

مجموعه کتابهای آی کیو قرن جدید
ویژه کنکور ۱۴۰۵



جامع کنکور
ریاضیات تجربی

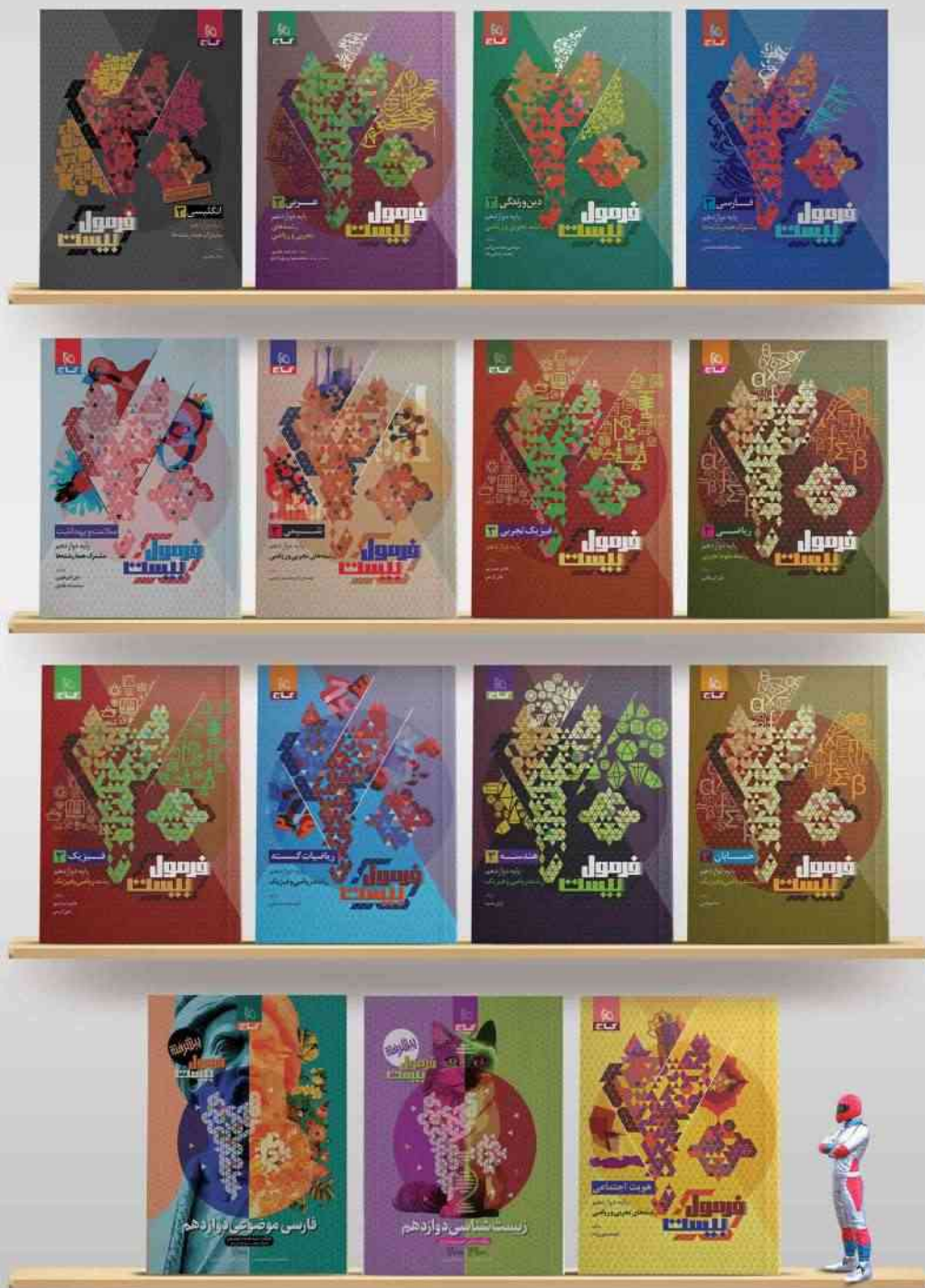
دهم | یازدهم | دوازدهم

مطابق با سبک جدید سوالات کنکور

مؤلف: مهندس سجاد عظمتی

+ کنکور
۱۴۰۴

مجموعه کتاب‌های فرمول بیست ویژه ارتقا و ترمیم معدل نهایی



دکتر آی کیو
DRIQ.com
کلاس آنلاین



گاج مارکت
gajmarket.com
فروشگاه آنلاین



گاجینو
gajino.com
آموزش آنلاین



برای تویی که میخوای آینده‌ات رو خودت بسازی...

هر رؤیای بزرگ، با باور آغاز می‌شود. باور به این که شما توانایی دارید، پتانسیل دارید، و این دنیا منتظر است تا شما نسخه‌ای از خود بسازید که بی‌نظیر است. کتاب «ریاضیات جامع تجربی آی‌کیو» از انتشارات گاج، طراحی شده تا شما را مجهز به تمامی ابزارهایی کند که برای پیمودن این مسیر نیاز دارید؛ مسیری که به سوی رؤیاهای شما منتهی می‌شود. در این کتاب، هر مسئله‌ای می‌تواند فرصتی باشد برای اثبات توانایی‌های شما. تست‌های هدفمند و متنوع، مهارت‌های شما را می‌سازند و تقویت می‌کنند، و پاسخ‌نامه‌های تشریحی، نه تنها پاسخ می‌دهند، بلکه به شما استراتژی و اعتماد به نفس می‌بخشند. یادتان باشد که هیچ چالشی غیرقابل عبور نیست، و هر تلاش شما یک گام به سوی موفقیت است. با بررسی هر تست، شما به خودتان ثابت می‌کنید که می‌توانید؛ که این مسیر، مسیری است که تنها برای شما طراحی شده و هیچ چیزی نمی‌تواند مانع شما شود. ایمان داشته باشید به خودتان. شما قهرمان داستان خود هستید و این کتاب، همراهی است که در کنار شما خواهد بود تا شما را به بالاترین ارتفاع‌ها هدایت کند.

سطح‌بندی تست‌ها

برای اینکه بتوانی به بهترین شکل ممکن از این کتاب استفاده کنی، اول باید بدونی که تست‌های این کتاب رو به ترتیب سطح‌بندی اون‌ها پاسخ بدی. پس اول توضیحات کاملی راجع به سطح‌بندی تست‌ها براتون انجام میدیم:

تست‌های جنجالی



این تست‌ها برای دانش‌آموزانی هست که به فکر درصد بالای ۸۰ بوده و بسیار سخت‌کوش و علاقه‌مند به تست‌های بسیار چالشی هستن. پس این تست‌ها به هیچ عنوان برای همه دانش‌آموزان مناسب نیست. تست‌های TNT بسیار سخت، بسیار چالشی و بسیار پرمحاسبه و خلاقانه بوده و در سال‌های اخیر یک یا دو تست کنکور از این سطح تست‌ها می‌باشد. سؤالات بسیار سخت کنکورهای اخیر باعث شد این سطح‌بندی رو براتون انجام بدیم تا رتبه‌های برتر کنکور هم با دیدن این کتاب لذت ببرن.

تست‌های چالشی



بعد از اینکه روی تست‌های آبی و قرمز کامل مسلط شدی، و میخوای بیشتر تلاش کنی و درصد بالاتری به دست بیاری، میتونی سراغ تست‌های IQ+ بری. این تست‌ها سخت، چالشی، ترکیبی و پرمحاسبه بوده و شما رو برای موفقیت در تست‌های سخت کنکور سراسری آماده میکنه. **دقت کنید!** تست‌های سخت و چالشی کنکورهای سراسری سال‌های قبل هم، جزء این تست‌ها هستن.

تست‌های قرمز

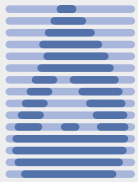


تست‌هایی که با رنگ قرمز مشخص شده، تست‌های سطح بالاتر، ترکیبی و با محاسبات بیشتر بوده که برای تسلط بر زوایای مختلف مباحث برای تو طراحی شده‌اند. بعد از حل تست‌های آبی، تست‌های قرمز رو حل کن و خودت رو بیشتر به چالش بکش.

تست‌های آبی



در ابتدا باید تست‌هایی که با رنگ آبی مشخص شده رو جواب بدی. به زبان دیگه، حل تست‌های آبی در گام اول برای هر دانش‌آموزی واجبیه. تست‌های آبی، تست‌های مفهومی با محاسبات ساده هستن که اعتماد به نفس تو رو در ابتدا بالا میبرن.



دام‌تستی

طراح‌های کنکور برای اینکه بفهمن روی مباحث مسلطی یا نه، میان در صورت سوال‌ها از عبارت‌هایی استفاده میکنند که تو حتی بعد از حل سوال، گزینه غلط رو جواب بدی. در برخی موارد هم گزینه‌ها رو به گونه‌ای قرار میدن که تو رو به اشتباه بندازن! این موارد رو با آیکون دام‌تستی براتون مشخص کردیم که روی همه جنبه‌های پنهان سوال‌ها هم مسلط بشی و روز کنکور، اشتباه نکنی.



عروش سریوتر

در حل برخی از سوال‌ها، در کنار روش‌های تشریحی و تستی، میتونی از عروش سریوتر سوال رو حل کنی. پس سعی کردیم به‌روزترین و خاص‌ترین روش‌های میانبُر و سریع‌تر در حل سوال‌ها رو برات بیان کنیم تا پاسخنامه این کتاب، نسبت به کتاب‌های مشابه، متفاوت باشه و جامع‌ترین و کامل‌ترین پاسخنامه رو ببینی.



یه جوهره دیگه!
طراح‌های کنکور سراسری، خواسته‌های سوال رو کمی عوض میکنند و در کنکورهای جدید ازش استفاده میکنند! پس در پاسخنامه کتاب، هر وقت آیکون رو دیدی، بدون میخوایم تو رو با تمام ایده‌ها و زوایای مختلف اون سوال آشنا کنیم.



درسنامه‌های کاربردی
درسنامه‌ها و نکات مهم رو برات در پاسخنامه کتاب هایلایت کردیم. در درسنامه‌ها از بیان نکات بیهوده و اضافی پرهیز شده تا خوندن اون‌ها کاربردی‌تر بشه. دیدن جداول و کادر بندی‌های به جا، خوندن درسنامه‌ها رو برات لذت‌بخش میکنه.



تا جای ممکن، سعی کردیم فصل‌ها رو به مباحث کوچکی تقسیم بکنیم، تا بتونی با دیدن هر تست، به زوایای مختلف و تیپ‌بندی در هر مبحث پی ببری. قبل شروع هر تیپ تست، برای اینکه بدونی قراره با چه مدل تستی روبه‌رو بشی، بهت سرنخ دادیم. اینجوری در هر آزمون، سرنخ هر تست رو به راحتی توی ذهنت پیدا میکنی.

تشکر و قدردانی:

- از مدیرمسئول انتشارات گاج، جناب آقای محمّد جوکار، به پاس همراهی خالصانه و اعتماد بی‌دریغ در مسیر تدوین این مجموعه، صمیمانه سپاسگزارم
- از **اساتید عزیز، جناب آقایان:** معین کرمی، مجید رفعتی، آرش عمید، علی مقدم‌نیا، محمد مصطفی ابراهیمی، عزیزالله علی اصغری، امید شیرین‌زاد. به پاس تخصص علمی، دقت‌نظر و پشتیبانی‌های مؤثر و سازنده‌شان در روند تألیف و ارتقاء محتوای این کتاب، صمیمانه قدردانی و تشکر می‌کنم.
- همچنین، از استاد ارجمند جناب آقای افشین ملاک‌پور، بابت دیدگاه‌های سازنده و کلیدی، قدردانی ویژه دارم.

به امید موفقیت‌های بزرگت ...

سجاد عظمتی

sajad.azemati

معادله و تابع درجه دوم

درس اول: معادله درجه دوم

۱۵	مجموع ریشه‌ها، حاصل ضرب ریشه‌ها و ...
۱۶	علامت ریشه‌ها
۱۷	نوشتن معادله درجه دوم
۱۸	معادلات قابل تبدیل به درجه دوم

درس دوم: سهمی و ویژگی‌های آن

۱۹	ویژگی‌های سهمی
۲۰	بررسی سهمی
۲۱	نوشتن معادله سهمی
۲۲	وضعیت سهمی و خط یا وضعیت دو سهمی نسبت به هم
۲۳	گذر از نواحی

پاسخ‌نامه تشریحی ۴۳۲

معادله و نامعادله

درس اول: معادلات گویا و معادلات رادیکالی

۲۴	معادلات گویا
۲۵	مسائل کاربردی معادلات گویا و مستطیل طلایی
۲۶	معادلات گنگ

درس دوم: نامعادلات و تعیین علامت

۲۷	تعیین علامت
۲۸	حل نامعادله
۲۹	وضعیت دو منحنی

پاسخ‌نامه تشریحی ۴۵۷

قدرمطلق و براکت

درس اول: قدرمطلق

۳۰	تعریف و ویژگی‌های قدرمطلق
۳۱	معادلات قدرمطلق
۳۲	نامعادلات قدرمطلق
۳۳	نمودارهای قدرمطلق

درس دوم: جزء صحیح

۳۴	تعریف و ویژگی‌ها
۳۵	معادله و نامعادله شامل جزء صحیح
۳۶	نمودار توابع شامل جزء صحیح

پاسخ‌نامه تشریحی ۴۷۲

تابع

درس اول: مفاهیم تابع

۱	شناسایی تابع
۲	مقدار تابع
۳	دامنه و برد تابع
۴	تساوی دو تابع

درس دوم: انتقال و تبدیل نمودار تابع

۵	انتقال و قرینه‌یابی
۶	انبساط و انقباض نمودار

درس سوم: انواع تابع

درس چهارم: توابع صعودی و نزولی

درس پنجم: اعمال جبری روی توابع و ترکیب توابع

۷	مقداردهی به ترکیب توابع
۸	ضابطه ترکیب توابع
۹	دامنه و بُرد ترکیب توابع
۱۰	وضعیت صعودی و نزولی توابع مرکب

درس ششم: تابع یک‌به‌یک و تابع وارون

۱۱	تابع وارون
۱۲	محاسبه ضابطه تابع وارون
۱۳	برخورد f و f^{-1} و برخورد f^{-1} و g
۱۴	ترکیب تابع f و f^{-1} و ترکیب تابع f^{-1} و g

پاسخ‌نامه تشریحی ۳۷۲

حد و پیوستگی

۱۴۸

درس اول: تقسیم چند جمله‌ای‌ها و ...

درس دوم: مفاهیم اولیه و محاسبه حد توابع

۱۵۰	۶۴ همسایگی
۱۵۱	۶۵ فرآیندهای حدی
۱۵۴	۶۶ قضایای حد
۱۵۶	۶۷ ابهام $\frac{0}{0}$

درس سوم: حد بی‌نهایت و حد در بی‌نهایت

۱۶۳	۶۸ حد بی‌نهایت
۱۶۸	۶۹ حد در بی‌نهایت

درس چهارم: مفهوم پیوستگی

۱۷۴	۷۰ مفهوم پیوستگی
۱۷۸	۷۱ نقطه مرزی خاص
۱۷۹	۷۲ پیوستگی در بازه

۵۶۶

پاسخ‌نامه تشریحی

تابع نمایی و لگاریتمی

درس اول: تابع نمایی و ویژگی‌های آن

۹۰	۳۷ تابع نمایی
۹۰	۳۸ معادلات و نامعادلات تابع نمایی
۹۲	۳۹ نمودارهای توابع نمایی

درس دوم: تابع لگاریتمی و ویژگی‌های آن

۹۶	۴۰ مفهوم لگاریتم
۹۷	۴۱ قوانین لگاریتم
۱۰۱	۴۲ دامنه توابع لگاریتمی
۱۰۲	۴۳ نمودار تابع لگاریتمی
۱۰۴	۴۴ معادلات لگاریتمی
۱۰۶	۴۵ نامعادله لگاریتمی
۱۰۷	۴۶ حل معادلات نمایی به کمک لگاریتم
۱۰۷	۴۷ ضابطه وارون تابع نمایی و لگاریتمی
۱۰۷	۴۸ کاربرد توابع نمایی و لگاریتمی
۱۰۸	۴۹ ترکیبی‌های لگاریتم

۴۸۷

پاسخ‌نامه تشریحی

مشتق

۱۸۲

درس اول: مفهوم هندسی مشتق و ...

درس دوم: تابع مشتق و قوانین محاسبه مشتق

۱۸۵	۷۳ قواعد مشتق‌گیری
۱۸۹	۷۴ تکنیک‌های مشتق‌گیری
۱۹۰	۷۵ مشتق تابع مرکب
۱۹۳	۷۶ مشتق مرتبه دوم
۱۹۴	۷۷ تعریف مشتق با ظاهری متفاوت!
۱۹۵	۷۸ معادله خط مماس

درس سوم: مشتق چپ و راست و مشتق‌پذیری

۱۹۹	۷۹ مشتق توابع چند ضابطه‌ای
۲۰۱	۸۰ مشتق توابع شامل قدرمطلق و جزء صحیح
۲۰۲	۸۱ نقاط مشتق ناپذیر، دامنه تابع مشتق و مشتق‌پذیری ...
۲۰۵	۸۲ نمودار تابع مشتق

۲۰۸

درس چهارم: آهنگ تغییر

۶۱۲

پاسخ‌نامه تشریحی

مثلثات

درس اول: مقدمات و مفاهیم اولیه مثلثات

۱۱۰	۵۰ درجه و رادیان
۱۱۲	۵۱ نسبت‌های مثلثاتی مهم
۱۱۶	۵۲ دایره مثلثاتی
۱۱۸	۵۳ شیب خط و تانژانت

درس دوم: اتحادها و روابط مثلثاتی

۱۱۹	۵۴ روابط مثلثاتی مقدماتی
۱۲۱	۵۵ زاویه‌های متمم و مکمل
۱۲۱	۵۶ زاویه‌های ترکیبی $(\dots, \frac{\pi}{4} \pm \alpha, \pi \pm \alpha, \dots)$
۱۲۴	۵۷ روابط 2α
۱۲۸	۵۸ رابطه طلایی
۱۲۹	۵۹ کاربردها و نتایج روابط 2α

درس سوم: توابع متناوب و نمودار ...

۱۴۰	۶۰ تابع $y = \tan x$
-----	----------------------

درس چهارم: معادلات مثلثاتی

۱۴۳	۶۱ حل معادلات مثلثاتی با کمک روابط 2α
۱۴۵	۶۲ معادلات مثلثاتی کسری
۱۴۶	۶۳ مسائل ترکیبی و خواسته‌های خاص

۵۱۳

پاسخ‌نامه تشریحی

توان گویا و عبارت جبری

درس اول: توان گویا و عبارت جبری

۲۵۰	۹۸ ریشه و توان
۲۵۱	۹۹ مقایسه مقادیر تقریبی ریشه n ام
۲۵۱	۱۰۰ اعداد با توان گویا
۲۵۲	۱۰۱ قوانین رادیکال‌ها

درس دوم: عبارت‌های جبری

۲۵۵	۱۰۲ اتحادها
۲۵۸	۱۰۳ ساده کردن عبارات رادیکالی
۲۶۰	۱۰۴ گویا کردن

پاسخ‌نامه تشریحی ۷۱۱

کاربرد مشتق

درس اول: نقاط بحرانی و اکسترم‌های تابع

۲۱۲	۸۳ ارتباط یکنوایی تابع با مشتق آن
۲۱۵	۸۴ نقاط بحرانی
۲۱۶	۸۵ اکسترم‌های نسبی تابع
۲۲۱	۸۶ اکسترم‌های مطلق

درس دوم: بهینه‌سازی

۲۳۰	۸۷ مسائل ترکیبی بهینه‌سازی
-----	----------------------------

پاسخ‌نامه تشریحی ۶۵۴

هندسه پایه

درس اول: ترسیم هندسی

۲۶۵	۱۰۵ عمودمنصف و خواص آن
۲۶۵	۱۰۶ رسم مثلث
۲۶۶	۱۰۷ نیمساز و خواص آن
۲۶۷	۱۰۸ استدلال

درس دوم: استدلال و قضیه تالس

۲۶۹	۱۰۹ قضیه تالس و تعمیم آن
۲۷۱	۱۱۰ مسائل کاربردی
۲۷۱	۱۱۱ تالس در دوزنقه
۲۷۳	۱۱۲ مسائل ترکیبی تالس
۲۷۶	۱۱۳ مساحت و ارتباط آن با تالس
۲۷۷	۱۱۴ رسم خط اضافه در مسائل تالس

درس سوم: تشابه مثلث‌ها

۲۷۹	۱۱۵ تشابه دو مثلث جدا از هم
۲۸۲	۱۱۶ تشابه دو مثلث تودرتو
۲۸۵	۱۱۷ تشابه و مساحت
۲۸۷	۱۱۸ روابط طولی در مثلث قائم الزاویه

پاسخ‌نامه تشریحی ۷۲۸

مجموعه، الگو و دنباله

درس اول: مجموعه‌های متناهی و نامتناهی

۲۳۲	۸۸ مجموعه‌های اعداد
۲۳۲	۸۹ بازه‌ها
۲۳۴	۹۰ مجموعه‌های متناهی و نامتناهی
۲۳۴	۹۱ متمم یک مجموعه و مجموعه مرجع
۲۳۵	۹۲ قوانین مجموعه‌ها
۲۳۷	۹۳ محاسبه تعداد اعضای مجموعه‌ها

درس دوم: الگو و دنباله

۲۳۹	۹۴ دنباله خطی و درجه ۲
۲۴۱	۹۵ چند دنباله خاص (دنباله بازگشتی، فیبوناچی و ...)

درس سوم: دنباله‌های حسابی و هندسی

۲۴۳	۹۶ دنباله حسابی
۲۴۶	۹۷ دنباله هندسی

پاسخ‌نامه تشریحی ۶۸۷

شمارش بدون شمردن



درس اول: اصول شمارش

۱۴۳	اصل ضرب و اصل جمع	۳۳۶
۱۴۴	اصول عددنویسی	۳۳۷

درس دوم: فاکتوریل و جایگشت

۳۳۹

درس سوم: ترکیب و ترتیب

۱۴۵	تعداد زیرمجموعه‌ها و یک اتحاد مهم	۳۴۵
۱۴۶	مسائل هندسی	۳۴۶
۱۴۷	مسائل ترکیبی انتخاب و جایگشت	۳۴۷

پاسخ‌نامه تشریحی

۸۱۵

احتمال



درس اول: آزمایش تصادفی، فضای نمونه ...

۳۵۰

درس دوم: احتمال رخداد یک پیشامد

۱۴۸	محاسبه احتمال در پرتاب تاس	۳۵۳
۱۴۹	محاسبه احتمال مسائل سکه و فرزند	۳۵۵
۱۵۰	کیسه و مهره	۳۵۵
۱۵۱	احتمال و شمارش	۳۵۶
۱۵۲	قوانین احتمال	۳۵۸

درس سوم: احتمال شرطی و پیشامدهای مستقل

۱۵۳	انواع مسائل احتمال شرطی	۳۶۰
۱۵۴	فرمول احتمال شرطی	۳۶۳
۱۵۵	دو پیشامد مستقل	۳۶۴

درس چهارم: احتمال کل

۳۶۷

پاسخ‌نامه تشریحی

۸۳۰



کنکور تیرماه ۱۴۰۴

هندسه تحلیلی



درس اول: هندسه مختصاتی (تحلیلی)

۱۱۹	معادله خط	۲۹۲
۱۲۰	فاصله دو نقطه	۲۹۴
۱۲۱	فاصله نقطه از خط	۲۹۸
۱۲۲	فاصله دو خط موازی	۳۰۰

درس دوم: دوران و برش

۱۲۳	دوران	۳۰۲
۱۲۴	برش	۳۰۵
۱۲۵	مسائل ترکیبی دوران و برش	۳۰۶
۱۲۶	مقاطع مخروطی	۳۰۷

درس سوم: بیضی

۱۲۷	ویژگی‌های بیضی	۳۰۸
۱۲۸	مختصات نقاط مهم	۳۰۹
۱۲۹	خروج از مرکز بیضی	۳۱۰

درس چهارم: دایره

۱۳۰	شناخت دایره و ویژگی‌های آن	۳۱۲
۱۳۱	شرط دایره بودن	۳۱۳
۱۳۲	معادله دایره در حالت‌های مختلف	۳۱۳
۱۳۳	وضعیت نقطه نسبت به دایره	۳۱۶
۱۳۴	وضعیت خط و دایره	۳۱۷
۱۳۵	وضعیت نسبی دو دایره	۳۱۸

پاسخ‌نامه تشریحی

۷۵۶

آمار



درس اول: مقدمه‌ای بر علم آمار، متغیر و انواع آن

۱۳۶	علم آمار	۳۲۲
۱۳۷	متغیر و انواع آن	۳۲۳

درس دوم: معیارهای گرایش به مرکز

۱۳۸	میانگین (مرکز ثقل داده‌ها)	۳۲۴
۱۳۹	میان و چارک‌ها	۳۲۶

درس سوم: معیارهای پراکندگی

۱۴۰	دامنه تغییرات	۳۲۹
۱۴۱	واریانس و انحراف معیار	۳۲۹
۱۴۲	ضریب تغییرات	۳۳۲

پاسخ‌نامه تشریحی

۷۹۷

. فصل اول .

رياضيات تجريبى جامع

تابع

iq

Chapter One
Function



Pythagoras

فصل اول

 درس سوم:
انواع تابع

۱

CHAPTER 1

سریخ اول از همه، بریم تابع خطی رو بررسی کنیم. در این درس اطلاعات سال نهم، شامل نوشتن معادله خط، محاسبه شیب و ... خیلی به کارمون میاد.

۱۳۹ اگر $f(x)$ تابع خطی گذرنده از نقطه $(1, 1)$ و $f(-2) = 7$ باشد، مقدار اختلاف شیب و عرض از مبدأ تابع $f(x)$ کدام است؟ (برگرفته از کتاب درسی)

- ۲ (۱) ☐ ۳ (۲) ☐ ۴ (۳) ☐ ۵ (۴) ☐

۱۴۰ اگر $f = \{(1, m-1), (2, 0), (-3, m+3), (2m, -2)\}$ تابعی خطی باشد، m کدام است؟

- ۱ (۱) ☐ ۲ (۲) ☐ ۳ (۳) ☐ ۴ (۴) ☐

۱۴۱ در یک تابع خطی، دامنه $[1, 3]$ و برد $[-4, -10]$ است، مقدار تابع در $x = \frac{4}{3}$ کدام می‌تواند باشد؟

- ۸ (۱) ☐ -۹ (۲) ☐ -۶ (۳) ☐ -۵ (۴) ☐

۱۴۲ اگر f تابعی خطی باشد، $3x - 3 = f(x) + f(2x) + 3$ باشد $f(f(0))$ کدام است؟

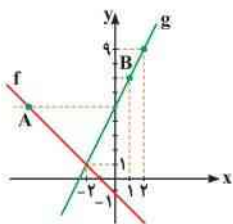
- ۶ (۱) ☐ -۱۲ (۲) ☐ -۱۵ (۳) ☐ -۱۸ (۴) ☐

۱۴۳ اگر $f(x) = (a-2)x^2 + 2ax + \frac{5}{a+1}$ تابعی خطی باشد حاصل $f(1) + f(-2)$ کدام است؟

- $-\frac{5}{3}$ (۱) ☐ $\frac{2}{3}$ (۲) ☐ $-\frac{2}{3}$ (۳) ☐ $\frac{7}{3}$ (۴) ☐

۱۴۴ تابع f و g ، توابع خطی هستند، فاصله نقاط A و B از هم کدام است؟

- $\sqrt{26}$ (۱) ☐ $\sqrt{53}$ (۲) ☐ $\sqrt{29}$ (۳) ☐ $\sqrt{28}$ (۴) ☐



۱۴۵ در تابع خطی f با شیب مثبت، اگر $f(f(x) + 3) = x + 5$ باشد، مقدار $f(6)$ کدام است؟

- ۷ (۱) ☐ ۸ (۲) ☐ ۹ (۳) ☐ ۱۰ (۴) ☐

سریخ در این بخش دو نوع تابع خطی خاص رو بررسی می‌کنیم، خط افقی که بهش می‌گیم تابع ثابت و خط نیمساز ربع اول و سوم که بهش می‌گیم تابع همانی.

۱۴۶ اگر $f(x) = (m+2)x^2 + (n-3)x + mn$ تابعی ثابت باشد، حاصل $f(1/75)$ کدام است؟

- ۲ (۱) ☐ ۶ (۲) ☐ -۲ (۳) ☐ -۶ (۴) ☐

۱۴۷ اگر $f = \{(1, a+b), (\Delta, a+2b), (b, 1-a)\}$ تابعی همانی باشد $f(\sqrt{b^2 + a^2})$ کدام است؟

- ۱ (۱) ☐ ۴ (۲) ☐ ۵ (۳) ☐ ۶ (۴) ☐

۱۴۸ اگر f تابعی همانی و g تابعی ثابت و $f(2) = f(5)g(5) - f(3)g(3) + f(6)g(6)$ باشد، $f(g(6) + 1)$ کدام می‌تواند باشد؟

- $\frac{3}{2}$ (۱) ☐ $\frac{5}{2}$ (۲) ☐ $\frac{1}{2}$ (۳) ☐ $\frac{7}{2}$ (۴) ☐

۱۴۹ دو تابع $f(x) = b - 3ax$ و $g(x) = c - (3b - 3)x$ ثابت هستند. اگر $f + g = 5$ باشد، حاصل bc چقدر است؟ (تجربی ۱۴۰۱)

☐ ۱) ۶-
☐ ۲) ۴-
☐ ۳) ۴
☐ ۴) ۶

۱۵۰ اگر $f(x) = (ax + 2)(b - x) - 7x^2$ ضابطه یک تابع ثابت باشد، برد تابع f کدام است؟ (تجربی خارج ۱۴۰۱)

☐ ۱) $[-\frac{2}{7}, \frac{2}{7}]$
☐ ۲) $[\frac{2}{7}, \frac{2}{7}]$
☐ ۳) $[-\frac{4}{7}, \frac{4}{7}]$
☐ ۴) $[\frac{4}{7}, \frac{4}{7}]$

۱۵۱ اگر تابع $f(x) = (a - b)x^2 + (b - 2)x - c + b^2$ دارای برد تک عضو $\{1 + 2c\}$ و دامنه $[-1, 4]$ باشد، مساحت سطح زیر نمودار در این دامنه کدام است؟

☐ ۱) ۵
☐ ۲) ۱۵
☐ ۳) ۱۰
☐ ۴) ۲۵

سرنگ حالا که انواع مختلف تابع خطی رو بررسی کردیم به نگاهی به توابع چندجمله‌ای داشته باشیم.

۱۵۲ درجهٔ کدام یک از توابع چندجمله‌ای زیر با سایر گزینه‌ها متفاوت است؟

☐ ۱) $f(x) = x(x - 2)^2 + (x^3 - 1)(x + 2)$
☐ ۲) $f(x) = (x - 1)(x - 2)(x - 3)$
☐ ۳) $f(x) = ((2x + 7)(x - 3))^2 + 3x^2 + x$
☐ ۴) $f(x) = (x^3 + 8)(2) + (x - 1)(x + 2)x$

۱۵۳ تابع چندجمله‌ای f با ضابطه $f(x) = x^3 + x^{\frac{2n+3}{n}} - 2x^{n-3} + 1 + n$ را در نظر بگیرید، مقدار $f(3)$ کدام است؟

☐ ۱) ۲۷
☐ ۲) ۵۴
☐ ۳) ۲۹
☐ ۴) ۵۶

سرنگ در کتاب ریاضی ۳، بحث تابع درجه سوم به طور جداگانه باز شده، این قسمت درس به همین تابع اختصاص داده، رسم این تابع خیلی مهمه.

