= 2(3/5) - 1 = 6 \end{aligned}$$

بنابراین حداکثر مقدار $f(3/5)$ برابر ۸ است.

۱ ۳۲۳

با توجه به تابع f ، حالت پیش می‌آید:

حالت ۱) تابع f خطی باشد یعنی $a = 0$ باشد:

$$a = 0 \Rightarrow f(x) = -2x + 3 \quad (I)$$

و می‌دانیم که توابع خطی در $x \in \mathbb{R}$ یک‌به‌یک هستند.

حالت ۲) تابع f درجه ۲ باشد، بنابراین بازه $(-2, -1)$ باید بعد از طول رأس سهمی باشد یا قبل از آن.

$$x_S = -\frac{b}{2a} = -\frac{-(a+2)}{2a} = \frac{a+2}{2a}$$

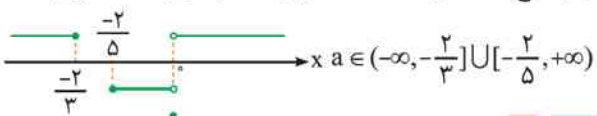
$$1) \frac{a+2}{2a} \geq -1 \rightarrow \frac{a+2+2a}{2a} \geq 0 \rightarrow \frac{3a+2}{2a} \geq 0$$

$$\frac{a}{\frac{3a+2}{2a}} \quad + \quad \frac{-2}{\frac{3a+2}{2a}} \quad - \quad \frac{0}{\frac{3a+2}{2a}} \quad + \quad \frac{0}{\frac{3a+2}{2a}} \quad \rightarrow a \leq -\frac{2}{3} \cup a > 0 \quad (II)$$

$$2) \frac{a+2}{2a} \leq -2 \rightarrow \frac{a+2+4a}{2a} \leq 0 \rightarrow \frac{5a+2}{2a} \leq 0$$

$$\frac{a}{\frac{5a+2}{2a}} \quad + \quad \frac{-2}{\frac{5a+2}{2a}} \quad - \quad \frac{0}{\frac{5a+2}{2a}} \quad + \quad \frac{0}{\frac{5a+2}{2a}} \quad \rightarrow -\frac{2}{5} \leq a < 0 \quad (III)$$

از اجتماع ۳ مقدار به دست آمده برای a حدود آن به دست می‌آید:



۲ ۳۲۴

در توابع همگرافیک به شکل $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ ، اگر صورت و مخرج پس از فاکتورگیری با هم ساده شوند و عدد ثابت باقی بماند، تابع یک‌به‌یک نبوده و در نتیجه وارون پذیر نیست.

این اتفاق در صورتی رخ می‌دهد که $ad - bc = 0$ باشد.

$$f(x) = \frac{2x+b}{x+3+b} \rightarrow (2)(3+b) - (b)(1) = 0$$

$$\Rightarrow 6 + 2b - b = 0 \Rightarrow b = -6$$

۲ ۳۲۵

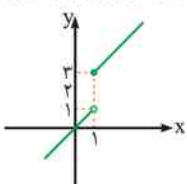
اگر تابع $f(x)$ یک تابع ثابت باشد، در آن صورت غیر یک‌به‌یک است. بنابراین باید ضریب x در تابع $f(x)$ برابر صفر شود:

$$f(x) = 2x + m^2 x - 3mx + 1 = (m^2 - 3m + 2)x + 1$$

$$\rightarrow m^2 - 3m + 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = 2 \end{cases}$$

۲ ۳۲۶

نمودار تابع f بدون در نظر گرفتن مقدار a به صورت مقابل است:

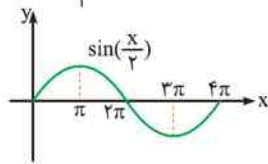


$$f(x) = \begin{cases} 2x + 1 & ; x \leq 1 \\ x + a & ; x > 1 \end{cases}$$

با توجه به شکل، a می‌تواند دو مقدار طبیعی ۱ و ۲ را اختیار کند.

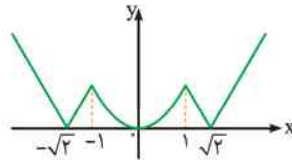
سپید ۳۳۳۳

مطابق شکل، تابع $f(x) = \sin(\frac{x}{\pi})$ با دوره تناوبی $T = \frac{2\pi}{\frac{1}{\pi}} = 2\pi$ در بازه‌های $(0, \pi)$ ، $(\pi, 2\pi)$ و $(2\pi, 4\pi)$ یک‌به‌یک است. بنابراین گزینه (۴) پاسخ سوال است.



سپید ۳۳۳۴

ابتدا تابع f را رسم می‌کنیم: مطابق شکل، تابع f در بازه $[-\sqrt{2}, -1]$ یک‌به‌یک است.

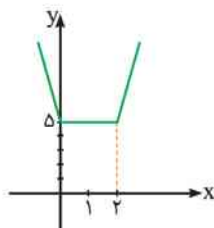


سپید ۳۳۳۵

ابتدا نمودار تابع f را رسم می‌کنیم:

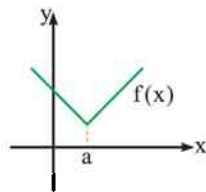
$$f(x) = \begin{cases} 4x - 3 & ; x > 2 \\ 5 & ; 0 \leq x \leq 2 \\ -4x + 5 & ; x < 0 \end{cases}$$

مطابق نمودار، تابع در بازه $[0, 2]$ یک‌به‌یک نیست که این بازه، شامل ۳ عدد صحیح است.



سپید ۳۳۳۶

برای اینکه تابع f در بازه $[1, 5]$ وارون پذیر باشد، باید در این بازه یک‌به‌یک باشد، بنابراین مقدار a نباید در بازه $[1, 5]$ قرار بگیرد.



$$\begin{cases} a \geq 5 \\ a \leq 1 \end{cases} \Rightarrow a \in (-\infty, 1] \cup [5, +\infty) \Rightarrow a \in \mathbb{R} - (1, 5)$$

سپید ۳۳۳۷

برای به دست آوردن دامنه تابع f ، ابتدا ریشه‌های مخیج را به دست می‌آوریم:

$$g(x) - g(x^2 - 3) = 0 \Rightarrow g(x) = g(x^2 - 3)$$

تابع g یک‌به‌یک است

$$\Rightarrow x = x^2 - 3 \Rightarrow x^2 - x - 3 = 0$$

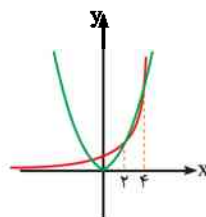
معادله بالا، دارای ۲ ریشه است. بنابراین دامنه تابع f ، شامل ۲ عدد حقیقی نمی‌باشد.

سپید ۳۳۳۸

چون تابع f یک تابع یک‌به‌یک است، پس داریم:

$$f(2^x) = f(x^2) \rightarrow 2^x = x^2$$

می‌دانیم معادله بالا، دارای دو جواب مثبت $x = 2$ و $x = 4$ است.

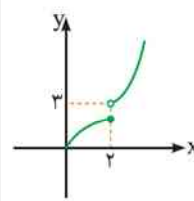


سپید ۳۳۳۹

ابتدا نمودار تابع f را بدون در نظر گرفتن مقدار a رسم می‌کنیم:

$$f(x) = \begin{cases} x^3 - 5 & ; x > 2 \\ \sqrt{x-a} & ; a \leq x \leq 2 \end{cases}$$

با توجه به شکل، حداقل مقدار a زمانی اتفاق می‌افتد، که مقدار تابع $y = \sqrt{x-a}$ در $x = 2$ برابر ۳ شود:

$$x = 2 : \sqrt{2-a} = 3 \Rightarrow 2-a = 9 \Rightarrow a = -7$$


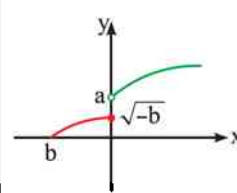
سپید ۳۳۴۰

مقدار تابع $y = 4x + 1$ در $x = k$ باید کمتر از مقدار تابع $y = x - 5$ در $x = k$ باشد:

$$x = k : 4k + 1 < k - 5 \Rightarrow 3k < -6 \Rightarrow k < -2$$

سپید ۳۳۴۱

ابتدا بدون توجه به علامت و مقدار a ، تابع $f(x)$ را رسم می‌کنیم:

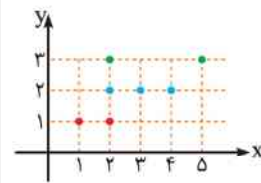
$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x-b} & ; b \leq x \leq 0 \\ \sqrt{x+a} & ; x > 0 \end{cases}$$


در نقطه $x = 0$ ، مقدار تابع برابر $\sqrt{-b}$ است. پس $-b \geq 0$ و در نتیجه $b \leq 0$ است. بنابراین گزینه‌های (۲) و (۳) حذف می‌شوند.

همچنین مطابق شکل، باید a مقداری مثبت داشته باشد تا تابع $f(x)$ ، یک تابع یک‌به‌یک شود. بنابراین گزینه (۱) می‌تواند پاسخ سؤال باشد.

سپید ۳۳۴۲

برای اینکه نمودار یک‌به‌یک باشد، باید روی هر خط افقی، حداکثر یک نقطه بماند.



پس باید از میان نقاط سبز یک نقطه، از میان نقاط آبی دو نقطه و از میان نقاط قرمز یک نقطه حذف کنیم. پس باید حداقل ۴ نقطه حذف کنیم.

سپید ۳۳۴۳

طول رأس سهمی برابر $x_S = \frac{-(-16)}{2(2)} = 4$ است. تابع در هر یک از بازه‌های $(-\infty, 4]$ و $[4, +\infty)$ و هر زیر مجموعه از این دو بازه، یک‌به‌یک است. بنابراین گزینه (۴) پاسخ سؤال است.

سپید ۳۳۴۴

ضابطه تابع f به صورت زیر است:

$$f(x) = (2x+1)^2 + 2(3x-1) - 3 = 4x^2 + 4x + 1 + 6x - 2 - 3 \Rightarrow f(x) = 4x^2 + 10x - 4$$

طول رأس این سهمی برابر $x_S = \frac{-10}{2(4)} = -1.25$ است. تابع در هر یک از بازه‌های $(-\infty, -1.25]$ و $[-1.25, +\infty)$ و هر زیر مجموعه از این دو بازه یک‌به‌یک است. بنابراین بیشترین مقدار m ، برابر -1.25 است.

۲ ۳۳۳۳

چون نمودار تابع $f^{-1}(x)$ همواره پایین محور x ها است، پس $f^{-1}(x) < 0$ است. بنابراین باید منحنی کسر نیز منفی باشد.

همواره منفی

$$\frac{f^{-1}(x)}{x - f^{-1}(x)} \geq 0 \Rightarrow x - f^{-1}(x) < 0 \Rightarrow x < f^{-1}(x)$$

با توجه به شکل، نمودار تابع $y = f^{-1}(x)$ در بازه $(-\frac{13}{2}, -\frac{5}{2})$ بالاتر از نمودار تابع $y = x$ قرار دارد؛ که این بازه شامل ۴ عدد صحیح $x = -6, -5, -4, -3$ است.

۲ ۳۳۳۳

چون g وارون f است، پس باید $f^{-1}(4) - f^{-1}(12)$ را به دست آوریم. می‌توانیم تابع f را یک بار برابر ۴ و یک بار برابر ۱۲ بگذاریم:

$$\begin{cases} -x + \sqrt{-2x} = 4 \Rightarrow x = -2 \\ -x + \sqrt{-2x} = 12 \Rightarrow x = -8 \end{cases}$$

$$\Rightarrow f^{-1}(4) - f^{-1}(12) = (-2) - (-8) = 6$$

هایلایت

برای محاسبه $f^{-1}(a)$ ، می‌توانیم ضابطه تابع f را، برابر عدد a قرار دهیم و یک معادله حل کنیم.

۴ به پوره دیگه! طراح درکنکور تهری قارچ ۹۹ این سوال رو اینجوری پرسید: فرض کنید $g(x)$ وارون تابع $f(x) = x + 2\sqrt{x}$ باشد، حاصل $g(3) + g(15)$ کدام است؟ جواب:

$$\begin{aligned} g(3) &= f^{-1}(3) = 1 \\ g(15) &= f^{-1}(15) = 9 \end{aligned} \xrightarrow{\text{مجموع}} 1 + 9 = 10$$

۳ ۳۴۵

چون $g(1) = f^{-1}(1)$ است، پس:

$$f(x) = x + 2\sqrt{x} + 1 = 1 \xrightarrow{x \geq 1} x = 4 \Rightarrow g(1) = 4$$

حال مقدار $g(4)$ را به دست می‌آوریم:

$$f(x) = x + 2\sqrt{x} + 1 = 4 \Rightarrow x = 9 \Rightarrow g(4) = 9 \Rightarrow g(g(1)) = 9$$

۴ به پوره دیگه! طراح ممکن بود اینجوری بپرسد:

اگر $g(x)$ وارون تابع $f(x) = 1 + x - 2\sqrt{x}$ باشد، ضابطه تابع g کدام است؟

$$y = x - 2\sqrt{x} + 1 = (\sqrt{x} - 1)^2 \Rightarrow \sqrt{y} = |\sqrt{x} - 1|$$

$$\xrightarrow{x \geq 1} \sqrt{x} = \sqrt{y} + 1 \Rightarrow g(x) = (\sqrt{x} + 1)^2$$

در میان گزینه‌ها، نمودار تابع $y = x^3 - x + 1$ از نقطه $(\frac{1}{2}, \frac{5}{8})$ می‌گذرد:

$$y = (\frac{1}{2})^3 - \frac{1}{2} + 1 = \frac{1 - 4 + 8}{8} = \frac{5}{8}$$

پس وارون این تابع از نقطه $(\frac{5}{8}, \frac{1}{2})$ می‌گذرد.

هایلایت

اگر نقطه $A(a, b)$ روی نمودار تابع f باشد، نقطه $A'(b, a)$ روی نمودار تابع f^{-1} است (و برعکس).