۱۵۴ نمودار تابع $f(x) = -(x - 2)^3 + 1$ کدام است؟

☐ ۱)
☐ ۲)
☐ ۳)
☐ ۴)

۱۵۵ نمودار تابع $y = x^3 - 3x^2 + 3x + 1$ از کدام ناحیه مختصات نمی‌گذرد؟

☐ ۱) اول
☐ ۲) دوم
☐ ۳) سوم
☐ ۴) چهارم

۱۵۶ نمودار تابع $y = -(x - a)^3 + b$ به صورت مقابل است. نمودار تابع $y = -bx^3 + a$ کدام است؟

☐ ۱)
☐ ۲)
☐ ۳)
☐ ۴)

۱۵۷ اگر نمودار تابع $y = m(x - n)^3 + P$ به صورت مقابل باشد، مقدار $\frac{mP}{n}$ کدام است؟

☐ ۱) $5/0$
☐ ۲) $-5/0$
☐ ۳) ۲
☐ ۴) ۲-

۱۵۸ نمودار تابع $y = x^3$ را a واحد در راستای محور x ها به سمت چپ و b واحد در راستای محور y ها به بالا منتقل می‌کنیم تا بر نمودار تابع

$y = (x^2 + 3)(x + 3) - 7$ منطبق شود. مقدار $a + b$ کدام است؟

- ۱ (۱) ☐ ۲ (۲) ☐ ۳ (۳) ☐ ۴ (۴) ☐

۱۵۹ به ترتیب با کدام انتقال‌ها، می‌توان نمودار $y = x^3 - 3x^2 + 3x$ را به روی نمودار $y = x^3$ منطبق کرد؟

۱ (۱) واحد به سمت راست و ۱ واحد به سمت پایین ☐

۱ (۲) واحد به سمت راست و ۱ واحد به سمت بالا ☐

۱ (۳) واحد به سمت چپ و ۱ واحد به سمت بالا ☐

۱ (۴) واحد به سمت چپ و ۱ واحد به سمت پایین ☐

۱۶۰ به ازای کدام مقادیر m ، نمودار تابع $f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x - m$ از ناحیه چهارم عبور نمی‌کند؟

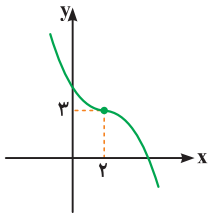
- ۱ (۱) $(-\infty, 0]$ ☐ ۲ (۲) $(0, 8]$ ☐ ۳ (۳) $(0, +\infty)$ ☐ ۴ (۴) $[-8, 0]$ ☐

۱۶۱ نمودار تابع $y = x^3 - 6x^2 + 12x - m$ را ابتدا ۲ واحد به سمت چپ منتقل می‌کنیم و سپس آن را ۲ واحد به بالا منتقل می‌کنیم تا به روی

نمودار تابع $y = x^3 + 2$ منطبق شود. مقدار m کدام است؟

- ۱ (۱) ☐ ۸ (۲) ☐ ۶ (۳) ☐ -۴ (۴) ☐

۱۶۲ *iq* دو تابع $f(x) = ax + b$ و $g(x) = x^2 - 6x + c$ را در نظر بگیرید. اگر نمودار تابع $y = f(x) - xg(x)$ به صورت زیر باشد، مقدار $a + b - c$ کدام است؟



۱ (۱) ☐

-۱ (۲) ☐

۲ (۳) ☐

-۲ (۴) ☐

۱۶۳ *iq* نمودار تابع $f(x) = x^2|x| + x^3 + 2$ و $g(x) = 3 - |x|$ در چند نقطه متقاطع‌اند؟

- ۱ (۱) ☐ ۲ (۲) ☐ ۳ (۳) ☐ ۴ (۴) ☐

۱۶۴ *iq* معادله $x^3 + |x - 2| = 2$ چند جواب دارد؟

- ۱ (۱) ☐ ۲ (۲) ☐ ۳ (۳) ☐ ۴ (۴) ☐

۱۶۵ *iq* نمودار تابع $f(x) = (x^2 + 3)(x - 3)$ را ۷ واحد در راستای قائم به بالا منتقل می‌کنیم و آن را $g(x)$ می‌نامیم. نمودار تابع $y = g(|x|)$ در

کدام بازه زیر محور x قرار دارد؟

- ۱ (۱) $(-\infty, 2)$ ☐ ۲ (۲) $(0, 4)$ ☐ ۳ (۳) $(-2, 2)$ ☐ ۴ (۴) $(-2, +\infty)$ ☐

۱۶۶ *iq* در کتاب درسی، نمودار دو تابع $y = x^2$ و $y = x^3$ با همدیگر مقایسه شدن. تست‌های زیر مربوط به مقایسه این دو نمودار است.

۱۶۶ در کدام بازه‌ها، نمودار تابع $y = -x^3$ بالاتر از نمودار تابع $y = x^2$ قرار می‌گیرد؟

- ۱ (۱) $(0, 1)$ ☐ ۲ (۲) $(-\infty, -1)$ ☐ ۳ (۳) $(-\infty, 1)$ ☐ ۴ (۴) $(0, +\infty)$ ☐

۱۶۷ در کدام بازه، نمودار تابع $y = |x^3|$ پایین‌تر از نمودار تابع $y = x^2$ قرار دارد؟

- ۱ (۱) $(1, +\infty)$ ☐ ۲ (۲) $(0, 1) \cup (-1, 0)$ ☐ ۳ (۳) $\mathbb{R} - [-1, 1]$ ☐ ۴ (۴) $\mathbb{R} - [0, 1]$ ☐

۱۶۸ در کدام بازه، نمودار تابع $f(x) = x^2 + 4x + 4$ پایین‌تر از نمودار تابع $g(x) = x^3 + 6x^2 + 12x + 8$ قرار دارد؟

- ۱ (۱) $(-2, -1)$ ☐ ۲ (۲) $(-1, +\infty)$ ☐ ۳ (۳) $(-\infty, -2)$ ☐ ۴ (۴) $(-2, +\infty)$ ☐

۱۶۹ نمودار دو تابع $y = x^3$ و $y = x|x|$ در چند نقطه با هم برخورد می‌کنند؟

- ۱ (۱) ☐ ۲ (۲) ☐ ۳ (۳) ☐ ۴ (۴) بی‌شمار ☐

سرنخ نوبت میرسه به بررسی تابع گویا، در این بخش روی دامنه، برد و رسم این تابع تمرکز می‌کنیم.

۱۷۰ چه تعداد از توابع زیر، تابعی گویا هستند؟

پ) $y = \frac{x\sqrt{x} + 3}{3x + 1}$

ب) $y = \frac{|x+2|}{x-3}$

الف) $y = \frac{5x}{x^2 - 1}$

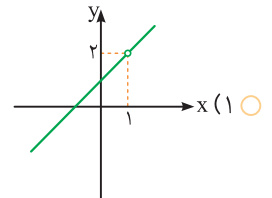
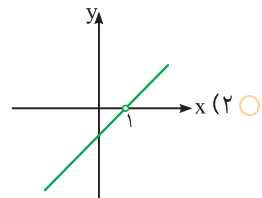
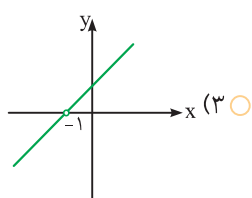
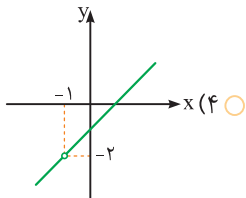
○ (۴) صفر

○ (۳) ۳

○ (۲) ۲

○ (۱) ۱

۱۷۱ نمودار تابع $y = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$ کدام است؟



۱۷۲ اگر تابع $f(x) = \frac{k\sqrt{x} + x^2}{x - 2}$ یک تابع گویا باشد، $f(f(1) + 4)$ کدام است؟

○ (۴) -۹

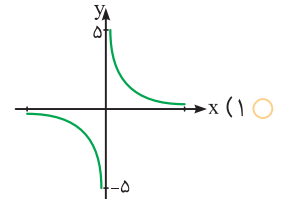
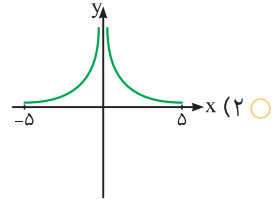
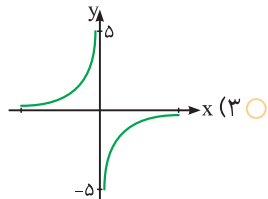
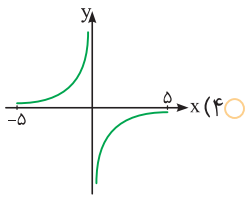
○ (۳) ۹

○ (۲) -۱

○ (۱) ۱

(برگرفته از کتاب درسی)

۱۷۳ نمودار تابع با ضابطه $f(x) = \frac{-1}{x}$ در دامنه $D_f = [-5, 5] - \{0\}$ کدام است؟



۱۷۴ برد تابع با ضابطه $f(x) = \frac{1}{x}$ در بازه $\{0\} - [-3, 3]$ کدام است؟

○ (۲) $\mathbb{R} - (-\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$

○ (۱) $[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}]$

○ (۴) $[-3, 3]$

○ (۳) $\mathbb{R} - [-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}]$

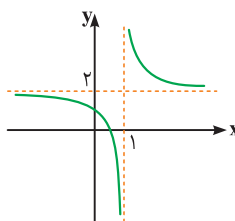
۱۷۵ نمودار تابع $f(x) = \frac{2x - 3}{x - 1}$ از کدام ناحیه مختصات نمی‌گذرد؟

○ (۴) چهارم

○ (۳) سوم

○ (۲) دوم

○ (۱) اول



۱۷۶ نمودار تابع $f(x) = \frac{mx - 1}{x - n}$ به صورت مقابل است، mn کدام است؟

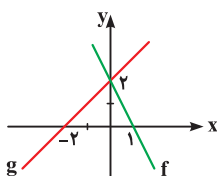
○ (۱) ۱

○ (۲) ۲

○ (۳) ۳

○ (۴) ۴

۱۷۷ نمودار دو تابع خطی f و g به صورت مقابل است. نمودار تابع $y = \frac{f(x) + 3x}{1 - g(x)}$ از کدام ناحیه دستگاه مختصات نمی‌گذرد؟



○ (۱) اول

○ (۲) دوم

○ (۳) سوم

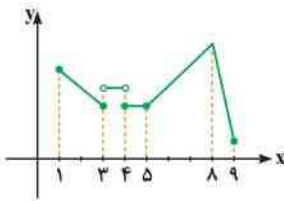
○ (۴) چهارم

فصل اول

 درس چهارم:
توابع صعودی و نزولی

۱

CHAPTER 1



مسرخی اولین بخش این درس به شناسایی توابع صعودی و نزولی اختصاص داده.

 ۱۷۸ در نمودار تابع $f(x)$ به صورت مقابل بازه $[a, b]$ و $[c, d]$ به ترتیب بزرگ‌ترین بازه صعودی و بزرگ‌ترین بازه نزولی هستند. $a+d$ کدام است؟ ($a, b, c, d \in \mathbb{Z}$)

- ☐ ۱۲ (۱) ☐ ۱۵ (۲)
☐ ۷ (۳) ☐ ۱۱ (۴)

 ۱۷۹ تابع $f(x) = 2x^2 - 8x - 3$ را در نظر بگیرید، در کدام بازه زیر برای هر $x_1, x_2 \in D_f$ که $x_2 > x_1$ ، آنگاه $f(x_2) < f(x_1)$ برقرار است؟

- ☐ (۱) $[1, 3]$ ☐ (۲) $[1, 2]$ ☐ (۳) $[2, 3]$ ☐ (۴) $[-3, 3]$

 ۱۸۰ به ازای چند مقدار صحیح m تابع $f = \{(0, m^2 - 1), (-2, 1), (1, |m| - 2)\}$ نزولی است؟

- ☐ ۱ (۱) ☐ ۲ (۲) ☐ ۳ (۳) ☐ ۴ (۴)

 ۱۸۱ تابع $f = \{(1, a), (3, 10), (2, a^2 - 2a + 2)\}$ یک تابع اکیداً صعودی باشد، چند مقدار صحیح برای a وجود دارد؟

- ☐ ۳ (۱) ☐ ۲ (۲) ☐ ۴ (۳) ☐ ۴ (۴)

 ۱۸۲ تابع f با ضابطه $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} + 1 & ; x \geq 0 \\ \frac{1}{x} & ; x < 0 \end{cases}$ بر روی مجموعه اعداد حقیقی چگونه است؟

- ☐ (۱) یک به یک - نزولی ☐ (۲) یک به یک - صعودی ☐ (۳) یک به یک - غیریکنوا ☐ (۴) غیریک به یک - غیریکنوا

 ۱۸۳ تابع با ضابطه $f(x) = |x+2| + |x-1|$ در کدام بازه، اکیداً نزولی است؟

- ☐ (۱) $(-\infty, -2)$ ☐ (۲) $(1, +\infty)$ ☐ (۳) $(-2, 1)$ ☐ (۴) $(-\infty, 1)$

 ۱۸۴ تابع $f(x) = x + 1 + |x - 1|$ در بازه $[a, +\infty)$ اکیداً صعودی است. کم‌ترین مقدار a کدام است؟

- ☐ -۱ (۱) ☐ ۲ (۲) ☐ ۱ (۳) ☐ ۲ (۴)

(تجربی نوبت اول ۱۴۰۳)

 ۱۸۵ تابع $y = (x-1)|x|$ در بازه (a, b) اکیداً نزولی است. مقدار $a+b$ کدام است؟

- ☐ $\frac{1}{4}$ (۱) ☐ $\frac{1}{2}$ (۲) ☐ $\frac{3}{4}$ (۳) ☐ $\frac{3}{4}$ (۴)

 ۱۸۶ کدام گزینه در مورد تابع با ضابطه $f(x) = x\left(|x| + \frac{1}{x}\right)$ صحیح است؟

- ☐ (۱) همواره نزولی ☐ (۲) همواره صعودی ☐ (۳) ابتدا صعودی، سپس نزولی ☐ (۴) ابتدا نزولی، سپس صعودی

 ۱۸۷ تابع با ضابطه $f(x) = |x^2 - 2x - 2|$ در چه تعداد از بازه‌های زیر، اکیداً نزولی است؟

- ☐ الف) $(1, 2)$ ☐ ب) $(-2, -1)$ ☐ پ) $(0, 1)$ ☐ ۱ (۱)
☐ ۲ (۲) ☐ ۳ (۳) ☐ ۴ (۴)

 ۱۸۸ برد تابع $f(x) = \left|\frac{x}{x}\right| + 3 + x$ در بازه‌ای که نزولی نیست، کدام است؟

- ☐ (۱) $(2, +\infty)$ ☐ (۲) $[0, 4)$ ☐ (۳) $(4, +\infty) \cup (0, 2)$ ☐ (۴) $[0, +\infty)$

- ۱۸۹** کدام یک از گزینه‌های زیر، راجع به صعودی و نزولی بودن تابع $f(x) = |\sqrt{x^2 - 4x + 4} - 1|$ صحیح است؟
 (۱) در بازه $[2, 3]$ اکیداً صعودی است. (۲) در بازه $[1, 2]$ اکیداً صعودی است.
 (۳) در بازه $[3, 4]$ اکیداً نزولی است. (۴) در بازه $[0, 2]$ اکیداً نزولی است.
- ۱۹۰** در بازه‌ای که تابع با ضابطه $f(x) = |x-2| + |x-3|$ اکیداً نزولی است، نمودار آن با نمودار تابع $g(x) = 2x^2 - x - 1$ در چند نقطه مشترک هستند؟ (تجربی ۹۷)
 (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) فاقد نقطه مشترک هستند.
- ۱۹۱** تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x} & ; x \leq 1 \\ \log_2 x & ; x > 1 \end{cases}$ در کدام بازه زیر اکیداً صعودی است؟
 (۱) $(-\infty, +\infty)$ (۲) $(0, 2)$ (۳) $(-5, 1)$ (۴) $(0, +\infty)$
- ۱۹۲** در کدام بازه زیر با افزایش طول نقاط، مقدار عرض تابع $f(x) = \frac{x}{x-1}$ کاهش می‌یابد؟
 (۱) $[0, 2]$ (۲) $[-2, 0]$ (۳) $[-2, 2]$ (۴) $(-\infty, +\infty)$
- ۱۹۳** تابع $f(x) = \sqrt{x-2} + x^2 - 4x$ از نظر یکنوایی چگونه است؟
 (۱) همواره صعودی (۲) همواره نزولی (۳) ابتدا صعودی، سپس نزولی (۴) ابتدا نزولی، سپس صعودی
- ۱۹۴** تابع $f(x) = mx^2 - nx - k$ در هر بازه، هم صعودی و هم نزولی است. اگر مجموعه زیر، تابع باشد، مقدار $f(\sqrt{5})$ کدام است؟ (داخل ۱۴۰۱)
 $\{(m, n-1), (0, k), (n-1, m^2 + 2m-1), (3k+2, 2k+1)\}$
 (۱) -1 (۲) $-\sqrt{5}$ (۳) ۱ (۴) $\sqrt{5}$
- ۱۹۵** اگر $f = \{(-1, 2a), (3, b+3), (c, a-c), (b, 3a+c), (a, 4)\}$ تابعی هم صعودی و هم نزولی باشد، $|a| + |b| + |c|$ کدام است؟
 (۱) ۵ (۲) ۷ (۳) ۴ (۴) ۶
- ۱۹۶** اگر تابع $f(x) = (m-1)x^2 + (n-2)x + m+n$ بر روی $\mathbb{R}$ هم صعودی و هم نزولی باشد، آنگاه وضعیت صعودی و نزولی بودن تابع $g(x) = (m+n)x + (m-n) + |(m-n)x + (m+n)|$ چگونه است؟
 (۱) ابتدا صعودی سپس نزولی (۲) ابتدا نزولی سپس صعودی
 (۳) همواره صعودی (۴) همواره نزولی
- ۱۹۷** به ازای کدام مقادیر m ، تابع $y = x^2 - mx + 3$ در بازه $[1, +\infty)$ اکیداً صعودی است؟
 (۱) $(-\infty, -2]$ (۲) $[2, +\infty)$ (۳) $[-2, +\infty)$ (۴) $(-\infty, 2]$
- ۱۹۸** تابع $f(x) = (-9+k^2)x^3 + 5$ اکیداً نزولی است. مجموع مقادیر صحیح k چقدر است؟ (تجربی ۱۴۰۱)
 (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۶ (۴) صفر
- ۱۹۹** اگر تابع $f(x) = -2x^2 + (m^2-1)x - 3$ در بازه $[-3, 2]$ غیریکنوا باشد، محدوده m کدام است؟
 (۱) $|m| < \sqrt{2}$ (۲) $|m| < 3$ (۳) $|m| > 2$ (۴) $|m| > 1$
- ۲۰۰** اگر بزرگ‌ترین بازه‌ای که نمودار تابع $y = -5x^2 + ax - 8$ در آن اکیداً صعودی است، بازه $(-\infty, 2/5)$ باشد، عرض رأس سهمی کدام است؟ (ریاضی نوبت دوم ۱۴۰۳)
 (۱) $13/75$ (۲) $14/25$ (۳) $23/25$ (۴) $24/75$
- ۲۰۱** به ازای کدام مقدار m ، تابع $f(x) = 2mx - 3|x-1|$ اکیداً نزولی است؟
 (۱) $(-\infty, -1/5)$ (۲) $(-\infty, 1/5)$ (۳) $(1/5, +\infty)$ (۴) $(-1/5, +\infty)$
- ۲۰۲** به ازای کدام مجموعه مقادیر m ، تابع f با ضابطه $f(x) = \begin{cases} -x^2 + 2x & ; x < 1 \\ (m+1)x - 3m + 3 & ; x \geq 1 \end{cases}$ روی تمام دامنه‌اش اکیداً صعودی است؟ (شبیه‌ساز نوبت اول ۱۴۰۴)
 (۱) $(-\infty, 3/5)$ (۲) $(-1, 3/5]$ (۳) $(-\infty, 1/5]$ (۴) $(-1, 1/5]$

۲۰۳ تابع $f(x) = \begin{cases} |x+2|+1 & ; x \leq -2 \\ \Delta m - mx & ; x > -2 \end{cases}$ روی $\mathbb{R}$ نزولی است. اگر بازه $[a, b]$ ، حدود مقادیر m باشد، مقدار $a+b$ کدام است؟ (تجربی نوبت اول ۱۴۰۴)

- ☐ (۱) $\frac{1}{3}$ ☐ (۲) $\frac{1}{4}$ ☐ (۳) $\frac{1}{6}$ ☐ (۴) $\frac{1}{5}$

۲۰۴ اگر $g(x) = (a-2)x^2 + x^b + c$ تابعی همانی باشد، وضعیت صعودی و نزولی بودن تابع $f(x) = 4ax^3 - 12bx^2 + 6x + c$ چگونه است؟

- ☐ (۱) اکیداً صعودی ☐ (۲) اکیداً نزولی
☐ (۳) ابتدا اکیداً صعودی و سپس اکیداً نزولی ☐ (۴) ابتدا اکیداً نزولی و سپس اکیداً صعودی

۲۰۵ نمودار تابع $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ ، فقط در نقطه $(-3, -1)$ بر خط به موازات محور x مماس است. اگر تابع $y = |f(x)|$ در بازه $(k, +\infty)$ اکیداً صعودی باشد، کمترین مقدار k کدام است؟

- ☐ (۱) -4 ☐ (۲) -3 ☐ (۳) -1 ☐ (۴) -2

۲۰۶ تابع درجه سوم و اکیداً نزولی f را در نظر بگیرید، اگر نمودار آن از مبدأ مختصات بگذرد و یک خط افقی در نقطه $(2, -1)$ بر آن مماس باشد، آنگاه نمودار تابع f و خط $y = 1$ در نقطه با کدام طول متقاطع اند؟

- ☐ (۱) $-2 + 2\sqrt[3]{2}$ ☐ (۲) $2 + 2\sqrt[3]{2}$ ☐ (۳) $-2 - 2\sqrt[3]{2}$ ☐ (۴) $2 - 2\sqrt[3]{2}$

سریخ چند تا سؤال زیر هم در مورد یکنوایی تابع های مثلثاتی.

۲۰۷ تابع $f(x) = \sin(2x)$ در کدام بازه زیر یکنواست؟

- ☐ (۱) $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ ☐ (۲) $[\frac{\pi}{2}, \pi]$ ☐ (۳) $[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}]$ ☐ (۴) $[0, \frac{\pi}{2}]$

۲۰۸ تابع با ضابطه $f(x) = 1 + 2\cos(2\pi x - \pi)$ در کدام بازه زیر اکیداً صعودی است؟

- ☐ (۱) $[0, 1]$ ☐ (۲) $[1, 1.5]$ ☐ (۳) $[0, 1]$ ☐ (۴) $[1, 2]$

۲۰۹ تابع با ضابطه $f(x) = 2\cos^2(x + \frac{\pi}{6})$ در کدام بازه زیر اکیداً صعودی است؟

- ☐ (۱) $(\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{6})$ ☐ (۲) $(0, \frac{\pi}{3})$ ☐ (۳) $(-\frac{2\pi}{3}, 0)$ ☐ (۴) $(0, \pi)$

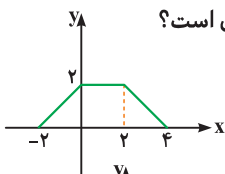
سریخ حالا می‌خواهیم اثر تبدیل و انتقال نمودارها، روی صعودی و نزولی بودن تابع رو بررسی کنیم.

۲۱۰ تابع $f(x)$ اکیداً نزولی با دامنه $[-2, 5]$ است، تابع $y = 1 - 3f(2-x)$ در کدام بازه زیر اکیداً نزولی است؟

- ☐ (۱) $[-3, 4]$ ☐ (۲) $[-2, 5]$ ☐ (۳) $[2, 6]$ ☐ (۴) $[-4, 3]$

۲۱۱ نمودار تابع $y = f(x-1)$ به صورت مقابل است، نمودار تابع $y = 1 + 2f(\frac{x}{3} + 2)$ در کدام بازه اکیداً صعودی است؟

- ☐ (۱) $[0, 9]$ ☐ (۲) $[-15, -9]$ ☐ (۳) $[-6, 0]$ ☐ (۴) $[-3, 0]$



۲۱۲ نمودار تابع $y = f(x)$ به صورت مقابل است. چه تعداد از توابع زیر یکنواست؟

- الف) $y = \begin{cases} 4-f(x); & x \leq 0 \\ f(-x); & x > 0 \end{cases}$ ب) $y = \begin{cases} f(2x); & x \leq 0 \\ f(x-1); & x > 0 \end{cases}$ پ) $y = \begin{cases} |f(x)|+2; & x \geq 0 \\ f(|x|)-2; & x < 0 \end{cases}$
☐ (۱) صفر ☐ (۲) ۱ ☐ (۳) ۲ ☐ (۴) ۳

سریخ در سؤالات زیر بهتر است یک تابع فرضی f با توجه به شرایط مسئله و وضعیت یکنوایی گفته شده، رسم کنید.

۲۱۳ تابع f روی $\mathbb{R}$ اکیداً نزولی است. اگر $f(3) = 0$ باشد، دامنه $g(x) = \sqrt{x^2 f(x)}$ شامل چند عدد صحیح نامنفی است؟ (تجربی خارج ۱۴۰۱)

- ☐ (۱) صفر ☐ (۲) ۲ ☐ (۳) ۳ ☐ (۴) ۴

۲۱۴ تابع اکیداً صعودی f با دامنه $(-\infty, 4]$ را در نظر بگیرید. اگر $f(2) = 0$ باشد، دامنه تابع $y = \sqrt{(x-1)f(|x|)}$ کدام است؟

- ☐ (۱) $[2, 4]$ ☐ (۲) $[-2, 1]$ ☐ (۳) $[-2, 1] \cup [2, 4]$ ☐ (۴) $\mathbb{R}$

سریخ اگر یک تابع اکیداً صعودی یا اکیداً نزولی داشته باشیم، می‌توانیم با تعیین دامنه، بُرد آن تابع را پیدا کنیم.

۲۱۵ بُرد تابع $f(x) = \sqrt{4-x} - \sqrt{x} + 4$ به صورت کدام بازه است؟

- ☐ (۱) $[0, 4]$ ☐ (۲) $[2, 6]$ ☐ (۳) $[2, 4]$ ☐ (۴) $[0, 6]$

تایع وارون

سرنخ توی بعضی سؤال‌ها، از تعریف تابع وارون سؤال می‌پرسن، چند تا با هم ببینیم.

(تجربی ۱۴۰۱)

۳۴۷ وارون تابع $y = x^3 - x + 1$ از کدام نقطه عبور می‌کند؟

☐ (۴) $(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{8})$

☐ (۳) $(1, 2)$

☐ (۲) $(\frac{5}{8}, \frac{1}{2})$

☐ (۱) $(-1, -2)$

(تجربی نوبت دوم ۱۴۰۳)

۳۴۸ اگر نقطه $(\frac{-1}{8}, \frac{-3}{5})$ روی تابع وارون تابع $y = \frac{x}{a + a|x|}$ باشد، مقدار a کدام است؟

☐ (۴) $\frac{3}{5}$

☐ (۳) ۳

☐ (۲) ۵

☐ (۱) $\frac{5}{27}$

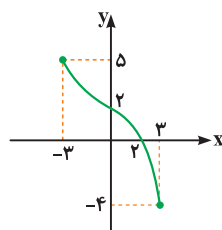
۳۴۹ تابع $f = \{(1, 3), (3, 4), (4, 1)\}$ را در نظر بگیرید. حاصل $f^{-1}(3) + (f^{-1} \circ f^{-1})(1)$ کدام است؟

☐ (۴) ۵

☐ (۳) ۴

☐ (۲) ۳

☐ (۱) ۲



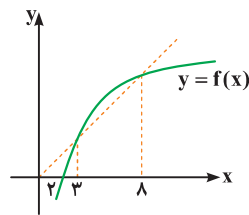
۳۵۰ نمودار تابع f با دامنه $[-3, 3]$ به صورت مقابل است. اگر $\frac{f^{-1}(5)}{f(a) + f^{-1}(0)} = -\frac{3}{4}$ باشد، مقدار a کدام است؟

☐ (۱) صفر

☐ (۲) ۱

☐ (۳) -۱

☐ (۴) $\frac{1}{2}$



۳۵۱ شکل زیر، نمودار تابع $y = f(x)$ و نیمساز ناحیه اول و سوم را نشان می‌دهد. دامنه تابع با ضابطه

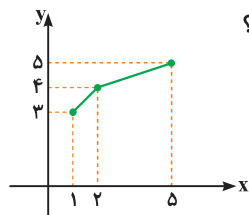
$y = \sqrt{x - f^{-1}(x)}$ کدام است؟

☐ (۱) $(0, 2]$

☐ (۲) $[2, 3]$

☐ (۳) $[2, 8]$

☐ (۴) $[3, 8]$



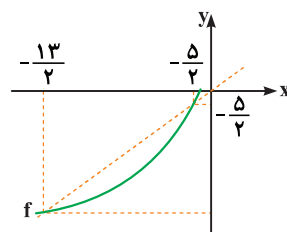
۳۵۲ شکل مقابل، نمودار تابع f را نشان می‌دهد. دامنه تابع $y = \sqrt{\frac{f(x) - f^{-1}(x)}{x - f^{-1}(x)}}$ شامل چند عدد صحیح است؟

☐ (۱) ۱

☐ (۲) ۲

☐ (۳) ۳

☐ (۴) ۴



۳۵۳ شکل مقابل، نمودار تابع f را نشان می‌دهد. دامنه تابع $y = \sqrt{\frac{f^{-1}(x)}{x - f^{-1}(x)}}$ شامل چند عدد صحیح است؟

(تجربی نوبت دوم ۱۴۰۳)

☐ (۱) ۱

☐ (۲) ۲

☐ (۳) ۴

☐ (۴) ۵

سرنخ این قسمت مبحث پر تکرار کنکورهای اخیر که باید مقدار تابع وارون رو در یک نقطه پیدا کنید. توی سه چهار سؤال اول نکته‌ها را یاد

می‌گیرین، بعدش کلی تست قشنگارو می‌خونیم.