۳ ۳۴۵

چون نقطه $A(-\frac{1}{2}, -\frac{3}{5})$ روی تابع وارون قرار دارد، پس نقطه $A'(-\frac{3}{5}, -\frac{1}{2})$ روی خود تابع $y = \frac{x}{a + a|x|}$ قرار دارد:

$$-\frac{1}{2} = \frac{-\frac{3}{5}}{a + a|-\frac{3}{5}|} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{\frac{3}{5}}{a + \frac{3}{5}a} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{3}{\frac{8}{5}a} \Rightarrow a = 3$$

۱ ۳۴۹

با توجه به نمودار، $f(-3) = 5$ و $f(2) = 0$ است، پس:

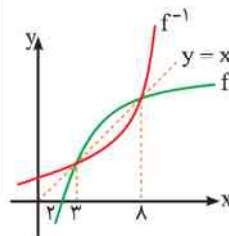
$$\begin{cases} f^{-1}(5) = -3 \\ f^{-1}(0) = 2 \end{cases} \Rightarrow \frac{f^{-1}(5)}{f(a) + f^{-1}(0)} = -\frac{3}{4} \Rightarrow \frac{-3}{f(a) + 2} = -\frac{3}{4}$$

$$\Rightarrow f(a) + 2 = 4 \Rightarrow f(a) = 2 \xrightarrow{f(0)=2} a = 0$$

۴ ۳۴۴

عبارت زیر رادیکال را بزرگ‌تر یا مساوی صفر قرار می‌دهیم:

$$x - f^{-1}(x) \geq 0 \Rightarrow x \geq f^{-1}(x)$$



با توجه به نمودار مقابل، بازه‌ای که در آن مقادیر $y = f^{-1}(x)$ کم‌تر یا مساوی مقادیر $y = x$ باشد، برابر بازه $[3, 8]$ است.

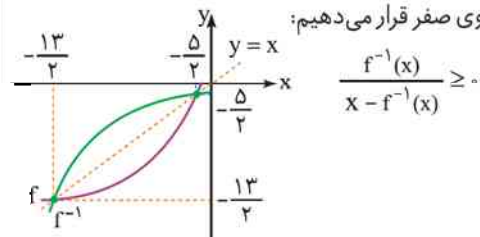
هایلایت

برای رسم نمودار f^{-1} از روی نمودار تابع f ، باید نمودار f را نسبت به خط $y = x$ قرینه کنیم.

۳ ۳۴۳

با توجه به این که نمودار f و f^{-1} نسبت به نیمساز ربع اول و سوم قرینه‌اند، پس نمودار تابع f^{-1} را به صورت زیر رسم می‌کنیم.

حالا برای پیدا کردن دامنه تابع خواسته شده، عبارت زیر رادیکال را بزرگ‌تر یا مساوی صفر قرار می‌دهیم:



۳۴۳ ۳

مطابق شکل، نقاط $(-2, 2)$ ، $(0, 3)$ روی نمودار تابع $y = f(2x - 1)$ قرار دارند، پس در آن صدق می‌کنند:

$$(-2, 2) \Rightarrow f(2 \times -2 - 1) = 2 \Rightarrow f(-5) = 2 \Rightarrow f^{-1}(2) = -5$$

$$(0, 3) \Rightarrow f(2 \times 0 - 1) = 3 \Rightarrow f^{-1}(3) = -1$$

$$\Rightarrow \frac{f^{-1}(2) + f^{-1}(3)}{f(-5)} = \frac{(-5) + (-1)}{2} = \frac{-6}{2} = -3$$

۳۵۰ ۳

ابتدا با توجه به شکل صورت سؤال، ضابطه توابع f و g را پیدا می‌کنیم:

$$f(x) = \begin{cases} -2x + 2; & x \leq 0 \\ -x + 2; & x > 0 \end{cases}, g(x) = -2x - 2$$

حالا برای پیدا کردن $f^{-1}(-2)$ باید ضابطه پایینی تابع f را برابر -2 قرار دهیم:

$$-x + 2 = -2 \Rightarrow x = 4 \Rightarrow f^{-1}(-2) = 4$$

پس ساده‌شده عبارت مورد نظر برابر است با:

$$g(f^{-1}(-2)) + g^{-1}(f(-1)) = g(4) + g^{-1}(4)$$

برای پیدا کردن $g^{-1}(4)$ داریم:

$$g(x) = -2x - 2 = 4 \Rightarrow x = -3 \Rightarrow g^{-1}(4) = -3$$

$$\Rightarrow g(4) + g^{-1}(4) = (-1 \cdot 0) + (-3) = -13$$

۳۵۱ ۲

ابتدا مختصات نقطه برخورد را به کمک ضابطه خط به دست می‌آوریم:

$$1 \cdot y - x = -1 \xrightarrow{y=1} 1 \cdot 1 - x = -1 \Rightarrow x = 2 \cdot$$

پس مختصات نقطه برخورد تابع f^{-1} با خط برابر $(2, 1)$ است و این نقطه روی تابع f^{-1} قرار دارد، یعنی $f^{-1}(2, 0) = 1$ است. داریم:

$$f^{-1}(2, 0) = 1 \Rightarrow f(1) = 2 \Rightarrow (1)^3 + 6(1)^2 + a(1) + 1 = 2 \Rightarrow a = 12$$

۳۵۲ ۴

چون وارون تابع f خط $y = 12 - x$ را در نقطه‌ای به عرض 10 قطع می‌کند، پس:

$$y = 12 - x \xrightarrow{y=10} 10 = 12 - x \Rightarrow x = 2 \Rightarrow (2, 10) \in f^{-1}$$

در نتیجه $(10, 2) \in f$ است، پس:

$$f(10) = 2 \Rightarrow \sqrt{10 - 2\sqrt{10 \cdot m - 1}} = 2 \Rightarrow 10 - 2\sqrt{10 \cdot m - 1} = 4$$

$$\Rightarrow \sqrt{10 \cdot m - 1} = 3 \Rightarrow m = 1 \Rightarrow f(x) = \sqrt{x - 2\sqrt{x - 1}}$$

$$\Rightarrow f(m + 4) = f(5) = 1$$

۳۵۳ ۳

نقطه $(a, -1)$ روی خط $y = x - 4$ است، بنابراین:

$$y = x - 4 \xrightarrow{(a, -1)} -1 = a - 4 \Rightarrow a = 3$$

۳۴۳ ۴

ابتدا ضابطه $f(x)$ را پیدا می‌کنیم:

$$f(x - 1) = \log_3(x + 1) \xrightarrow{x \rightarrow x+1} f(x) = \log_3(x + 2)$$

حالا سراغ محاسبه $f^{-1}(g(4))$ می‌رویم. چون $g(4) = 2 \cos 2\pi = 2$ است، پس باید $f^{-1}(2)$ را پیدا کنیم:

$$f(x) = 2 \Rightarrow \log_3(x + 2) = 2 \Rightarrow x + 2 = 9 \Rightarrow x = 7$$

پس $f^{-1}(2) = 7$ است.

یه جوهره دیگه! همین سوالو با یک تابع نمایی هم ببینیم: $f(x) = 2^{3x-4} + 1$ و $g(x) = 2 \cos(\frac{\pi x}{4})$ باشد، مقدار $f^{-1} \circ g(4)$ کدوم است؟ که جوابش برابر است با:

$$f^{-1}(g(4)) = f^{-1}(2) = \frac{1}{3}$$

۳۴۷ ۳

می‌خواهیم حاصل $f(-\frac{2}{5}) + g^{-1}(-\frac{2}{5})$ را پیدا کنیم. با فرض

$$f(-\frac{2}{5}) = a \text{ و } g^{-1}(-\frac{2}{5}) = b \text{ داریم:}$$

$$1) f^{-1}(a) = -\frac{2}{5} \Rightarrow \frac{a}{1+|a|} = -\frac{2}{5} \xrightarrow{a < 0} \frac{a}{1-a} = -\frac{2}{5}$$

$$\Rightarrow 5a = -2 + 2a \Rightarrow 3a = -2 \Rightarrow a = -\frac{2}{3} \Rightarrow f(-\frac{2}{5}) = -\frac{2}{3}$$

$$2) g(b) = -\frac{2}{5} \Rightarrow \sqrt{b} - 1 = -\frac{2}{5} \Rightarrow \sqrt{b} = \frac{3}{5}$$

$$\Rightarrow b = \frac{9}{25} \Rightarrow g^{-1}(-\frac{2}{5}) = \frac{9}{25}$$

$$\Rightarrow (f + g^{-1})(-\frac{2}{5}) = -\frac{2}{3} + \frac{9}{25} = \frac{-50 + 27}{75} = -\frac{23}{75}$$

یه جوهره دیگه! در آزمون مهرداد ۱۴۰۱ طرح اینفوری پرسید: $f(x) = \frac{x}{1+|x|}$ باشد، فاصل $f^{-1}(\frac{5}{9}) + f^{-1}(-\frac{3}{7})$ کدوم است؟

$$\text{جواب: } -\frac{3}{7} + \frac{5}{9} = \frac{1}{63}$$

۳۴۸ ۳

برای پیدا کردن $f^{-1}(-2)$ باید در تابع $f(x) = \begin{cases} 6 - 2x; & x < 2 \\ 4 - x; & x \geq 2 \end{cases}$ پایینی را برابر -2 بگذاریم:

$$4 - x = -2 \Rightarrow x = 6 \Rightarrow f^{-1}(-2) = 6$$

برای پیدا کردن $g^{-1}(-5)$ باید در تابع $g(x) = \begin{cases} 2x - 3; & x < 0 \\ x - 4; & x \geq 0 \end{cases}$ بالایی را برابر -5 بگذاریم:

$$2x - 3 = -5 \Rightarrow x = -1 \Rightarrow g^{-1}(-5) = -1$$

حالا حاصل عبارت خواسته شده را پیدا می‌کنیم:

$$f(g^{-1}(-5)) + g(f^{-1}(-2)) = f(-1) + g(6) = 8 + 2 = 10$$

پس نقطه $(-1, 3)$ روی وارون تابع f قرار دارد، در نتیجه نقطه $(-1, 3)$ روی تابع f است.

$$f(x) = x^2 + \sqrt{b-ax} \xrightarrow{a=3} f(x) = x^2 + \sqrt{b-3x}$$

$$f(-1) = 3 \Rightarrow 3 = 1 + \sqrt{b-3(-1)} \Rightarrow 2 = \sqrt{b+3}$$

$$\Rightarrow 4 = b+3 \Rightarrow b=1$$

مقدار $a-b$ برابر است با: $a-b=3-1=2$

۳۵۴ ۴

چون $f^{-1}(g(a))=6$ است، پس $f(6)=g(a)$ است. در ضمن $f(6)=7$ است، پس:

$$g(a)=7 \xrightarrow{(4,7) \in g} a=4$$

۳۵۵ ۳

در تابع f داریم، $f(\frac{1}{f}) = -3$ و با توجه به این که $f(g^{-1}(a)) = -3$ می‌توانیم نتیجه بگیریم $g^{-1}(a) = \frac{1}{f}$ بنابراین:

$$g^{-1}(a) = \frac{1}{f} \Rightarrow g(\frac{1}{f}) = a$$

ضابطه $g(x) = -|x|\sqrt{x}$ است، پس می‌توان نوشت:

$$g(\frac{1}{f}) = -(\frac{1}{f}) \times \frac{1}{f} = -\frac{1}{f}$$

۳۵۶ ۲

چون $f^{-1}(g^{-1}(a))=8$ است، پس $f^{-1}(a)=f(8)$ است. از طرفی برای پیدا کردن $f(8)$ باید به سراغ ضابطه بالایی تابع f برویم:

$$x \geq 3: f(x) = \sqrt{5x+9} \xrightarrow{x=8} f(8) = \sqrt{5 \times 8 + 9} = 7$$

بنابراین $g^{-1}(a)=7$ است، یعنی $g(7)=a$ است. با توجه به تابع g نتیجه می‌گیریم $a=3$ است.

۳۵۷ ۲

چون $f^{-1}(g(2a))=6$ است، پس $f(6)=g(2a)$ است، بنابراین با توجه به تابع‌های f و g داریم:

$$g(2a) = f(6) \xrightarrow{f(6)=3} g(2a) = 3 \Rightarrow \frac{2a}{2a-1} = 3$$

$$\Rightarrow 6a-3=2a \Rightarrow 4a=3 \Rightarrow a=\frac{3}{4}$$

۳۵۸ ۴

فرض می‌کنیم $(g^{-1} \circ f^{-1})(\lambda) = \alpha$ باشد، پس:

$$g^{-1}(f^{-1}(\lambda)) = \alpha \Rightarrow g(\alpha) = f^{-1}(\lambda) \quad (1)$$

حال برای محاسبه $f^{-1}(\lambda)$ ضابطه f را برابر ۸ می‌گذاریم:

$$8 = \frac{2}{5}x - 4 \Rightarrow \frac{2}{5}x = 12 \Rightarrow x = 30 \Rightarrow f^{-1}(\lambda) = 30$$

بنابراین از (۱) داریم:

$$g(\alpha) = f^{-1}(\lambda) = 30 \Rightarrow \alpha^3 + \alpha = 30 \Rightarrow \alpha = 3 \Rightarrow g^{-1}(f^{-1}(\lambda)) = 3$$

۳۵۹ ۱

ابتدا $f^{-1}(20)$ را پیدا می‌کنیم:

$$x + \sqrt{x} = 20 \Rightarrow x = 16 \Rightarrow f^{-1}(20) = 16$$

پس $g^{-1}(f^{-1}(20)) = g^{-1}(16)$ است، پس ضابطه g را برابر ۱۶ می‌گذاریم:

$$\frac{9x+6}{1-x} = 16 \Rightarrow 9x+6 = 16-16x \Rightarrow 25x = 10$$

$$\Rightarrow x = \frac{2}{5} \Rightarrow g^{-1}(16) = \frac{2}{5}$$

۳۶۰ ۳

می‌دانیم $f(g^{-1}(-1)) = -\frac{11}{3}$ است، پس ابتدا ضابطه تابع f را برابر $-\frac{11}{3}$ می‌گذاریم:

$$\frac{2x+1}{3} = -\frac{11}{3} \Rightarrow 2x = -12 \Rightarrow x = -6$$

پس $f(-6) = -\frac{11}{3}$ است، بنابراین $g^{-1}(-1) = -6$ است. یعنی $g(-6) = -1$ است:

$$g(-6) = \frac{-12+a}{a+6} = -1 \Rightarrow -12+a = -a-6 \Rightarrow 2a = 6 \Rightarrow a = 3$$

۳۶۱ ۱

$f^{-1} = \{(2,1), (5,2), (4,3), (6,4)\}$ است، حالا خواهیم داشت:

$$x=2: \frac{g(2)}{g(f^{-1}(2))} = \frac{g(2)}{g(1)} \Rightarrow x$$

$$x=5: \frac{g(5)}{g(f^{-1}(5))} = \frac{g(5)}{g(2)} = \frac{6}{3} = 2$$

$$x=4: \frac{g(4)}{g(f^{-1}(4))} = \frac{g(4)}{g(3)} = \frac{2}{1} = 2$$

$$x=6: \frac{g(6)}{g(f^{-1}(6))} = \frac{g(6)}{g(4)} \Rightarrow x$$

پس تابع $\frac{g}{g \circ f^{-1}}$ به صورت $\{(5,2), (4,2)\}$ است.

۳۶۲ ۴

$g^{-1} = \{(3,2), (2,4), (6,5), (1,3)\}$ است. حالا خواهیم داشت:

$$x=1: g^{-1}(f(1)) - f(1) = g^{-1}(2) - f(1) = 4 - 2 = 2$$

$$x=2: g^{-1}(f(2)) - f(2) = g^{-1}(5) - f(2) \Rightarrow x$$

$$x=3: g^{-1}(f(3)) - f(3) = g^{-1}(4) - f(3) \Rightarrow x$$

$$x=4: g^{-1}(f(4)) - f(4) = g^{-1}(6) - f(4) = 5 - 6 = -1$$

پس برد تابع $f - (g^{-1} \circ f)$ برابر $\{2, -1\}$ است.

۳۶۳ ۱

ابتدا مقدار $g(2)$ را به دست می‌آوریم، پس ضابطه g^{-1} را برابر ۲ قرار می‌دهیم:

$$1-x = 2 \Rightarrow x = -1 \Rightarrow g(2) = -1$$

پس $f(g(2)) = f(-1)$ است و داریم:

$$f(x+1) = \frac{g(x)-1}{x} \xrightarrow{x=-2} f(-1) = \frac{g(-2)-1}{-2}$$

۳۷۵ ۱

نمودار هر تابع (به شرط وارون پذیر بودن) و وارون آن نسبت به خط $y = x$ قرینه یکدیگرند. پس باید وارون تابع خطی داده شده را به دست آوریم. بنابراین کافی است جای x و y را عوض کنیم تا معادله خط d به دست آید: $3x - 2y = 4 \Rightarrow x - 2y = \frac{4}{3} \xrightarrow{\text{تعویض جای } x \text{ و } y} x - 2y = \frac{4}{3}$ به دست آمد: $3y - 2x = 4 \xrightarrow{\text{عرض از مبدأ } x=0} y = -2$

پیشرو ش سرباز می‌توانیم بدون محاسبه تابع وارون، در معادله خط اولیه به جای y صفر بگذاریم.

۳۷۱ ۴

برای پیدا کردن ضابطه وارون f ، نحوه تشکیل تابع f را بررسی می‌کنیم.

$$f: \begin{array}{c} (-3) \rightarrow (\div 2) \\ f^{-1}: \begin{array}{c} (+3) \rightarrow (\times 2) \end{array} \end{array}$$

$$\Rightarrow f^{-1}(x) = 2x + 3 \xrightarrow{\text{به پایین واحد ۶}} y = 2x + 3 - 6$$

حالا نقطه برخورد تابع حاصل را با تابع f پیدا می‌کنیم:

$$\frac{x-3}{2} = 2x-3 \Rightarrow x-3 = 4x-6 \Rightarrow 3x = 3 \Rightarrow x = 1$$

$$\Rightarrow f(1) = -1 \Rightarrow A(1, -1) \Rightarrow OA = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$$

هایلایت

برای وارون کردن توابعی که در ضابطه آن‌ها یک x وجود دارد، یک راهکار جالب و سریع این است که ابتدا نحوه تشکیل تابع f را پیدا کنید. سپس برای پیدا کردن ضابطه وارون تابع، اعمال را به طور برعکس و از آخر به اول روی x انجام دهید. در جدول زیر، تعدادی از این اعمال و برعکس آن‌ها آورده شده:

+	-
$\times$	$\div$
توان ۲	$\sqrt{\quad}$
توان ۳	$\sqrt[3]{\quad}$
a^x	$\log_a x$

۳۷۲ ۳

با توجه به تابع $f(x) = \frac{2}{3}x + 2$ داریم:

$$f: \begin{array}{c} (\times \frac{2}{3}) \rightarrow (+2) \\ f^{-1}: \begin{array}{c} (\div \frac{2}{3}) \rightarrow (-2) \end{array} \end{array}$$

پس $f^{-1}(x) = \frac{x-2}{\frac{2}{3}} = \frac{3x-6}{2}$ است. حالا معادله f^{-1} را مرتب می‌کنیم و فاصله نقطه $A(7, 1)$ را از آن پیدا می‌کنیم:

$$y = \frac{3x-6}{2} \Rightarrow 3x-2y-6 = 0$$

$$\Rightarrow AH = \frac{|21-2-6|}{\sqrt{3^2 + (-2)^2}} = \frac{13}{\sqrt{13}} = \sqrt{13}$$

حالا برای به دست آوردن $g(-2)$ ، تابع g^{-1} را برابر -2 قرار می‌دهیم:

$$1-x = -2 \Rightarrow x = 3 \Rightarrow g(-2) = 3$$

$$\Rightarrow f(-1) = \frac{g(-2)-1}{-2} = \frac{3-1}{-2} = -1$$

۳۶۴ ۱

فرض می‌کنیم $g^{-1}(3) = a$ باشد، پس $g(a) = 3$ است. حالا در ضابطه $f \circ g$ به جای x ها، a قرار می‌دهیم:

$$f(g(a)) = a^3 g(a) + f(g(a)) \xrightarrow{g(a)=3} f(3) = 3a^3 + 4 \times 3$$

از طرفی با توجه به ضابطه تابع f داریم:

$$f(3) = 3^2 + 4(3) + 15 = 36$$

$$\Rightarrow 3a^3 + 12 = 36 \Rightarrow 3a^3 = 24 \Rightarrow a^3 = 8 \Rightarrow a = 2$$

پس $g^{-1}(3) = a = 2$ است.

۳۶۵ ۳

چون $f^{-1}(2^x - 14) = x^3 + 2x$ است، پس $f(x^3 + 2x) = 2^x - 14$ است و با جای گذاری $x = 4$ مقدار $f^{-1}(2)$ به دست می‌آید:

$$x = 4: f^{-1}(2^4 - 14) = 4^3 + 2 \times 4 \Rightarrow f^{-1}(2) = 72$$

۳۶۶ ۴

چون $f^{-1}(\frac{x+2}{x-1}) = x^3 - 1$ است، پس می‌توان نتیجه گرفت

$$f(x^3 - 1) = \frac{x+2}{x-1} \text{ است. حال چون } f(7) \text{ را می‌خواهیم، پس داریم:}$$

$$x^3 - 1 = 7 \Rightarrow x^3 = 8 \Rightarrow x = 2$$

بنابراین با جای گذاری $x = 2$ در ضابطه تابع داریم:

$$f(2^3 - 1) = \frac{2+2}{2-1} \Rightarrow f(7) = 4$$

۳۶۷ ۴

برای پیدا کردن نقطه برخورد $f^{-1}(x)$ و نیمساز ناحیه دوم یعنی $y = -x$; $x < 0$ از ویژگی تابع وارون استفاده می‌کنیم.

$$f^{-1}(x) = -x \Rightarrow f(-x) = x \Rightarrow -x + \frac{1}{2x} = x$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2x} = 2x \Rightarrow 4x^2 = 1 \Rightarrow x^2 = \frac{1}{4} \xrightarrow{x < 0} x = -\frac{1}{2}$$

۳۶۸ ۲

با فرض $g^{-1}(6) = a$ داریم:

$$g(a) = 6 \Rightarrow f(a) + \sqrt{f(a)} = 6 \Rightarrow f(a) = 4$$

حال چون $f^{-1}(x)$ داده شده، پس می‌توانیم از $f(a) = 4$ نتیجه بگیریم $f^{-1}(4) = a$ است:

$$f^{-1}(x) = \sqrt[3]{2x} \xrightarrow{x=4} a = f^{-1}(4) = \sqrt[3]{8} = 2 \Rightarrow g^{-1}(6) = 2$$

۳۶۹ ۴

با فرض $g^{-1}(16) = a$ داریم:

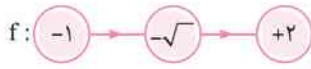
حال از $f(3a-4) = 16$ نتیجه می‌گیریم $f^{-1}(16) = 3a-4$ است و خواهیم داشت:

$$f^{-1}(x) = x + \sqrt{x} \xrightarrow{x=16} 3a-4 = f^{-1}(16) = 16 + \sqrt{16} = 20$$

$$\Rightarrow a = 8$$

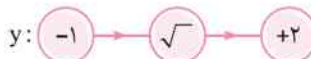
بنابراین $g^{-1}(16) = 8$ است.

۳۷۷ ۱

 نحوه تولید تابع $f(x) = 2 - \sqrt{x-1}$ به صورت زیر است:

 پس $f^{-1}(x) = (x-2)^2 + 1$ است. در ضمن بُرد تابع f بازه $(-\infty, 2]$ است، پس دامنه تابع f^{-1} نیز برابر همین بازه است.

توجه سریعتر چون $f(5) = 0$ است، پس گزینه ای درست است که در آن $f^{-1}(0) = 5$ باشد. فقط گزینه (۱) این ویژگی را دارد.

۳۷۸ ۳

 ابتدا نمودار تابع $y = 2 + \sqrt{x-1}$ را نسبت به خط $y = x$ قرینه می کنیم، یعنی آن را وارون می کنیم. توجه کنید بُرد تابع f بازه $[2, +\infty)$ است:


$$\Rightarrow y^{-1} = (x-2)^2 + 1; x \geq 2$$

حالا نمودار را ۲ واحد به سمت راست و ۳ واحد به پایین انتقال می دهیم.

$$y = (x-2)^2 + 1 \xrightarrow[\text{واحد راست}]{x \rightarrow (x-2)} y = (x-4)^2 + 1$$

$$\xrightarrow[\text{پایین}]{\text{واحد ۳}} g(x) = (x-4)^2 + 1 - 3$$

 پس $g(x) = (x-4)^2 - 2$ است و $g(4) = -2$ است.

۳۷۹ ۳

با توجه به شکل صورت سؤال $f(x) = 1 + \sqrt{x+2}$ است. پس $a = 2$ و $b = 1$ می باشد. حالا، اگر نمودار تابع f را نسبت به محور y ها قرینه کنیم، به تابع $y = 1 + \sqrt{-x+2}$ می رسمیم که بُرد آن به صورت بازه $[1, +\infty)$ است. حالا نمودار حاصل را وارون می کنیم:



$$\Rightarrow y^{-1} = 2 - (x-1)^2; x \geq 1$$

 در نتیجه $g(x) = 2 - (x-1)^2$ است و داریم:

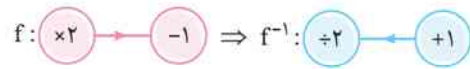
$$g(a+b) = g(2+1) = 2 - (3-1)^2 = 2 - 4 = -2$$

۳۸۰ ۴

 وقتی نمودار تابع $y = \sqrt[3]{x}$ را ۲ واحد به راست و ۱ واحد به بالا منتقل کنیم به نمودار $y = 1 + \sqrt[3]{x-2}$ می رسمیم. حالا وارون تابع حاصل را پیدا می کنیم:


$$y^{-1}: +2 \leftarrow 3 \text{ توان } \leftarrow -1 \Rightarrow y^{-1} = (x-1)^3 + 2$$

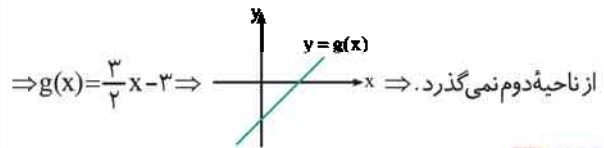
۳۷۳ ۲

 با توجه به تابع $f(x) = 2x - 1$ داریم:

 بنابراین $f^{-1}(x) = \frac{x+1}{2}$ است و داریم:

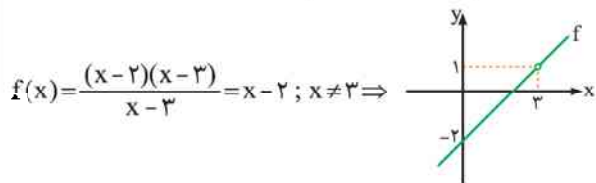
$$g(x+1) = f(x) - f^{-1}(x) = 2x - 1 - \frac{x+1}{2} = \frac{3x-3}{2}$$

 حالا در تابع $g(x+1)$ به جای x ها $x-1$ قرار می دهیم تا به تابع $g(x)$ برسیم:

$$g(x+1) = \frac{3x-3}{2} \xrightarrow{x \rightarrow x-1} g(x) = \frac{3(x-1)-3}{2} = \frac{3x-6}{2}$$



۳۷۴ ۴

 ابتدا ضابطه تابع f را ساده می کنیم:

 عدد ۱ در محدوده بُرد تابع f وجود ندارد، پس: $f^{-1}(x) = x+2; x \neq 1$

۳۷۵ ۲

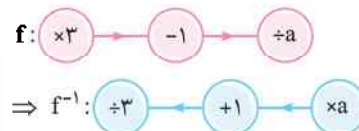
 چون این دو خط نسبت به نیمساز ناحیه اول و سوم متقارن اند، پس وارون یکی از آن ها با دیگری برابر است. بنابراین در خط $2x - 3y = b$ جای x و y را عوض می کنیم تا وارون آن یعنی $2y - 3x = b$ به دست آید.