(شبه‌ساز تجربی ۹۹)

۳۵۴ فرض کنید $g(x)$ وارون تابع $f(x) = -x + \sqrt{-2x}$ باشد. حاصل $g(4) - g(12)$ کدام است؟

☐ (۴) -۶

☐ (۳) ۱۰

☐ (۲) ۶

☐ (۱) -۱۰

(تجربی نوبت اول ۱۴۰۲)

۳۵۵ اگر $g(x)$ وارون تابع $f(x) = 1 + x - 2\sqrt{x}$, $x \geq 1$ باشد، $(g \circ g)(1)$ کدام است؟

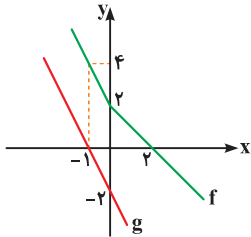
- ☐ ۱ (۱) ☐ ۲ (۲) ☐ ۳ (۳) ☐ ۴ (۴)

۳۵۶ تابع $f(x) = \frac{ax-1}{x-b}$ با دامنه و بُرد $\mathbb{R} - \{2\}$ را در نظر بگیرید. حاصل $f^{-1}(1)$ کدام است؟

- ☐ ۱ (۱) ☐ ۲ (۲) ☐ ۳ (۳) ☐ ۴ (۴)

۳۵۷ اگر $f(x) = \begin{cases} 2x-3; & x < 0 \\ 4-x; & x \geq 2 \end{cases}$ و $g(x) = \begin{cases} 2x-3; & x < 0 \\ x-4; & x \geq 0 \end{cases}$ باشد، مقدار $g \circ f^{-1}(-2) + f \circ g^{-1}(-5)$ کدام است؟

- ☐ ۷ (۱) ☐ ۸ (۲) ☐ ۱۰ (۳) ☐ ۱۲ (۴)


۳۵۸ با توجه به نمودارهای دو تابع f و g در شکل مقابل، حاصل $g \circ f^{-1}(-2) + f \circ g^{-1}(-1)$ چقدر است؟

- ☐ -۱۶ (۱) ☐ -۱۴ (۲) ☐ -۱۳ (۳) ☐ -۱۰ (۴)

۳۵۹ اگر $f^{-1}(x) = \frac{x}{1+|x|}$ و $g(x) = \sqrt{x} - 1$ باشد، حاصل $(f + g^{-1})(-\frac{2}{5})$ کدام است؟

- ☐ -۲۳ (۱) ☐ -۱۱ (۲) ☐ -۲۳ (۳) ☐ -۱۱ (۴)

۳۶۰ به ازای کدام مقدار a ، نمودار تابع وارون تابع $f(x) = x^3 + 6x^2 + ax + 1$ را در نقطه‌ای به عرض ۱ قطع می‌کند؟

- ☐ ۱۵ (۱) ☐ ۱۲ (۲) ☐ ۹ (۳) ☐ ۵ (۴)

۳۶۱ وارون تابع $f(x) = \sqrt{x-2}\sqrt{mx-1}$ در دامنه محدود، خط $y = 12 - x$ را در نقطه‌ای به عرض ۱۰ قطع می‌کند. مقدار $f(m+4)$ کدام است؟

- ☐ ۱ (۱) ☐ ۱ (۲) ☐ ۲ (۳) ☐ ۱ (۴)

۳۶۲ وارون تابع $y = x^2 + \sqrt{b-ax}$ خط $y = x - 4$ را در نقطه $(a, -1)$ قطع می‌کند. مقدار $a - b$ کدام است؟

- ☐ -۲ (۱) ☐ -۴ (۲) ☐ ۲ (۳) ☐ ۴ (۴)

۳۶۳ دو تابع با ضابطه‌های $g = \{(2, 5), (3, 4), (1, 6), (4, 7), (8, 1)\}$ و $f(x) = 2x - 5$ مفروض‌اند. اگر $(f^{-1} \circ g)(a) = 6$ باشد، a کدام است؟

- ☐ ۱ (۱) ☐ ۲ (۲) ☐ ۳ (۳) ☐ ۴ (۴)

۳۶۴ اگر $f = \{(\frac{1}{9}, -1), (\frac{1}{3}, 1), (-\frac{1}{9}, 3), (-\frac{1}{3}, -3)\}$ و $g(x) = -|x|\sqrt{x}$ باشد، مقدار $f \circ g^{-1}(a) = -3$ کدام است؟

- ☐ -۱ (۱) ☐ ۱ (۲) ☐ -۱ (۳) ☐ ۱ (۴)

۳۶۵ اگر $f(x) = \begin{cases} \sqrt{5x+9}; & x \geq 3 \\ 3x-x^2; & x < 3 \end{cases}$ و $g = \{(5, 2), (7, 3), (1, 4), (3, 6), (9, 1)\}$ مفروض‌اند. اگر $(f^{-1} \circ g^{-1})(a) = 8$ باشد، a کدام است؟

- ☐ ۲ (۱) ☐ ۳ (۲) ☐ ۶ (۳) ☐ ۷ (۴)

۳۶۶ دو تابع $f = \{(2, 5), (6, 3), (3, 7), (4, 1), (1, 9)\}$ و $g(x) = \frac{x}{x-1}$ مفروض‌اند. اگر $f^{-1}(g(2a)) = 6$ باشد، a کدام است؟

- ☐ ۱ (۱) ☐ ۲ (۲) ☐ ۳ (۳) ☐ ۵ (۴)

(تجربی خارج ۹۸)

۳۶۷ اگر $f(x) = \frac{2}{5}x - 4$ و $g(x) = x^3 + x$ باشند، مقدار $(g^{-1} \circ f^{-1})(8)$ کدام است؟

- ☐ ۱/۵ (۱) ☐ ۲ (۲) ☐ ۲/۵ (۳) ☐ ۳ (۴)

(ریاضی ۹۹)

۳۶۸ اگر $f(x) = x + \sqrt{x}$ و $g(x) = \frac{9x+6}{1-x}$ باشند، مقدار $(g^{-1} \circ f^{-1})(20)$ کدام است؟

- ☐ ۲/۵ (۱) ☐ ۲ (۲) ☐ ۳ (۳) ☐ ۳/۴ (۴)

۳۶۹ اگر $f(x) = \frac{2x+1}{3}$ و $g(x) = \frac{2x+a}{a-x}$ باشند و $(f \circ g^{-1})(-1) = -\frac{11}{3}$ باشد، مقدار a کدام است؟

- ۱ (۱) ☐ ۲ (۲) ☐ ۳ (۳) ☐ ۴ (۴) ☐

۳۷۰ توابع $f(x) = \log(2x-5)$ و $g(x) = x + \sqrt{2x-4}$ را در نظر بگیرید. اگر نمودار $y = g^{-1} \circ f^{-1}(x)$ محور y ها را در α قطع کند، مقدار α کدام است؟

(ریاضی نوبت اول ۱۴۰۲)

- ۱ (۱) ☐ $4 - \sqrt{2}$ (۲) ☐ $4 - \sqrt{3}$ (۳) ☐ $4 + \sqrt{2}$ (۴) ☐ $4 + \sqrt{3}$

۳۷۱ اگر $f = \{(1,2), (2,5), (3,4), (4,6)\}$ و $g = \{(2,3), (4,2), (5,6), (3,1)\}$ باشند. تابع $\frac{g}{g \circ f^{-1}}$ کدام است؟

(ریاضی ۹۸)

- ۱ (۱) ☐ $\{(4,2), (5,2)\}$ (۲) ☐ $\{(4,2), (3,5)\}$ (۳) ☐ $\{(5,2), (2,4)\}$ (۴) ☐ $\{(3,5), (2,4)\}$

۳۷۲ اگر $f = \{(1,2), (2,5), (3,4), (4,6)\}$ و $g = \{(2,3), (4,2), (5,6), (3,1)\}$ دو تابع باشند، بُرد تابع $f - (g^{-1} \circ f)$ کدام است؟

(ریاضی خارج ۹۸)

- ۱ (۱) ☐ $\{-1, 4\}$ (۲) ☐ $\{2, 3\}$ (۳) ☐ $\{3, 4\}$ (۴) ☐ $\{2, -1\}$

۳۷۳ **iq** تابع $f(x) = \begin{cases} 2-3x & ; 2x+3 \leq 0 \\ 2+2mx-x^2 & ; 2x+3 > 0 \end{cases}$ روی دامنه تعریف خود وارون پذیر است. اگر f^{-1} وارون تابع f به ازای مقدار صحیح m باشد،

(تجربی نوبت دوم ۱۴۰۲)

مقدار $f^{-1}(-19)$ کدام است؟

- ۱ (۱) ☐ ۳ (۲) ☐ ۲ (۳) ☐ ۱ (۴) ☐ صفر

۳۷۴ **iq** اگر $f(x+1) = \frac{g(x)-1}{x}$ و $g^{-1}(x) = 1-x$ باشند، مقدار $(f \circ g)(2)$ کدام است؟

- ۱ (۱) ☐ -1 (۲) ☐ ۲ (۳) ☐ -3 (۴) ☐ -5

سرنخ می‌دونیم $a = f(b)$ همیشه نتیجه گرفت $f^{-1}(b) = a$ هستش! این ویژگی در حالت کلی تر هم قابل استفاده است.

۳۷۵ اگر $f(x^3 + 2x) = 2^x - 14$ باشد، مقدار $f^{-1}(2)$ کدام است؟

- ۱ (۱) ☐ ۱۶ (۲) ☐ ۱۴ (۳) ☐ ۷۲ (۴) ☐ ۵۴

۳۷۶ اگر $x^3 - 1 = f^{-1}\left(\frac{x+2}{x-1}\right)$ باشد، مقدار $f(7)$ کدام است؟

- ۱ (۱) ☐ ۱ (۲) ☐ ۲ (۳) ☐ ۳ (۴) ☐ ۴

۳۷۷ تابع f با ضابطه $f(x) = x - \frac{1}{2x}$ بر دامنه $(0, +\infty)$ مفروض است. نمودار تابع f^{-1} نیمساز ناحیه دوم را با کدام طول قطع می‌کند؟

(تجربی خارج ۹۹ و مشابه تجربی ۹۹)

- ۱ (۱) ☐ $-\frac{3}{2}$ (۲) ☐ $-\frac{3}{4}$ (۳) ☐ -1 (۴) ☐ $-\frac{1}{2}$

۳۷۸ اگر $g(x) = f(x) + \sqrt{f(x)}$ و $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{2x}$ باشند، آنگاه حاصل $g^{-1}(6)$ کدام است؟

- ۱ (۱) ☐ ۱ (۲) ☐ ۲ (۳) ☐ ۳ (۴) ☐ ۴

۳۷۹ اگر $g(x) = f(3x-4)$ و $f^{-1}(x) = x + \sqrt{x}$ باشند، حاصل $g^{-1}(16)$ کدام است؟

- ۱ (۱) ☐ ۵ (۲) ☐ ۶ (۳) ☐ ۷ (۴) ☐ ۸

محاسبه ضابطه تابع وارون

سرنخ این بخش رو با وارون کردن تابع‌های خطی شروع می‌کنیم. فقط کافیه جای x و y رو عوض کنید!

۳۸۰ قرینه خطی به معادله $3y - 2x = 4$ را نسبت به خط $y = x$ می‌نامیم. عرض از مبدأ خط d کدام است؟

(تجربی ۹۷)

- ۱ (۱) ☐ -2 (۲) ☐ -1 (۳) ☐ ۱ (۴) ☐ ۲

۳۸۱ نمودار وارون تابع $f(x) = \frac{x-3}{y}$ را در راستای محور y ها، 6 واحد به سمت پایین انتقال می‌دهیم. اگر A نقطه تلاقی نمودار منحنی حاصل با نمودار f باشد، فاصله A از مبدأ مختصات کدام است؟

- ۱ (۱) ☐ $2\sqrt{5}$ (۲) ☐ $\sqrt{5}$ (۳) ☐ $2\sqrt{2}$ (۴) ☐ $\sqrt{2}$

۳۸۲ تابع $f(x) = 2x - 1$ را در نظر بگیرید. اگر $f(x) - f^{-1}(x) = g(x+1)$ باشد، نمودار تابع $y = g(x)$ از کدام ناحیه دستگاه مختصات نمی‌گذرد؟

- ☐ (۱) اول ☐ (۲) دوم ☐ (۳) سوم ☐ (۴) چهارم

۳۸۳ ضابطه وارون تابع $f(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 3}$ به کدام صورت است؟

- ☐ (۱) $y = x - 2; x \neq 3$ ☐ (۲) $y = x - 2; x \neq 1$ ☐ (۳) $y = x + 2; x \neq 3$ ☐ (۴) $y = x + 2; x \neq 1$

۳۸۴ اگر دو خط به معادلات $ax + by = 8$ و $2x - 3y = b$ نسبت به نیمساز ربع اول متقارن باشند، $a + b$ کدام است؟ (ریاضی خارج ۹۳)

- ☐ (۱) ± 3 ☐ (۲) ± 2 ☐ (۳) $2, -3$ ☐ (۴) $3, -2$

۳۸۵ *iq* تابع خطی f با ضابطه $f(x) = \frac{3x-1}{a}$ را در نظر بگیرید. اگر $f(3f^{-1}(x)) = 3x + 5$ باشد، مقدار a کدام است؟

- ☐ (۱) $\frac{3}{5}$ ☐ (۲) $\frac{2}{5}$ ☐ (۳) $-\frac{3}{5}$ ☐ (۴) $-\frac{2}{5}$

سریخ تست‌های زیر مربوط به وارون کردن تابع‌های رادیکالی و درجه دوم و درجه سوم است. توی این سؤال‌ها به محدود کردن دامنه توجه کنید.

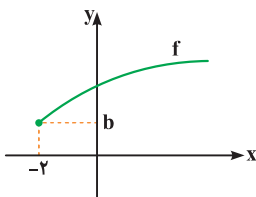
۳۸۶ ضابطه وارون تابع $y = 2 - \sqrt{x-1}$ به کدام صورت است؟ (تجربی ۹۲)

- ☐ (۱) $y = x^2 - 4x + 5; x \leq 2$ ☐ (۲) $y = -x^2 + 4x - 5; x \leq 2$
☐ (۳) $y = x^2 - 4x + 5; x \geq 1$ ☐ (۴) $y = -x^2 + 4x - 5; x \geq 1$

۳۸۷ قرینه نمودار تابع $y = 2 + \sqrt{x-1}$ را نسبت به خط $y = x$ رسم کرده و سپس نمودار حاصل را ۲ واحد در جهت مثبت محور x ‌ها و ۳ واحد در جهت منفی محور y ‌ها انتقال می‌دهیم و آن را $y = g(x)$ می‌نامیم. مقدار $g(4)$ کدام است؟ (تجربی ۱۴۰۰)

- ☐ (۱) ۳ ☐ (۲) -۳ ☐ (۳) -۲ ☐ (۴) -۴

۳۸۸ نمودار تابع $f(x) = 1 + \sqrt{x+a}$ به صورت زیر است. نمودار این تابع را ابتدا نسبت به محور y ‌ها و سپس نسبت به خط $y = x$ قرینه می‌کنیم و آن را $g(x)$ می‌نامیم. مقدار $g(a+b)$ کدام است؟



- ☐ (۱) صفر ☐ (۲) ۱ ☐ (۳) -۲ ☐ (۴) -۴

۳۸۹ نمودار تابع $y = \sqrt[3]{x}$ را ۲ واحد به طرف x ‌های مثبت و ۱ واحد به طرف y ‌های مثبت انتقال می‌دهیم. نمودار وارون تابع حاصل از کدام ناحیه دستگاه مختصات نمی‌گذرد؟

- ☐ (۱) اول ☐ (۲) دوم ☐ (۳) سوم ☐ (۴) چهارم

۳۹۰ ضابطه وارون تابع $f(x) = (x-2)^2 + 6x$ در بزرگ‌ترین بازه‌ای که تابع در آن اکیداً صعودی است، کدام است؟

- ☐ (۱) $-1 - \sqrt{x-3}$ ☐ (۲) $-1 + \sqrt{x-3}$ ☐ (۳) $2 + \sqrt{x-6}$ ☐ (۴) $2 - \sqrt{x-6}$

۳۹۱ ضابطه وارون تابع $f(x) = -2 + \sqrt{x-3}$ در بازه‌ای که نمودار آن زیر محور x ‌ها قرار دارد، کدام است؟

- ☐ (۱) $-2 \leq x < 0$ ☐ (۲) $3 \leq x < 7$ ☐ (۳) $0 \leq x \leq 3$ ☐ (۴) $x^2 - 6x + 4; x \geq 0$

۳۹۲ ضابطه وارون تابع $f(x) = -x^2 + 2x$ در بازه‌ای که بالای نیمساز ربع اول و سوم قرار دارد، کدام است؟

- ☐ (۱) $1 + \sqrt{1-x}; 0 < x < 1$ ☐ (۲) $1 + \sqrt{1-x}; x < 1$ ☐ (۳) $-1 - \sqrt{1-x}; 0 < x < 1$ ☐ (۴) $1 - \sqrt{1-x}; 0 < x < 1$

۳۹۳ *iq* نمودار تابع $y = x^2 - 2x; x \geq 1$ را ابتدا نسبت به محور y ‌ها و سپس نسبت به نیمساز ناحیه اول و سوم قرینه می‌کنیم. ضابطه تابع حاصل کدام است؟

- ☐ (۱) $-1 - \sqrt{x-1}$ ☐ (۲) $-1 + \sqrt{x-1}$ ☐ (۳) $-1 - \sqrt{x+1}$ ☐ (۴) $-1 + \sqrt{x+1}$

۳۹۴ *iq* اگر $g(x) = 2x + 1$ و $(f \circ g)(x) = (2x-1)g(x)$ باشد، ضابطه وارون تابع $y = f(x)$ با شرط $x \leq 1$ کدام است؟

- ☐ (۱) $y = 1 - \sqrt{x-1}$ ☐ (۲) $y = 1 + \sqrt{x-1}$ ☐ (۳) $y = 1 - \sqrt{x+1}$ ☐ (۴) $y = 1 + \sqrt{x+1}$

(ریاضی ۱۴۰۱)

۳۹۵ تابع $f(x) = x^2 \sqrt{x^2}$ در یک بازه، نزولی است. ضابطه وارون تابع در این بازه، کدام است؟

- ☐ (۱) $-\sqrt{x}; x \geq 0$
☐ (۲) $-\sqrt{x^2}; x \leq 0$
☐ (۳) $-\sqrt[3]{x}; x \leq 0$
☐ (۴) $-\sqrt{x^3}; x \geq 0$

(تجربی نوبت اول ۱۴۰۳)

۳۹۶ اگر $y = \frac{x+2}{4} - \frac{\sqrt{x+1}}{2}$ ضابطه تابع وارون $y = ax + a\sqrt{x}$ باشد، مقدار a کدام است؟

- ☐ (۱) ۲
 ☐ (۲) ۳
 ☐ (۳) ۴
 ☐ (۴) ۹

(شبیه‌ساز ریاضی ۱۴۰۲)

۳۹۷ $f(x) = \sqrt{x+2}\sqrt{x-1}$ ضابطه وارون کدام است؟

- ☐ (۱) $x^2 - 2x + 2; x \geq 1$
☐ (۲) $x^2 - 2x; x \geq 1$
☐ (۳) $x^2 + 2x + 2; x \geq -1$
☐ (۴) $x^2 + 2x; x \geq -1$

سرنخ تابع‌های قدرمطلق هم در حالت کلی وارون‌پذیر نیستند و برای وارون کردن آن‌ها باید به محدودیت دامنه توجه کنید!

(تجربی خارج ۱۴۰۱)

۳۹۸ تابع با ضابطه $y = \sqrt{(x+1)^2} - |3x-6|$ در یک بازه نزولی است. ضابطه وارون تابع در این بازه، کدام است؟

- ☐ (۱) $-\frac{1}{2}x - 7, x \geq 2$
☐ (۲) $-\frac{1}{2}x + \frac{7}{2}, x \leq 3$
☐ (۳) $-2x + 14, x \leq 3$
☐ (۴) $-2x - \frac{14}{3}, x \geq 2$

(ریاضی ۹۴)

۳۹۹ نمودار تابع $y = |2x-6| - |x+4| + x$ در بازه‌ای اکیداً نزولی است. ضابطه وارون آن در این بازه کدام است؟

- ☐ (۱) $-x + 6; x \leq -4$
☐ (۲) $-x + 5; x \geq 2$
☐ (۳) $-\frac{1}{3}x + 1; -4 \leq x \leq 10$
☐ (۴) $-\frac{1}{3}x + 1; -4 \leq x \leq 10$

۴۰۰ تابع f با ضابطه $f(x) = |2x-4| - |x+1| + x$ را در بازه‌ای اکیداً نزولی در نظر بگیرید. نمودار تابع f^{-1} و خط $y = x+1$ با کدام طول متقاطع هستند؟

- ☐ (۱) ۱
 ☐ (۲) $\frac{1}{2}$
☐ (۳) $\frac{1}{3}$
☐ (۴) غیرمتقاطع

۴۰۱ f تابع با ضابطه $f(x) = |x+3| - |x-1|$ در بازه‌ای وارون‌پذیر است. نمودار وارون آن در این بازه بر خط $2y - ax = 7$ عمود است.

مقدار a کدام است؟

- ☐ (۱) -۴
 ☐ (۲) ۴
 ☐ (۳) -۲
 ☐ (۴) ۲

۴۰۲ ضابطه وارون تابع $f(x) = |x-1| + |x+2| - x$ در بزرگ‌ترین بازه‌ای که این تابع اکیداً نزولی است، کدام است؟

- ☐ (۱) $-x + 3$
☐ (۲) $-\frac{1}{3}x - \frac{1}{3}$
☐ (۳) $\begin{cases} -3x-1; & x > 5 \\ -x+3; & 2 \leq x \leq 5 \end{cases}$
☐ (۴) $\begin{cases} -\frac{1}{3}x - \frac{1}{3}; & x > 5 \\ -x+3; & 2 \leq x \leq 5 \end{cases}$

۴۰۳ دو تابع $f(x) = 3 - \sqrt{x+1}$ و $g(x) = x^2 - 2x$ را در نظر بگیرید. ضابطه وارون تابع $y = (f \circ g)(x)$ در بازه‌ای که نمودار آن اکیداً نزولی

می‌باشد، کدام است؟

- ☐ (۱) $-x + 3; x \leq 1$
☐ (۲) $-x + 4; x \leq 1$
☐ (۳) $-x + 3; x \leq 3$
☐ (۴) $-x + 4; x \leq 3$

(تجربی ۹۴)

۴۰۴ تابع با ضابطه $y = x|x-2|$ در یک بازه، نزولی است. ضابطه وارون آن در این بازه کدام است؟

- ☐ (۱) $1 - \sqrt{1+x}; x \leq 0$
☐ (۲) $1 - \sqrt{1-x}; x \leq 1$
☐ (۳) $1 + \sqrt{1-x}; 0 \leq x \leq 1$
☐ (۴) $1 - \sqrt{1-x}; 0 \leq x \leq 1$

۴۰۵ اگر $[x] = -1$ باشد، ضابطه وارون تابع $y = |x^2 - 1|$ کدام است؟

- ☐ (۱) $\sqrt{x-1}; 0 < x \leq 1$
☐ (۲) $-\sqrt{x-1}; 0 < x \leq 1$
☐ (۳) $\sqrt{1-x}; 0 \leq x < 1$
☐ (۴) $-\sqrt{1-x}; 0 \leq x < 1$

سرنخ چندتا هم وارون تابع دوضابطه‌ای ببینیم.

(تجربی ۹۶)

۴۰۶ ضابطه وارون تابع $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & ; x \geq 0 \\ -\sqrt{-x} & ; x < 0 \end{cases}$ کدام است؟

- ☐ (۱) $-x^2$
☐ (۲) x^2
☐ (۳) $x|x|$
☐ (۴) $-x|x|$

۴۰۷ ضابطه وارون تابع $f(x) = \begin{cases} 3x+1; x > 1 \\ 2x+2; x \leq 1 \end{cases}$ به صورت $f^{-1}(x) = \begin{cases} a(x-1); x > c \\ bx-1; x \leq c \end{cases}$ است. مقدار $f^{-1}(\frac{b}{a})$ کدام است؟

- ☐ (۱) $\frac{3}{2}$
☐ (۲) $-\frac{1}{4}$
☐ (۳) $\frac{1}{3}$
☐ (۴) $-\frac{1}{2}$

۴۰۸ اگر $f(x) = \begin{cases} x[x]; -1 < x < 0 \\ 2^x; 0 \leq x < 2 \end{cases}$ باشد، ضابطه وارون آن کدام است؟

☐ (۱) $f^{-1}(x) = \begin{cases} -x; 0 < x < 1 \\ \log_2 x; 1 < x \leq 4 \end{cases}$
☐ (۲) $f^{-1}(x) = \begin{cases} -x; 0 < x < 1 \\ \log_2 x; 1 \leq x < 4 \end{cases}$

☐ (۳) $f^{-1}(x) = \begin{cases} x; -1 < x < 0 \\ \log_2 x; 1 \leq x < 4 \end{cases}$
☐ (۴) $f^{-1}(x) = \begin{cases} x; 0 < x < 1 \\ \log_2 x; 1 \leq x < 4 \end{cases}$

سریخ به روش خیلی خوب برای وارون کردن تابع های هموگرافیک داریم که برای حل تست های زیر ارزش استفاده کنید و لذت ببرید.

۴۰۹ ضابطه وارون تابع $f(x) = \frac{3x+2}{x-1} + 2$ کدام است؟

- ☐ (۱) $\frac{x+2}{x-3} - 2$
☐ (۲) $\frac{x}{x-5}$
☐ (۳) $\frac{x+2}{x-3} + 2$
☐ (۴) $\frac{x}{x+5}$

۴۱۰ تابع f با دامنه $\mathbb{R} - \{a\}$ و بُرد $\mathbb{R} - \{-2\}$ مفروض است. اگر $f^{-1}(x) = \frac{ax-3}{bx+4}$ باشد، مقدار ab کدام است؟

- ☐ (۱) -2
☐ (۲) $2/5$
☐ (۳) -4
☐ (۴) 5

۴۱۱ **iq** اگر $x = \frac{f(x)-3x}{f(x)+4}$ باشد، ضابطه تابع $f^{-1}(x)$ کدام است؟

- ☐ (۱) $\frac{x-1}{x+7}$
☐ (۲) $\frac{x}{x+7}$
☐ (۳) $\frac{x+1}{x-7}$
☐ (۴) $\frac{x}{x-7}$

۴۱۲ **iq** اگر $f \circ f(x) = \frac{af(x)+1}{2f(x)-1}$ و $f^{-1}(0) = -2$ باشد، ضابطه وارون تابع $g(x) = \frac{4x+1}{2x+a}$ کدام است؟

- ☐ (۱) $\frac{-\frac{1}{2}x+1}{2x-4}$
☐ (۲) $\frac{-x+2}{2x-4}$
☐ (۳) $\frac{-4x+1}{2x+4}$
☐ (۴) وارون پذیر نیست.

۴۱۳ **iq** ضابطه وارون تابع $f(x) = \frac{x}{1+|x|}$ به صورت $f^{-1}(x) = \frac{ax}{1-|x|}$ است. مقدار $a \times b$ کدام است؟

- ☐ (۱) -1
☐ (۲) 1
☐ (۳) -2
☐ (۴) 2

برخورد f و f^{-1} و برخورد f^{-1} و g

سریخ توی تست های زیر، می خواهیم نقطه برخورد f^{-1} و g رو بررسی کنیم.

۴۱۴ اگر $f(x) = x^2 - 2x - 3$; $x \geq 1$ باشد، نمودارهای دو تابع f^{-1} و $g(x) = \frac{x-9}{2}$ با کدام طول متقاطع هستند؟ (تجربی ۹۸)

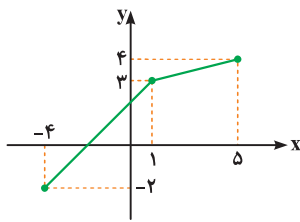
- ☐ (۱) 12
☐ (۲) 15
☐ (۳) 18
☐ (۴) 21

۴۱۵ اگر $f(x) = x^2 - 3x + 1$; $x < \frac{3}{2}$ و $g^{-1}(x) = 3x - 4$ باشند، نمودارهای دو تابع f^{-1} و g در نقطه ای با کدام طول متقاطع اند؟

- ☐ (۱) 1
☐ (۲) 2
☐ (۳) -1
☐ (۴) -2

۴۱۶ **iq** اگر $f(x) = x^2 - 4x + 1$; $x \leq 2$ باشد، نمودار تابع $y = 1 - f^{-1}(x)$ و $g(x) = \sqrt{f(x)+3}$ در نقطه A متقاطع اند. فاصله نقطه A از مبدأ مختصات کدام است؟

- ☐ (۱) $2\sqrt{2}$
☐ (۲) $\sqrt{2}$
☐ (۳) $2\sqrt{3}$
☐ (۴) $\sqrt{6}$



۴۱۷ iq نمودار تابع f با دامنه $[-4, 5]$ به صورت مقابل است. نمودارهای دو تابع f^{-1} و $g(x) = x + |x - 2|$ در چند نقطه متقاطع هستند؟

- ۱ (۱) ☐ ۲ (۲) ☐ ۳ (۳) ☐ ۴ (۴) متقاطع نیستند. ☐

سریع برای حل تست‌های مربوط به برخورد f و f^{-1} به صعودی بودن تابع f توجه کنید.

۴۱۸ اگر $f(x) = x^2 + 2x + 1$ با دامنه $(-1, +\infty)$ مفروض باشد، نمودارهای دو تابع f و f^{-1} در چند نقطه متقاطع اند؟ (ریاضی ۹۲)

- ۱ (۱) ☐ ۲ (۲) ☐ ۳ (۳) ☐ ۴ (۴) غیرمتقاطع ☐

۴۱۹ فرض کنید M نقطه تلاقی منحنی $y = \sqrt{x+3} - 1$ با تابع وارون خود باشد. فاصله نقطه M از مبدأ مختصات، کدام است؟ (تجربی خارج ۱۴۰۰)

- ۱ (۱) ☐ $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (۲) ☐ $\sqrt{2}$ (۳) ☐ ۳ (۴) ☐ $2\sqrt{2}$

۴۲۰ نمودار تابع $f(x) = \frac{x+4}{x-2}$ با دامنه $\mathbb{R} - \{2\}$ نمودار وارون خود را با کدام طول قطع می‌کند؟ (تجربی خارج ۹۶)

- ۱ (۱) ☐ $-4, -1$ (۲) ☐ $4, -1$ (۳) ☐ $-4, 1$ (۴) ☐ $4, 1$

۴۲۱ فاصله نقطه تقاطع تابع $y = x^3 + 3x - 12$ با وارون خود، از مبدأ مختصات کدام است؟ (ریاضی خارج ۱۴۰۱)

- ۱ (۱) ☐ $2\sqrt{3}$ (۲) ☐ $\sqrt{3}$ (۳) ☐ $2\sqrt{2}$ (۴) ☐ $\sqrt{2}$

۴۲۲ iq فاصله نقاط تقاطع نمودار تابع $f(x) = \frac{|x|}{x} \sqrt{|x|}$ با وارون خود، از یکدیگر کدام است؟

- ۱ (۱) ☐ $\sqrt{2}$ (۲) ☐ $2\sqrt{2}$ (۳) ☐ $\sqrt{3}$ (۴) ☐ $2\sqrt{3}$

۴۲۳ فاصله نقطه تقاطع نمودار تابع $f(x) = 2x + 3 - |x|$ با وارون خود، از مبدأ مختصات کدام است؟

- ۱ (۱) ☐ $0.75\sqrt{2}$ (۲) ☐ $1.5\sqrt{2}$ (۳) ☐ $2\sqrt{2}$ (۴) ☐ $\sqrt{2}$

۴۲۴ iq اگر $f(x) = \sqrt{4-x} - \sqrt{x} - 2$ باشد، نمودارهای دو تابع f و f^{-1} در چند نقطه متقاطع اند؟ (شبیه‌ساز ریاضی ۱۴۰۳)

- ۱ (۱) ☐ ۲ (۲) ☐ ۳ (۳) ☐ ۴ (۴) متقاطع نیستند. ☐

۴۲۵ iq نمودار وارون تابع $y = \log_6^{(2^{x+2}+32)}$ نمودار خود را در نقطه A قطع می‌کند. فاصله نقطه A از مبدأ مختصات کدام است؟

- ۱ (۱) ☐ $2\sqrt{2}$ (۲) ☐ $3\sqrt{2}$ (۳) ☐ $5\sqrt{2}$ (۴) ☐ $3\sqrt{3}$

ترکیب تابع f و f^{-1} و ترکیب تابع f^{-1} و g

سریع به نظرتون $f \circ f^{-1}$ و $f^{-1} \circ f$ با هم برابرند؟ بریم ببینیم با هم.

۴۲۶ تابع $f(x) = 2 - \sqrt{x-1}$ را در نظر بگیرید. کدام رابطه نادرست است؟

- ۱ (۱) ☐ $(f^{-1} \circ f)(1) = 1$ (۲) ☐ $(f \circ f^{-1})(1) = 1$

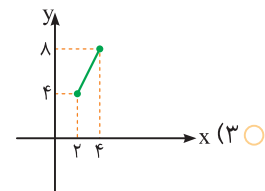
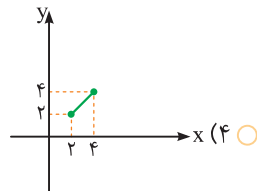
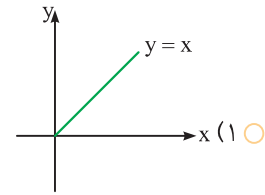
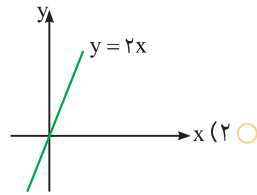
- ۳ (۳) ☐ $(f^{-1} \circ f)(3) = 3$ (۴) ☐ $(f \circ f^{-1})(3) = 3$

۴۲۷ در کدام تابع زیر رابطه $(f^{-1} \circ f)(x) = (f \circ f^{-1})(x)$ برقرار نیست؟

- ۱ (۱) ☐ $f(x) = x^2 - 4x + 6; x \geq 2$ (۲) ☐ $f(x) = 1 + 2^x$

- ۳ (۳) ☐ $f(x) = 1 + \frac{1}{x-1}$ (۴) ☐ $f(x) = 2 + \sqrt{x-2}$

۴۲۸ اگر $f(x) = 4x - x^2; x \geq 2$ باشد، نمودار تابع $y = (f^{-1} \circ f)(x) + (f \circ f^{-1})(x)$ کدام است؟



۴۲۹ تابع $f(x) = 1 - \sqrt{x-1}$ را در نظر بگیرید. نمودار دو تابع $(f \circ f^{-1})(x)$ و $(f^{-1} \circ f)(x)$ در چند نقطه متقاطع اند؟

- ۱ (۱) ☐ ۲ (۲) ☐ ۳ بی شمار ☐ ۴ متقاطع نیستند. ☐

۴۳۰ با توجه به ماشین مقابل، اگر $f(x) = 3 - \sqrt{x+1}$ باشد، آنگاه نمودار تابع $y = g(x)$ در کدام بازه، زیر محور x ها است؟

- ۱ (۱) $[-1, 8)$ ☐ ۲ (۲) $(8, +\infty)$ ☐ ۳ (۳) $(2, 3]$ ☐ ۴ (۴) $(2, 4)$ ☐

(ریاضی ۱۴۰۱)

۴۳۱ اگر $f(x) = \frac{\sqrt{2}x}{3x - \sqrt{2}}$ باشد، حاصل $f \circ f \circ f(\sqrt{2})$ کدام است؟

- ۱ (۱) $\frac{1}{2}$ ☐ ۲ (۲) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ ☐ ۳ (۳) $\sqrt{2}$ ☐ ۴ (۴) 4 ☐

۴۳۲ اگر $f(x) = x + \sqrt{x+3}$ باشد، نمودار دو تابع $f \circ f^{-1}$ و $y = \sqrt{-x+6}$ در نقطه‌ای با کدام طول متقاطع هستند؟

- ۱ (۱) 1 ☐ ۲ (۲) 2 ☐ ۳ (۳) 4 ☐ ۴ (۴) غیرمتقاطع اند. ☐

سریخ چندتا سؤال هم از وارون کردن ترکیب دو تابع ببینیم.