 پس $2y - 3x = b$ و $ax + by = 8$ برابرند، پس: $\frac{a}{-3} = \frac{b}{2} = \frac{A}{b}$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{b}{2} = \frac{A}{b} \Rightarrow b^2 = 16 \Rightarrow b = \pm 4 \\ \frac{a}{-3} = \frac{b}{2} \Rightarrow ab = -24 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} b = 4 \Rightarrow a = -6 \Rightarrow a+b = -2 \\ b = -4 \Rightarrow a = 6 \Rightarrow a+b = 2 \end{cases}$$

۳۷۶ ۲

 با توجه به تابع $f(x) = \frac{3x-1}{a}$ داریم:

 بنابراین $f^{-1}(x) = \frac{ax+1}{3}$ است. حالا $f(3f^{-1}(x))$ را تشکیل می دهیم:

$$f(3f^{-1}(x)) = f(ax+1) = \frac{3(ax+1)-1}{a} = \frac{3ax+2}{a} = 3x + \frac{2}{a}$$

$$\Rightarrow 3x + \frac{2}{a} = 2x + 5 \Rightarrow \frac{2}{a} = 5 \Rightarrow a = \frac{2}{5}$$

$$f: (-1) \rightarrow 2 \text{ توان} \rightarrow x-1 \rightarrow +1$$

$$f^{-1}: +1 \rightarrow -\sqrt{} \rightarrow \div -1 \rightarrow -1$$

$$\Rightarrow f^{-1}(x) = 1 - \sqrt{1-x}; 0 < x < 1$$

۳ ۳۸۴

وقتی نمودار تابع $f(x) = x^2 - 2x$; $x \geq 1$ را نسبت به محور y ها قرینه می‌کنیم، باید به جای همه x ها، $-x$ قرار دهیم. پس ضابطه آن پس از قرینه نسبت به محور y ها به صورت زیر است:

$$y = x^2 + 2x; x \leq -1$$

$$\Rightarrow y = (x+1)^2 - 1; x \leq -1$$

حالا نمودار این تابع را نسبت به خط $y = x$ قرینه می‌کنیم یعنی آن را وارون می‌کنیم:

$$y: (-1) \rightarrow 2 \text{ توان} \rightarrow -1$$

$$y^{-1}: -1 \rightarrow -\sqrt{} \rightarrow +1 \Rightarrow y^{-1} = -1 - \sqrt{x+1}$$

۳ ۳۸۵

ابتدا باید ضابطه تابع $y = f(x)$ را پیدا کنیم:

$$fog(x) = (2x-1)g(x) = (2x-1)(2x+1) = 4x^2 - 1$$

حالا با فرض $g(x) = 2x+1 = t$ داریم:

$$x = \frac{t-1}{2} \Rightarrow f(g(x)) = 4x^2 - 1 \Rightarrow f(t) = 4\left(\frac{t-1}{2}\right)^2 - 1 = t^2 - 2t$$

پس $f(x) = x^2 - 2x$ است و طبق گفته صورت سؤال باید ضابطه وارون آن را در $x \leq 1$ پیدا کنیم:

$$f(x) = x^2 - 2x + 1 - 1 = (x-1)^2 - 1; x \leq 1$$

$$f: (-1) \rightarrow 2 \text{ توان} \rightarrow -1$$

$$f^{-1}: +1 \rightarrow -\sqrt{} \rightarrow +1 \Rightarrow f^{-1}(x) = 1 - \sqrt{x+1}$$

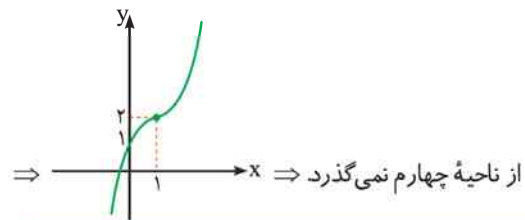
۱ ۳۸۶

می‌دانیم $f(x) = x^2 \sqrt{x^2} = x^2 |x|$ است که در بازه $x \leq 0$ نزولی است، پس:

$$x \leq 0: f(x) = -x^3 \Rightarrow$$

$$x \Rightarrow f^{-1}(x) = -\sqrt[3]{x}; x \geq 0$$

قرینه نسبت به $y=x$



به چهره دیگه! طرح می‌تونست یکم تست رو جذاب تر پیرسه! اینجوری: اگر نمودار وارون تابع $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + a$ از نقطه $(2,1)$ بگذرد، ضابطه وارون آن کدام است؟

$$\text{جواب: } (1,2) \in f \Rightarrow a=1 \Rightarrow f^{-1}(x) = 1 + \sqrt[3]{x-2}$$

۲ ۳۸۱

ابتدا ضابطه تابع f را ساده می‌کنیم:

$$f(x) = (x^2 - 4x + 4) + 6x = x^2 + 2x + 4 = (x+1)^2 + 3$$

طول رأس این سهمی برابر -1 است که در بازه $x \geq -1$ اکیداً صعودی است. حالا ضابطه وارون تابع را در این بازه پیدا می‌کنیم:

$$f: (+1) \rightarrow 2 \text{ توان} \rightarrow +3$$

$$f^{-1}: (-1) \rightarrow \sqrt{} \rightarrow -3 \Rightarrow f^{-1}(x) = -1 + \sqrt{x-3}$$

به چهره دیگه! طرح می‌تونه همین تست رو کمی ساده تر پیرسه:

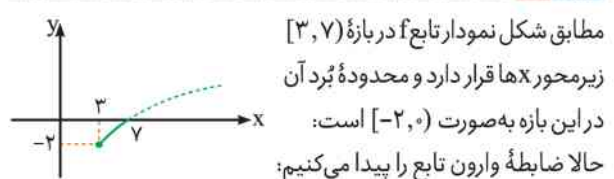
«ضابطه وارون تابع $f(x) = x^2 + 2x + 4$; $x \geq -1$ کدام است؟»

یا آگه بفواد راه عددگذاری رو سفت تر کنه، اینجوری پیرسه:

$$f^{-1}(x) = a + \sqrt{x+b} \text{ به صورت } f(x) = x^2 + 2x + 4; x \geq -1$$

است. مقدار $a \times b$ کدام است؟

۱ ۳۸۲

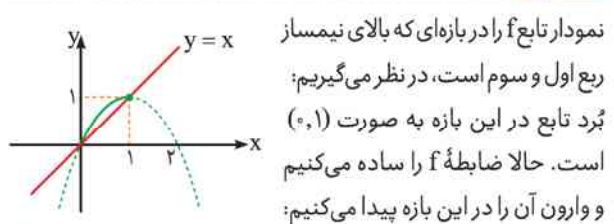


$$f: (-3) \rightarrow \sqrt{} \rightarrow -2$$

$$f^{-1}: (+2) \rightarrow 2 \text{ توان} \rightarrow +3$$

$$\Rightarrow f^{-1}(x) = (x+2)^2 + 3; -2 \leq x \leq 0$$

۴ ۳۸۳



$$f(x) = -x^3 + 2x - 1 + 1 = -(x-1)^2 + 1; 0 < x < 1$$

۳۸۹ ۳

 ابتدا دامنه تابع $f(x)$ را پیدا می‌کنیم:

$$1) x \geq 0 \quad 2) \frac{1}{4}x - 1 \geq 0 \Rightarrow x \geq 4 \Rightarrow D_f = [4, +\infty)$$

 حالا ضابطه f را ساده می‌کنیم:

$$f(x) = \sqrt{x} \sqrt{\frac{1}{4}x - 1} = \sqrt{\frac{1}{4}x^2 - x} = \sqrt{\left(\frac{1}{2}x - 1\right)^2 - 1}$$

 نحوه تولید تابع $f(x)$ را مشخص می‌کنیم:

$$f: \left(\frac{1}{2}x\right) \rightarrow (-1) \rightarrow \text{توان ۲} \rightarrow (-1) \rightarrow \sqrt{\quad}$$

$$f^{-1}: \left(\div \frac{1}{2}\right) \rightarrow (+1) \rightarrow \sqrt{\quad} \rightarrow (+1) \rightarrow \text{توان ۲}$$

$$\Rightarrow f^{-1}(x) = 2\sqrt{x^2 + 1} + 2$$

پرسش سریعتر می‌توانیم عددگذاری کنیم! چون $f(4) = 0$ است، پس گزینه‌ای درست است که در آن $f^{-1}(0) = 4$ باشد، پس گزینه (۳) درست است.

۳۹۰ ۲

 ضابطه تابع را به صورت $y = |x+1| - |3x-6|$ ساده می‌کنیم:

$$y = \begin{cases} 2x-7 & ; x \leq -1 \\ 4x-5 & ; -1 < x < 2 \\ -2x+7 & ; x \geq 2 \end{cases} \xrightarrow{\text{نزولی}} y = -2x+7 ; x \geq 2$$

پس ضابطه وارون تابع در بازه‌ای که نزولی است، به صورت

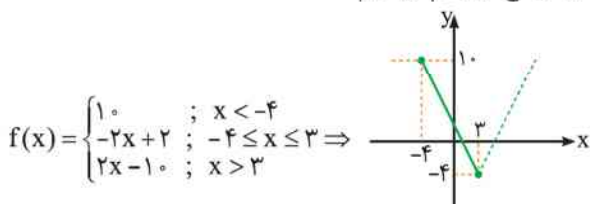
$$y^{-1} = -\frac{1}{2}x + \frac{7}{2} ; x \leq 3$$

پرسش سریعتر به چهره دیگر! طراح می‌توانست فواسته سوال رو کمی سفت تر کنه و اینجوری پیرسه: «نمودار وارون تابع در بازه نزولی و نمودار تابع $y = x^2 - 3x$ در چند نقطه مشترک هستند؟» جواب: در یک نقطه به طول $x = -1$ مشترک اند.

هایلایت

برای به دست آوردن وارون توابع قدرمطلق، ابتدا باید تعیین کنیم تابع در کدام بازه یک به یک است. برای این منظور تابع را به صورت چندضابطه‌ای می‌نویسیم. سپس بازه‌هایی را که تابع در آن‌ها یک به یک است، تعیین کرده و ضابطه وارون تابع را به دست می‌آوریم.

۳۹۱ ۴

 نمودار تابع f را رسم می‌کنیم:


ضابطه وارون تابع در بازه اکیدا نزولی برابر $f^{-1}(x) = -\frac{1}{2}x + 1$ است. از طرفی چون بُرد تابع f در این بازه برابر $-4 \leq y \leq 1$ است، پس دامنه تابع f^{-1} در این بازه به صورت $-4 \leq x \leq 1$ است.

پرسش سریعتر به چهره دیگر! طراح می‌توانست از علامت جمع بین x^2 و $\sqrt{x^2}$ استفاده کنه: «تابع $f(x) = x^2 + \sqrt{x^2}$ در یک بازه نزولی است. ضابطه وارون تابع در این بازه کدام است؟»

$$f(x) = x^2 + |x| = \begin{cases} x^2 + x & ; x > 0 \\ x^2 - x & ; x \leq 0 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{وارون}} y^{-1} = \frac{1}{2} - \sqrt{x + \frac{1}{4}} ; x \geq 0$$

پرسش سریعتر به چهره دیگر! طراح می‌توانست از توان ۲ استفاده کنه: «ضابطه وارون تابع $f(x) = x\sqrt{x}$ کدام است؟»

$$f(x) = x^{\frac{3}{2}} ; x \geq 0 \Rightarrow f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x^2}$$

پرسش سریعتر به چهره دیگر! طراح می‌توانست از توان ۲ استفاده کنه و همچنین بین x و $\sqrt{x}$ علامت جمع قرار بده! ببینیم، «ضابطه وارون تابع $f(x) = x + \sqrt{x}$ کدام است؟»

$$\text{جواب: } f(x) = x + \sqrt{x} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = \left(\sqrt{x} + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} \\ \Rightarrow f^{-1}(x) = \left(\sqrt{x + \frac{1}{4}} - \frac{1}{2}\right)^2$$

۳۸۷ ۳

می‌دانیم اگر $f^{-1}(a) = b$ باشد، آنگاه $f(b) = a$ خواهد بود. بنابراین در یک عدد دلخواه رابطه را بررسی می‌کنیم:

$$f(8) = \frac{1}{4} - \frac{3}{4} = -\frac{1}{2} \Rightarrow f^{-1}(-\frac{1}{2}) = 8$$

$$f^{-1}(1) = a(1) + a(\sqrt{1}) = 2a \Rightarrow 2a = 8 \Rightarrow a = 4$$

۳۸۸ ۱

 ابتدا ضابطه تابع f را ساده می‌کنیم:

$$f(x) = \sqrt{x+2\sqrt{x-1}} = \sqrt{(\sqrt{x-1}+1)^2} = \sqrt{x-1}+1$$

$$f: (-1) \rightarrow \sqrt{\quad} \rightarrow (+1)$$

$$f^{-1}: (+1) \rightarrow \text{توان ۲} \rightarrow (-1)$$

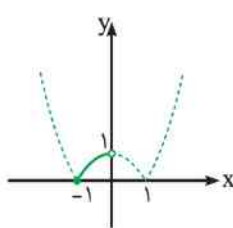
$$\Rightarrow f^{-1}(x) = (x-1)^2 + 1 = x^2 - 2x + 2 ; x \geq 1$$

پرسش سریعتر عددگذاری کنیم! چون $f(5) = 3$ است، پس گزینه‌ای درست است که $f^{-1}(3) = 5$ باشد. پس گزینه (۱) درست است.

پرسش سریعتر به چهره دیگر! آگه طراح رادیکال بیرونی رو نذاره، باز هم برای وارون کردن می‌تونیم از اتحاد مربع دو جمله‌ای استفاده کنیم، مثلاً اینجوری پیرسه «ضابطه وارون تابع $f(x) = x + 2\sqrt{x-2} + 3$ کدام است؟»

$$\text{جواب: } f(x) = x + 2\sqrt{x-2} + 3 = (\sqrt{x-2}+1)^2 + 2 \\ \Rightarrow f^{-1}(x) = (\sqrt{x-2}+1)^2 - 2$$

۳۹۳ ۴



چون $[x] = -1$ است، پس $-1 \leq x < 0$ است. حالا نمودار تابع $y = |x^2 - 1|$ را رسم می‌کنیم:

محدوده برد تابع در بازه مورد نظر برابر بازه $[0, 1]$ است. حالا نحوه تولید تابع $y = -x^2 + 1$ به صورت زیر است:

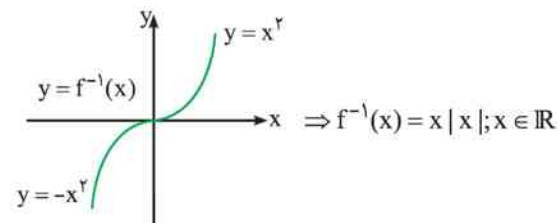
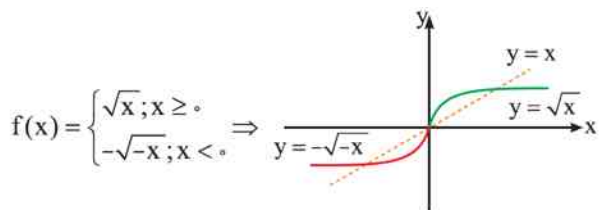
$$y: \text{توان } 2 \rightarrow \times(-1) \rightarrow +1$$

$$y^{-1}: \sqrt{} \rightarrow \div(-1) \rightarrow -1$$

$$\Rightarrow f^{-1}(x) = -\sqrt{1-x}; 0 \leq x < 1$$

۳۹۴ ۳

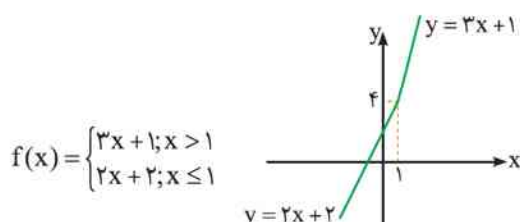
نمودار تابع f را رسم می‌کنیم، با توجه به این که وارون تابع‌های رادیکالی با فرجه ۲، به شکل سهمی هستند خواهیم داشت:



به چهره دیگه! توی کنکور خارج از کشور سال ۹۲، طرح پرسید: «ضابطه وارون تابع $f(x) = \begin{cases} \frac{|x|}{x} \sqrt{|x|} & ; x \neq 0 \\ 0 & ; x = 0 \end{cases}$ کدام است؟» برای حل کافیه $|x|$ رو باز کنید که جواب میشه: $f^{-1}(x) = x|x|$

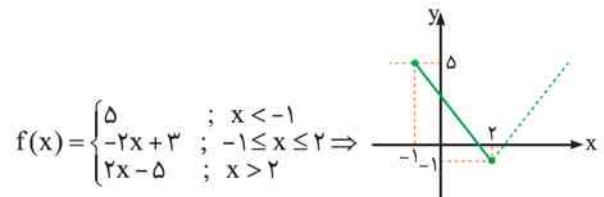
۳۹۷ ۲

نمودار تابع f به شکل زیر است:



۳۹۳ ۳

ابتدا نمودار f را رسم می‌کنیم:



ضابطه وارون تابع در بازه اکیدا نزولی برابر ضابطه وارون تابع در بازه $-1 \leq x \leq 2$ است. $f^{-1}(x) = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$ حال طول نقطه برخورد منحنی f^{-1} و g را محاسبه می‌کنیم:

$$f^{-1}(x) = g(x) \Rightarrow -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2} = x + 1 \Rightarrow \frac{3}{2}x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{1}{3}$$

۳۹۳ ۴

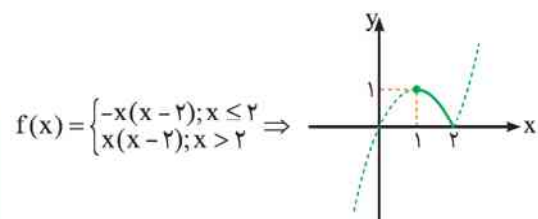
ضابطه $f(g(x))$ را تشکیل می‌دهیم:

$$f(g(x)) = 3 - \sqrt{x^2 - 2x + 1} = 3 - \sqrt{(x-1)^2} = 3 - |x-1|$$

پس نمودار تابع $f \circ g$ به صورت مقابل است: ضابطه تابع در بازه اکیدا نزولی به صورت $y = -x + 4$ است و چون برد تابع در بازه اکیدا نزولی برابر بازه $(-\infty, 3]$ است، پس ضابطه وارون آن به صورت مقابل است: $y = -x + 4; x \leq 3$

۳۹۴ ۳

نمودار تابع $f(x) = x|x-2|$ را رسم می‌کنیم:



ضابطه وارون تابع f در بازه نزولی به صورت زیر است:

$$y = -x(x-2) = -x^2 + 2x - 1 + 1 = -(x-1)^2 + 1$$

$$y: -1 \rightarrow \text{توان } 2 \rightarrow x-1 \rightarrow +1$$

$$y^{-1}: +1 \rightarrow \sqrt{} \rightarrow \div(-1) \rightarrow -1$$

$$\Rightarrow f^{-1}(x) = 1 + \sqrt{1-x}$$

برد تابع f در این بازه برابر $0 \leq y \leq 1$ است، پس دامنه f^{-1} نیز برابر $0 \leq x \leq 1$ است.

هابلایت

در توابع هموگرافیک $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ ، اگر صورت و مخرج کسر پس از فاکتورگیری با هم ساده شوند و عدد ثابت باقی بماند، تابع یک به یک نبوده و در نتیجه وارون پذیر نیست. این اتفاق در صورتی رخ می‌دهد که $ad = bc$ باشد.

۴ ۴۵۲

ابتدا ضابطه تابع $f(x)$ را پیدا می‌کنیم. برای این که $f(x)$ را پیدا کنیم باید در تساوی داده شده به جای x ها عبارت $\frac{x-4}{2}$ قرار دهیم:

$$f\left(2 \times \frac{x-4}{2} + 4\right) = \frac{4 \times \frac{x-4}{2} - 6}{2 \times \frac{x-4}{2} + a} \Rightarrow f(x) = \frac{2x-14}{x+a-4}$$

چون $f(x) = f^{-1}(x)$ است، پس: $(a-4) + (2) = 0 \Rightarrow a = 2$

۲ ۴۵۳

ابتدا ضابطه $f(x)$ را پیدا می‌کنیم:

$$x = \frac{f(x) - 3x}{f(x) + 4} \Rightarrow xf(x) + 4x = f(x) - 3x$$

$$\Rightarrow xf(x) - f(x) = -7x \Rightarrow f(x)(x-1) = -7x$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{-7x}{x-1} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x}{x+7}$$

۲ ۴۵۴

چون مخرج کسر بزرگ‌تر از صورت کسر است و هم چنین علامت آن همواره مثبت است، پس $1 < \frac{x}{1+|x|} < -1$ است. یعنی محدوده بُرد تابع f به صورت $(-1, 1)$ است. حالا ضابطه وارون f را پیدا می‌کنیم:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{x+1}; & x \geq 0 \\ \frac{x}{-x+1}; & x < 0 \end{cases} \xrightarrow{\text{طبق وارون هموگرافیک}} f^{-1}(x) = \begin{cases} \frac{-x}{x-1}; & 0 \leq x < 1 \\ \frac{-x}{-x-1}; & -1 < x < 0 \end{cases}$$

می‌توانیم ضابطه f^{-1} را به صورت زیر مرتب کنیم:

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} \frac{x}{1-x}; & 0 \leq x < 1 \\ \frac{x}{1+x}; & -1 < x < 0 \end{cases} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x}{1-|x|}; \quad \begin{cases} 0 \leq x < 1 \\ -1 < x < 0 \end{cases}$$

با مقایسه ضابطه f^{-1} با صورت سؤال، نتیجه می‌گیریم $a=1$ و $b=1$ است و $a \times b = 1$ است.

۴ ۴۵۵

$$f(x) = x^2 - 2x - 3 = (x-1)^2 - 4; \quad x \geq 1$$

مراحل تولید تابع f به شکل زیر است:

$$f: (-1) \rightarrow 2 \text{ توان } \rightarrow -4$$

$$f^{-1}: +1 \rightarrow +\sqrt{\quad} \rightarrow +4 \Rightarrow f^{-1}(x) = \sqrt{x+4} + 1$$

حالا نقاط تلاقی نمودارهای f^{-1} و g را به دست می‌آوریم:

$$f^{-1}(x) = g(x) \Rightarrow \sqrt{x+4} + 1 = \frac{x-9}{2} \xrightarrow{\text{جای گذاری}} x = 21 \xrightarrow{\text{گزیندها}}$$

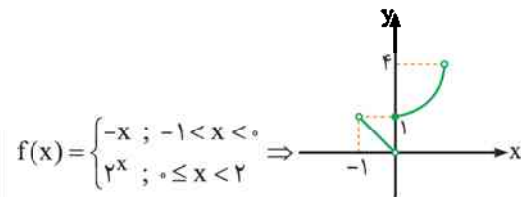
حالا با توجه به برد هر یک از ضابطه‌ها، ضابطه وارون تابع به شکل زیر است:

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}(x-1); & x > 4 \\ \frac{x}{4} - 1; & x \leq 4 \end{cases} \Rightarrow a = \frac{1}{3}, b = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow f^{-1}\left(\frac{b}{a}\right) = f^{-1}\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{3}{4} - 1 = -\frac{1}{4}$$

۲ ۳۵۸

بتر است، نمودار تابع f را رسم کنیم. توجه کنید در ضابطه بالایی، وقتی $-1 < x < 0$ است، پس $[x] = -1$ می‌باشد:



$$\Rightarrow f^{-1}(x) = \begin{cases} -x; & -1 < x < 0 \\ \log_2 x; & 0 <= x < 4 \end{cases}$$

۲ ۳۵۹

ابتدا ضابطه f را ساده می‌کنیم:

$$f(x) = \frac{3x+2+2x-2}{x-1} = \frac{5x}{x-1} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x}{x-5}$$

دام تستی اگر مخرج مشترک نمی‌گرفت، گزینه (۳) رو میزدی که غلط!

هابلایت

اگر تابع کسری $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ یک به یک باشد:

$$f(x) = \frac{ax+b}{cx+d} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{-dx+b}{cx-a}$$

اگر $a+d=0$ باشد، وارون تابع با خود تابع برابر است.

۴ ۴۵۰

چون $f^{-1}(x) = \frac{5x-3}{bx+4}$ است، پس $f(x) = \frac{-4x-3}{bx-5}$ است. حالا

چون بُرد f برابر $\mathbb{R} - \{-2\}$ است، پس:

$$\frac{-4}{b} = -2 \Rightarrow b = 2 \Rightarrow f(x) = \frac{-4x-3}{2x-5}$$

از طرفی دامنه تابع برابر $\mathbb{R} - \{a\}$ است، پس:

$$a = \frac{5}{2} \Rightarrow ab = \frac{5}{2} \times 2 = 5$$

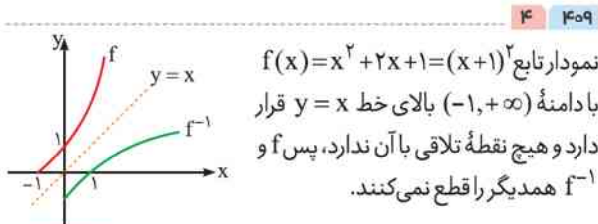
۴ ۴۵۱

$$f(f(x)) = \frac{af(x)+1}{2f(x)-1} \Rightarrow f(x) = \frac{ax+1}{2x-1}$$

از طرفی چون $f^{-1}(0) = -2$ است، پس $f(-2) = 0$ است:

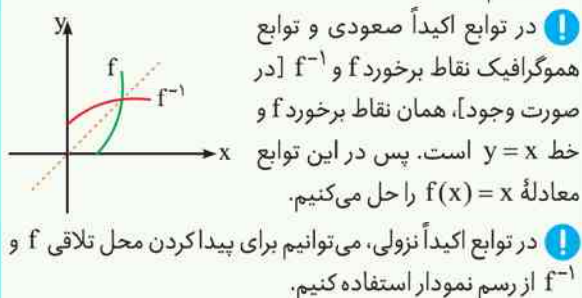
$$f(-2) = \frac{-2a+1}{-4-1} = 0 \Rightarrow a = \frac{1}{5}$$

پس $g(x) = \frac{4x+1}{2x+\frac{1}{5}}$ است. چون صورت این کسر، مضربی از مخرج آن است، پس تابع g وارون پذیر نیست.



هائیلبرت

برای پیدا کردن نقاط برخورد نمودارهای f و f^{-1} ، راهکار کلی این است که ضابطه f^{-1} را به دست آوریم و سپس معادله $f(x) = f^{-1}(x)$ را حل کنیم.