۴۳۳ دو تابع $f(x) = x^3 + 2$ و $g(x) = \frac{1-x}{x+2}$ را در نظر بگیرید. مقدار $(f^{-1} \circ g)^{-1}(2)$ کدام است؟

- ۱ (۱) $-\frac{18}{11}$ ☐ ۲ (۲) $-\frac{19}{11}$ ☐ ۳ (۳) $-\frac{20}{11}$ ☐ ۴ (۴) $-\frac{21}{11}$ ☐

۴۳۴ اگر $f(x) = -5 + \frac{1}{x-1}$ و $g(x) = \frac{x+3}{x+2}$ باشند، ضابطه تابع $g^{-1} \circ f^{-1}$ کدام است؟

- ۱ (۱) $x - 3$ ☐ ۲ (۲) $\frac{x+1}{3}$ ☐ ۳ (۳) $\frac{3x}{x-1}$ ☐ ۴ (۴) $x + 3$ ☐

۴۳۵ اگر $(f \circ g)(x) = \frac{3x+1}{x+1}$ و $f^{-1}(4) = 1$ باشد، مقدار $g^{-1}(1)$ کدام است؟

- ۱ (۱) 4 ☐ ۲ (۲) -3 ☐ ۳ (۳) 1 ☐ ۴ (۴) -2 ☐

یادداشت:

فصل سوم

درس اول: معادلات گویا و معادلات رادیکالی

۳

CHAPTER 3

معادلات گویا

۶۲۸ حاصل ضرب ریشه‌های معادله $\frac{x}{x-2} - \frac{3}{x+3} = 2$ کدام است؟

- ☐ ۱۸- (۱) ☐ ۶/۵- (۲) ☐ ۳- (۳) ☐ ۱/۵- (۴)

۶۲۹ تعداد و علامت ریشه‌های معادله $\frac{x-3}{x-4} + \frac{1}{2x-2} = \frac{2}{3}$ چگونه است؟

- ☐ (۱) فقط یک جواب مثبت دارد. ☐ (۲) دو جواب هم‌علامت دارد.
☐ (۳) فقط یک جواب منفی دارد. ☐ (۴) یک جواب مثبت و یک جواب منفی دارد.

۶۳۰ معادله $\frac{2x+2}{x^2+x} + \frac{3x-2}{x} = 1$ چند جواب دارد؟

- ☐ ۱ (۱) ☐ ۲ (۲) ☐ ۳ (۳) ☐ بی‌شمار (۴)

۶۳۱ جواب‌های معادله $\frac{x^2}{x^2-4} - \frac{1}{x-2} = \frac{1}{x+2}$ چگونه است؟

- ☐ (۱) جواب ندارد. ☐ (۲) یک جواب دارد.
☐ (۳) دو جواب غیر هم‌علامت دارد. ☐ (۴) دو جواب وارون هم دارد.

۶۳۲ جواب بزرگ‌تر معادله $\frac{x^2+4x-2}{2-x} = \frac{x^2+5}{x-2} + 10$ کدام است؟

- ☐ ۱ (۱) ☐ ۲ (۲) ☐ ۳ (۳) ☐ ۴ (۴)

۶۳۳ معادله $\frac{x-2}{x-5} + \frac{x-1}{x+4} = \frac{x^2-6x+5}{x^2-x-20}$ چند جواب دارد؟

- ☐ ۱ (۱) ☐ ۲ (۲) ☐ ۳ (۳) ☐ ۴ (۴)

۶۳۴ معادله $\frac{1}{x+1} + \frac{-2x+1}{x^2-3x-4} = \frac{2x+1}{x+4}$ چند جواب دارد؟

- ☐ (۱) ریشه مثبت و ۱ ریشه منفی ☐ (۲) ۱ ریشه مثبت
☐ (۳) ۲ ریشه معکوس هم و ۱ ریشه منفی ☐ (۴) ۲ ریشه قرینه هم و ۱ ریشه مثبت

۶۳۵ تعداد و علامت ریشه‌های معادله $\frac{1}{x^2-x} + \frac{x}{x-1} + \frac{x-1}{x} = 3$ چگونه است؟

- ☐ (۱) جواب ندارد. ☐ (۲) دو جواب غیر هم‌علامت دارد.
☐ (۳) دو جواب مثبت دارد. ☐ (۴) فقط یک جواب منفی دارد.

۶۳۶ معادله $\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x} = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x-2}$ چند ریشه حقیقی دارد؟

- ☐ ۱ (۱) ☐ ۲ (۲) ☐ ۳ (۳) ☐ ۴ (۴)

۶۳۷ حاصل ضرب ریشه‌های معادله $\frac{x+1}{2} - \frac{4}{x+1} = 1$ کدام است؟

- ۳ (۱) ☐ -۲ (۲) ☐ -۹ (۳) ☐ ۸ (۴) ☐

۶۳۸ مجموع ریشه‌های معادله $\frac{4}{x^2-3x} = \frac{x-1}{x^2-9} + \frac{2}{x^2+3x}$ کدام است؟

- ۶ (۱) ☐ ۵ (۲) ☐ ۴ (۳) ☐ ۳ (۴) ☐

۶۳۹ مجموع ریشه‌های معادله $\frac{x-1}{3-x} - \frac{x^2}{x^2-9} = 1 - \frac{x+2}{x+3}$ کدام است؟

- ۲ (۱) ☐ -۱/۵ (۲) ☐ -۳ (۳) ☐ -۱ (۴) ☐

۶۴۰ مجموع جواب‌های معادله $\frac{4}{x^2-2x-3} - \frac{2}{x^2-4x+3} = 3$ کدام است؟

- ۱ (۱) ☐ $\sqrt{\frac{5}{3}}$ (۲) ☐ $2\sqrt{\frac{5}{3}}$ (۳) ☐ $\frac{5}{2}$ (۴) ☐ صفر

۶۴۱ تعداد و علامت جواب معادله $\frac{1}{x^2+x} + \frac{x^2}{x^2-1} = \frac{5x-1}{x^3-x}$ چگونه است؟

۱ (۱) ☐ جواب ندارد. ۲ (۲) ☐ دو جواب هم‌علامت دارد.

۳ (۳) ☐ دو جواب قرینه دارد. ۴ (۴) ☐ فقط یک جواب مثبت دارد.

۶۴۲ مجموع جواب‌های معادله $\frac{1}{x^2+3x+2} + \frac{1}{x^2+5x+6} + \frac{1}{x^2+7x+12} = \frac{1}{8}$ برابر کدام گزینه است؟

- ۲ (۱) ☐ ۵ (۲) ☐ -۵ (۳) ☐ -۲ (۴) ☐

۶۴۳ اگر $x = 3$ جواب معادله $\frac{x-2}{ax-5} = \frac{a+2}{x-1}$ باشد، مجموع مقادیر a کدام است؟

- ۵ (۱) ☐ $\frac{5}{3}$ (۲) ☐ $-\frac{5}{3}$ (۳) ☐ $\frac{1}{3}$ (۴) ☐ $-\frac{1}{3}$

۶۴۴ جواب بزرگ‌تر معادله $\frac{x^2-4x+6}{x^2-4x+2} = x^2-4x+3$ کدام است؟

- ۱ (۱) ☐ صفر ۲ (۲) ☐ ۴ (۳) ☐ ۶ (۴) ☐

۶۴۵ حاصل جمع وارون ریشه‌های معادله $\frac{2x^2+5x+2}{2x^2+7x+3} \times \frac{x^2-9}{x^2-4} + \frac{x-2}{x+2} = \frac{10}{3}$ کدام است؟

- ۱۷ (۱) ☐ $\frac{17}{23}$ (۲) ☐ $\frac{15}{34}$ (۳) ☐ $\frac{12}{17}$ (۴) ☐ $\frac{15}{19}$

(ریاضی داخل ۱۴۰۲)

۶۴۶ مجموع ریشه‌های معادله $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{(1-x)^2} = \frac{16}{9}$ کدام است؟

- ۱ (۱) ☐ ۱/۷۵ (۲) ☐ ۲ (۳) ☐ ۲/۲۵ (۴) ☐

۶۴۷ از اتحاد $\frac{3x-1}{x^2+x-6} = \frac{a}{x+3} + \frac{b}{x-2}$ مقدار $a-b$ کدام است؟

- ۱ (۱) ☐ ۲ (۲) ☐ ۳ (۳) ☐ ۴ (۴) ☐

۶۴۸ به ازای چند مقدار a ، جواب معادله $\frac{5-x}{3+2x} = \frac{7x+1}{a^2-(2x+1)^2}$ برابر ۴ است؟

- ۱ (۱) ☐ ۲ (۲) ☐ ۳ (۳) ☐ ۴ (۴) ☐ هیچ مقدار a

۶۴۹ معادله $\frac{ax^3+2x}{x+1} = x^2-x$ دارای سه ریشه حقیقی متمایز است. مجموعه مقادیر a کدام است؟

- ۱ (۱) ☐ $(-\infty, -2)$ (۲) ☐ $(-2, +\infty)$ (۳) ☐ $(-\infty, 1]$ (۴) ☐ $(-\infty, -2) \cup (-2, 1)$

مسائل کاربردی معادلات گویا و مستطیل طلایی

۶۵۰

بهر روز یک مجله را به تنهایی ۹ ساعت زودتر از فرهاد تایپ می‌کند. اگر هر دو با هم کار کنند، در ۲۰ ساعت این کار انجام می‌شود. بهروز به تنهایی در چند ساعت این کار را انجام می‌دهد؟

(داخل ۹۸)

- ☐ ۳۲ (۱) ☐ ۳۳ (۲) ☐ ۳۵ (۳) ☐ ۳۶ (۴)

۶۵۱

شیر اول و دوم با هم در ۱۰ ساعت استخر را پر می‌کنند. اگر شیر سوم را هم باز کنیم در ۶ ساعت استخر پر می‌شود، اگر شیر اول و سوم را باز کنیم کل کار در ۱۴ ساعت انجام می‌شود. شیر اول به تنهایی در چند ساعت استخر را پر می‌کند؟

- ☐ ۲۰۰ (۱) ☐ ۲۱۰ (۲) ☐ ۲۲۰ (۳) ☐ ۲۳۰ (۴)

۶۵۲

پرنده‌ای فاصله یک کیلومتر را در جهت موافق باد رفته و در جهت مخالف باد برگشته است. اگر سرعت باد ۵ کیلومتر در ساعت و مدت رفت و برگشت ۹ دقیقه باشد، سرعت پرنده در هوای آرام چند کیلومتر در ساعت است؟

(خارج ۹۸)

- ☐ ۱۲ (۱) ☐ ۱۲/۵ (۲) ☐ ۱۳/۵ (۳) ☐ ۱۵ (۴)

۶۵۳

سرعت یک قایق موتوری در آب راکد ۱۰۰ متر در دقیقه است. این قایق فاصله ۱۲۰۰ متری در رودخانه را رفته و برگشته است. اختلاف زمان رفت و برگشت ۵ دقیقه است. سرعت آب رودخانه چند متر در دقیقه است؟

(داخل ۹۸)

- ☐ ۱۲ (۱) ☐ ۱۵ (۲) ☐ ۲۰ (۳) ☐ ۲۵ (۴)

۶۵۴

دو قطار A و B ایستگاهی به طول ۲۰۰ کیلومتر را به صورت رفت و برگشت با سرعت ثابت طی می‌کنند. اگر به دلیل نقص فنی در مسیر برگشت قطار A، ۵ کیلومتر بر دقیقه و قطار B، ۱۰ کیلومتر بر دقیقه از سرعتشان کم شود و قطار A، ۴۰۰ ثانیه زودتر به مقصد برسد، مدت زمانی که دو قطار در مسیر رفت طی می‌کنند، چقدر است؟

- ☐ ۵ (۱) دقیقه ☐ ۱۰ (۲) دقیقه ☐ ۴۰/۳ (۳) دقیقه ☐ ۲۰ (۴) دقیقه

۶۵۵

یازده کیلوگرم رنگ با غلظت ۴۰ درصد، با چهار کیلوگرم رنگ از همان نوع با غلظت ۷۰ درصد مخلوط شده‌اند. با تبخیر چند کیلوگرم از آن، غلظت محلول به ۵۰ درصد می‌رسد؟

(خارج ۹۲)

- ☐ ۰/۴ (۱) ☐ ۰/۵ (۲) ☐ ۰/۶ (۳) ☐ ۰/۸ (۴)

۶۵۶

۱۰ کیلوگرم محلول آب نمک با غلظت ۲۴ درصد را با ۴۰ کیلوگرم محلول آب نمک با غلظت ۱۴ درصد مخلوط می‌کنیم. به محلول حاصل، چند کیلوگرم نمک اضافه کنیم تا غلظت آن به ۲۰ درصد برسد؟

- ☐ ۲ (۱) ☐ ۲/۲۵ (۲) ☐ ۲/۵ (۳) ☐ ۲/۷۵ (۴)

۶۵۷

برای تهیه یک محلول ضد عفونی کننده، مقداری محلول آب و الکل با غلظت ۸۰ درصد را به ۵ لیتر محلول آب و الکل با غلظت ۲۰ درصد اضافه می‌کنیم. محلول به دست آمده، ۵۰ درصد الکل دارد. حجم محلول اولیه چقدر بوده است؟

- ☐ ۵ (۱) ☐ ۶ (۲) ☐ ۸ (۳) ☐ ۱۰ (۴)

۶۵۸

جسمی به وزن ۱۲ کیلوگرم از جنس مس و قلع، ۴۵ درصد مس در خود دارد. برای آن که درصد مس را به ۴۰ درصد برسانیم، باید چند کیلوگرم قلع به این آلیاژ اضافه کنیم؟

- ☐ ۱/۲ (۱) ☐ ۱/۵ (۲) ☐ ۱/۸ (۳) ☐ ۱/۹ (۴)

۶۵۹

شخصی چند اسباب بازی برای اهدا به مهدکودک، مجموعاً به قیمت ۱۲۰ هزار تومان خرید. اگر فروشنده برای هر اسباب بازی هزار تومان به او تخفیف می‌داد، می‌توانست با همان پول ۴ اسباب بازی دیگر هم بخرد. قیمت هر اسباب بازی بدون تخفیف چقدر بوده است؟

- ☐ ۱ (۱) شش هزار تومان ☐ ۲ (۲) هفت هزار و پانصد تومان ☐ ۳ (۳) یازده هزار تومان ☐ ۴ (۴) چهارده هزار تومان

سریخ به مستطیل طلایی توجه ویژه‌ای داشته باشید.

۶۶۰

عرض مستطیل طلایی $3 + \sqrt{5}$ است. مساحت این مستطیل کدام است؟

- ☐ ۱۷ + ۴√۵ (۱) ☐ ۱۹ + ۷√۵ (۲) ☐ ۱۸ + ۵√۵ (۳) ☐ ۲۲ + ۱۰√۵ (۴)

۶۶۱

نسبت طول به عرض یک مستطیل ۵ به ۴ است. با افزایش طول مستطیل، یک مستطیل طلایی خواهیم داشت. نسبت مساحت مستطیل طلایی به مستطیل اولیه کدام است؟

(داخل ۱۴۰۲)

- ☐ ۱ (۱) $\frac{1}{3} + \sqrt{5}$ ☐ ۲ (۲) $\frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$ ☐ ۳ (۳) $\frac{1}{6} + \frac{1}{2}\sqrt{5}$ ☐ ۴ (۴) $\frac{1}{4}(1 + \sqrt{5})$

۶۶۲ IQ از تقسیم اندازه قطر یک مستطیل به عرض آن، عدد طلایی حاصل می‌شود. مجذور نسبت طول به عرض مستطیل کدام است؟

- (۱) $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ (۲) $\frac{3+\sqrt{5}}{2}$ (۳) $\frac{2}{1+\sqrt{5}}$ (۴) $\frac{2}{3+\sqrt{5}}$

سرنخ موافقید چنتا تست ترکیبی و سطح بالاتر رو با هم ببینیم؟

۶۶۳ IQ بهروز یک مقاله را به تنهایی ۷ ساعت زودتر از فرهاد می‌نویسد. اگر فرهاد نصف مقاله را به تنهایی و نصف دیگر را به کمک بهروز انجام دهد،

در ۲۰ ساعت این کار انجام می‌شود. فرهاد به تنهایی در چند ساعت این کار را انجام می‌دهد؟

- (۱) ۲۶ (۲) ۲۸ (۳) ۳۰ (۴) ۲۴

۶۶۴ IQ دو شیر A و B به یک استخر متصل هستند. شیر A، ۱۵ ساعت دیرتر از شیر B استخر را پُر می‌کند. اگر دو شیر باز باشند، استخر در ۴ ساعت

پُر می‌شود. چند شیر از نوع A به استخر اضافه کنیم تا وقتی همه شیرها به طور همزمان باز باشند، استخر در یک ساعت پُر شود؟ (خارج ۱۴۰۲)

- (۱) ۱۲ (۲) ۱۴ (۳) ۱۵ (۴) ۱۸

۶۶۵ IQ راننده یک خودرو باید مسیری ۲۰۰ کیلومتری را طی کند. اگر او سرعتش را ۲۰ کیلومتر بر ساعت کاهش دهد، ۵۰ دقیقه دیرتر به مقصد

می‌رسد. نسبت سرعت اولیه خودرو به سرعت خودرو پس از کاهش کدام است؟

- (۱) $\frac{3}{2}$ (۲) $\frac{4}{3}$ (۳) $\frac{5}{4}$ (۴) $\frac{6}{5}$

معادلات گنگ

سرنخ تست‌های این بخش رو با معادلاتی شروع می‌کنیم که شامل یک رادیکال هستند. بعدش کم‌کم تعداد رادیکال‌ها رو بیشتر می‌کنیم.

۶۶۶ معادله $\sqrt{x^2-2} = \sqrt{x}$ چند جواب دارد؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) جواب ندارد.

۶۶۷ معادله $\sqrt{3x+4} + x = 8$ دارای چند ریشه حقیقی است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۴ (۴) صفر

۶۶۸ معادله $\sqrt{8-2x} - 3 = |x+2|$ چند جواب دارد؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) صفر (۴) ۳

۶۶۹ ریشه بزرگتر معادله $x - 9\sqrt{x+1} + 15 = 0$ چند برابر ریشه کوچک‌تر آن است؟

- (۱) ۸ (۲) ۱۲ (۳) ۱۴ (۴) ۱۶

۶۷۰ معادله $2x - \sqrt{2-x^2} = 1$ چند جواب دارد؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) صفر

۶۷۱ اگر $x = 4$ یکی از جواب‌های معادله $\sqrt{5x-x^2} + x = a$ باشد، جواب دیگر آن کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{2}$ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) جواب دیگر ندارد.

(داخل ۹۸)

۶۷۲ اگر $2a + \sqrt{2a^2+4a} = 3a$ باشد، عدد $\frac{a+1}{a}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{5}$ (۲) $\frac{2}{5}$ (۳) $\frac{3}{5}$ (۴) $\frac{4}{5}$

۶۷۳ بزرگ‌ترین ریشه معادله $\sqrt{x+7} + \sqrt{18-x} = 7$ چند برابر کوچک‌ترین ریشه آن است؟

- (۱) ۲ (۲) $\frac{9}{2}$ (۳) $\frac{5}{3}$ (۴) $\frac{7}{4}$

۶۷۴ معادله $\sqrt{x^2-4} - \sqrt{2x+1} = x-1$ چند جواب دارد؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) جواب ندارد.

۶۷۵ معادله $\sqrt{x+1} + \sqrt{2x^2+x-5} = 2\sqrt{2}$ چند جواب صحیح دارد؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) صفر

۶۷۶ معادله $\sqrt{2x+17} = 3 + \sqrt{x}$ چند جواب طبیعی دارد؟

- ۱ (۱) ☐ ۲ (۲) ☐ ۳ (۳) ☐ ۴ (۴) ☐ صفر ☐

۶۷۷ تعداد و علامت جواب‌های معادله $\sqrt{2x+3} + \sqrt{x+1} = 1$ چگونه است؟

- ۱ (۱) فقط یک جواب منفی دارد. ☐ ۲ (۲) فقط یک جواب مثبت دارد. ☐ ۳ (۳) یک جواب مثبت و یک جواب منفی دارد. ☐ ۴ (۴) جواب ندارد. ☐

۶۷۸ تعداد و علامت جواب معادله $\sqrt{x+6} - \sqrt{2x+5} = 1$ چگونه است؟

- ۱ (۱) فقط یک جواب منفی ☐ ۲ (۲) فقط یک جواب مثبت ☐ ۳ (۳) دو جواب مثبت و منفی ☐ ۴ (۴) دو جواب مثبت ☐

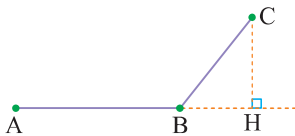
۶۷۹ برای چند مقدار صحیح و یک رقمی a ، جواب معادله $\sqrt{x} + \sqrt{x-a} = a$ ، عددی صحیح است؟

(ریاضی نوبت اول ۱۴۰۳)

- ۴ (۱) ☐ ۵ (۲) ☐ ۶ (۳) ☐ ۷ (۴) ☐

۶۸۰ در شکل زیر متحرکی از نقطه A شروع به حرکت می‌کند و پس از عبور از نقطه B به نقطه C می‌رسد. اگر $AH = 11$ ، $CH = 3$ و مسافت

پی‌شده توسط متحرک ۱۲ متر باشد، طول مسیر BC چند متر است؟



- ۳/۵ (۱) ☐ ۴ (۲) ☐ ۴/۵ (۳) ☐ ۵ (۴) ☐

سریخ در تست‌های زیر، به این موضوع توجه کنید که مجموع چندتا رادیکال با فرجه زوج برابر صفر می‌شود.

۶۸۱ تعداد جواب‌های معادله $\sqrt{x^2+3x} + \sqrt{x^2+4x+3} = 0$ کدام است؟

- ۱ (۱) صفر ☐ ۲ (۲) ☐ ۳ (۳) ☐ ۴ (۴) ☐

۶۸۲ معادله $\sqrt{x^3-x} + \sqrt{x^2-x} + \sqrt[4]{x^2-1} = 0$ چند جواب دارد؟

- ۱ (۱) صفر ☐ ۲ (۲) ☐ ۳ (۳) ☐ ۴ (۴) ☐

۶۸۳ معادله $\sqrt{x^2-ax+3} + \sqrt{x^2-5x+6} = 0$ فقط یک ریشه دارد. چند مقدار مختلف برای a وجود دارد؟

- ۱ (۱) صفر ☐ ۲ (۲) ☐ ۳ (۳) ☐ ۴ (۴) ☐

سریخ بعضی وقت‌ها لازمه از تغییر متغیر یا گویا کردن هم کمک بگیریم.

۶۸۴ تعداد جواب‌های معادله $\frac{6}{1+\sqrt{x-1}} - \sqrt{x-1} - 2 = 0$ کدام است؟

- ۱ (۱) ☐ ۲ (۲) ☐ ۳ (۳) ☐ ۴ (۴) ☐ صفر ☐

(شبیه‌ساز ریاضی ۹۴)

۶۸۵ حاصل ضرب ریشه‌های حقیقی معادله $x^2 - x - 10 = 2\sqrt{x^2 - x - 2}$ کدام است؟

- ۱ (۱) -۱۸ ☐ ۲ (۲) ۶۴ ☐ ۳ (۳) -۷۲ ☐ ۴ (۴) ۱۰۸ ☐

۶۸۶ معادله $\sqrt{x^3+8} + \sqrt[4]{x^3+8} = 6$ چند جواب دارد؟

- ۱ (۱) ☐ ۲ (۲) ☐ ۳ (۳) ☐ ۴ (۴) ☐ صفر ☐

(خارج ۱۴۰۱)

۶۸۷ معادله $\frac{1}{\sqrt{2-x}+2} - \frac{1}{2-\sqrt{2-x}} = \frac{2-x}{5\sqrt{2-x}}$ چند ریشه مثبت دارد؟

- ۱ (۱) صفر ☐ ۲ (۲) ☐ ۳ (۳) ☐ ۴ (۴) ☐

(داخل ۱۴۰۱)

۶۸۸ معادله $\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-1}+3} - \frac{\sqrt{x+1}}{3-\sqrt{x-1}} = \frac{x-1}{\sqrt{x-1}}$ چند ریشه مثبت دارد؟

- ۱ (۱) صفر ☐ ۲ (۲) ☐ ۳ (۳) ☐ ۴ (۴) ☐

معادله ۶۸۹ $\frac{1}{\sqrt{x^2 - 2x} - \sqrt{x^2 + 2x}} - \frac{1}{\sqrt{x^2 - 2x} + \sqrt{x^2 + 2x}} = \frac{x+5}{\sqrt{x^2 + 2x}}$ دارای چند جواب است؟

- ۳ (۱ ○) ۲ (۲ ○) ۱ (۳ ○) ۴ (۴ ○) صفر (○)

حالا رسیدیم به یکی از مهم‌ترین تیپ‌های این بخش که لازمه به دامنهٔ عبارت‌های زیر رادیکال توجه کنیم.

۶۹۰ معادله $\sqrt{x+1} + \sqrt{2-x} = 2x-5$ چند جواب دارد؟

- (۱) ۱ ○ (۲) ۲ ○ (۳) ۴ ○ (۴) جواب ندارد.

۶۹۱ تعداد جواب‌های معادله $\sqrt{x-2} + \sqrt{4-x} = x^2 - 5x$ کدام است؟

- (١) ١ ○ (٢) ٢ ○ (٣) ٣ ○ (٤) ٤

۶۹۲) معادله $\sqrt{x-7} + \sqrt{2+x} + \sqrt{7-x} = 3$ چند جواب دارد؟

(شبيهه ساز داخل ۱۴۰۲)

- ۳ (۴ ○ ۲ (۳ ○ ۱ (۲ ○ صفر (۱ ○

۶۹۳) معادله $\sqrt{2x-3} = \sqrt{x+1} + \sqrt{x-2} - \sqrt{2-x}$ چند ریشه حقیقی دارد؟

(تجربہ، نوبت اول ۱۴۰۲)

- (۴) صفر ○ (۳) ۱ ○ (۲) ۲ ○ (۱) ۳

۶۹۴ تعداد جواب‌های معادله $\sqrt{x + \sqrt{-x^3 + 4x^2 + 25x - 100}} + \sqrt{x^2 + \sqrt{-x^2 + 6x - 8}} = x + 2$ کدام است؟

(ریاضی خارج ۱۴۰۰)

- (١) ١ ○ (٢) ٢ ○ (٣) ٣ ○ (٤) ٤

اسرغہ: حالا وقتشہ چندتا تست سخت تر بینیم.

اگر $\sqrt{a-3} + \sqrt{a+2} = 2 + \sqrt{2a-5}$ باشد، مقدار $\frac{a+2}{3}$ کدام است؟ **۶۹۵**

- $$\begin{array}{ccccccc} \mathfrak{z} + \sqrt{\mathfrak{z}} \, (\mathfrak{z} \circ) & & \mathfrak{z} \, (\mathfrak{z} \circ) & & \sqrt{\mathfrak{z}} \, (\mathfrak{z} \circ) & & \frac{\mathfrak{z}}{\mathfrak{z}} \, (1 \circ) \end{array}$$

تعداد جواب‌های معادله $\sqrt{x+2+2\sqrt{x+1}} + \sqrt{4x+5+4\sqrt{x+1}} = 11$ کدام است؟ **۶۹۶**

- ۱ (۱ ○) ۲ (۲ ○) ۳ (۳ ○) ۴ (۴ ○) صفر

تعداد جواب‌های معادله $(x+1)(x-3) = \sqrt{x+3}$ کدام است؟ **۶۹۷**

- (۴) صفر ○ (۳) ۳ ○ (۲) ۲ ○ (۱) ۱

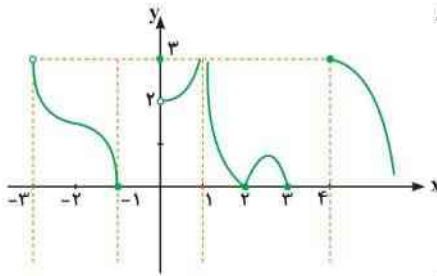
یادداشت:

فصل هفتم

 درس دوم:
مفاهیم اولیه و محاسبه حد توابع

همسایگی

سریخ بعضی وقتها باید با حل نامعادله یا محاسبه دامنه تابع، بازه رو پیدا کنی و بعد راجع به همسایگی بودنش نظر بدی.



۱۴۸۱ نمودار تابع f به صورت مقابل است. تعداد نقاط صحیحی که فقط همسایگی راست دارند

و تعداد نقاطی که فقط همسایگی چپ دارند به ترتیب کدام است؟

۱) $2 - 2$

۲) $3 - 2$

۳) $3 - 3$

۴) $3 - 1$

۱۴۸۲ به ازای چند مقدار طبیعی x بازه $(x^2 - 6, 2x + 1)$ یک همسایگی برای عدد -3 است؟

۱) 1

۲) 2

۳) 3

۴) 4

۱۴۸۳ اگر بازه $(-2, 8)$ یک همسایگی عدد $2t - 2t$ باشد، مقادیر t کدام است؟

۱) $(-2, 4)$

۲) $(-4, 2)$

۳) $(2, 4)$

۴) $(-4, -2)$

۱۴۸۴ اگر بازه $(2 - x, 5 - 2x)$ یک همسایگی برای اعداد 1 و 2 باشد، حدود x کدام است؟

۱) $(\frac{3}{4}, 1)$

۲) $(\frac{3}{4}, 2)$

۳) $(1, \frac{3}{4})$

۴) $(0, \frac{3}{4})$

۱۴۸۵ اگر به ازای $x \in (a, b)$ بازه $(\frac{1}{x+1}, \frac{1}{x-1})$ یک همسایگی عدد $\frac{1}{3}$ باشد، بیشترین مقدار $b - a$ کدام است؟

۱) $5/1$

۲) $5/1$

۳) $5/2$

۴) 3

۱۴۸۶ اگر بازه $(a + 2b, a) \cup (b, a - b - 6)$ یک همسایگی محذوف برای عدد 1 باشد، کدام یک در مورد بازه $(b + a, a - 2b)$ درست است؟

۱) همسایگی صفر است.

۲) همسایگی راست 1 است.

۳) همسایگی راست 2 است.

۴) همسایگی راست 3 است.

سریخ بعضی وقتها باید با حل نامعادله یا محاسبه دامنه تابع، بازه رو پیدا کنی و بعد راجع به همسایگی بودنش نظر بدی.