۲ ۱۹۵۰

تابع $f(x) = \sqrt{x+3} - 1$ یک تابع اکیدا صعودی است. بنابراین برای پیدا کردن محل تقاطع این تابع با وارونش، معادله $f(x) = x$ را حل می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \sqrt{x+3} - 1 &= x \Rightarrow \sqrt{x+3} = x+1 \Rightarrow x+3 = x^2 + 2x + 1 \\ \Rightarrow x^2 + x - 2 &= 0 \Rightarrow (x+2)(x-1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -2 \end{cases} \end{aligned}$$

پس فاصله نقطه $M(1,1)$ از مبدأ مختصات برابر است با:

$$|OM| = \sqrt{(1-0)^2 + (1-0)^2} = \sqrt{2}$$

۲ ۱۹۱۱

چون تابع f یک تابع هموگرافیک است، پس برای مشخص کردن نقاط برخورد f و f^{-1} می‌توانیم معادله $f(x) = x$ را حل کنیم:

$$\begin{aligned} \frac{x+4}{x-2} &= x \Rightarrow x+4 = x^2 - 2x \\ \Rightarrow x^2 - 3x - 4 &= 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 4 \end{cases} \end{aligned}$$

۳ ۱۴۳۳

تابع $f(x) = x^3 + 3x - 12$ از جمع دو تابع اکیدا صعودی $y = x^3$ و $y = 3x - 12$ به دست آمده، پس اکیدا صعودی است. بنابراین برای پیدا کردن محل برخورد این تابع با وارونش، معادله $f(x) = x$ را حل می‌کنیم:

$$x^3 + 3x - 12 = x \Rightarrow x^3 + 2x - 12 = 0 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow A(2, 2)$$

$\Rightarrow OA = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$

۱۹ به دوره دیگه! فاصله نقطه تقاطع تابع $f(x) = 2x - 3 + \sqrt{x-1}$ با وارونش خود، از مبدأ مختصات کدام است؟
جواب: $2\sqrt{2}$

۱۳ ۱۴۵۶

ابتدا نقطه برخورد f و g^{-1} را پیدا می‌کنیم:

$$f(x) = g^{-1}(x) \Rightarrow x^2 - 3x + 1 = 3x - 4 \Rightarrow x^2 - 6x + 5 = 0$$

$$\begin{aligned} \text{مجموع ضرایب برابر صفر} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 5 \end{cases} \end{aligned}$$

$y = 3x - 4 \Rightarrow y = -1 \Rightarrow A(1, -1)$

چون دو تابع f و g^{-1} در نقطه $A(1, -1)$ متقاطع اند، پس دو تابع f^{-1} و g در نقطه $A'(-1, 1)$ متقاطع اند.

هائیلبرت

اگر دو تابع f و g^{-1} در نقطه $A(a, b)$ متقاطع باشند، آن‌گاه دو تابع f^{-1} و g در نقطه $A'(b, a)$ متقاطع اند.

۲ ۱۴۵۷

ابتدا ضابطه تابع f را ساده می‌کنیم:

$$f(x) = x^2 - 4x + 1 = (x-2)^2 - 3; x \leq 2$$

مراحل تولید تابع f به شکل زیر است:

$$\begin{aligned} f: -2 &\rightarrow 2 \text{ توان } \rightarrow -3 \\ f^{-1}: +3 &\rightarrow -\sqrt{} \rightarrow +2 \Rightarrow f^{-1}(x) = 2 - \sqrt{x+3} \end{aligned}$$

حالا نقاط تقاطع توابع $y = \sqrt{f(x)+3}$ و $y = 1 - f^{-1}(x)$ را به دست می‌آوریم:

$$1 - f^{-1}(x) = \sqrt{f(x)+3} \Rightarrow \sqrt{x+3} - 1 = \sqrt{(x-2)^2}$$

$$\Rightarrow \sqrt{x+3} - 1 = |x-2| \xrightarrow{x \leq 2} \sqrt{x+3} - 1 = -(x-2)$$

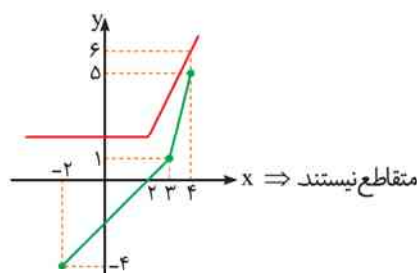
$$\Rightarrow \sqrt{x+3} = -x+3 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 6 \end{cases} \xrightarrow{y = |x-2|} y = 1$$

$$\Rightarrow A(1, 1) \Rightarrow |OA| = \sqrt{2}$$

۴ ۱۴۵۸

با توجه به شکل صورت سؤال، سه نقطه $A(-4, -2)$ ، $B(1, 3)$ و $C(5, 4)$ روی نمودار تابع f قرار دارند، پس سه نقطه $A'(2, -4)$ و $B'(3, 1)$ و $C'(4, 5)$ روی نمودار تابع f^{-1} هستند.

حالا با کمک سه نقطه A' و B' و C' نمودار تابع $f^{-1}(x)$ را رسم می‌کنیم و با توجه به نمودار تابع قدرمطلق $g(x) = x + |x-2|$ داریم:



۲ ۴۱۳

تابع $y = \log_f(2^{x+2} + 32)$ از ترکیب دو تابع اکیداً صعودی $f(x) = \log_f x$ و $g(x) = 2^{x+2} + 32$ به دست آمده (تابع fog) پس اکیداً صعودی است. پس برای پیدا کردن نقطه برخورد این تابع با وارونش، داریم:

$$\log_f(2^{x+2} + 32) = x \Rightarrow 4^x = 2^{x+2} + 32 \Rightarrow (2^x)^2 - 4 \times (2^x) - 32 = 0$$

$$\xrightarrow{2^x = t} t^2 - 4t - 32 = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = -4 \times \\ t = 8 \end{cases} \Rightarrow 2^x = 8 \Rightarrow x = 3$$

پس $A(3, 3)$ است و فاصله آن از نقطه $O(0, 0)$ برابر $OA = 3\sqrt{2}$ است.

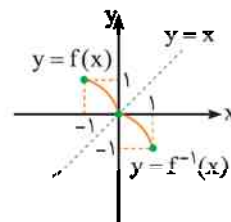
۴ ۴۱۴

ابتدا دامنه تابع $f(x) = \sqrt{1-x}$ را به دست می آوریم:

$$1+x \geq 0 \Rightarrow x \geq -1$$

$$2) 1 - \sqrt{1+x} \geq 0 \Rightarrow \sqrt{1+x} \leq 1 \Rightarrow 1+x \leq 1 \Rightarrow x \leq 0$$

از اشتراک بازه های (۱) و (۲) دامنه تابع f برابر بازه $[-1, 0]$ به دست می آید. حالا می دانیم تابع $y = \sqrt{1+x}$ اکیداً صعودی است، پس $y = -\sqrt{1+x}$ اکیداً نزولی و $y = 1 - \sqrt{1+x}$ نیز اکیداً نزولی است. از طرفی می دانیم تابع f از ترکیب تابع اکیداً نزولی $y = 1 - \sqrt{1+x}$ و تابع اکیداً صعودی $\sqrt{x}$ به دست می آید. پس تابع f یک تابع اکیداً نزولی است. حالا یک تابع اکیداً نزولی در بازه $[-1, 0]$ رسم می کنیم و برای رسم کردن وارون آن، نمودار را نسبت به خط $y = x$ قرینه می کنیم:



پس دو تابع f و f^{-1} فقط در $x = 0$ متقاطع اند.

۴ ۴۱۵

دامنه تابع f به صورت بازه $[1, +\infty)$ و برد تابع f برابر بازه $(-\infty, 2]$ است. در ضمن می دانیم $f^{-1}(x) = x; x \in \mathbb{R}$ و $f^{-1} \circ f(x) = x; x \in D_f$ است. حالا چون $x = 3$ در برد تابع f قرار ندارد، پس $f^{-1}(3)$ تعریف نشده است.

هتایاریت

اگر تابع $f(x)$ وارون پذیر باشد، ترکیب این تابع با وارونش، همواره برابر با x است. از طرفی با توجه به دامنه توابع f و f^{-1} ، با حالت های زیر مواجه می شویم:

۱) در تابع $f^{-1} \circ f$ ، چون x ابتدا وارد تابع f می شود، پس x باید عضو دامنه f باشد:

$$(f^{-1} \circ f)(x) = x; x \in D_f$$

۲) در تابع $f \circ f^{-1}$ ، چون x ابتدا وارون تابع f^{-1} می شود، پس x باید عضو دامنه f^{-1} باشد:

$$(f \circ f^{-1})(x) = x; x \in D_{f^{-1}}$$

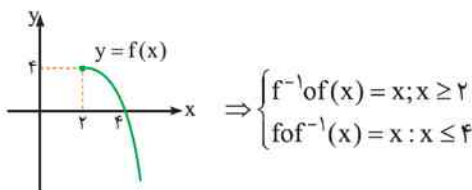
۲ ۴۱۶

برای این که تساوی داده شده برقرار باشد، باید f تابعی وارون پذیر با دامنه و برد یکسان باشد. در میان گزینه ها، دامنه و برد توابع موجود در گزینه های (۱) و (۴) به صورت بازه $[2, +\infty)$ و دامنه و برد تابع گزینه (۳) برابر $\mathbb{R} - \{1\}$ است. اما در گزینه (۲) دامنه تابع برابر $\mathbb{R}$ و برد آن برابر $(1, +\infty)$ است.

۳ ۴۱۷

ابتدا نمودار تابع $f(x) = 4x - x^2; x \geq 2$ را رسم می کنیم: دامنه تابع f برابر بازه $[2, +\infty)$ و برد آن بازه $(-\infty, 4]$ است.

پس:



$$\Rightarrow y = (f^{-1} \circ f)(x) + (f \circ f^{-1})(x) = x + x = 2x; 2 \leq x \leq 4$$

که نمودار این تابع در گزینه (۳) آمده است.

۴ ۴۱۸

برای پیدا کردن $g(3)$ ، باید در تساوی داده شده به جای x عدد ۹ بگذاریم:

$$f^{-1}(3x+1) = g\left(\frac{x+3}{f}\right) \xrightarrow{x=9} f^{-1}(28) = g(3)$$

$$\Rightarrow f(g(3)) = f(f^{-1}(28)) = 28$$

۲ ۴۴۲

می‌دانیم $(f^{-1} \circ g)^{-1}(2) = g^{-1}(f(2))$ است. در ضمن با توجه به ضابطه f واضح است که $f(2) = 2^3 + 2 = 10$ است. پس $g^{-1}(f(2)) = g^{-1}(10)$ است. حالا برای پیدا کردن $g^{-1}(10)$ کافی است، ضابطه g را برابر ۱۰ قرار

دهیم:

$$\frac{1-x}{x+2} = 10 \Rightarrow 1-x = 10x+20 \Rightarrow 11x = -19 \Rightarrow x = -\frac{19}{11}$$

هایلایت

برای به دست آوردن تابع $f^{-1} \circ g^{-1}$ با داشتن توابع f و g ، می‌توانیم تابع $g \circ f$ را به دست آوریم و سپس آن را وارون کنیم، یعنی:

$$(f^{-1} \circ g^{-1})(x) = (g \circ f)^{-1}(x)$$

۴ ۴۴۳

می‌دانیم $g^{-1} \circ f^{-1}(x) = (f \circ g)^{-1}(x)$ است، پس می‌توانیم تابع $f \circ g(x)$ را پیدا کنیم و سپس آن را وارون کنیم:

$$f(g(x)) = -5 + \frac{1}{\frac{x+3}{x+2} - 1} = -5 + \frac{1}{\frac{1}{x+2}} = x - 3$$

$$\xrightarrow{\text{وارون}} (f \circ g)^{-1}(x) = (g^{-1} \circ f^{-1})(x) = x + 3$$

۲ ۴۴۴

تابع $(f \circ g)(x) = \frac{3x+1}{x+1}$ را وارون می‌کنیم:

$$(f \circ g)^{-1}(x) = \frac{-x+1}{x-3} \Rightarrow g^{-1}(f^{-1}(x)) = \frac{-x+1}{x-3}$$

$$\xrightarrow{x=4} g^{-1}(f^{-1}(4)) = \frac{-4+1}{4-3} = -3 \Rightarrow g^{-1}(1) = -3$$

۲ ۴۴۵

باقی‌مانده تقسیم $P(x) = ax^2 + x - 7$ بر $x - 2$ برابر $P(2)$ و باقی‌مانده تقسیم $f(x) = 2x^3 - x^2 + ax + 3$ بر $x - 2$ برابر $f(2)$ است:

$$P(2) = a(2)^2 + 2 - 7 = 4a - 5$$

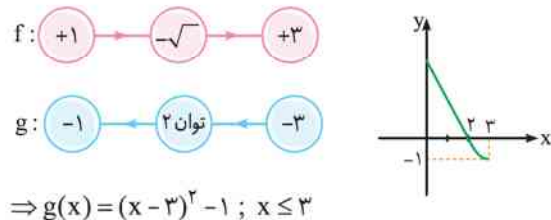
$$f(2) = 2(2)^3 - 2^2 + 2a + 3 = 16 - 4 + 2a + 3 = 2a + 15$$

حال چون باقی‌مانده تقسیم $P(x)$ و $f(x)$ بر $x - 2$ یکسان است، بنابراین:

$$P(2) = f(2) \Rightarrow 4a - 5 = 2a + 15 \Rightarrow 2a = 20 \Rightarrow a = 10$$

۳ ۴۴۹

چون ترکیب دو تابع f و g برابر x یعنی تابع همانی است، پس دو تابع f و g وارون یکدیگر هستند، یعنی $g(x) = f^{-1}(x)$ است. حالا نمودار تابع f و وارون آن را رسم می‌کنیم:



$$\Rightarrow g(x) = (x - 3)^2 - 1; x \leq 3$$

به پوره دیگه! طرح به پای این که f و g رو به شکل ماشین نمایش بده، می‌تونست بگه اگر $f(x) = 3 - \sqrt{x+1}$ و ترکیب دو تابع f و g تابع همانی باشد، ضابطه تابع g کدام است؟

۲ ۴۴۰

چون در تابع $f(x) = \frac{\sqrt{2}x}{3x - \sqrt{2}}$ رابطه $a + d = 0$ برقرار است، پس $f(x) = f^{-1}(x)$ است، بنابراین:

$$f(f(f(\sqrt{2}))) = f(f^{-1}(f(\sqrt{2}))) = f(\sqrt{2}) = \frac{\sqrt{2} \times \sqrt{2}}{3\sqrt{2} - \sqrt{2}} = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

به پوره دیگه! یادش بقیه در کتاب میکرو طبقه‌بندی ریاضی سال ۹۹ و قبل از این که سرکله این تیپ سوال در کنگورها پیدا بشه، این تست رو آورده بودم: اگر $f(x) = \frac{2x+1}{5x-2}$ باشد، حاصل $f \circ f(\sqrt{5})$ کدام است؟ جواب: $\sqrt{5}$

۴ ۴۴۱

تابع $f(x) = x + \sqrt{x} + 3$ از جمع دو تابع اکیدا صعودی $y = x + 3$ و $y = \sqrt{x}$ به دست آمده است. پس تابعی اکیدا صعودی است که دامنه آن برابر $[0, +\infty)$ و بُرد آن $[3, +\infty)$ است. در ضمن می‌دانیم $f \circ f^{-1}(x) = x; x \geq 3$ است. حالا نقطه برخورد این تابع را با $y = \sqrt{-x+6}$ پیدا می‌کنیم:

$$\sqrt{-x+6} = x \Rightarrow -x+6 = x^2 \Rightarrow x^2 + x - 6 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -3 \\ x = 2 \end{cases}$$

هر دو مقدار x به دست آمده در دامنه تابع $f \circ f^{-1}(x)$ وجود ندارد، پس این دو تابع مقاطع نیستند.