۱۴۸۷ دامنه تابع $y = \frac{\sqrt{4-x^2}}{x^2-3}$ شامل همسایگی محذوف کدام نقطه است؟

۱) -2

۲) -3

۳) $-\sqrt{2}$

۴) $-\sqrt{3}$

۱۴۸۸ اگر جواب نامعادله $5 < |x-1| - 2$ به صورت (a, b) باشد، آنگاه بازه $(\frac{a}{4}, \frac{b}{4})$ همسایگی چند عدد صحیح است؟

۱) صفر

۲) 1

۳) 2

۴) 3

۱۴۸۹ به ازای کدام مقادیر m ، حدود عبارت $\frac{m+1}{m-1}$ ، همسایگی راست 1 و همسایگی چپ 5 خواهد بود؟

۱) $(\frac{1}{3}, 4)$

۲) $(\frac{2}{3}, 2)$

۳) $(\frac{4}{3}, 2)$

۴) $(\frac{5}{3}, 2)$

۱۴۹۰ IQ اگر جواب نامعادله $-1 < \frac{3x+2}{x+1} < 2$ یک همسایگی برای عدد $\frac{1}{a+1}$ باشد، آنگاه مرکز این همسایگی کدام است؟

$\frac{-1}{2}$ (۴) ○

$\frac{1}{2}$ (۳) ○

$\frac{3}{8}$ (۲) ○

$-\frac{3}{8}$ (۱) ○

فرایندهای حدی

سرنخ بریم با دو تا تست خوب، مفهوم میل کردن در حد رو ببینیم.

۱۴۹۱ اگر جدول مقابل مربوط به تابع $f(x) = 4x$ باشد،

به ترتیب حد تابع را در چه نقطه‌ای نشان می‌دهد و a چند است؟

از سمت راست به b نزدیک می‌شود. x از سمت چپ به b نزدیک می‌شود.

x	۲	۲/۱	۲/۵	۲/۸	۲/۹	۲/۹۹	→ ۳ ←	۳/۰۱	۳/۱	۳/۲	۳/۵	۳/۹	۴
$f(x)$	۸	۸/۴					→ a ←						۱۶

از سمت راست به b نزدیک می‌شود. x از سمت چپ به b نزدیک می‌شود.

۳ - ۴ (۱) ○

۱۲ - ۴ (۲) ○

۴ - ۳ (۳) ○

۱۲ - ۳ (۴) ○

۱۴۹۲ باتوجه به الگوی مقابل چه تعداد از عبارتهای زیر صحیح است؟

(الف) با افزایش تعداد اضلاع، مساحت چندضلعی به دایره نزدیک می‌شود.

(ب) در شکل هزارم، مساحت دایره و چندضلعی دقیقاً با هم برابر است.

(پ) مساحت بخش هاشورخورده در تمام مراحل ثابت است و تغییری نمی‌کند.



۴ (۴) صفر ○

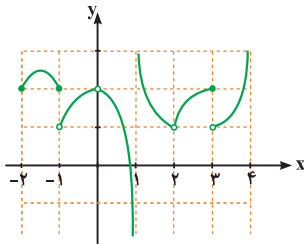
۳ (۳) ○

۲ (۲) ○

۱ (۱) ○

سرنخ حالا می‌خواهیم با داشتن نمودار، حد تابع رو پیدا کنیم.

۱۴۹۳ نمودار تابع f با دامنه $[-2, 4]$ به صورت مقابل است. این تابع در چند نقطه حد ندارد؟



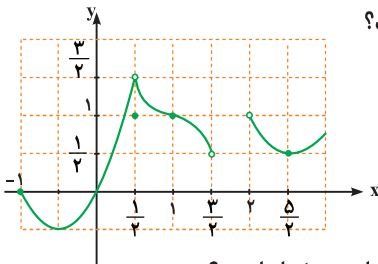
۲ (۱) ○

۳ (۲) ○

۴ (۳) ○

۵ (۴) ○

۱۴۹۴ نمودار تابع f به صورت مقابل است. حاصل $\lim_{x \rightarrow 2^+} [x]f(x) + 2 \lim_{x \rightarrow (-\frac{5}{4})^+} f(-x) - \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x-1)$ کدام است؟



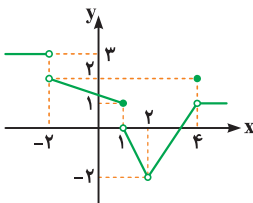
۱ (۱) ○

۲ (۲) ○

۳ (۳) ○

۴ (۴) ○

۱۴۹۵ با توجه به نمودار تابع $y = f(x)$ در شکل مقابل، اگر $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) - \lim_{x \rightarrow (-2)^-} f(x)$ باشد، a کدام است؟



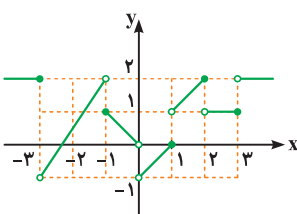
۱ (۱) ○

۲ (۲) ○

۴ (۳) ○

-۲ (۴) ○

۱۴۹۶ با توجه به نمودار تابع $y = f(x)$ در شکل مقابل، حاصل $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{f(1-x^2) + f(x+1)}{f(x^2-4)}$ کدام است؟



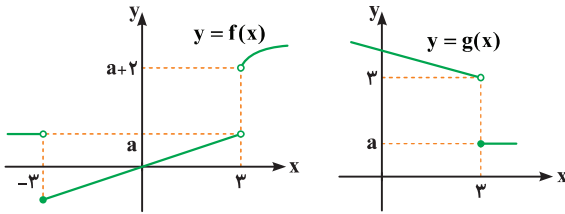
۲ (۱) ○

۴ (۲) ○

-۲ (۳) ○

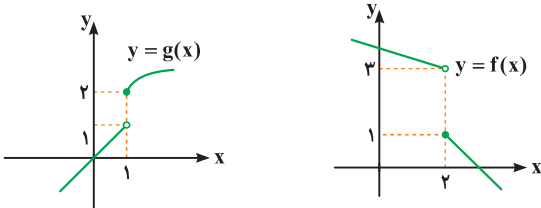
-۴ (۴) ○

۱۴۹۷ با توجه به نمودار دو تابع $y = f(x)$ و $y = g(x)$ در شکل زیر، اگر $\lim_{x \rightarrow 3^-} (g(x) - f(x)) = \lim_{x \rightarrow 3^+} (f(-x) + g(x))$ باشد، مقدار a کدام است؟



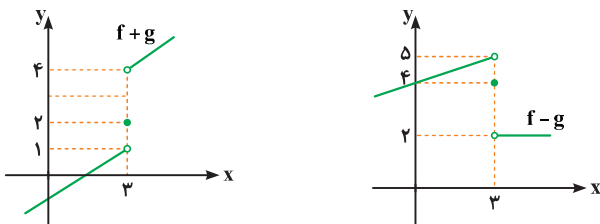
- ☐ (۱) $\frac{3}{4}$
☐ (۲) ۱
☐ (۳) $\frac{5}{4}$
☐ (۴) $\frac{3}{2}$

۱۴۹۸ با توجه به نمودار دو تابع $y = f(x)$ و $y = g(x)$ در شکل زیر، اگر $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = a$ باشد، حاصل $\lim_{x \rightarrow 1^+} g(ax - 2)$ کدام است؟



- ☐ (۱) ۱
☐ (۲) ۲
☐ (۳) ۳
☐ (۴) -۲

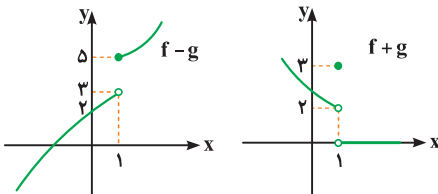
۱۴۹۹ با توجه به نمودار دو تابع $f + g$ و $f - g$ در شکل زیر، حاصل $\lim_{x \rightarrow 3^-} g(x) + \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x)$ کدام است؟



- ☐ (۱) ۱
☐ (۲) -۱
☐ (۳) ۵
☐ (۴) -۵

۱۵۰۰ شکل های زیر، نمودار تابع $f + g$ و $f - g$ هستند. مقدار $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ کدام است؟

(تجربی نوبت اول ۱۴۰۳)

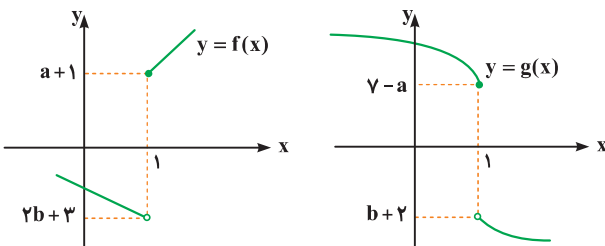


- ☐ (۱) حد ندارد.
☐ (۲) $2/25$
☐ (۳) $2/5$
☐ (۴) $2/75$

۱۵۰۱ نمودار دو تابع $y = f(x)$ و $y = g(x)$ به صورت مقابل است. اگر

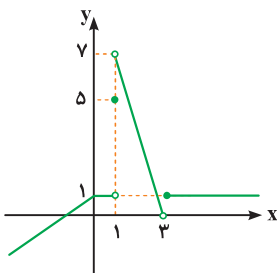
$$\lim_{x \rightarrow 1^-} (f(x) + g(x)) = 0 \text{ و } \lim_{x \rightarrow 1^+} (2f(x) - g(x)) = 11$$

باشد، مقدار $a \times b$ کدام است؟



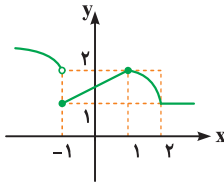
- ☐ (۱) -۱۲
☐ (۲) -۱۵
☐ (۳) ۱۲
☐ (۴) ۱۵

۱۵۰۲ نمودار تابع $y = f(x)$ به صورت مقابل است. در این صورت حاصل $\lim_{x \rightarrow 3^+} f \circ f(x)$ کدام است؟



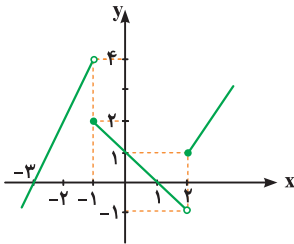
- ☐ (۱) ۵
☐ (۲) ۶
☐ (۳) ۷
☐ (۴) ۸

۱۵۰۳ با توجه به نمودار تابع $y = f(x)$ در شکل مقابل، حاصل $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(-x)}{(f \circ f)(x)}$ کدام است؟



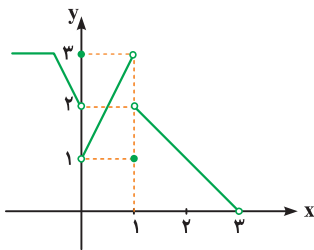
- ۱/۵ (۱)
○ ۲ (۲)
○ ۱ (۳)
○ ۱/۵ (۴)

۱۵۰۴ نمودار تابع f به صورت مقابل است. اگر $\lim_{x \rightarrow 2^-} (f \circ f)(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (f(2-x) + af(2))$ باشد، مقدار a چند است؟



- ۱ (۱)
○ ۲ (۲)
○ ۳ (۳)
○ ۴ (۴)

۱۵۰۵ شکل مقابل نمودار تابع $y = f(x)$ است، چه تعداد از عبارات زیر درست است؟



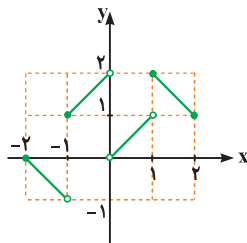
- ۲ (۲)
○ ۳ (۳)
○ ۴ (۴) صفر

الف) $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x^2 + x) = 2$

ب) $\lim_{x \rightarrow 0^-} (f^2(x) - f(x)) = 1$

پ) $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x^2 - x) = 3$

۱۵۰۶ اگر نمودار تابع f به شکل مقابل باشد، حاصل چه تعداد از حدهای زیر به درستی محاسبه شده است؟



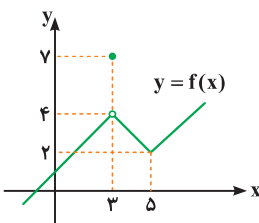
- ۱ (۱)
○ ۲ (۲)
○ ۳ (۳)
○ ۴ (۴) صفر

الف) $\lim_{x \rightarrow 1^+} f([x] - x) = 2$

ب) $\lim_{x \rightarrow 1} f(2 + \cos \pi x) = 2$

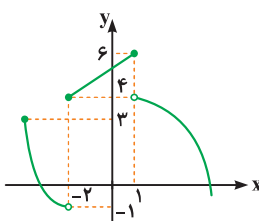
پ) $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(2 - x^3) = 2$

۱۵۰۷ نمودار تابع $y = f(x)$ به صورت زیر است و تابع $y = g(x)$ بر روی مجموعه اعداد حقیقی دارای حد است. اگر $\lim_{x \rightarrow 3} g(x) = 14$ باشد و تابع $f \times g$ روی مجموعه اعداد حقیقی پیوسته باشد، مقدار $g(3)$ کدام است؟



- ۸ (۱)
○ ۴ (۲)
○ ۷ (۳)
○ ۱۴ (۴)

۱۵۰۸ نمودار تابع $y = f(x)$ به صورت مقابل است. حاصل $\lim_{x \rightarrow (-2)^+} |f(x)| + \lim_{x \rightarrow 4^-} f^{-1}(x)$ کدام است؟



- ۶ (۱)
○ ۵ (۲)
○ ۴ (۳)
○ ۳ (۴)

فصل آخر.

ریاضیات تجربی جامع

پاسخ‌های
تشریحی

iq

Descriptive
Answers



Paul Dirac

$$m = \frac{-10 - (-4)}{3 - 1} = \frac{-6}{2} = -3$$

$$\Rightarrow y - (-4) = -3(x - 1) \Rightarrow y = -3x - 1$$

$$-3\left(\frac{4}{3}\right) - 1 = -5 \quad \text{مقدار تابع در } x = \frac{4}{3} \text{ برابر است با:}$$

شاید حواست به باز و بسته بودن بازه نبوده و به گزینه (۲) رسیدی.

رسیدی.

۱ ۱۴۲

اگر تابع خطی f را به صورت $f(x) = ax + b$ در نظر بگیریم، به کمک رابطه داده شده داریم:

$$f(x) + f(2x) + 3 = 3x - 3 \Rightarrow ax + b + a(2x) + b + 3 = 3x - 3$$

$$= 3x - 3 \Rightarrow ax + b + 2ax + b + 3 = 3x - 3$$

$$\Rightarrow 3ax + 2b + 3 = 3x - 3 \Rightarrow \begin{cases} 3a = 3 \\ 2b + 3 = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -3 \end{cases}$$

بنابراین ضابطه f به صورت $f(x) = x - 3$ است.

اکنون حاصل $f(f(0)) = f(-3) = -6$ را به دست می‌آوریم:

۳ ۱۴۳

چون f یک تابع خطی است، پس ضریب x^2 باید برابر صفر شود:

$$a - 2 = 0 \Rightarrow a = 2 \rightarrow f(x) = 4x + \frac{5}{3}$$

اکنون حاصل $f(1) + f(-2)$ را حساب می‌کنیم:

$$f(1) + f(-2) = 4(1) + \frac{5}{3} + 4(-2) + \frac{5}{3} = -4 + \frac{10}{3} = \frac{-2}{3}$$

۲ ۱۴۴

ابتدا ضابطه توابع f و g را به دست می‌آوریم:

$$f(x) = -x - 1, \quad g(x) = 2x + 5$$

عرض نقطه A برابر ۵ است و روی تابع f واقع شده است. مختصات نقطه A را به دست می‌آوریم:

$$f(x) = 5 \Rightarrow -x - 1 = 5 \Rightarrow -x = 6 \Rightarrow x = -6 \rightarrow A(-6, 5)$$

طول نقطه B برابر ۱ و روی تابع g واقع شده است. مختصات نقطه B را به دست می‌آوریم:

$$g(1) = 2(1) + 5 = 7 \rightarrow B(1, 7)$$

اکنون فاصله AB را به دست می‌آوریم:

$$AB = \sqrt{(1 - (-6))^2 + (7 - 5)^2} = \sqrt{7^2 + 2^2} = \sqrt{53}$$

۱ ۱۴۵

با فرض $f(x) = ax + b$ داریم:

$$f(f(x) + 3) = a(f(x) + 3) + b = af(x) + 3a + b$$

$$= a(ax + b) + 3a + b = a^2x + ab + 3a + b$$

در ضمن طبق صورت سؤال $f(f(x) + 3) = x + 5$ است، پس:

$$1) a^2x = x \Rightarrow a = \pm 1 \xrightarrow{a > 0} a = 1$$

$$2) ab + 3a + b = 5 \Rightarrow b + 3 + b = 5 \Rightarrow b = 1$$

بنابراین $f(x) = x + 1$ می‌باشد و $f(6) = 7$ است.

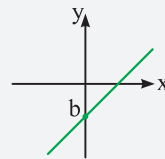
هایلایت

تابع خطی

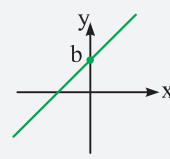
به هر تابع به صورت $f(x) = ax + b$ تابع خطی می‌گویند. می‌دانیم در این تابع a برابر شیب خط و b نشان‌دهنده عرض از مبدأ است. نمودار توابع خطی $y = ax + b$ با توجه به علامت a و b در شکل‌های زیر نشان داده شده‌اند:

نمودار تابع $y = ax + b$ در حالت‌های مختلف

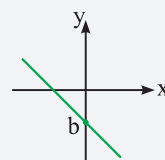
$a > 0, b < 0$



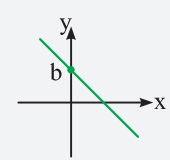
$a > 0, b > 0$



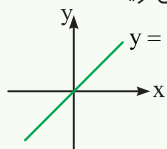
$a < 0, b < 0$



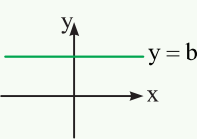
$a < 0, b > 0$



🔥 اگر $a = 1$ و $b = 0$ باشد، آنگاه تابع خطی $y = ax + b$ به تابع $y = x$ تبدیل می‌شود. به این تابع، تابع همانی می‌گویند.



توجه کنید خط $y = x$ نیمساز ناحیه اول و سوم دستگاه مختصات است.



🔥 اگر $a = 0$ باشد، آنگاه تابع خطی $y = ax + b$ به تابع $y = b$ تبدیل می‌شود. به این تابع، تابع ثابت می‌گویند.

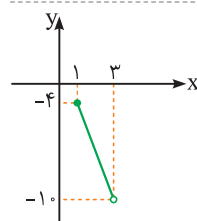
۲ ۱۴۰

چون تابع f یک تابع خطی است، باید شیب محاسبه شده با استفاده از هر دو نقطه این تابع، مقدار یکسانی داشته باشد:

$$\frac{0 - (m - 1)}{2 - 1} = \frac{0 - (m + 3)}{2 - (-3)} \Rightarrow \frac{-m + 1}{1} = \frac{-m - 3}{5}$$

$$\Rightarrow -5m + 5 = -m - 3 \Rightarrow 4m = 8 \Rightarrow m = 2$$

۴ ۱۴۱



تابع خطی با دامنه $[1, 3]$ و برد $[-4, -1]$ ، تنها به صورت روبرو قابل رسم است.

اکنون به کمک نمودار، ضابطه تابع را به دست می‌آوریم:

۱۵۲ ۴

با در نظر گرفتن جملهٔ پر توان هر گزینه، درجهٔ تابع را به دست می‌آوریم:

۱) $x(x^2) + (x^3)(x) = x^3 + x^4 \rightarrow$ درجه ۴

۲) $(x)(x)(x)(x) = x^4 \rightarrow$ درجه ۴

۳) $((2x)(x))^2 + 3x^2 + x = 4x^4 + 3x^2 + x \rightarrow$ درجه ۴

۴) $(x^3) + (x)(x)(x) = x^3 + x^3 \rightarrow$ درجه ۳

بنابراین درجهٔ چند جمله‌ای گزینه ۴ با سایر گزینه‌ها متفاوت است.

هایلایت

توابع چند جمله‌ای

هر تابع به صورت $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ که در آن n عددی صحیح و نامنفی و $a_n \neq 0$ و همه ضرایب عدد حقیقی هستند را یک تابع چند جمله‌ای از درجهٔ n می‌نامند.

مثلاً تابع $y = x^4 + \sqrt{2}x + 1$ یک چند جمله‌ای درجهٔ ۴ است، اما تابع $y = x^4 + \sqrt{2x} + 1$ چند جمله‌ای نیست.

چند ویژگی

۱) برای تابع $f(x) = 0$ درجه تعریف نمی‌شود.

۲) درجهٔ تابع ثابت $f(x) = c$ برابر صفر است.

۳) درجهٔ تابع خطی $f(x) = mx + b$ برابر ۱ است.

۴) درجهٔ تابع سهمی $f(x) = ax^2 + bx + c$ برابر ۲ است.

۱۵۳ ۴

چون تابع $f(x)$ یک چند جمله‌ای است، باید توان‌های متغیرهای آن، اعداد حسابی ($\mathbb{W}$) باشد، داریم:

۱) $(n-3) \in \mathbb{W} \Rightarrow n-3 \geq 0 \Rightarrow n \geq 3 \Rightarrow (2 + \frac{3}{n}) \in \mathbb{W}$

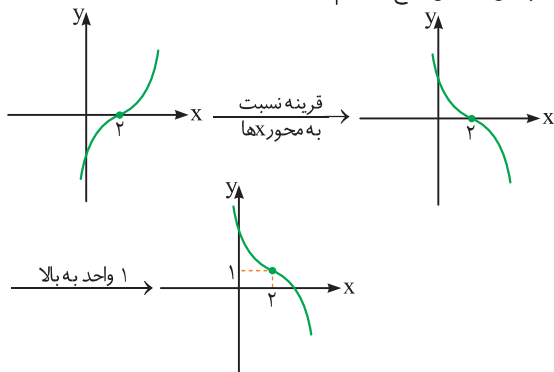
۲) $\frac{2n+3}{n} \in \mathbb{W} \Rightarrow (\frac{2n}{n} + \frac{3}{n}) \in \mathbb{W}$

از طرفی می‌دانیم $n \geq 3$ است، پس برای آنکه $2 + \frac{3}{n}$ یک عدد حسابی باشد فقط $n = 3$ قابل قبول است. بنابراین تابع $f(x)$ به صورت $f(x) = x^3 + x^3 - 2 + 1 + 3 = 2x^3 + 2$ است.

اکنون حاصل $f(3)$ را به دست می‌آوریم: $f(3) = 2(3)^3 + 2 = 56$

۱۵۴ ۲

نمودار تابع $y = x^3$ را ۲ واحد به سمت راست انتقال می‌دهیم و با کمک قوانین تبدیل تابع، داریم:



۱۴۶ ۴

چون تابع f یک تابع ثابت است، پس باید ضریب x و ضریب x^2 برابر صفر باشد:

$$\begin{cases} m+2=0 \\ n-3=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m=-2 \\ n=3 \end{cases} \Rightarrow f(x) = -6$$

حاصل $f(1/75) = -6$ است.

۱۴۷ ۳

چون تابع f یک تابع همانی است، باید مقدار مولفهٔ اول و مولفهٔ دوم هر زوج مرتب آن با هم برابر باشند:

$$\begin{cases} a+b=1 \\ a+2b=5 \\ b=1-a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=-3 \\ b=4 \end{cases} \Rightarrow f = \{(1,1), (5,5), (4,4)\}$$

حاصل $f(\sqrt{a^2 + b^2}) = f(\sqrt{1+16}) = f(\sqrt{17}) = 5$

$$f(\sqrt{a^2 + b^2}) = f(\sqrt{1+16}) = f(5) = 5$$

۱۴۸ ۱

تابع f یک تابع همانی است، بنابراین ضابطهٔ آن به صورت $f(x) = x$ است. همچنین چون تابع g یک تابع ثابت است، می‌توانیم ضابطهٔ آن را به صورت $g(x) = k$ در نظر بگیریم. به کمک رابطهٔ داده شده داریم:

$$2g^2(3) - f(5)g(5) + f(2) = 0 \Rightarrow 2k^2 - 5k + 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} k=2 \\ k=\frac{1}{2} \end{cases}$$

اکنون حاصل $f(g(6) + 1)$ را به دست می‌آوریم:

$$f(g(6) + 1) = g(6) + 1 = \begin{cases} k=2 \Rightarrow g(6) + 1 = 3 \\ k=\frac{1}{2} \Rightarrow g(6) + 1 = \frac{3}{2} \end{cases}$$

۱۴۹ ۳

چون f و g ثابت هستند. پس باید ضریب x در آن‌ها صفر باشد:

$$f(x) = b - 3ax \Rightarrow 3a = 0 \Rightarrow a = 0$$

$$g(x) = c - (3b-3)x \Rightarrow 3b-3 = 0 \Rightarrow b=1$$

از طرفی می‌دانیم $f + g = 5$ است، پس:

$$\begin{cases} f(x) = b \\ g(x) = c \end{cases} \Rightarrow b + c = 5 \xrightarrow{b=1} c = 4 \Rightarrow bc = 4$$

۱۵۰ ۳

چون f تابعی ثابت است، پس ضریب x و x^2 برابر با صفر هستند:

$$f(x) = (ax+2)(b-x) - 7x^2 = abx - ax^2 - 2x + 2b - 7x^2$$

$$\Rightarrow f(x) = (-a-7)x^2 + (ab-2)x + 2b = \begin{cases} -a-7=0 \Rightarrow a=-7 \\ ab-2=0 \Rightarrow b=\frac{2}{-7} \end{cases}$$

پس $f(x) = -\frac{4}{7}$ است و تنها عضو برد آن $-\frac{4}{7}$ است.

۱۵۱ ۲

چون تابع f ، دارای برد تک عضوی است، بنابراین تابع f یک تابع ثابت است.

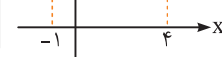
پس باید ضریب x و ضریب x^2 برابر صفر باشند:

$$\begin{cases} a-b=0 \\ b-2=0 \end{cases} \Rightarrow a=b=2 \rightarrow f(x) = -c+4$$

از طرفی برد تابع f ، برابر $\{1+2c\}$ است:

$$-c+4 = 1+2c \Rightarrow c=1 \rightarrow f(x) = 3$$

مطابق شکل، سطح زیر نمودار در فاصلهٔ



$[-1, 4]$ ، برابر $15 \times 3 = 45$ است.

۱۵۷ ۲

با توجه به نمودار تابع، می‌دانیم تابع موردنظر $y = mx^3$ است ($m < 0$) که ۲ واحد به سمت راست و یک واحد به سمت بالا انتقال یافته است، پس:

$$y = m(x-2)^3 + 1$$

$$P = 1, n = 2$$

نتیجه می‌شود که:

حال با جای‌گذاری نقطه $(3, 0)$ ، مقدار m را به دست می‌آوریم:

$$0 = m(3-2)^3 + 1 \Rightarrow m = -1$$

پس $\frac{mP}{n} = \frac{-1}{2} = -0.5$ است.

۱۵۸ ۲

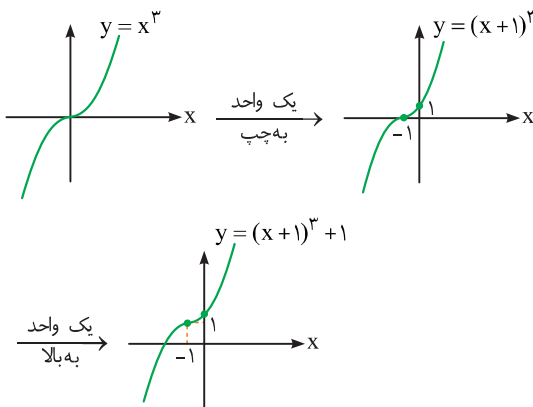
ابتدا ضابطه تابع را ساده می‌کنیم:

$$f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 9 - 7 = x^3 + 3x^2 + 3x + 2$$

از طرفی می‌دانیم $(x+1)^3 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$ ، در نتیجه $f(x)$ را می‌توان به فرم زیر بازنویسی کرد:

$$f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 1 + 1 = (x+1)^3 + 1$$

برای رسم این تابع، از انتقال $y = x^3$ استفاده می‌کنیم:



پس $a = 1$ و $b = 1$ است. بنابراین $a + b = 2$ است.

۱۵۹ ۴

ابتدا ضابطه تابع اولیه را به کمک اتحاد مکعب دو جمله‌ای ساده می‌کنیم:

$$y = (x^3 - 3x^2 + 3x - 1) + 1 = (x-1)^3 + 1$$

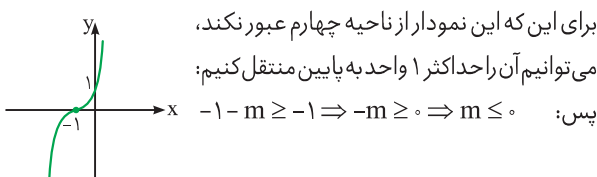
پس باید این نمودار را یک واحد به سمت چپ منتقل کنیم تا به نمودار $y = x^3 + 1$ برسیم و سپس آن را یک واحد به پایین منتقل کنیم.

۱۶۰ ۱

ابتدا به کمک اتحاد مکعب دو جمله‌ای، ضابطه f را ساده می‌کنیم:

$$f(x) = (x^3 + 3x^2 + 3x + 1) - 1 - m = (x+1)^3 - 1 - m$$

حال نمودار تابع f را بدون در نظر گرفتن مقدار $-1 - m$ رسم می‌کنیم:

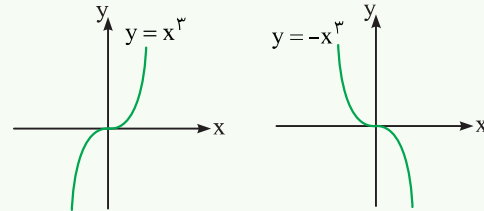


هایلایت

تابع درجه سوم

هر تابع به صورت $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ با شرط $a \neq 0$ ، یک تابع درجه ۳ است. دامنه و برد این تابع برابر $\mathbb{R}$ است.

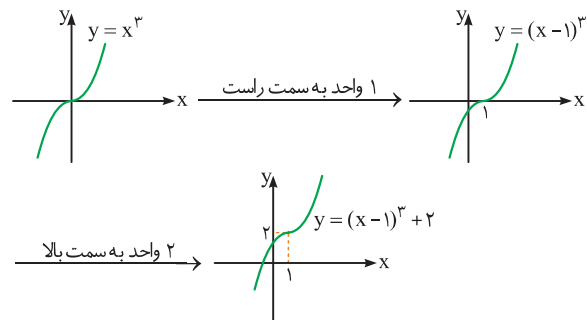
نمودار تابع $y = x^3$ و $y = -x^3$ به صورت زیر است:



تنها صفر این تابع نقطه $x = 0$ است. یعنی نمودار تابع فقط در نقطه $x = 0$ محور x ها را قطع می‌کند.

۱۵۵ ۴

ضابطه تابع داده شده را با کمک اتحاد مکعب دو جمله‌ای می‌توانیم به صورت $y = (x-1)^3 + 2$ بنویسیم. بنابراین روند رسم نمودار به صورت زیر خواهد بود:

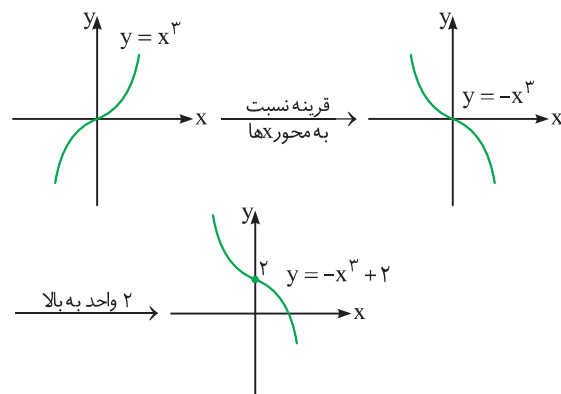


مطابق شکل، نمودار از ناحیه چهارم عبور نمی‌کند.

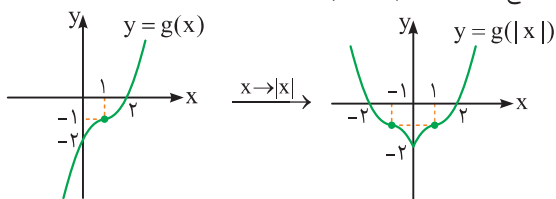
۱۵۶ ۲

در نمودار داده شده، نمودار تابع $y = -x^3$ ، ۲ واحد به سمت راست و ۱ واحد به سمت بالا منتقل شده است، پس $a = 2, b = 1$ است.

پس $y = -bx^3 + a$ به صورت $-x^3 + 2$ است و نمودار آن به صورت زیر است:

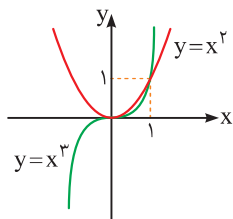


نمودار تابع $g(x)$ به صورت زیر است:

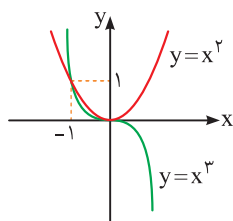


با توجه به نمودار تابع $y = g(|x|)$ واضح است این نمودار در بازه $(-2, 2)$ زیر محور x ها قرار دارد.

۱۶۶ ۲



از شکل کتاب درسی می‌دانیم نمودار $y = x^2$ و $y = x^3$ در یک دستگاه به فرم روبه‌رو است:



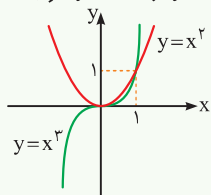
حال نمودار تابع $y = x^3$ را نسبت به محور x ها قرینه می‌کنیم تا $y = -x^3$ به دست آید.

مشاهده می‌شود که در بازه $(-\infty, -1)$ نمودار تابع $y = -x^3$ بالاتر از نمودار تابع $y = x^2$ قرار می‌گیرد.

هایلایت

مقایسه $y = x^2$ و $y = x^3$

به نمودار دو تابع $y = x^2$ و $y = x^3$ توجه کنید:



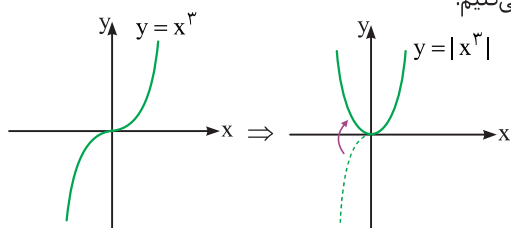
۱ این دو تابع در دو نقطه با طول‌های $x = 0$ و $x = 1$ متقاطع‌اند.

۲ در بازه $(1, +\infty)$ نمودار تابع $y = x^3$ بالاتر از نمودار تابع $y = x^2$ قرار دارد.

۳ در بازه $(0, 1)$ نمودار تابع $y = x^2$ بالاتر از نمودار تابع $y = x^3$ است.

۱۶۷ ۲

ابتدا نمودار تابع $y = x^3$ را در دستگاه مختصات رسم می‌کنیم. سپس قسمت‌هایی از نمودار که زیر محور x ها قرار دارد را، نسبت به محور x ها قرینه می‌کنیم:



۱۶۱ ۱

با توجه به اتحاد $(x-2)^3 = x^3 - 6x^2 + 12x - 8$ ، ضابطه تابع را ساده می‌کنیم:

$$y = x^3 - 6x^2 + 12x - m = (x-2)^3 + 8 - m$$

حالا نمودار را ۲ واحد به چپ و سپس ۲ واحد به بالا منتقل می‌کنیم. برای

این کار x را به $x+2$ تبدیل می‌کنیم و سپس ۲ واحد به y ها اضافه می‌کنیم:

$$y = (x+2-2)^3 + 8 - m + 2 = x^3 + 10 - m$$

در ضمن می‌دانیم ضابطه منحنی بعد از انتقال به $y = x^3 + 2$ تبدیل

$$10 - m = 2 \Rightarrow m = 8$$

می‌شود، پس:

۱۶۲ ۲

ابتدا ضابطه نمودار داده شده در شکل صورت سؤال را ساده می‌کنیم:

$$y = f(x) - xg(x) = ax + b - x(x^2 - 6x + c)$$

$$= -x^3 + 6x^2 + (a-c)x + b$$

پس شکل صورت سؤال از انتقال و قرینه‌یابی نمودار $y = x^3$ به دست

آمده است. بنابراین با توجه به قوانین انتقال، این نمودار مربوط به

$$y = 3 - (x-2)^3 \text{ است}$$

$$y = 3 - (x-2)^3 = -x^3 + 6x^2 - 12x + 11$$

با مقایسه این ضابطه با ضابطه $y = -x^3 + 6x^2 + (a-c)x + b$

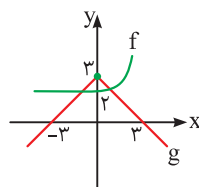
خواهیم داشت:

$$\begin{cases} a-c = -12 \\ b = 11 \end{cases} \Rightarrow a+b-c = (a-c) + b = -12 + 11 = -1$$

۱۶۳ ۲

ابتدا ضابطه f را ساده می‌کنیم و سپس نمودار دو تابع f, g را در یک

دستگاه مختصات رسم می‌کنیم:



مطابق شکل، دو تابع f و g در دو نقطه متقاطع‌اند.

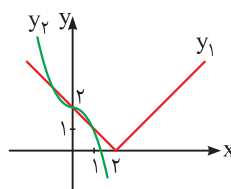
۱۶۴ ۳

برای به دست آوردن تعداد جواب‌های معادله، باید نمودار دو تابع

$y_1 = |x-2|$ و $y_2 = -x^3 + 2$ را در یک دستگاه مختصات رسم کرد.

تعداد تلاقی دو نمودار، تعداد جواب‌های

معادله داده شده است:



$$x^3 + |x-2| = 2 \Rightarrow |x-2| = \underbrace{-x^3 + 2}_{y_2}$$

مطابق شکل، دو نمودار در ۳ نقطه تلاقی دارند، بنابراین معادله داده

شده، دارای ۳ جواب است.

۱۶۵ ۳

ابتدا ضابطه تابع f را ساده می‌کنیم:

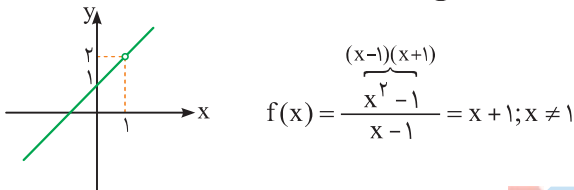
$$f(x) = (x^2 + 3)(x-3) = x^3 - 3x^2 + 3x - 9 = (x-1)^3 - 8$$

حالا نمودار را ۷ واحد به بالا منتقل می‌کنیم:

$$g(x) = f(x) + 7 = (x-1)^3 - 1$$

۱ ۱۷۱

به ازای $x = 1$ مخرج کسر صفر می‌شود، پس $D_f = \mathbb{R} - \{1\}$ بنابراین:



۳ ۱۷۲

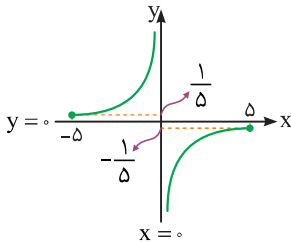
در توابع گویا باید صورت و مخرج کسر چند جمله‌ای باشند، پس $k = 0$

است و $f(x) = \frac{x^2}{x-2}$ می‌باشد. پس:

$$f(f(1) + 4) = f(-1 + 4) = f(3) = 9$$

۴ ۱۷۳

در تابع $f(x) = \frac{-1}{x} = \frac{0 \cdot x - 1}{x - 0}$ ، $x = \frac{-d}{c} = 0$ ، $y = \frac{a}{c} = 0$ ، مجانب قائم تابع $y = 0$ و مجانب افقی تابع $y = 0$ می‌باشد. در ضمن $ad - bc = (0)(0) - (-1)(1) = 1$ است. پس نمودار تابع در دامنه $\{0\} - D_f = [-5, 5]$ به صورت زیر می‌باشد:



هابلایت

توابع هموگرافیک

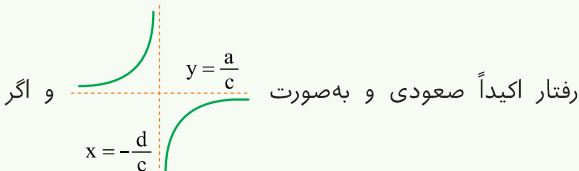
هر تابع به صورت $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ با دو شرط $c \neq 0$ و $ad - bc \neq 0$ را تابع هموگرافیک می‌گویند که دامنه آن برابر $D_f = \mathbb{R} - \{-\frac{d}{c}\}$ و برد آن برابر $R_f = \mathbb{R} - \{\frac{a}{c}\}$ می‌باشد.

برای رسم توابع هموگرافیک مراحل زیر را طی می‌کنیم:

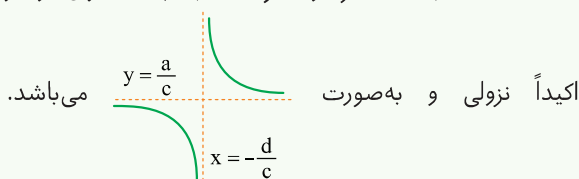
۱ یک خط چین عمودی با طولی برابر با ریشه مخرج یعنی $x = -\frac{d}{c}$ در دستگاه مختصات رسم می‌کنیم.

۲ یک خط چین افقی با عرضی برابر با $y = \frac{a}{c}$ در دستگاه مختصات رسم می‌کنیم.

۳ اگر $ad - bc > 0$ باشد، نمودار اطراف مجانب‌ها دارای



$ad - bc < 0$ باشد، نمودار اطراف مجانب‌ها دارای رفتار



حالا با توجه به نمودار دو تابع $y = x^2$

و $y = x^3$ ، نمودار دو تابع $y = x^2$

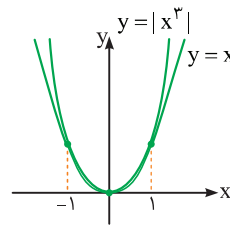
و $y = |x^3|$ را در دستگاه مختصات

رسم می‌کنیم:

با توجه به شکل مقابل، در بازه‌های

$(-1, 0)$ و $(0, 1)$ نمودار تابع $y = |x^3|$

پایین‌تر از نمودار $y = x^2$ قرار دارد.



۲ ۱۶۸

ابتدا به کمک اتحادها توابع را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$f(x) = x^2 + 4x + 4 \xrightarrow{\text{اتحاد مربع دو جمله‌ای}} f(x) = (x+2)^2$$

$$g(x) = x^3 + 6x^2 + 12x + 8 \xrightarrow{\text{اتحاد مکعب دو جمله‌ای}} g(x) = (x+2)^3$$

برای رسم تابع f ، تابع

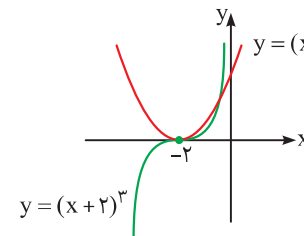
$y = x^2$ را دو واحد به

سمت چپ و برای رسم

تابع g ، تابع $y = x^3$ را

دو واحد به سمت چپ

انتقال می‌دهیم:



با توجه به نمودار دو تابع، در بازه $(-1, +\infty)$ تابع f پایین‌تر از g قرار دارد.

۳ ۱۶۹

ابتدا تابع $y = x|x|$ را به ازای ریشه عبارت داخل قدرمطلق به صورت

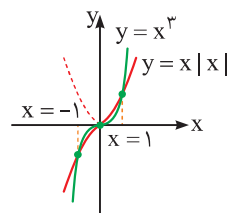
دو ضابطه‌ای می‌نویسیم:

$$y = x|x| = \begin{cases} x^2 & ; x \geq 0 \\ -x^2 & ; x < 0 \end{cases}$$

سپس هر دو تابع را در یک دستگاه

مختصات رسم می‌کنیم:

مطابق شکل در ۳ نقطه برخورد دارند.



۱ ۱۷۰

فقط در عبارت (الف) صورت و مخرج کسر چند جمله‌ای است؛ پس

فقط این عبارت مربوط به تابعی گویا است. در عبارت (ب) تابع شامل

قدرمطلق است و در عبارت (پ) در صورت کسر $\sqrt{x}$ وجود دارد.

هابلایت

توابع گویا

هر تابع به شکل $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ را یک تابع گویا می‌نامیم، که در آن

$P(x)$ و $Q(x)$ چندجمله‌ای هستند و چندجمله‌ای $Q(x)$ صفر

نیست، یعنی $Q(x) \neq 0$. پس دامنه آن‌ها به صورت زیر است:

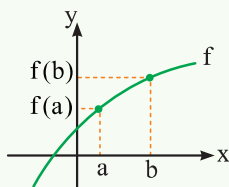
$$D_f = \mathbb{R} - \{\text{ریشه‌های مخرج}\}$$

۱۷۸ ۳

با توجه به نمودار، بزرگ‌ترین بازه صعودی برابر $[4, 8]$ و بزرگ‌ترین بازه نزولی برابر $[1, 3]$ است. بنابراین مقدار $a + d$ ، برابر $4 + 3 = 7$ است.

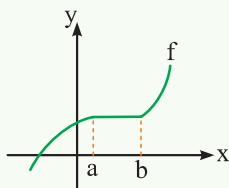
هابلایت

تابع صعودی و نزولی



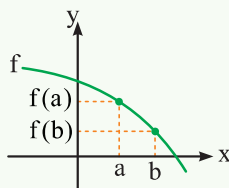
به تابعی که در آن با افزایش مقدار x ، مقدار y هم افزایش یابد، تابع اکیداً صعودی می‌گویند. در تابع اکیداً صعودی f ، برای هر دو مقدار a و b در دامنه، داریم:

$$a < b \Rightarrow f(a) < f(b)$$



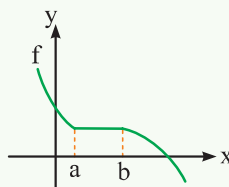
به تابعی که در آن با افزایش مقدار x ، مقدار y افزایش یابد یا ثابت بماند، تابع صعودی می‌گویند. در تابع صعودی f ، برای هر دو مقدار a و b در دامنه، داریم:

$$a < b \Rightarrow f(a) \leq f(b)$$



به تابعی که در آن، با افزایش مقدار x ، مقدار y کاهش یابد، تابع اکیداً نزولی می‌گویند. در تابع اکیداً نزولی f ، برای هر دو مقدار a و b در دامنه، داریم:

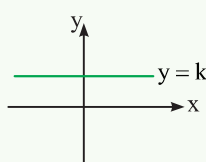
$$a < b \Rightarrow f(a) > f(b)$$



به تابعی که در آن، با افزایش مقدار x ، مقدار y کاهش یابد یا ثابت بماند، تابع نزولی می‌گویند. در تابع نزولی f ، برای هر دو مقدار a و b در دامنه، داریم:

$$a < b \Rightarrow f(a) \geq f(b)$$

🔥 کلمه اکید نشان می‌دهد تابع در هیچ بازه‌ای ثابت نیست.
🔥 اگر تابعی اکیداً یکنوا باشد، حتماً یک‌به‌یک است، اما عکس این مطلب ممکن است برقرار نباشد.

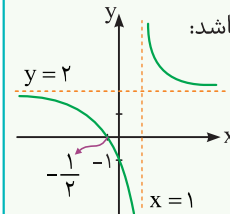


🔥 تابع ثابت $y = k$ ، تنها تابعی است که در هر بازه هم صعودی و هم نزولی می‌باشد. بنابراین یک تابع یکنوا است.

۱۷۹ ۲

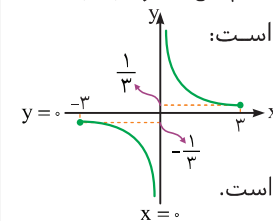
تعریف آورده شده در صورت سوال، مربوط به تعریف تابع اکیداً نزولی است. بنابراین در تابع $f(x)$ ، به دنبال بازه‌ای می‌گردیم که تابع در آن اکیداً نزولی باشد. طول رأس سهمی برابر 2 و دهانه $x_s = \frac{-(-8)}{2(2)} = 2$ و هر زیرمجموعه‌ای از آن اکیداً نزولی است.

به عنوان مثال نمودار تابع $y = \frac{2x+1}{x-1}$ به صورت زیر رسم می‌شود: ریشه مخرج و طول مجانب قائم تابع $y = \frac{a}{c} = 2$ و $x = \frac{-d}{c} = 1$ مجانب افقی تابع است. در ضمن $ad - bc = (2)(-1) - (1)(1) = -3$ است. پس نمودار تابع به صورت مقابل می‌باشد:



۱۷۴ ۲

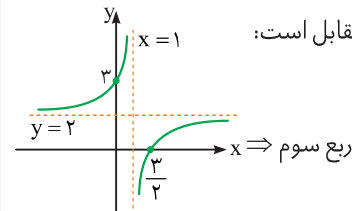
در تابع $f(x) = \frac{1}{x} = \frac{0 \cdot x + 1}{x - 0}$ ، $x = -\frac{d}{c} = 0$ مجانب قائم تابع و $y = \frac{a}{c} = 0$ مجانب افقی تابع است. در ضمن $ad - bc = (0)(0) - (1)(1) = -1$ است. پس نمودار در دامنه $\{-3, 3\} - \{0\}$ به صورت مقابل است:



پس برد تابع برابر بازه $\mathbb{R} - (-\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ است.

۱۷۵ ۳

در تابع $f(x) = \frac{2x-3}{x-1}$ ، $x = -\frac{d}{c} = 1$ مجانب قائم تابع و $y = \frac{a}{c} = 2$ مجانب افقی تابع است. از طرفی $ad - bc = (2)(-1) - (-3)(1) = 1$ است. پس نمودار به صورت مقابل است:



۱۷۶ ۲

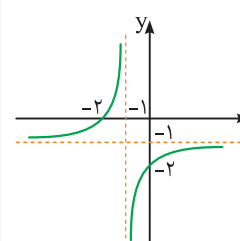
با توجه به نمودار تابع $f(x) = \frac{mx-1}{x-n}$ ، $x = 1$ طول مجانب قائم تابع می‌باشد، از طرفی با توجه به ضابطه تابع $x = n$ مجانب قائم تابع می‌باشد، پس $n = 1$ است. در ضمن با توجه به ضابطه $y = m$ ، f مجانب افقی تابع بوده و از روی نمودار واضح است که $y = 2$ مجانب افقی تابع می‌باشد، پس $m = 2$ و $mn = 2$ می‌باشد.

۱۷۷ ۱

با توجه به نمودارهای داده شده $f(x) = -2x + 2$ و $g(x) = x + 2$ است، بنابراین:

$$y = \frac{f(x) + 3x}{1 - g(x)} = \frac{x + 2}{-x - 1}$$

حالا با رسم تابع $y = \frac{x+2}{-x-1}$ داریم:



۱۸۵ ۳

چون تابع f یک تابع نزولی است پس باید $f(1) \leq f(0) \leq f(-2)$ باشد:
 $f(1) \leq f(0) \leq f(-2) \Rightarrow |m| - 2 \leq m^2 - 1 \leq 1$

حالا برای حل نامعادله فوق داریم:

$$1) m^2 - 1 \leq 1 \Rightarrow m^2 \leq 2 \Rightarrow |m| \leq \sqrt{2} \Rightarrow -\sqrt{2} \leq m \leq \sqrt{2}$$

$$2) m^2 - 1 \geq |m| - 2 \Rightarrow m^2 + 1 \geq |m| \Rightarrow m \in \mathbb{R}$$

از اشتراک بازه‌های به دست آمده، حدود m برابر $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$ به دست می‌آید که این بازه شامل ۳ عدد صحیح است.

۱۸۱ ۱

چون تابع f یک تابع اکیداً صعودی است، پس باید $f(1) < f(2) < f(3)$ باشد:
 $f(1) < f(2) < f(3) \Rightarrow a < a^2 - 2a + 2 < 1$.

حالا برای حل نامعادله فوق داریم:

$$1) a^2 - 2a + 2 < 1 \Rightarrow a^2 - 2a - 1 < 0 \Rightarrow (a - 4)(a + 2) < 0$$

$$\Rightarrow -2 < a < 4$$

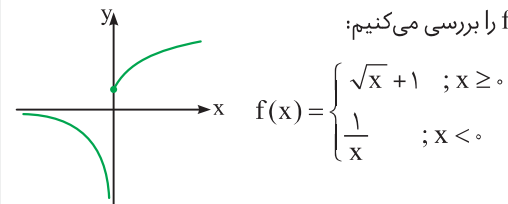
$$2) a^2 - 2a + 2 > a \Rightarrow a^2 - 3a + 2 > 0 \Rightarrow (a - 1)(a - 2) > 0$$

$$\Rightarrow a < 1 \text{ یا } a > 2$$

از اشتراک بازه‌های به دست آمده، حدود a برابر $(-2, 1) \cup (2, 4)$ به دست می‌آید که این بازه شامل ۳ عدد صحیح است.

۱۸۲ ۳

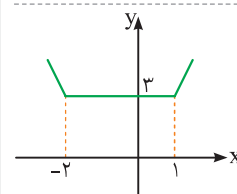
نمودار تابع f را بررسی می‌کنیم:



با توجه به نمودار، تابع $f(x)$ یک به یک است؛ اما از آن جایی که ابتدا نزولی و سپس صعودی بوده، پس غیریکنواست.

۱۸۳ ۱

نمودار تابع $f(x)$ را رسم می‌کنیم:



با توجه به نمودار، تابع $f(x)$ در بازه $(-\infty, -2)$ اکیداً نزولی است.

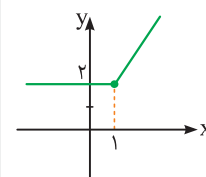
۱۸۴ ۳

باید تابع را رسم کنیم. برای رسم تابع‌های قدرمطلق، از بازه‌بندی استفاده می‌کنیم:

$$f(x) = x + 1 + |x - 1| = \begin{cases} x + 1 + x - 1 & ; x \geq 1 \\ x + 1 - (x - 1) & ; x < 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x & ; x \geq 1 \\ 2 & ; x < 1 \end{cases}$$

نمودار $f(x)$ به شکل روبه‌رو است:

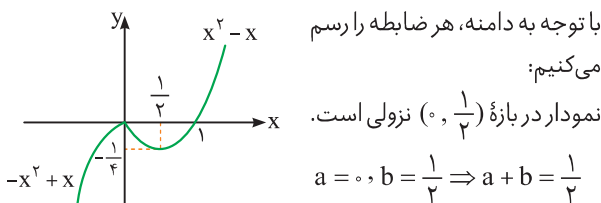


مشاهده می‌شود که تابع در بازه $(1, +\infty)$ اکیداً صعودی است، پس حداقل مقدار a برابر ۱ است.

۱۸۵ ۲

ضابطه تابع y را به صورت چند ضابطه‌ای می‌نویسیم:

$$y = \begin{cases} (x-1)(x) & x \geq 0 \\ (x-1)(-x) & x < 0 \end{cases} \Rightarrow y = \begin{cases} x^2 - x & x \geq 0 \\ -x^2 + x & x < 0 \end{cases}$$



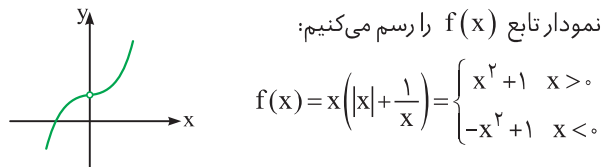
با توجه به دامنه، هر ضابطه را رسم می‌کنیم:

نمودار در بازه $(0, \frac{1}{2})$ نزولی است.

$$a = 0, b = \frac{1}{2} \Rightarrow a + b = \frac{1}{2}$$

۱۸۶ ۲

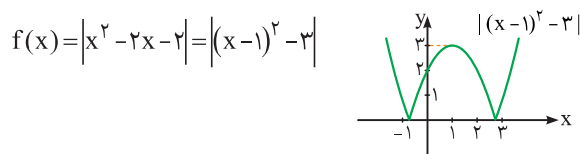
نمودار تابع $f(x)$ را رسم می‌کنیم:



با توجه به شکل واضح است این تابع همواره صعودی است.

۱۸۷ ۲

ابتدا با ساده کردن ضابطه تابع $f(x)$ ، نمودار آن را رسم می‌کنیم:



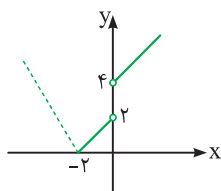
مطابق شکل، تابع $f(x)$ در بازه‌های $(-\infty, -1)$ ، $(1, 2)$ ، $(-2, -1)$ اکیداً نزولی است.

۱۸۸ ۳

$$f(x) = \begin{cases} \frac{|x|}{x} + 3 + x & ; x > 0 \\ \frac{|x|}{x} + 3 + x & ; x < 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(x) = \begin{cases} x + 4 & ; x > 0 \\ |x + 2| & ; x < 0 \end{cases}$$

حالا نمودار تابع را رسم می‌کنیم:



ما بُرد تابع را در بازه‌ای که نزولی نیست می‌خواهیم. با توجه به نمودار، تابع در بازه $(-\infty, -2)$ اکیداً نزولی است. این تابع در بازه $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ اکیداً صعودی است و بُرد آن نیز در این بازه برابر بازه $[0, 2) \cup (4, +\infty)$ است.

۱۸۹ ۲

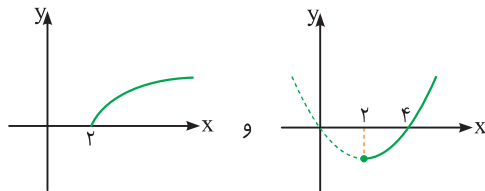
ابتدا ضابطه تابع $f(x)$ را ساده می‌کنیم:

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 4x + 4} - 1 = \sqrt{(x-2)^2} - 1 = |x-2| - 1$$

۱۹۳ ۱

ابتدا دامنه تابع $f(x)$ را به دست می‌آوریم. چون $x - 2 \geq 0 \Rightarrow x \geq 2$ با فرجه ۲ قرار دارد، پس:

از طرفی تابع $f(x)$ از مجموع دو تابع $y_1 = \sqrt{x-2}$ و $y_2 = x^2 - 4x$ تشکیل شده که هر دوی آن‌ها در بازه $[2, +\infty)$ اکیداً صعودی هستند:



پس تابع f که از جمع دو تابع اکیداً صعودی به وجود آمده نیز تابعی اکیداً صعودی است.

۱۹۴ ۳

با توجه به این‌که $f(x) = mx^2 - nx - k$ تابعی ثابت می‌باشد، باید $m = n = 0$ باشند. حال برای تابع بودن رابطه زوج مرتبی داده شده داریم:

$$\{(0, -1), (0, k), (-1, -1), (3k+2, 2k+1)\} \Rightarrow (0, -1) = (0, k) \\ \Rightarrow k = -1 \xrightarrow{f(x) = -k} f(x) = 1 \Rightarrow f(\sqrt{5}) = 1$$

۱۹۵ ۱

چون تابع f هم صعودی و هم نزولی است، بنابراین نمایانگر یک تابع ثابت است و همه مؤلفه‌های دوم زوج مرتب‌های آن با هم برابرند.

$$\begin{cases} 2a = 4 & \Rightarrow a = 2 \\ b + 3 = 4 & \Rightarrow b = 1 \\ a - c = 4 & \Rightarrow 2 - c = 4 \Rightarrow c = -2 \end{cases}$$

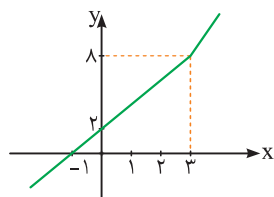
حاصل $|a| + |b| + |c|$ برابر است با:

$$|a| + |b| + |c| = |2| + |1| + |-2| = 5$$

۱۹۶ ۳

چون تابع $f(x)$ هم صعودی و هم نزولی است، پس باید نمایانگر یک تابع ثابت باشد:

$$\begin{cases} m - 1 = 0 & \Rightarrow m = 1 \\ n - 2 = 0 & \Rightarrow n = 2 \end{cases}$$



ضابطه تابع g به صورت $g(x) = 3x - 1 + |x + 3|$ است.

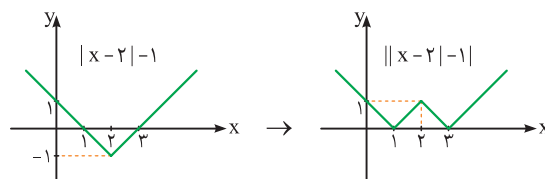
$$g(x) = \begin{cases} 4x - 4 & ; x \geq 3 \\ 2x + 2 & ; x < 3 \end{cases}$$

تابع $g(x)$ همواره صعودی است.

۱۹۷ ۴

می‌دانیم نمودار تابع $y = x^2 - mx + 3$ به صورت یک سهمی با دهانه رو به بالا است. پس برای این‌که در بازه $x \geq 1$ اکیداً صعودی باشد، باید طول رأس سهمی در بازه $x \leq 1$ قرار گیرد.

حالا با کمک انتقال نمودار تابع $f(x) = ||x - 2| - 1|$ را رسم می‌کنیم:



مطابق شکل، تابع $f(x)$ در بازه $[1, 2]$ اکیداً صعودی است.

۱۹۰ ۱

نمودار تابع $f(x)$ را رسم می‌کنیم، با توجه به نمودار، تابع در بازه $(-\infty, 2)$ اکیداً نزولی است و ضابطه آن در این بازه به صورت $y = -2x + 5$ است. حال نقاط تلاقی f و g را در بازه $(-\infty, 2)$ مشخص می‌کنیم:

$$g(x) = f(x) \Rightarrow 2x^2 - x - 1 = -2x + 5 \Rightarrow 2x^2 + x - 15 = 0$$

برای راحت‌تر تجزیه کردن عبارت $2x^2 + x - 15$ عدد ۲ را در ۱۵ ضرب می‌کنیم:

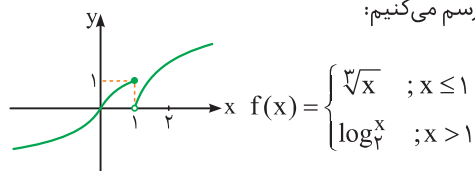
$$2x^2 + x - 15 = 0 \Rightarrow x^2 + x - 3 = 0 \Rightarrow \left(x + \frac{6}{2}\right)(2x - 5) = 0 \\ x = -3, x = 2/5$$

چون $x < 2$ است، پس فقط $x = -3$ قابل قبول است.

دام‌تستی خواست به شرط $x < 2$ باشد و گزینه به دو جواب میرسی.

۱۹۱ ۳

ابتدا نمودار را رسم می‌کنیم:

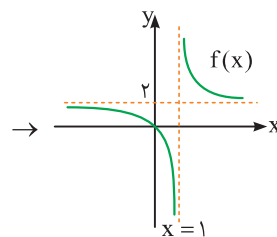


با توجه به نمودار، تابع $f(x)$ در بازه‌های $(-\infty, 1]$ و $(1, +\infty)$ و هر زیرمجموعه از این دو بازه اکیداً صعودی است.

۱۹۲ ۲

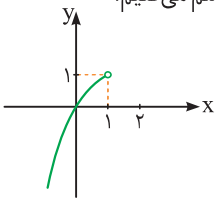
با توجه به صورت سوال، باید به دنبال بازه‌ای باشیم که تابع $f(x)$ در آن اکیداً نزولی باشد.

در تابع $y = \frac{a}{c} = 1$ و $x = -\frac{d}{c} = 1$ ، $f(x) = \frac{x}{x-1}$ مجانب افقی تابع می‌باشد. در ضمن $ad - bc = (1)(-1) - (0)(1) = -1$ است. پس نمودار تابع به صورت زیر می‌باشد:



مطابق شکل، تابع $f(x)$ در بازه $[-2, 0]$ اکیداً نزولی است.

۲۵۲ ۴

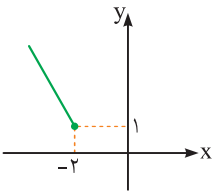
 ابتدا نمودار $y = -x^2 + 2x$ را برای $x < 1$ رسم می‌کنیم:


با توجه به نمودار بالا، چون در $x < 1$ سهمی رفتار اکیداً صعودی دارد، پس خط $y = (m+1)x - 3m + 3$ نیز باید اکیداً صعودی باشد، در نتیجه شیب آن باید مثبت باشد. همچنین در $x = 1$ مقدار $y = -x^2 + 2x$ باید از مقدار $y = (m+1)x - 3m + 3$ بیشتر باشد تا تابع در کل دامنه خود رفتار اکیداً صعودی داشته باشد.

$$\begin{cases} m+1 > 0 \Rightarrow m > -1 \\ x=1: (m+1)x - 3m + 3 \geq -(1)^2 + 2(1) \Rightarrow m \leq \frac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m > -1 \\ m \leq \frac{3}{2} \end{cases} \xrightarrow{\cap} m \in (-1, 1.5]$$

دام‌تستی خواست باشد که شیب خط باید مثبت باشد و آنگاه این مورد رو چک نکنی میزنی گزینه ۳ که غلطه.