حال چون $f(x)$ بر $x-3$ بخش پذیر است، پس باید $f(3)=0$ باشد:

$$f(3)=0 \Rightarrow (3^2 + 5)(3-8) + a = 14 \times (-5) + a$$

$$= -70 + a = 0 \Rightarrow a = 70.$$

۲ ۴۳۵

به دنبال باقی مانده تقسیم $P(x)$ بر $x+2$ ، یعنی $P(-2)$ هستیم. به همین دلیل در معادله $P(x) = 2P(-x) + 4x$ به جای x عدد -2 را قرار می دهیم. پس داریم:

$$x = -2: P(-2) = 2P(2) - 8 \quad (I)$$

و برای پیدا کردن $P(-2)$ ، در معادله بالا $x = 2$ را جای گذاری می کنیم:

$$x = 2: P(2) = 2P(-2) + 8 \quad (II)$$

از حل دستگاه شامل معادلات (I) و (II) داریم:

$$\begin{cases} P(2) = 2P(-2) + 8 \\ P(-2) = 2P(2) - 8 \end{cases} \Rightarrow P(-2) = 2(2P(-2) + 8) - 8 - 8$$

$$\Rightarrow P(-2) = 4P(-2) + 16 - 8 \Rightarrow 3P(-2) = -8 \Rightarrow P(-2) = -\frac{8}{3}$$

❗ به پوره دیکه! طراح در کنکور ۹۹ مشابه این تست رو این پوری پرسید:

«فرض کنید چند جمله ای $P(x)$ بر $x^2 - 1$ بخش پذیر باشد. اگر

$Q(x) = P(x-1) + P(1-x)$ آن گاه باقی مانده تقسیم $Q(x)$ بر $x-2$

کدام است؟»

پوآب: صفر

۱ ۴۳۱

چون باقی مانده تقسیم $P(x)$ بر $x-4$ و $x+2$ به ترتیب ۳ و ۱ است، پس:

$$P(4)=3, P(-2)=1$$

حال باقی مانده تقسیم $P(x^2) + 4P(-x)$ بر $x-2$ برابر است با:

$$P(2^2) + 4P(-2) = P(4) + 4P(-2) = 3 + 4(1) = 7$$

۱ ۴۳۲

برای پیدا کردن باقی مانده تقسیم عبارت $P(x^2 + 1) + 3P(1-x)$ بر

$x+1$ ، باید در عبارت، $x = -1$ را جای گذاری کنیم:

$$P((-1)^2 + 1) + 3P(1 - (-1)) = P(2) + 3P(2) = 4P(2)$$

اکنون حاصل $P(2)$ را به دست می آوریم:

$$P(2) = (2)^3 + m(2)^2 + (3m-2)(2) - 1 \cdot m - 4$$

$$= 8 + 4m + 6m - 4 - 1 \cdot m - 4 = 0$$

بنابراین باقی مانده تقسیم عبارت $P(x^2 + 1) + 3P(1-x)$ بر $x+1$

برابر است با:

$$4P(2) = 4 \times 0 = 0$$

هایلایت

تقسیم

اگر $f(x)$ و $p(x)$ توابع چند جمله ای باشند و درجه $p(x)$ از صفر بزرگتر باشد، آنگاه تساوی زیر برقرار باشد [این تساوی را اتحاد تقسیم می نامند]:

$$\begin{array}{l} f(x) \\ \vdots \\ r(x) \end{array} \begin{array}{l} p(x) \\ q(x) \end{array} \rightarrow f(x) = p(x) \times q(x) + r(x)$$

توجه کنید در اتحاد تقسیم، درجه باقی مانده از درجه مقسوم علیه کمتر است.

باقی مانده تقسیم $f(x)$ بر $x-a$

باقی مانده تقسیم چند جمله ای $f(x)$ بر $ax+b$ برابر با $f(-\frac{b}{a})$ است.

مثلاً باقی مانده تقسیم عبارت $x^4 - 3x^3 + x + 9$ بر $x-2$ برابر است با:

$$\begin{aligned} x-2=0 \Rightarrow x=2 \Rightarrow r=f(2) \\ = 2^4 - 3 \times 2^3 + 2 + 9 = 16 - 24 + 2 + 9 = 3 \end{aligned}$$

۱ ۴۲۶

ابتدا ریشه عبارت $x+2$ را به دست می آوریم: $x+2=0 \Rightarrow x=-2$

اگر $f(x)$ بر $x+2$ بخش پذیر باشد، $f(-2)=0$ است.

$$f(-2) = (-2)^5 - 3(-2)^3 + a(-2) + 5 = 0 \Rightarrow -2a = 3$$

$$\Rightarrow a = -\frac{3}{2} = -1.5$$

۱ ۴۲۷

چند جمله ای $P(x)$ بر $x-1$ بخش پذیر است، پس:

$$P(\frac{1}{2}) = 0 \Rightarrow 2(\frac{1}{2})^4 + a(\frac{1}{2})^3 + 2(\frac{1}{2})^2 - 3(\frac{1}{2}) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{8} + \frac{a}{8} + \frac{1}{2} - \frac{3}{2} = 0 \Rightarrow \frac{a+1}{8} = 1 \Rightarrow a = 7$$

اکنون باقی مانده تقسیم $P(x)$ بر $x+2$ را محاسبه می کنیم:

$$P(-2) = 2(-2)^4 + 7(-2)^3 + 2(-2)^2 - 3(-2)$$

$$= 32 - 56 + 8 + 6 = -10$$

۲ ۴۲۸

می دانیم اگر $P(x)$ بر $x-1$ بخش پذیر باشد، آنگاه $P(1)=0$ بنابراین:

$$P(1) = (1)^3 - 3a(1) - 7 = 0 \Rightarrow a = -2$$

پس ضابطه $P(x)$ به صورت مقابل است: $P(x) = x^3 + 6x - 7$

برای محاسبه باقی مانده تقسیم $P(x)$ بر $x+2$ کافی است $P(-2)$ را محاسبه کنیم:

$$P(-2) = (-2)^3 + 6(-2) - 7 = -8 - 12 - 7 = -27$$

۳ ۴۲۹

فرض می کنیم با اضافه کردن عدد a به حاصل ضرب $x^2 + 5$ و $x-8$ حاصل بر $x-3$ بخش پذیر می شود، پس:

$$f(x) = (x^2 + 5)(x-8) + a$$

پس $P(x)$ به صورت $x^3 + 2x^2 + x + 2$ است. با تقسیم $P(x)$ بر

$$x-1 \text{ داریم: } x^3 + 2x^2 + x + 2 = (x-1)(x^2 + 3x + 4) + 6$$

برای محاسبه باقی مانده تقسیم $P(x-1) + Q(\frac{x}{x-1})$ بر $x-2$ مقدار $x=2$ را جای گذاری می کنیم.

$$\xrightarrow{x=2} P(1) + Q(1) = 6 + 8 = 14$$

چون $P(x) = x^{2n+1} + 2x^{2n} + x^5 - 5x^3 + k$ بر $x+2$ بخش پذیر است، پس $P(-2) = 0$ است و داریم:

$$P(-2) = 0 \Rightarrow (-2)^{2n+1} + 2(-2)^{2n} + (-2)^5 - 5(-2)^3 + k = 0$$

$$\Rightarrow -2 \times (-2)^{2n} + 2(-2)^{2n} - 32 + 40 + k = 0 \Rightarrow k = -8$$

باقی مانده تقسیم این چند جمله ای بر $x-1$ برابر $P(1)$ است:

$$P(1) = (1)^{2n+1} + 2(1)^{2n} + 1^5 - 5(1)^3 - 8 = 1 + 2 + 1 - 5 - 8 = -9$$

چون تابع $P(x)$ یک چند جمله ای است، باید توان های متغیرهای آن، اعداد حسابی (W) باشد، داریم:

$$1) (n-3) \in W \Rightarrow n-3 \geq 0 \Rightarrow n \geq 3$$

$$2) \frac{2n+3}{n} \in W \Rightarrow (\frac{2n}{n} + \frac{3}{n}) \in W \Rightarrow (2 + \frac{3}{n}) \in W \Rightarrow \begin{cases} n=1 \times \\ n=3 \checkmark \end{cases}$$

بنابراین تابع $P(x)$ به صورت $P(x) = x^3 + x^3 - 2 + 1 + 3$ است.

باقی مانده تقسیم این عبارت بر $2x-1$ را پیدا می کنیم:

$$2x-1=0 \Rightarrow x=\frac{1}{2}, P(x)=2x^3+2$$

$$P(\frac{1}{2})=2(\frac{1}{2})^3+2=2(\frac{1}{8})+2=2\frac{1}{4}$$

چون $P(x)$ به ازای هر عدد طبیعی n بر $x+2$ بخش پذیر است، پس فرض می کنیم $n=1$ باشد:

$$P(x) = x^2 + 2x^2 + x^6 + 2x^5 + 16a$$

$$\xrightarrow{P(-2)=0} -32 + 16a = 0 \Rightarrow a = 2$$

حال باقی مانده تقسیم $P(x)$ بر $x^2 + 2x - 3$ را به صورت $ax + b$ در نظر می گیریم و با اتحاد تقسیم داریم:

$$x^4 + 2x^3 + x^6 + 3x^5 + 32 = \underbrace{(x^2 + 2x - 3)}_{(x-1)(x+3)} Q(x) + ax + b$$

$$1) P(1) = 39 = a + b$$

$$\Rightarrow a = -5, b = 44$$

$$2) P(-3) = 59 = -3a + b$$

$$\Rightarrow \text{باقی مانده: } -5x + 44$$

۳۳۴ ۲

در این سؤال $x^2 + 1 = 0$ ریشه ندارد. ولی می توان نتیجه گرفت که $x^2 = -1$ است.

حال در ضابطه $f(x)$ داریم:

$$f(x) = 2x^3 - x^2 - 4x + 1$$

در حوزه اعداد فراتر از $\mathbb{R}$ عبارت $\sqrt{-1}$ نیز تعریف شده است. این حوزه اعداد مختلط نام دارد و آن را با $\mathbb{C}$ نمایش می دهند. پس عبارت $x^2 = -1$ در حوزه اعداد مختلط تعریف شده است.

هایلایت

در محاسبه باقی مانده تقسیم $f(x)$ بر عبارتی مانند $P(x)$ که $P(x)$ ریشه ندارد، می توانیم $P(x) = 0$ قرار دهیم و با نتایج این کار بازی کنیم تا در $f(x)$ قرار دهیم. عبارتی که به دست می آوریم همان باقی مانده است.

۳۳۵ ۴

اتحاد تقسیم را می نویسیم و در آن $x=1$ و $x=-1$ می گذاریم:

$$f(x) = (x^2 + 4x + 5)Q(x) + x + 2$$

$$1) f(1) = 10 = Q(1) + 3 \Rightarrow Q(1) = 7$$

$$2) f(-1) = 2 = 2Q(-1) + 1 \Rightarrow Q(-1) = 0.5$$

با توجه به گزینه ها، فقط $Q(x) = -2x + 3$ مناسب است.

۳۳۶ ۴

ابتدا باقی مانده تقسیم $f(x)$ بر $x+2$ را محاسبه می کنیم:

$$f(-2) = (-2)^7 - 4(-2)^5 + (-2)^2 + 1 = -128 + 128 + 4 + 1 = 5$$

حال اتحاد تقسیم را نوشته و از آن جایی که باقی مانده تقسیم $q(x)$ بر $x-1$ برابر $q(1)$ است، در اتحاد تقسیم $x=1$ را قرار می دهیم:

$$x^7 - 4x^5 + x^2 + 1 = (x+2)q(x) + 5$$

$$\xrightarrow{x=1} 1 - 4 + 1 + 1 = (1+2)q(1) + 5 \Rightarrow -6 = 3q(1) \Rightarrow q(1) = -2$$

۳۳۷ ۲

چون $P(x)$ بر $x+2$ بخش پذیر است، پس $P(-2) = 0$ است.

$$P(-2) = -8 + 4a - 2 + b = 0 \Rightarrow 4a + b = 10 \quad (1)$$

و باقی مانده تقسیم $P(x)$ بر $x-1$ برابر ۶ است، پس $P(1) = 6$ است.

$$P(1) = 1 + a + 1 + b = 6 \Rightarrow a + b = 4 \quad (2)$$

با معادله (۱) و (۲) در دستگاه داریم:

$$\begin{cases} 4a + b = 10 \\ a + b = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 2 \end{cases}$$

۱۴۴۵ ۱

با توجه به نمایش تقسیم داریم:

$$P(x) = (x^2 - 3x - 4)q(x) + (3x - 4) \\ \Rightarrow P(x) = (x+1)(x-4)q(x) + (3x-4) \Rightarrow \begin{cases} P(-1) = -7 \\ P(4) = 8 \end{cases}$$

 باقی مانده تقسیم $P(x+1)$ بر $x+2$ برابر $P(-1) = -7$ است.