۲۵۳ ۴



نمودار $y = |x+2| + 1$ در بازه $x < -2$ به صورت مقابل است. برای این که تابع در $\mathbb{R}$ نزولی باشد، شیب خط $y = \delta m - mx$ نباید مثبت باشد و عرض این خط در همسایگی راست -2 ، نباید بیش‌تر از ۱ باشد.

$$y = \delta m - mx; x > -2 \Rightarrow \begin{cases} -m \leq 0 \Rightarrow m \geq 0 \\ \delta m - m(-2) \leq 1 \Rightarrow m \leq \frac{1}{\delta} \end{cases} \quad (2)$$

با اشتراک (۱) و (۲) داریم: $0 \leq m \leq \frac{1}{\delta} \Rightarrow m \in [0, \frac{1}{\delta}]$

با مقایسه $[a, b]$ ، مقدار $a = 0$ و $b = \frac{1}{\delta}$ است، بنابراین:

$$a + b = 0 + \frac{1}{\delta} = \frac{1}{\delta}$$

۲۵۴ ۱

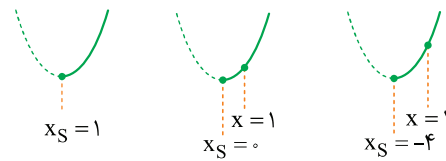
چون تابع $g(x)$ یک تابع همانی است، پس داریم:

$$\begin{cases} a-2=0 \Rightarrow a=2 \\ b=1 \\ c=0 \end{cases}$$

بنابراین $f(x) = 8x^3 - 12x^2 + 6x$ است. حالا ضابطه f را به صورت مکعب دوجمله‌ای می‌نویسیم و به کمک انتقال نمودار آن را از روی تابع $y = x^3$ رسم می‌کنیم:

$$f(x) = 8x^3 - 12x^2 + 6x - 1 + 1 = (2x-1)^3 + 1$$

برای درک بهتر به چند نمونه زیر توجه کنید:



در ضمن می‌دانیم طول رأس سهمی برابر $\frac{m}{2a} = -\frac{b}{2a}$ است، پس:

$$x_S \leq 1 \Rightarrow \frac{m}{2} \leq 1 \Rightarrow m \leq 2$$

۱۹۸ ۴

برای این که تابع f اکیداً نزولی باشد، باید ضریب x^3 منفی باشد:

$$-9 + k^2 < 0 \Rightarrow k^2 < 9 \Rightarrow |k| < 3 \Rightarrow -3 < k < 3$$

بنابراین مقادیر قابل قبول k عبارت‌اند از: $0, \pm 1, \pm 2$ و مجموع آن‌ها برابر صفر است.

۱۹۹ ۲

چون تابع f در بازه $[-3, 2]$ غیر یکنواست، پس طول رأس سهمی در این بازه قرار دارد:

$$-3 < -\frac{b}{2a} < 2 \Rightarrow -3 < -\frac{m^2-1}{-4} < 2 \Rightarrow -12 < m^2-1 < 8$$

$$\Rightarrow \underbrace{-11 < m^2}_{\text{همواره برقرار}} < 9 \Rightarrow m^2 < 9 \Rightarrow |m| < 3$$

۲۰۰ ۳

چون بازه $(-\infty, 2/5]$ بزرگ‌ترین بازه‌ای است که سهمی $y = -5x^2 + ax - 8$ در آن اکیداً صعودی است، پس $x = 2/5$ طول رأس سهمی است:

$$x_S = \frac{-a}{2(-5)} = 2/5 \Rightarrow a = 25$$

حالا برای به دست آوردن عرض رأس سهمی کافی است $x = 2/5$ را در ضابطه سهمی قرار دهیم:

$$y = -5x^2 + 25x - 8 \xrightarrow{x=2/5} y_S = -5\left(\frac{25}{25}\right) + 25\left(\frac{25}{25}\right) - 8 = \frac{93}{4} = 23.25$$

۲۰۱ ۱

ابتدا ضابطه تابع $f(x)$ را ساده می‌کنیم:

$$f(x) = 2mx - 3|x-1| = \begin{cases} 2mx - 3x + 3 & ; x \geq 1 \\ 2mx + 3x - 3 & ; x < 1 \end{cases} = \begin{cases} (2m-3)x + 3 & ; x \geq 1 \\ (2m+3)x - 3 & ; x < 1 \end{cases}$$

برای اینکه تابع $f(x)$ همواره نزولی باشد، باید شیب خط هر دو ضابطه آن منفی باشد:

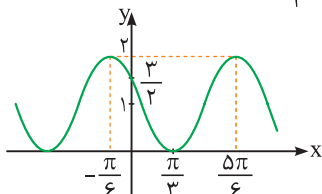
$$\begin{cases} 2m-3 < 0 \Rightarrow 2m < 3 \Rightarrow m < \frac{3}{2} \\ 2m+3 < 0 \Rightarrow 2m < -3 \Rightarrow m < -\frac{3}{2} \end{cases} \xrightarrow{\cap} m \in (-\infty, -1.5)$$

۲۵۹ ۱

ابتدا با استفاده از رابطه مثلثاتی $1 + \cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha$ ضابطه f را ساده می‌کنیم:

$$f(x) = 2 \cos^2 \left(x + \frac{\pi}{6}\right) = 1 + \cos \left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$$

حالا به کمک انتقال نمودار تابع $f(x) = 1 + \cos \left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$ را از روی تابع $y = \cos x$ رسم می‌کنیم:



مطابق شکل، تابع $f(x)$ در بازه $\left(\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{6}\right)$ اکیداً صعودی است.

۲۵۰ ۱

چون در تابع $y = 1 - 3f(2 - x)$ ضرایب f و x هر دو منفی هستند، پس نمودار نسبت به هر دو محور x و y قرینه می‌شود، بنابراین شرایط یکنوایی آن تغییر نمی‌کند. حالا چون تابع $y = f(x)$ در $-2 \leq x \leq 5$ اکیداً نزولی است، پس تابع $y = 1 - 3f(2 - x)$ نیز وقتی $-2 \leq 2 - x \leq 5$ است اکیداً نزولی است، پس:

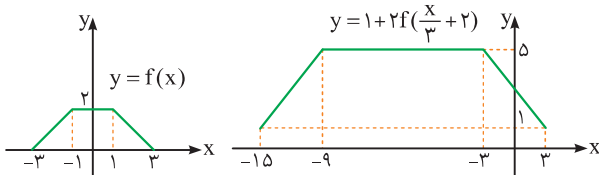
$$-2 \leq 2 - x \leq 5 \Rightarrow -4 \leq -x \leq 3 \Rightarrow -3 \leq x \leq 4$$

بنابراین تابع $y = 1 - 3f(2 - x)$ در بازه $[-3, 4]$ اکیداً نزولی است.

۲۵۱ ۲

ابتدا نمودار $y = f(x - 1)$ را یک واحد به سمت چپ منتقل می‌کنیم تا نمودار تابع $y = f(x)$ به دست آید.

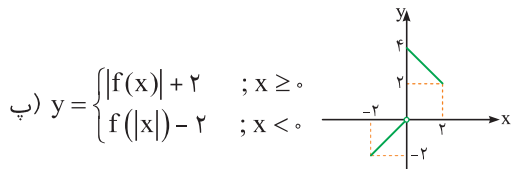
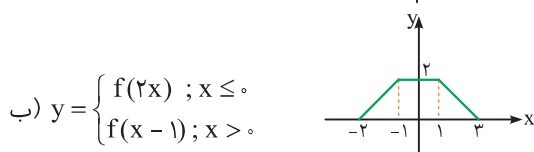
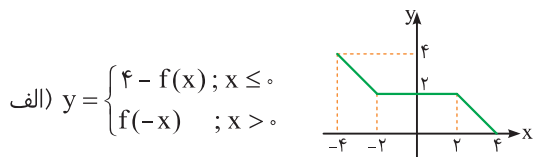
سپس با کمک انتقال نمودار تابع $y = 1 + 2f\left(\frac{x}{3} + 2\right)$ را رسم می‌کنیم:



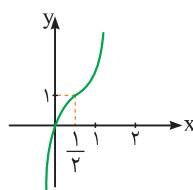
مطابق نمودار بالا، تابع $y = 1 + 2f\left(\frac{x}{3} + 2\right)$ در بازه $[-15, -9]$ اکیداً صعودی است.

۲۵۲ ۲

به کمک نمودار تابع $f(x)$ ، نمودار توابع داده شده را رسم می‌کنیم:



با توجه به نمودار، تابع اکیداً صعودی است.

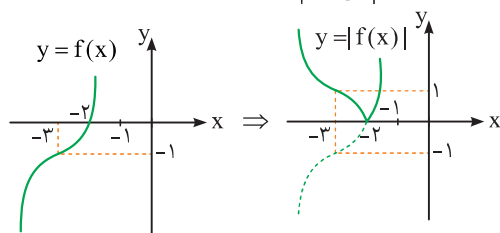


۲۵۵ ۴

چون نمودار تابع $f(x)$ فقط در نقطه $(-3, -1)$ بر خط به موازات محور x ها مماس است، پس می‌توان ضابطه آن را به صورت زیر در نظر گرفت:

$$f(x) = k(x + 3)^3 - 1$$

با توجه به ضابطه $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ ضریب x^3 برابر یک است، پس $k = 1$ می‌باشد. بنابراین $f(x) = (x + 3)^3 - 1$ است. حالا نمودار $y = |f(x)|$ را رسم می‌کنیم:



طبق نمودار، تابع $|f(x)|$ در بازه $(-2, +\infty)$ اکیداً صعودی است و کمترین مقدار k برابر ۲ است.

۲۵۶ ۴

چون یک خط افقی در نقطه $(2, -1)$ بر تابع f مماس است، می‌توانیم ضابطه آن را به صورت $f(x) = k(x - 2)^3 - 1$ در نظر بگیریم. از طرفی نمودار از مبدأ مختصات نیز می‌گذرد:

$$f(0) = 0 \Rightarrow k(0 - 2)^3 - 1 = 0 \Rightarrow -8k = 1 \Rightarrow k = -\frac{1}{8}$$

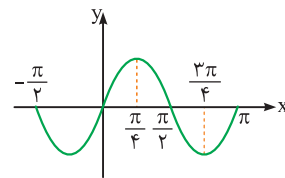
بنابراین ضابطه تابع f به صورت $f(x) = -\frac{1}{8}(x - 2)^3 - 1$ است.

اکنون طول نقطه برخورد نمودار با خط $y = 1$ را به دست می‌آوریم:

$$f(x) = 1 \Rightarrow -\frac{1}{8}(x - 2)^3 - 1 = 1 \Rightarrow -\frac{1}{8}(x - 2)^3 = 2 \Rightarrow (x - 2)^3 = -16 \Rightarrow x - 2 = \sqrt[3]{-16} \Rightarrow x = 2 - 2\sqrt[3]{2}$$

۲۵۷ ۳

نمودار تابع $f(x)$ را رسم می‌کنیم:



مطابق شکل، تابع $f(x)$ در بازه‌های

$$\left[\frac{\pi}{4}, \pi\right], \left[\frac{3\pi}{4}, \pi\right]$$

اکیداً صعودی و در بازه $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]$ اکیداً نزولی است.

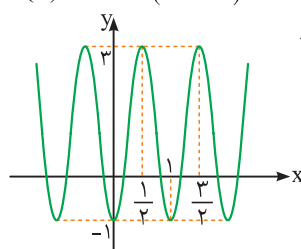
۲۵۸ ۲

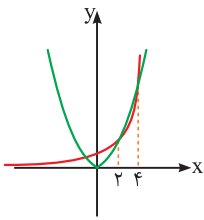
ابتدا ضابطه تابع $f(x)$ را ساده کرده و آن را رسم می‌کنیم:

$$f(x) = 1 + 2 \cos(2\pi x - \pi) = 1 + 2 \cos(\pi - 2\pi x) = 1 - 2 \cos(2\pi x)$$

با توجه به نمودار، تابع $f(x)$ در

بازه $\left[1, \frac{5}{2}\right]$ اکیداً صعودی است.





می‌دانیم معادله قبل، دارای دو جواب مثبت $x = 2$ و $x = 4$ است.

۲ ۳۴۷

در میان گزینه‌ها، نمودار تابع $y = x^3 - x + 1$ از نقطه $(\frac{1}{2}, \frac{5}{8})$ می‌گذرد:

$$y = (\frac{1}{2})^3 - \frac{1}{2} + 1 = \frac{1 - 4 + 8}{8} = \frac{5}{8}$$

پس وارون این تابع از نقطه $(\frac{5}{8}, \frac{1}{2})$ می‌گذرد.

هایلایت

اگر نقطه $A(a, b)$ روی نمودار تابع f باشد، نقطه $A'(b, a)$ روی نمودار تابع f^{-1} است و برعکس.

$$f(a) = b \Leftrightarrow f^{-1}(b) = a$$

۳ ۳۴۸

چون نقطه $A(\frac{-1}{\lambda}, \frac{-3}{\lambda})$ روی تابع وارون قرار دارد، پس نقطه $A'(\frac{-3}{\lambda}, \frac{-1}{\lambda})$ روی خود تابع $y = \frac{x}{a + a|x|}$ قرار دارد:

$$\frac{-1}{\lambda} = \frac{\frac{-3}{\lambda}}{a + a|\frac{-3}{\lambda}|} \Rightarrow \frac{1}{\lambda} = \frac{\frac{3}{\lambda}}{a + \frac{3}{\lambda}a} \Rightarrow \frac{1}{\lambda}a = \frac{3}{\lambda} \Rightarrow a = 3$$

۳ ۳۴۹

با توجه به تابع $f = \{(1, 3), (3, 4), (4, 1)\}$ ، تابع وارون به صورت $f^{-1} = \{(3, 1), (4, 3), (1, 4)\}$ است. بنابراین $f^{-1}(1) = 4$ و $f^{-1}(3) = 1$ است. پس:

$$f^{-1}(3) + f^{-1}(f^{-1}(1)) = 1 + f^{-1}(4) = 1 + 3 = 4$$

۱ ۳۵۰

با توجه به نمودار، $f(-3) = 5$ و $f(2) = 0$ است، پس:

$$\frac{f^{-1}(5) - f^{-1}(0)}{f^{-1}(5) + f^{-1}(0)} = \frac{-3 - 2}{-3 + 2} = -\frac{5}{1} = -5$$

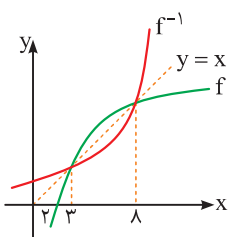
$$\Rightarrow f(a) + 2 = 4 \Rightarrow f(a) = 2$$

از طرفی با توجه به نمودار $f(0) = 2$ است، پس $a = 0$ می‌باشد.

۴ ۳۵۱

عبارت زیر رادیکال را بزرگتر یا مساوی صفر قرار می‌دهیم:

$$x - f^{-1}(x) \geq 0 \Rightarrow x \geq f^{-1}(x)$$

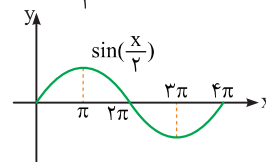


با توجه به نمودار مقابل، بازه‌ای که در آن مقادیر $y = f^{-1}(x)$ کمتر یا مساوی مقادیر $y = x$ باشد، برابر بازه $[3, 8]$ است.

طول رأس این سهمی برابر $x_s = \frac{-1}{2(4)} = -\frac{1}{8}$ است. تابع در هر یک از بازه‌های $(-\infty, -\frac{1}{8}]$ و $[-\frac{1}{8}, +\infty)$ و هر زیر مجموعه از این دو بازه یک به یک است. بنابراین بیشترین مقدار m ، برابر $-\frac{1}{8}$ است.

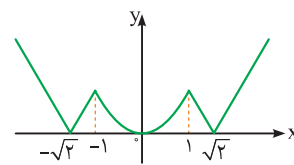
۴ ۳۴۹

مطابق شکل، تابع $f(x) = \sin(\frac{x}{4})$ با دوره تناوبی $T = \frac{2\pi}{\frac{1}{4}} = 8\pi$ در بازه‌های $(0, \pi)$ و $(3\pi, 4\pi)$ یک به یک است.



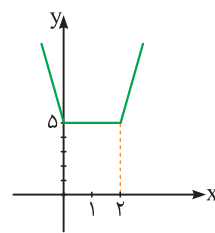
بنابراین گزینه ۴ پاسخ سوال است.

۲ ۳۴۲



ابتدا تابع f را رسم می‌کنیم: مطابق شکل، تابع f در بازه $[-\sqrt{2}, -1]$ یک به یک است.

۳ ۳۴۳

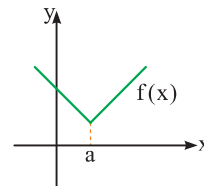


ابتدا نمودار تابع f را رسم می‌کنیم:

$$f(x) = \begin{cases} 4x - 3 & ; x > 2 \\ 5 & ; 0 \leq x \leq 2 \\ -4x + 5 & ; x < 0 \end{cases}$$

مطابق نمودار، تابع در بازه $[0, 2]$ یک به یک نیست که این بازه، شامل ۳ عدد صحیح است.

۳ ۳۴۴



برای اینکه تابع f در بازه $[1, 5]$ وارون پذیر باشد، باید در این بازه یک به یک باشد، بنابراین مقدار a نباید در بازه $[1, 5]$ قرار بگیرد:

$$\begin{cases} a \geq 5 \\ \text{یا} \Rightarrow a \in (-\infty, 1] \cup [5, +\infty) \Rightarrow a \in \mathbb{R} - (1, 5) \\ a \leq 1 \end{cases}$$

۲ ۳۴۵

برای به دست آوردن دامنه تابع f ، ابتدا ریشه‌های مخرج را به دست می‌آوریم:

$$g(x) - g(x^2 - 3) = 0 \Rightarrow g(x) = g(x^2 - 3)$$

$$\xrightarrow{\text{تابع یک به یک است}} x = x^2 - 3 \Rightarrow x^2 - x - 3 = 0$$

معادله بالا، دارای ۲ ریشه است. بنابراین دامنه تابع f ، شامل ۲ عدد حقیقی نمی‌باشد.

۲ ۳۴۶

چون تابع f یک تابع یک به یک است، پس داریم:

$$f(2^x) = f(x^2) \Rightarrow 2^x = x^2$$

هابلایت

برای محاسبه $f^{-1}(a)$ می‌توانیم ضابطه تابع f را برابر عدد a قرار دهیم و یک معادله حل کنیم.

۴ به پوره دیگه! طراح در کنگور تهری ۹۹ این سوال رو اینتوری پرسید: «فرض کنید $g(x)$ وارون تابع $f(x) = x + 2\sqrt{x}$ باشد، حاصل $g(3) + g(15)$ کدام است؟» جواب: $g(3) = f^{-1}(3) = 1$ $g(15) = f^{-1}(15) = 9$ $\xrightarrow{\text{مجموع}} 1 + 9 = 10$

۳ ۳۵۵

چون تابع g وارون تابع f می‌باشد، پس $g(1) = f^{-1}(1)$ است، حالا برای پیدا کردن $f^{-1}(1)$ ، تابع f را برابر ۱ قرار می‌دهیم:

$$f(x) = x + 2\sqrt{x} + 1 = 1 \xrightarrow{x \geq 1} x = 4 \Rightarrow g(1) = 4$$

بنابراین $g(g(1)) = g(4) = f^{-1}(4)$ است و برای پیدا کردن $f^{-1}(4)$ تابع f را برابر ۴ قرار می‌دهیم:

$$f(x) = x + 2\sqrt{x} + 1 = 4 \Rightarrow x = 9 \Rightarrow g(4) = 9 \Rightarrow g(g(1)) = 9$$

۴ به پوره دیگه! طراح ممکن بود اینتوری بپرسد: «اگر $g(x)$ وارون تابع $f(x) = 1 + x - 2\sqrt{x}$ ، $x \geq 1$ باشد، ضابطه تابع g کدام است؟» جواب: $y = x - 2\sqrt{x} + 1 = (\sqrt{x} - 1)^2 \Rightarrow \sqrt{y} = |\sqrt{x} - 1|$ $\xrightarrow{x \geq 1} \sqrt{x} = \sqrt{y} + 1 \Rightarrow g(x) = (\sqrt{x} + 1)^2$

۲ ۳۵۶

چون دامنه تابع $f(x) = \frac{ax-1}{x-b}$ برابر $\mathbb{R} - \{2\}$ است، پس $x = 2$ ریشه مخرج است:

$$2 - b = 0 \Rightarrow b = 2$$

هم‌چنین چون بُرد تابع f برابر $\mathbb{R} - \{2\}$ است، پس نسبت ضریب x صورت به ضریب x مخرج برابر ۲ است:

$$\frac{a}{1} = 2 \Rightarrow a = 2 \Rightarrow f(x) = \frac{2x-1}{x-2}$$

حالا برای پیدا کردن $f^{-1}(1)$ ، تابع f را برابر ۱ قرار می‌دهیم:

$$\frac{2x-1}{x-2} = 1 \Rightarrow 2x-1 = x-2 \Rightarrow x = -1 \Rightarrow f^{-1}(1) = -1$$

۳ ۳۵۷

برای پیدا کردن $f^{-1}(-2)$ باید در تابع $f(x) = \begin{cases} 6-2x; & x < 2 \\ 4-x; & x \geq 2 \end{cases}$ ضابطه پایینی را برابر -۲ بگذاریم:

$$4 - x = -2 \Rightarrow x = 6 \Rightarrow f^{-1}(-2) = 6$$

برای پیدا کردن $g^{-1}(-5)$ باید در تابع $g(x) = \begin{cases} 2x-3; & x < 0 \\ x-4; & x \geq 0 \end{cases}$ ضابطه بالایی را برابر -۵ بگذاریم:

$$2x - 3 = -5 \Rightarrow x = -1 \Rightarrow g^{-1}(-5) = -1$$

حالا حاصل عبارت خواسته شده را پیدا می‌کنیم:

$$f(g^{-1}(-5)) + g(f^{-1}(-2)) = f(-1) + g(6) = 8 + 2 = 10$$

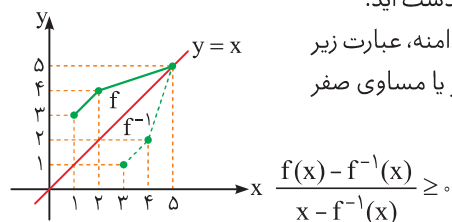
هابلایت

برای رسم نمودار f^{-1} از روی نمودار تابع f ، باید نمودار f را نسبت به خط $y = x$ قرینه کنیم.

۲ ۳۵۲

ابتدا نمودار تابع f را نسبت به نیمساز ناحیه اول و سوم قرینه می‌کنیم تا نمودار تابع f به دست آید.

حالا برای تعیین دامنه، عبارت زیر رادیکال را بزرگ‌تر یا مساوی صفر قرار می‌دهیم:



با توجه به شکل، واضح است $f(x) \geq f^{-1}(x)$ می‌باشد. پس صورت

کسر $\frac{f(x) - f^{-1}(x)}{x - f^{-1}(x)}$ همواره نامنفی است. پس کافی است، مخرج کسر مثبت باشد:

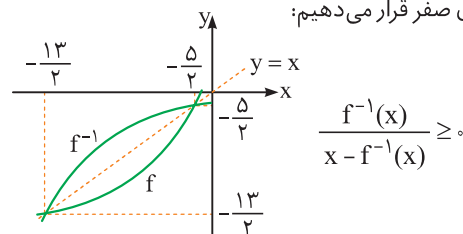
$$x - f^{-1}(x) > 0 \Rightarrow x > f^{-1}(x) \Rightarrow x \in [3, 5)$$

پس دامنه تابع شامل دو عدد صحیح $x = 3$ و $x = 4$ است.

۳ ۳۵۳

با توجه به این که نمودار f و f^{-1} نسبت به نیمساز ربع اول و سوم قرینه‌اند، پس نمودار تابع f^{-1} را به صورت زیر رسم می‌کنیم.

حالا برای پیدا کردن دامنه تابع خواسته شده، عبارت زیر رادیکال را بزرگ‌تر یا مساوی صفر قرار می‌دهیم:



چون نمودار تابع $f^{-1}(x)$ همواره پایین محور x ها است، پس $f^{-1}(x) < 0$ است. بنابراین باید مخرج کسر نیز منفی باشد.

همواره منفی

$$\frac{f^{-1}(x)}{x - f^{-1}(x)} \geq 0 \Rightarrow x - f^{-1}(x) < 0 \Rightarrow x < f^{-1}(x)$$

با توجه به شکل، نمودار تابع $f^{-1}(x)$ در بازه $(-\frac{13}{2}, -\frac{5}{2})$ بالاتر از نمودار تابع $y = x$ قرار دارد؛ که این بازه شامل ۴ عدد صحیح $x = -6, -5, -4, -3$ است.

۲ ۳۵۴

چون g وارون f است، پس باید $f^{-1}(4) - f^{-1}(12)$ را به دست آوریم. می‌توانیم تابع f را یک بار برابر ۴ و یک بار برابر ۱۲ بگذاریم:

$$\begin{cases} -x + \sqrt{-2x} = 4 \Rightarrow x = -2 \\ -x + \sqrt{-2x} = 12 \Rightarrow x = -8 \end{cases}$$

$$\Rightarrow f^{-1}(4) - f^{-1}(12) = (-2) - (-8) = 6$$

۳ ۳۵۸

 ابتدا با توجه به شکل صورت سؤال، ضابطه توابع f و g را پیدا می‌کنیم:

$$f(x) = \begin{cases} -2x + 2; & x \leq 0 \\ -x + 2; & x > 0 \end{cases}, \quad g(x) = -2x - 2$$

 حالا برای پیدا کردن $f^{-1}(-2)$ باید ضابطه پایینی تابع f را برابر -2 قرار دهیم:

$$-x + 2 = -2 \Rightarrow x = 4 \Rightarrow f^{-1}(-2) = 4$$

پس ساده‌شده عبارت مورد نظر برابر است با:

$$g(f^{-1}(-2)) + g^{-1}(f(-1)) = g(4) + g^{-1}(4)$$

 حالا برای پیدا کردن $g^{-1}(4)$ ، تابع g را برابر 4 قرار می‌دهیم:

$$g(x) = -2x - 2 = 4 \Rightarrow x = -3 \Rightarrow g^{-1}(4) = -3$$

$$\Rightarrow g(4) + g^{-1}(4) = (-1 \cdot 0) + (-3) = -13$$

۳ ۳۵۹

 می‌خواهیم حاصل $f(-\frac{2}{5}) + g^{-1}(-\frac{2}{5})$ را پیدا کنیم. با فرض

$$f(-\frac{2}{5}) = a \quad \text{نتیجه می‌گیریم} \quad f^{-1}(a) = -\frac{2}{5} \quad \text{و با فرض} \quad g^{-1}(-\frac{2}{5}) = b$$

 خواهیم داشت: $g(b) = -\frac{2}{5}$ پس داریم:

$$1) \quad f^{-1}(a) = -\frac{2}{5} \Rightarrow \frac{a}{1+|a|} = -\frac{2}{5} \xrightarrow{a < 0} \frac{a}{1-a} = -\frac{2}{5}$$

$$\Rightarrow 5a = -2 + 2a \Rightarrow 3a = -2 \Rightarrow a = -\frac{2}{3} \Rightarrow f(-\frac{2}{5}) = -\frac{2}{3}$$

$$2) \quad g(b) = -\frac{2}{5} \Rightarrow \sqrt{b} - 1 = -\frac{2}{5} \Rightarrow \sqrt{b} = \frac{3}{5}$$

$$\Rightarrow b = \frac{9}{25} \Rightarrow g^{-1}(-\frac{2}{5}) = \frac{9}{25}$$

$$\Rightarrow (f + g^{-1})(-\frac{2}{5}) = -\frac{2}{3} + \frac{9}{25} = \frac{-50 + 27}{75} = -\frac{23}{75}$$

۴ به پوره دیگه! در آزمون مهرداد ۱۴۰۰ طرح اینجوری پرسید: «اگر $f(x) = \frac{x}{1+|x|}$ باشد، حاصل $f^{-1}(-\frac{3}{7}) + f^{-1}(\frac{5}{9})$ کدوم است؟»
جواب: $-\frac{3}{7} + \frac{5}{9} = \frac{1}{9}$

۲ ۳۶۰

ابتدا مختصات نقطه برخورد را به کمک ضابطه خط به دست می‌آوریم:

$$1 \cdot y - x = -1 \xrightarrow{y=1} 1 \cdot 0 - x = -1 \Rightarrow x = 2$$

 پس مختصات نقطه برخورد تابع f^{-1} با خط برابر $(2, 1)$ است و این

 نقطه روی تابع f^{-1} قرار دارد، یعنی $f^{-1}(2) = 1$ داریم:

$$f^{-1}(2) = 1 \Rightarrow f(1) = 2 \Rightarrow (1)^3 + 6(1)^2 + a(1) + 1 = 2 \Rightarrow a = 12$$

۴ ۳۶۱

 چون وارون تابع f خط $y = 12 - x$ را در نقطه‌ای به عرض 1 قطع

می‌کند، پس:

$$y = 12 - x \xrightarrow{y=1} 1 = 12 - x \Rightarrow x = 11 \Rightarrow (11, 1) \in f^{-1}$$

 در نتیجه $(1, 2) \in f$ است، پس:

$$f(1) = 2 \Rightarrow \sqrt{1 - 2\sqrt{1 \cdot m - 1}} = 2 \Rightarrow 1 - 2\sqrt{1 \cdot m - 1} = 4$$

$$\Rightarrow \sqrt{1 \cdot m - 1} = 3 \Rightarrow m = 10 \Rightarrow f(x) = \sqrt{x - 2\sqrt{x - 1}}$$

$$\Rightarrow f(m + 4) = f(14) = 1$$

۳ ۳۶۲

 نقطه $(a, -1)$ روی خط $y = x - 4$ است، بنابراین:

$$y = x - 4 \xrightarrow{(a, -1)} -1 = a - 4 \Rightarrow a = 3$$

 پس نقطه $(3, -1)$ روی وارون تابع f قرار دارد، پس نقطه $(-1, 3)$ روی تابع f است.

$$f(x) = x^2 + \sqrt{b - ax} \xrightarrow{a=3} f(x) = x^2 + \sqrt{b - 3x}$$

$$f(-1) = 3 \Rightarrow 3 = 1 + \sqrt{b - 3(-1)} \Rightarrow 2 = \sqrt{b + 3}$$

$$\Rightarrow 4 = b + 3 \Rightarrow b = 1$$

 مقدار $a - b$ برابر است با:

$$a - b = 3 - 1 = 2$$

۴ ۳۶۳

 چون $f^{-1}(g(a)) = 6$ است، پس $f(6) = g(a)$ است. در ضمن

 $f(6) = 7$ است، پس:

$$g(a) = 7 \xrightarrow{(4, 7) \in g} a = 4$$

۳ ۳۶۴

 در تابع f داریم، $f(\frac{1}{4}) = -3$ و با توجه به این که $f(g^{-1}(a)) = -3$

 می‌توانیم نتیجه بگیریم $g^{-1}(a) = \frac{1}{4}$ بنابراین:

$$g^{-1}(a) = \frac{1}{4} \Rightarrow g(\frac{1}{4}) = a$$

 ضابطه $g(x) = -|x| \sqrt{x}$ است، پس می‌توان نوشت:

$$g(\frac{1}{4}) = -(\frac{1}{4}) \times \frac{1}{2} = -\frac{1}{8} \Rightarrow a = -\frac{1}{8}$$

۲ ۳۶۵

 چون $f^{-1}(g^{-1}(a)) = 8$ است، پس $f(8) = g^{-1}(a)$ است. از طرفی

 برای پیدا کردن $f(8)$ ، باید به سراغ ضابطه بالایی تابع f برویم:

$$x \geq 3: f(x) = \sqrt{5x + 9} \xrightarrow{x=8} f(8) = \sqrt{5 \times 8 + 9} = 7$$

 بنابراین $g^{-1}(a) = 7$ است، یعنی $g(7) = a$ است. با توجه به تابع g

 نتیجه می‌گیریم $a = 3$ است.