هابلاریت

 باقی مانده تقسیم $f(x)$ بر مقسوم علیه درجه دوم [یا بالاتر]

برای محاسبه باقی مانده تقسیم چند جمله ای $f(x)$ بر یک عبارت درجه دوم [یا با درجه بالاتر] راهکار کلی این است که ابتدا مقسوم علیه را مساوی صفر قرار دهیم. سپس در مقسوم علیه، جمله با درجه بیشتر را بر حسب سایر جملات به دست آورده و آن را در $f(x)$ قرار می دهیم. این عمل را تا جایی ادامه می دهیم که درجه عبارت $f(x)$ کم تر از درجه مقسوم علیه شود. عبارت به دست آمده، همان باقی مانده است. [این روش به روش کاهش توان مشهور است].

مثلاً برای محاسبه باقی مانده عبارت $f(x) = 2x^3 + 5x - 9$ بر $x^2 - x$ مقسوم علیه را برابر صفر قرار می دهیم و داریم:

$$x^3 - x = 0 \Rightarrow x^3 = x \xrightarrow{\text{جای گذاری}} 2x + 5x - 9 = 7x - 9$$

 بنابراین باقی مانده $7x - 9$ است.

برای محاسبه باقی مانده تقسیم چند جمله ای $f(x)$ بر یک عبارت درجه دوم [یا با درجه بالاتر] اگر مقسوم علیه قابل تجزیه به عوامل درجه اول باشد، با جای گذاری ریشه های عوامل مقسوم علیه در اتحاد تقسیم، باقی مانده را به دست می آوریم.

اگر مقسوم علیه، یک عبارت درجه دوم باشد، باقی مانده حداکثر از درجه اول خواهد بود. پس باید باقی مانده را به صورت $ax + b$ در نظر بگیریم.

۱۴۴۶ ۴

 مقسوم علیه را به صورت $(x-1)(x+1)$ می نویسیم و با کمک اتحاد

 تقسیم داریم: $ax^3 + bx^2 + 2x + 1 = (x-1)(x+1)q(x) + x + 2$

$$x=1: a+b+3=0+3 \Rightarrow a+b=0$$

$$x=-1: -a+b-1=0+1 \Rightarrow -a+b=2 \Rightarrow a=-1, b=1$$

 حال باقی مانده تقسیم $f(x)$ بر $x+2$ را به دست می آوریم:

$$f(-2) = -8a + 4b - 4 + 1 = -8(-1) + 4(1) - 3 = 9$$

۱۴۴۷ ۱

با توجه به اتحاد تقسیم داریم:

$$P(x) = (x^2 - x)Q(x) + x + 4 \\ \Rightarrow P(x) = x(x-1)Q(x) + x + 4 \Rightarrow \begin{cases} P(0) = 4 \\ P(1) = 5 \end{cases}$$

 با جای گذاری در $P(x)$ داریم:

$$\Rightarrow \begin{cases} 0^4 + a(0)^2 + 3(0) + b = 4 \Rightarrow b = 4 \\ (1)^2 + a(1)^2 + 3(1) + 4 = 5 \Rightarrow a = -3 \end{cases}$$

 بنابراین $P(x) = x^4 - 3x^2 + 3x + 4$ و خارج قسمت آن در تقسیم بر

 $x^2 - x$ برابر $x^2 + x - 2$ است. $Q(x) = x^2 + x - 2$

 باقی مانده تقسیم $4P(x) + Q(x+1)$ بر $x-1$ برابر است با:

$$\xrightarrow{x=1} 4P(1) + Q(2) = 4(5) + ((2)^2 + 2 - 2) = 20 + 4 = 24$$

۱۴۴۳ ۱

با توجه به اتحاد تقسیم داریم،

$$P(x+2) = (2x^2 - 3x - 1)Q(x)$$

وقتی باقی مانده تقسیم $Q(x)$ بر $x+1$ برابر ۲ می شود، یعنی $Q(-1) = 2$ است. اکنون برای محاسبه باقی مانده تقسیم $P(x)$ بر

$x-1$ ، کافی است در $P(x+2)$ ، جای x عدد -1 را قرار دهیم که به

$$P(1) \text{ برسیم. } P(1) = (2(-1)^2 - 3(-1) - 1)Q(-1)$$

$$\Rightarrow P(1) = (2+3-1)Q(-1) = 4Q(-1) = 4 \times 2 = 8$$

۱۴۴۴ ۴

با توجه به اتحاد تقسیم $P(x) = (x^2 + 2x)Q(x) + 3x + 1$ است، پس مشتق آن برابر است با:

$$P'(x) = (2x+2)Q(x) + Q'(x)(x^2+2x) + 3$$

باقی مانده تقسیم $P'(x)$ بر $x+2$ برابر $P'(-2)$ است:

$$P'(-2) = -2Q(-2) + Q'(-2) \times 0 + 3 = -3$$

۱۴۴۵ ۳

با فرض $P(x) = ax^2 + bx + c$ نتیجه می گیریم $P'(x) = 2ax + b$ است، پس با توجه به اتحاد تقسیم خواهیم داشت:

$$P(x) = P'(x)\left(\frac{1}{2}x+1\right) + (-2)$$

$$\Rightarrow ax^2 + bx + c = (2ax+b)\left(\frac{1}{2}x+1\right) - 2$$

$$\Rightarrow ax^2 + bx + c = ax^2 + \left(2a + \frac{b}{2}\right)x + b - 2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2a + \frac{b}{2} = b \Rightarrow 2a = \frac{b}{2} \Rightarrow b = 4a \\ c = b - 2 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{a,b,c \in \mathbb{N}} \begin{cases} a=1, c=2, b=4 \\ یا \\ a=2, c=6, b=8 \end{cases}$$

پس $a+b+c$ می تواند برابر ۷ یا ۱۶ باشد که کمترین مقدار آن برابر ۷ است.

۱۴۴۶ ۳

در این سؤال $f(x)$ بر $(x-2)^2$ بخش پذیر است. بنابراین:

$$\begin{cases} f(2)=0 \\ f'(2)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 16+4a+2b+2=0 \\ (6x^2+2ax+b)'=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a+b=-9 \\ 4a+b=-24 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=-7/5 \\ b=6 \end{cases}$$

بنابراین $2a+3b = -15+18 = 3$ است.

هابلاریت

اگر عبارت چند جمله ای $f(x)$ ، بر یک عبارت مربع کامل مانند $(x-a)^2$ بخش پذیر باشد، آن گاه هر دو شرط زیر برقرار است:

$$f'(a) = 0 \quad f(a) = 0$$

به ازای $x = -1$ عبارت تعریف نشده است، پس می‌توان به جای محاسبه $Q(-1)$ از $\lim_{x \rightarrow -1} Q(x)$ استفاده کرد:

$$\lim_{x \rightarrow -1} Q(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^4 + 1}{x + 1} \stackrel{\text{HOP}}{=} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{4x^3}{1} = 4(-1)^3 = -4$$

با توجه به این که چند جمله‌ای $x^6 - 64$ بر $x + 2$ بخش پذیر است، پس اتحاد تقسیم به صورت $x^6 - 64 = (x + 2)Q(x)$ است که از آن نتیجه می‌گیریم $Q(x) = \frac{x^6 - 64}{x + 2}$ می‌باشد. حال برای به دست آوردن $Q(-2)$ از راه حل زیر استفاده می‌کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow -2} Q(x) = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^6 - 64}{x + 2} \stackrel{\text{HOP}}{=} \lim_{x \rightarrow -2} \frac{6x^5}{1} = 6(-2)^5 = -192$$

اتحاد تقسیم را به صورت زیر می‌نویسیم:
حالا طرفین این تساوی را در $(x - 1)$ ضرب می‌کنیم و با استفاده از اتحاد جاق و لاغر داریم:

$$\begin{aligned} \frac{x(x-1)}{(x-1)(2-x^2)} &= (x^2 + x + 1)Q(x) + (x-1)r(x) \\ \rightarrow (x-1)(2-x^2) &= (x^3 - 1)Q(x) + (x-1)r(x) \end{aligned}$$

حالا مقسوم علیه را برابر صفر قرار می‌دهیم و داریم:

$$x^3 - 1 = 0 \Rightarrow x^3 = 1 \xrightarrow{\text{به توان 2}} x^6 = 1 \xrightarrow{\text{به توان 4}} x^{14} = x^2$$

پس در اتحاد تقسیم به جای x^3 عدد ۱ و به جای x^{14} عبارت x^2 را قرار می‌دهیم:

$$\begin{aligned} (x-1)(2-x^2) &= (1-1)Q(x) + (x-1)r(x) \\ \Rightarrow (x-1)(2-x^2) &= (x-1)r(x) \Rightarrow r(x) = 2-x^2 \end{aligned}$$

حالا مقسوم علیه یعنی $x^2 + x + 1$ را برابر صفر قرار می‌دهیم و داریم:

$$x^2 + x + 1 = 0 \Rightarrow x^2 = -x - 1$$

$$\Rightarrow r(x) = 2 - x^2 = 2 - (-x - 1) = x + 3$$

در نتیجه $r(x) = x + 3$ است و مجموع ضرایب آن برابر ۴ است.

عبارت $q(x)$ را تجزیه می‌کنیم:

$$q(x) = x^2(x^2 + 3x + 2) = x^2(x+2)(x+1)$$

چون دوجمله‌ای $x^2 + x^3$ بزرگ‌ترین عامل مشترک عبارت است، پس باید عبارات $x^2 + x^3 = x^2(x+1)$ باشد، چرا که عبارت $x^3 + 2x^2$ نوشته می‌شود که به دلیل وجود ضریب ۲، با ساختار به صورت $x^3 + x^2$ داده شده، انطباق ندارد. با مقایسه $x^3 + x^2$ و $x^3 + x^2$ متوجه می‌شویم $n = 2$.

از طرفی چون $x^2(x+1)$ عامل $p(x)$ نیز هست، پس $p(-1) = 0$ است.

$$p(-1) = 0 \Rightarrow (-1)^5 + a(-1)^3 = 0 \Rightarrow a = -1$$

برای محاسبه na داریم:

$$2 \times -1 = -2$$

۱۴۴۷ ۱

از آنجا که باقی‌مانده تقسیم $f(x)$ بر $(x-1)^2$ برابر با $3x+1$ است، نتیجه می‌گیریم که $f(x) - 3x - 1$ بر $(x-1)^2$ بخش پذیر است. در نتیجه تابع $g(x) = x^2 + ax^2 + (b-3)x + 5$ بر $(x-1)^2$ بخش پذیر است:

$$\begin{cases} g(1) = 0 \\ g'(1) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 + a + (b-3) + 5 = 0 \\ (3x^2 + 2a) + (b-3) \Big|_{x=1} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + b = -3 \\ 2a + b = 0 \end{cases}$$

بنابراین $\frac{b}{a} = -2$ است.

۱۴۴۸ ۱

با توجه به این که عبارت $a^n - b^n$ بر $a - b$ بخش پذیر است. پس $(x^2 + x^2 + 1)^n - (x^2 + x^2 + 1) = x^2 - 1$ بر $(x^2 + x^2 + 1)^n - (x^2 + x^2 + 1)$ بخش پذیر است. بنابراین عبارت مورد نظر بر گزینه‌ای که شامل $x^2 - 1$ یا هر کدام از عامل‌های آن یعنی $x+1$ یا $x-1$ است بخش پذیر است، اما بر $x^2 + 1$ بخش پذیر نیست.

۱۴۴۹ ۲

با توجه به این که $x^6 - 1 = (x-1)(x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$ است، در سمت چپ تساوی مخرج مشترک می‌گیریم:

$$\frac{2}{x^5 - 1} - \frac{x-1}{(x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)(x-1)} = \frac{2 - (x-1)}{x^5 - 1} = \frac{2-x}{x^5 - 1}$$

با مقایسه عبارت به دست آمده با سمت راست تساوی نتیجه می‌گیریم:

$$P(x) = 3 - x$$

۱۴۵۰ ۴

می‌دانیم عبارت $x^n + a^n$ وقتی بر $x + a$ بخش پذیر است که n فرد باشد. بنابراین تک‌تک گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

۱) $x^{10} + 1 = (x^2)^5 + 1 \rightarrow$ زوج است. $n = 10$ ✗

۲) $x^{20} + 1 = (x^{10})^2 + 1 \rightarrow$ زوج است. $n = 2$ ✗

۳) $x^{20} + 1 = (x^5)^4 + 1 \rightarrow$ زوج است. $n = 4$ ✗

۴) $x^{20} + 1 = (x^4)^5 + 1 \rightarrow$ فرد است. $n = 5$ ✓

۱۴۵۱ ۳

با توجه به این که عبارت $a^n - b^n$ همواره بر $a - b$ بخش پذیر است، پس $x^{15} - 1$ نیز برای $x - 1$ بخش پذیر است، اما این عبارت در گزینه‌ها نیست، از طرفی چون $(x^3)^5 - (1^3)^5 = x^{15} - 1$ ، پس این عبارت بر $x^3 - 1$ و عامل‌های آن نیز بخش پذیر است. با تجزیه $x^3 - 1$ داریم:

$$x^3 - 1 = (x-1)(x^2 + x + 1)$$

پس $x^{15} - 1$ بر $x^2 + x + 1$ بخش پذیر است.

۱۴۵۲ ۲

$a^n - x^n$ فقط زمانی بر $x + a$ بخش پذیر است که n زوج باشد.

۱۴۵۳ ۴

می‌دانیم $x^9 + 1$ بر $x + 1$ بخش پذیر است. حال با توجه به اتحاد تقسیم داریم:

$$x^9 + 1 = (x+1)Q(x) \Rightarrow Q(x) = \frac{x^9 + 1}{x+1}$$