۲ ۳۶۶

 چون $f^{-1}(g(2a)) = 6$ است، پس $f(6) = g(2a)$ است، بنابراین با

 توجه به تابع‌های f و g داریم:

$$g(2a) = f(6) \xrightarrow{f(6)=3} g(2a) = 3 \Rightarrow \frac{2a}{2a-1} = 3$$

$$\Rightarrow 6a - 3 = 2a \Rightarrow 4a = 3 \Rightarrow a = \frac{3}{4}$$

۴ ۳۶۷

 فرض می‌کنیم $(g^{-1} \circ f^{-1})(\lambda) = \alpha$ باشد، پس:

$$g^{-1}(f^{-1}(\lambda)) = \alpha \Rightarrow g(\alpha) = f^{-1}(\lambda) \quad (1)$$

 حال برای محاسبه $f^{-1}(\lambda)$ ضابطه f را برابر λ می‌گذاریم:

$$\lambda = \frac{2}{5}x - 4 \Rightarrow \frac{2}{5}x = \lambda + 4 \Rightarrow x = \frac{5}{2}(\lambda + 4) \Rightarrow f^{-1}(\lambda) = \frac{5}{2}(\lambda + 4)$$

بنابراین از (۱) داریم:

$$g(\alpha) = f^{-1}(\lambda) = \frac{5}{2}(\lambda + 4) \Rightarrow \alpha^3 + \alpha = \frac{5}{2}(\lambda + 4) \Rightarrow \alpha = 3 \Rightarrow g^{-1}(f^{-1}(\lambda)) = 3$$

۳۷۲ ۴

ابتدا $f^{-1}(20)$ را پیدا می‌کنیم. برای این کار تابع f را برابر ۲۰ قرار

$$x + \sqrt{x} = 20 \Rightarrow x = 16 \Rightarrow f^{-1}(20) = 16$$

$$x = 2: g^{-1}(f(2)) - f(2) = g^{-1}(5) - f(2) \Rightarrow \times$$

$$x = 3: g^{-1}(f(3)) - f(3) = g^{-1}(4) - f(3) \Rightarrow \times$$

$$x = 4: g^{-1}(f(4)) - f(4) = g^{-1}(6) - f(4) = 5 - 6 = -1$$

پس برد تابع $f \circ g^{-1}$ برابر $\{2, -1\}$ است.

۳۷۳ ۱

$$f(x) = \begin{cases} 2 - 3x & ; x \leq \frac{-3}{2} \\ 2 + 2mx - x^2 & ; x > \frac{-3}{2} \end{cases}$$

باشد، باید اکیداً یکنوا باشد. چون ضابطه $y = 2 - 3x$ اکیداً نزولی است،

باید کنترل کنیم تا ضابطه $y = 2 + 2mx - x^2$ نیز اکیداً نزولی باشد. پس

$$\text{باید رأس سهمی یعنی } m = -\frac{2m}{2(-1)} = x_s \text{ کوچک‌تر یا مساوی مرز}$$

$$\text{دو ضابطه یعنی } x = \frac{-3}{2} \text{ باشد، پس:}$$

$$1) x_s = m \leq \frac{-3}{2}$$

در ضمن برای آن‌که تابع f اکیداً نزولی باشد، باید بُرد ضابطه $y = 2 - 3x$

بزرگ‌تر یا مساوی بُرد ضابطه $y = 2 + 2mx - x^2$ در $x = \frac{-3}{2}$ (مرز دو

ضابطه) باشد، پس:

$$2) x = \frac{-3}{2}: 2 - 3\left(\frac{-3}{2}\right) \geq 2 + 2m\left(\frac{-3}{2}\right) - \left(\frac{-3}{2}\right)^2$$

$$\Rightarrow \frac{13}{2} \geq -\frac{1}{2} - 3m \Rightarrow 3m \geq \frac{-27}{2} \Rightarrow m \geq \frac{-9}{4}$$

حالا از اشتراک بازه‌های (۱) و (۲)، $\frac{-9}{4} \leq m \leq \frac{-3}{2}$ می‌باشد و با توجه

به صورت سؤال چون m مقداری صحیح می‌باشد، پس $m = -2$ است.

حالا برای یافتن $f^{-1}(-19)$ کافی است $f(x)$ را برابر -19 قرار دهیم:

$$x \leq \frac{-3}{2}: f(x) = -19 \Rightarrow 2 - 3x = -19 \xrightarrow{x \leq \frac{-3}{2}} x = 7 \quad \times$$

$$x > \frac{-3}{2}: f(x) = -19 \Rightarrow 2 - 4x - x^2 = -19 \Rightarrow x^2 + 4x - 21 = 0$$

$$\xrightarrow{x > \frac{-3}{2}} \begin{cases} x = -7 & \times \\ x = 3 & \checkmark \end{cases}$$

۳۷۴ ۱

ابتدا مقدار $g(2)$ را به دست می‌آوریم، پس ضابطه g^{-1} را برابر ۲ قرار می‌دهیم:

$$1 - x = 2 \Rightarrow x = -1 \Rightarrow g(2) = -1$$

پس $f(g(2)) = f(-1)$ است. حالا $f(-1)$ را به دست می‌آوریم:

$$f(x+1) = \frac{g(x)-1}{x} \xrightarrow{x=-2} f(-1) = \frac{g(-2)-1}{-2}$$

۳۶۸ ۱

ابتدا $f^{-1}(20)$ را پیدا می‌کنیم. برای این کار تابع f را برابر ۲۰ قرار

$$x + \sqrt{x} = 20 \Rightarrow x = 16 \Rightarrow f^{-1}(20) = 16$$

پس $g^{-1}(f^{-1}(20)) = g^{-1}(16)$ است، پس ضابطه g را برابر ۱۶ می‌گذاریم:

$$\frac{9x+6}{1-x} = 16 \Rightarrow 9x+6 = 16-16x \Rightarrow 25x = 10$$

$$\Rightarrow x = \frac{2}{5} \Rightarrow g^{-1}(16) = \frac{2}{5}$$

۳۶۹ ۳

می‌دانیم $f(g^{-1}(-1)) = -\frac{11}{3}$ است، پس ابتدا ضابطه تابع f را برابر

$$\frac{2x+1}{3} = -\frac{11}{3} \Rightarrow 2x = -12 \Rightarrow x = -6$$

پس $f(-6) = -\frac{11}{3}$ است، بنابراین $g^{-1}(-1) = -6$ است. یعنی

$$g(-6) = -1$$

$$g(-6) = \frac{-12+a}{a+6} = -1 \Rightarrow -12+a = -a-6 \Rightarrow 2a = 6 \Rightarrow a = 3$$

۳۷۰ ۲

با توجه به صورت سؤال چون نمودار تابع $g^{-1} \circ f^{-1}$ محور y ها را با عرض

α قطع می‌کند، پس $g^{-1} \circ f^{-1}(0) = \alpha$ است. حالا برای به دست آوردن

$f^{-1}(0)$ کافی است $f(x)$ را برابر صفر قرار دهیم:

$$f(x) = 0 \Rightarrow \log(2x-5) = 0 \Rightarrow 2x-5 = 1 \Rightarrow x = 3$$

پس $f^{-1}(0) = 3$ و $g^{-1}(3) = g^{-1} \circ f^{-1}(0)$ است. حالا برای به دست

آوردن $g^{-1}(3)$ کافی است $g(x)$ را برابر ۳ قرار دهیم:

$$g(x) = 3 \Rightarrow x + \sqrt{2x-4} = 3 \Rightarrow \sqrt{2x-4} = 3-x$$

$$\xrightarrow{\text{توان ۲}} 2x-4 = x^2 - 6x + 9 \Rightarrow x^2 - 8x + 13 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{8+\sqrt{3}}{2} = 4 + \sqrt{3} & \times \\ x = \frac{8-\sqrt{3}}{2} = 4 - \sqrt{3} & \checkmark \end{cases}$$

در ضمن $x = 4 + \sqrt{3}$ قابل قبول نیست چون در معادله اولیه صدق

نمی‌کند، پس $g^{-1}(3) = 4 - \sqrt{3}$ است و داریم:

$$\alpha = g^{-1} \circ f^{-1}(0) = g^{-1}(3) = 4 - \sqrt{3}$$

۳۷۱ ۱

حالا خواهیم داشت: $f^{-1} = \{(2,1), (5,2), (4,3), (6,4)\}$

$$x = 2: \frac{g(2)}{g(f^{-1}(2))} = \frac{g(2)}{g(1)} \Rightarrow \times$$

$$x = 5: \frac{g(5)}{g(f^{-1}(5))} = \frac{g(5)}{g(2)} = \frac{6}{3} = 2$$

$$x = 4: \frac{g(4)}{g(f^{-1}(4))} = \frac{g(4)}{g(3)} = \frac{2}{1} = 2$$

$$x = 6: \frac{g(6)}{g(f^{-1}(6))} = \frac{g(6)}{g(4)} \Rightarrow \times$$

پس تابع $\frac{g}{g \circ f^{-1}}$ به صورت $\{(5,2), (4,2)\}$ است.

۳۸۷ ۳

روش اول: ابتدا نمودار تابع $y = 2 + \sqrt{x-1}$ را نسبت به خط $y = x$ قرینه می‌کنیم، یعنی آن را وارون می‌کنیم. توجه کنید بُرد تابع f بازه $[2, +\infty)$ است:

$$y = 2 + \sqrt{x-1} \Rightarrow \sqrt{x-1} = y-2$$

$$\xrightarrow{\text{توان ۲}} x-1 = (y-2)^2 \Rightarrow x = y^2 - 4y + 5$$

$$\Rightarrow y^{-1} = x^2 - 4x + 5; \quad x \geq 2$$

حالا نمودار را ۲ واحد به سمت راست و ۳ واحد به پایین انتقال می‌دهیم:

$$y = (x-2)^2 + 1 \xrightarrow{\text{واحد راست}} y = (x-4)^2 + 1$$

$$\xrightarrow{\text{واحد ۳ پایین}} g(x) = (x-4)^2 + 1 - 3 = (x-4)^2 - 2$$

پس $g(x) = (x-4)^2 - 2$ است و $g(4) = -2$ است.

روش دوم: می‌توانیم ضابطه تابع وارون را به صورت زیر پیدا کنیم:

$$y: (-1) \rightarrow \sqrt{} \rightarrow +2$$

$$y^{-1}: (+1) \leftarrow 2 \text{ توان } \leftarrow (-2)$$

$$\Rightarrow y^{-1} = (x-2)^2 + 1; \quad x \geq 2$$

۳۸۸ ۳

روش اول: با توجه به شکل صورت سؤال $f(x) = 1 + \sqrt{x+2}$ است. پس $a = 2$ و $b = 1$ می‌باشد. حالا، اگر نمودار تابع f را نسبت به محور y ها قرینه کنیم، به تابع $y = 1 + \sqrt{-x+2}$ می‌رسیم که بُرد آن به صورت بازه $[1, +\infty)$ است. حالا نمودار حاصل را وارون می‌کنیم:

$$y = 1 + \sqrt{-x+2} \Rightarrow \sqrt{-x+2} = y-1$$

$$\xrightarrow{\text{توان ۲}} -x+2 = (y-1)^2$$

$$\Rightarrow x = 2 - (y-1)^2$$

$$y^{-1} = 2 - (x-1)^2; \quad x \geq 1$$

در نتیجه $g(x) = 2 - (x-1)^2; \quad x \geq 1$ است و داریم:

$$g(a+b) = g(2+1) = 2 - (3-1)^2 = 2 - 4 = -2$$

روش دوم: می‌توانیم ضابطه تابع وارون را به صورت زیر پیدا کنیم:

$$y: (x-1) \rightarrow +2 \rightarrow \sqrt{} \rightarrow +1$$

$$y^{-1}: (-1) \leftarrow 2 \text{ توان } \leftarrow (-2) \rightarrow \div (-1)$$

$$\Rightarrow y^{-1} = 2 - (x-1)^2; \quad x \geq 1$$

۳۸۹ ۴

روش اول: وقتی نمودار تابع $y = \sqrt[3]{x}$ را ۲ واحد به راست و ۱ واحد به بالا منتقل کنیم به نمودار $y = 1 + \sqrt[3]{x-2}$ می‌رسیم. حالا وارون تابع حاصل را پیدا می‌کنیم:

$$y = 1 + \sqrt[3]{x-2} \Rightarrow \sqrt[3]{x-2} = y-1$$

$$\xrightarrow{\text{توان ۳}} x-2 = (y-1)^3$$

$$\Rightarrow x = (y-1)^3 + 2 \Rightarrow y^{-1} = (x-1)^3 + 2$$

۳۸۳ ۴

ابتدا ضابطه تابع f را ساده می‌کنیم:

$$f(x) = \frac{(x-2)(x-3)}{x-3} = x-2; \quad x \neq 3$$

عدد ۱ در محدوده بُرد تابع f وجود ندارد، پس: $x \neq 1$ ؛ $f^{-1}(x) = x+2$ ؛

۳۸۴ ۲

چون این دو خط نسبت به نیمساز ناحیه اول و سوم متقارن اند، پس وارون یکی از آن‌ها با دیگری برابر است. بنابراین در خط $2x - 3y = b$ جای x و y را عوض می‌کنیم تا وارون آن یعنی $2y - 3x = b$ به دست آید. پس $2y - 3x = b$ و $ax + by = 8$ برابراند، پس:

$$\begin{cases} \frac{b}{2} = \frac{a}{-3} \Rightarrow b^2 = 16 \Rightarrow b = \pm 4 \\ \frac{a}{-3} = \frac{b}{2} \Rightarrow ab = -24 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} b = 4 \Rightarrow a = -6 \Rightarrow a+b = -2 \\ b = -4 \Rightarrow a = 6 \Rightarrow a+b = 2 \end{cases}$$

۳۸۵ ۲

با توجه به تابع $f(x) = \frac{3x-1}{a}$ داریم:

$$f: (x \times 3) \rightarrow -1 \rightarrow \div a$$

$$\Rightarrow f^{-1}: (\div 3) \leftarrow +1 \leftarrow \times a$$

بنابراین $f^{-1}(x) = \frac{ax+1}{3}$ است. حالا $f(f^{-1}(x)) = 3f^{-1}(x)$ را تشکیل می‌دهیم:

$$f(3f^{-1}(x)) = f(ax+1) = \frac{3(ax+1)-1}{a} = \frac{3ax+2}{a} = 3x + \frac{2}{a}$$

$$\Rightarrow 3x + \frac{2}{a} = 3x + 5 \Rightarrow \frac{2}{a} = 5 \Rightarrow a = \frac{2}{5}$$

۳۸۶ ۱

روش اول: برای وارون کردن ضابطه تابع، ابتدا x را بر حسب y محاسبه می‌کنیم:

$$y = 2 - \sqrt{x-1} \Rightarrow \sqrt{x-1} = 2-y \Rightarrow x-1 = (2-y)^2$$

$$\Rightarrow x = (2-y)^2 + 1 \Rightarrow x = y^2 - 4y + 5$$

پس ضابطه وارون تابع به صورت $y^{-1} = x^2 - 4x + 5$ می‌باشد و چون برد تابع برابر بازه $(-\infty, 2]$ است، پس دامنه تابع وارون برابر بازه $[2, +\infty)$ می‌باشد.

روش دوم: نحوه تولید تابع $f(x) = 2 - \sqrt{x-1}$ به صورت زیر است:

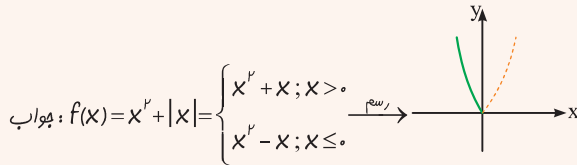
$$f: (-1) \rightarrow -\sqrt{} \rightarrow +2$$

$$f^{-1}: (+1) \leftarrow 2 \text{ توان } \leftarrow (-2)$$

پس $f^{-1}(x) = (x-2)^2 + 1$ است. در ضمن بُرد تابع f بازه $(-\infty, 2]$ است، پس دامنه تابع f^{-1} نیز برابر همین بازه است.

پرسش سریع: چون $f(5) = 0$ است، پس گزینه‌ای درست است که در آن $f^{-1}(0) = 5$ باشد. فقط گزینه (۱) این ویژگی را دارد.

۱۴ به پوره دیگه! طراح می‌تونست از علامت جمع بین x^2 و $\sqrt{x^2}$ استفاده کنه؛ تابع $f(x) = x^2 + \sqrt{x^2}$ در یک بازه نزولی است. ضابطه وارون تابع در این بازه کدام است؟



پاسخ: $f(x) = x^2 + |x| = \begin{cases} x^2 + x; & x > 0 \\ x^2 - x; & x < 0 \end{cases}$

۱۵ به پوره دیگه! طراح می‌تونست از توان ۲ استفاده کنه؛ ضابطه وارون تابع $f(x) = x\sqrt{x}$ کدام است؟

پاسخ: $f(x) = x\sqrt{x}; x \geq 0 \Rightarrow f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x^2}; x \geq 0$

۱۶ به پوره دیگه! طراح می‌تونست از توان ۲ استفاده کنه و همچنین بین x و $\sqrt{x}$ علامت جمع قرار بده! ببینیم؛ ضابطه وارون تابع $f(x) = x + \sqrt{x}$ کدام است؟

پاسخ: $f(x) = x + \sqrt{x} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = (\sqrt{x} + \frac{1}{4})^2 - \frac{1}{4}$
 $\Rightarrow f^{-1}(x) = (\sqrt{x + \frac{1}{4}} - \frac{1}{4})^2; x \geq 0$

۳۹۳ ۳

می‌دانیم اگر $f^{-1}(a) = b$ باشد، آنگاه $f(b) = a$ خواهد بود. بنابراین در یک عدد دلخواه رابطه را بررسی می‌کنیم:

$f(8) = \frac{1}{4} - \frac{3}{4} = 1 \Rightarrow f^{-1}(1) = 8$

$f^{-1}(1) = a(1) + a(\sqrt{1}) = 2a \Rightarrow 2a = 8 \Rightarrow a = 4$

۳۹۷ ۱

روش اول ابتدا ضابطه تابع f را ساده می‌کنیم:

$f(x) = \sqrt{x + 2\sqrt{x-1}} = \sqrt{(\sqrt{x-1} + 1)^2} = \sqrt{x-1} + 1$

حالا تابع $f(x) = \sqrt{x-1} + 1$ را وارون می‌کنیم. توجه کنید برد تابع برابر بازه $[1, +\infty)$ است:

$y = \sqrt{x-1} + 1 \Rightarrow \sqrt{x-1} = y-1 \Rightarrow x-1 = (y-1)^2$

$\Rightarrow x = (y-1)^2 + 1 \Rightarrow x = y^2 - 2y + 2$

$\Rightarrow f^{-1}(x) = x^2 - 2x + 2; x \geq 1$

روش دوم می‌توانیم ضابطه تابع وارون را به روش زیر نیز پیدا کنیم:

$f: (-1) \rightarrow \sqrt{} \rightarrow (+1)$

$f^{-1}: (+1) \leftarrow 2 \text{ توان} \leftarrow (-1)$

$\Rightarrow f^{-1}(x) = (x-1)^2 + 1 = x^2 - 2x + 2; x \geq 1$

روش سریع عددگذاری کنیم! چون $f(5) = 3$ است، پس گزینه‌ای درست است که $f^{-1}(3) = 5$ باشد. پس گزینه (۱) درست است.

حالا نمودار این تابع را نسبت به خط $y = x$ قریبه می‌کنیم یعنی آن را وارون می‌کنیم:

$y = (x+1)^2 - 1 \Rightarrow (x+1)^2 = y+1 \Rightarrow |x+1| = \sqrt{y+1}$

$\xrightarrow{x \leq -1} |x+1| = \sqrt{y+1} \Rightarrow -(x+1) = \sqrt{y+1}$

$\Rightarrow x = -1 - \sqrt{y+1} \Rightarrow y^{-1} = -1 - \sqrt{x+1}$

روش دوم ضابطه تابع وارون به روش زیر نیز قابل محاسبه است:

$y: (+1) \rightarrow 2 \text{ توان} \rightarrow (-1)$

$y^{-1}: (-1) \leftarrow \sqrt{} \leftarrow (+1) \Rightarrow y^{-1} = -1 - \sqrt{x+1}$

۳۹۳ ۳

روش اول ابتدا باید ضابطه تابع $y = f(x)$ را پیدا کنیم:

$\log(x) = (2x-1)g(x) = (2x-1)(2x+1) = 4x^2 - 1$

حالا با فرض $g(x) = 2x+1 = t$ داریم:

$x = \frac{t-1}{2} \Rightarrow f(g(x)) = 4x^2 - 1 \Rightarrow f(t) = 4(\frac{t-1}{2})^2 - 1 = t^2 - 2t$

پس $f(x) = x^2 - 2x$ است و طبق گفته صورت سؤال باید ضابطه وارون آن را در $x \leq 1$ پیدا کنیم:

$f(x) = x^2 - 2x + 1 - 1 = (x-1)^2 - 1; x \leq 1$

$y = (x-1)^2 - 1 \Rightarrow (x-1)^2 = y+1 \Rightarrow |x-1| = \sqrt{y+1}$

$\xrightarrow{x \leq 1} |x-1| = \sqrt{y+1} \Rightarrow -(x-1) = \sqrt{y+1}$

$\Rightarrow x = 1 - \sqrt{y+1} \Rightarrow f^{-1}(x) = 1 - \sqrt{x+1}$

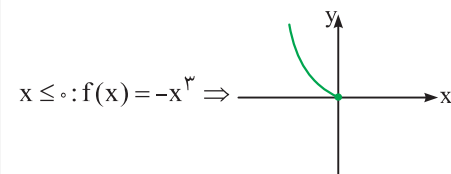
روش دوم می‌توانیم ضابطه تابع وارون را به روش زیر نیز پیدا کنیم:

$f: (-1) \rightarrow 2 \text{ توان} \rightarrow (-1)$

$f^{-1}: (+1) \leftarrow \sqrt{} \leftarrow (-1) \Rightarrow f^{-1}(x) = 1 - \sqrt{x+1}$

۳۹۵ ۱

می‌دانیم $f(x) = x^2\sqrt{x^2} = x^2|x|$ است که در بازه $x \leq 0$ نزولی است، پس:



حالا وارون تابع $f(x) = -x^3$ را به دست می‌آوریم.

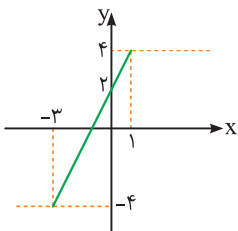
توجه کنید برد تابع f در دامنه موردنظر برابر بازه $(-\infty, 0]$ است، پس:

$y = -x^3 \xrightarrow{\sqrt[3]{}} x = -\sqrt[3]{y} \Rightarrow f^{-1}(x) = -\sqrt[3]{x}; x \geq 0$

ضابطه وارون تابع در بازه اکیدا نزولی برابر
 $-1 \leq x \leq 5$; $f^{-1}(x) = -\frac{1}{3}x + \frac{3}{2}$ است. حال طول
 نقطه برخورد منحنی f^{-1} و g را محاسبه می‌کنیم:

$$f^{-1}(x) = g(x) \Rightarrow -\frac{1}{3}x + \frac{3}{2} = x + 1 \Rightarrow \frac{3}{2}x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{1}{3}$$

۱ ۴۵۱



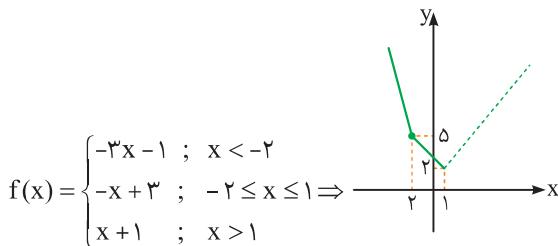
با توجه به شکل مقابل، ضابطه تابع f
 در بازه‌ای که وارون پذیر است، به صورت
 $f(x) = 2x + 2$; $-3 \leq x \leq 1$ است.
 بنابراین $f^{-1}(x) = \frac{1}{3}x - 1$; $-4 \leq x \leq 4$
 است.

حال از آن جایی که نمودار تابع $f^{-1}(x) = \frac{1}{3}x - 1$ بر خط $2y - ax = 7$
 عمود است، پس شیب آن‌ها قرینه و معکوس یکدیگر است:

$$\begin{cases} m_1 = \frac{1}{3} \\ m_2 = \frac{a}{2} \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{3} = -\frac{2}{a} \Rightarrow a = -4$$

۴ ۴۵۲

ابتدا ضابطه f را در ریشه‌های درون قدرمطلق باز می‌کنیم:



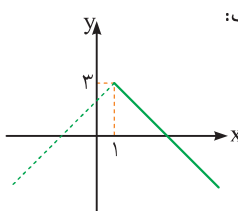
در بازه $x < -2$ ، ضابطه وارون $y = -3x - 1$ به صورت
 $y^{-1} = -\frac{1}{3}x - \frac{1}{3}$ است و در بازه $-2 \leq x \leq 1$ ، ضابطه وارون
 $y = -x + 3$ به صورت $y^{-1} = -x + 3$ است. با توجه به بُرد تابع f در
 بازه‌های اکیدا نزولی، ضابطه وارون تابع برابر است با:

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} -\frac{1}{3}x - \frac{1}{3} & ; x > 5 \\ -x + 3 & ; 2 \leq x \leq 5 \end{cases}$$

۴ ۴۵۳

ضابطه $f(g(x))$ را تشکیل می‌دهیم:

$$f(g(x)) = 3 - \sqrt{x^2 - 2x + 1} = 3 - \sqrt{(x-1)^2} = 3 - |x-1|$$



پس نمودار تابع $f \circ g$ به صورت مقابل است:
 ضابطه تابع در بازه اکیدا نزولی به صورت
 $y = -x + 4$ است و چون بُرد تابع در
 بازه اکیدا نزولی برابر بازه $(-\infty, 3]$ است،
 پس ضابطه وارون آن به صورت مقابل
 $y = -x + 4$; $x \leq 3$ است:

۴ یه پوره ریگه! آگه طرح رادیکال بیرونی رو نذاره، باز هم برای وارون کردن
 می‌تونیم از اتحاد مربع دو جمله‌ای استفاده کنیم، مثلاً اینجوری پیرسه «ضابطه وارون
 تابع $f(x) = x + 2\sqrt{x+2} + 3$ کدماست؟»

$$\text{جواب: } f(x) = x + 2\sqrt{x+2} + 3 = (\sqrt{x+2} + 1)^2 \\ \Rightarrow f^{-1}(x) = (\sqrt{x} - 1)^2 - 2$$

۲ ۳۹۸

ضابطه تابع را به صورت $y = |x+1| - |3x-6|$ ساده می‌کنیم:

$$y = \begin{cases} 2x-7 & ; x \leq -1 \\ 4x-5 & ; -1 < x < 2 \\ -2x+7 & ; x \geq 2 \end{cases} \xrightarrow{\text{نزولی}} y = -2x+7 ; x \geq 2$$

در ضمن برد تابع $y = -2x + 7$; $x \geq 2$ برابر بازه $(-\infty, 3]$ است.
 پس ضابطه وارون تابع در بازه‌ای که نزولی است، به صورت
 $y^{-1} = -\frac{1}{2}x + \frac{7}{2}$; $x \leq 3$ است.

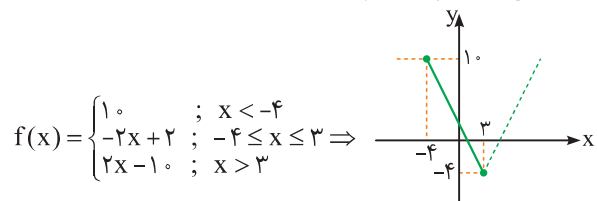
۴ یه پوره ریگه! طراح می‌توانست فواسته سوال رو کمی سفت‌تر
 کنه و اینجوری پیرسه: «نمودار وارون تابع در بازه نزولی و نمودار تابع
 $y = x^2 - 3x$ در چند نقطه مشترک هستند؟» جواب: در یک نقطه به
 طول $x = -1$ مشترک‌اند.

هایلایت

برای به‌دست آوردن وارون توابع قدرمطلق، ابتدا باید تعیین کنیم
 تابع در کدام بازه یک‌به‌یک است. برای این منظور تابع را به صورت
 چندضابطه‌ای می‌نویسیم. سپس بازه‌هایی را که تابع در آن‌ها
 یک‌به‌یک است، تعیین کرده و ضابطه وارون تابع را به‌دست می‌آوریم.

۴ ۳۹۹

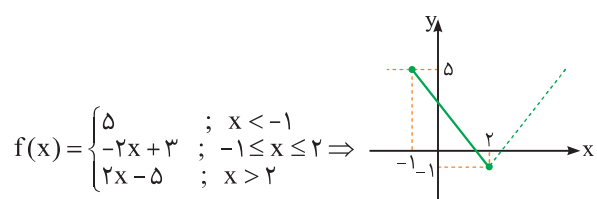
نمودار تابع f را رسم می‌کنیم:



پس ضابطه f در بازه‌ای که اکیدا نزولی است به صورت $f(x) = -2x + 2$
 می‌باشد، بنابراین ضابطه وارون تابع در این بازه برابر $f^{-1}(x) = -\frac{1}{2}x + 1$
 است. از طرفی چون بُرد تابع f در این بازه برابر $1 \leq y \leq 4$ است، پس
 دامنه تابع f^{-1} در این بازه به صورت $1 \leq x \leq 4$ است.

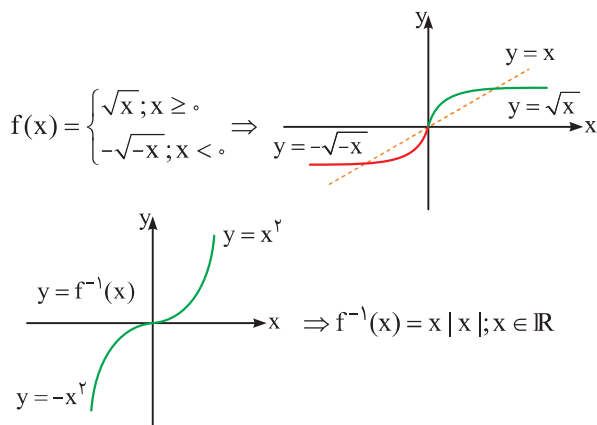
۳ ۴۰۰

ابتدا نمودار f را رسم می‌کنیم:



۳ ۴۵۶

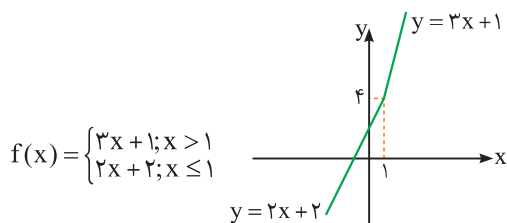
نمودار تابع f را رسم می‌کنیم، با توجه به این که وارون تابع‌های رادیکالی با فرجه ۲، به شکل سهمی هستند خواهیم داشت:



به پوره دیگه! توی کنکور خارج از کشور سال ۹۲، طراح پرسید: «ضابطه وارون تابع $f(x) = \begin{cases} \frac{|x|}{x} \sqrt{|x|}; x \neq 0 \\ 0; x = 0 \end{cases}$ کدوم است؟» برای حل کافیه $|x|$ رو باز کنید که جواب میشه: $f^{-1}(x) = x|x|$

۲ ۴۵۷

نمودار تابع f به شکل زیر است:



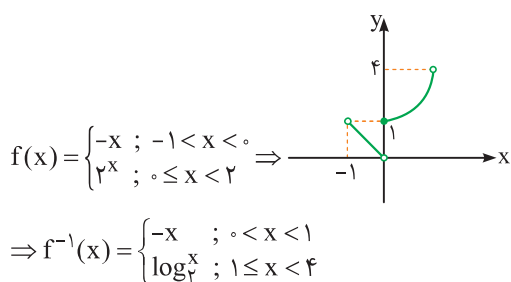
حالا با توجه به برد هر یک از ضابطه‌ها، ضابطه وارون تابع به شکل زیر است:

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}(x-1); x > 4 \\ \frac{x}{2}-1; x \leq 4 \end{cases} \Rightarrow a = \frac{1}{3}, b = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow f^{-1}\left(\frac{b}{a}\right) = f^{-1}\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{3}{2}-1 = -\frac{1}{2}$$

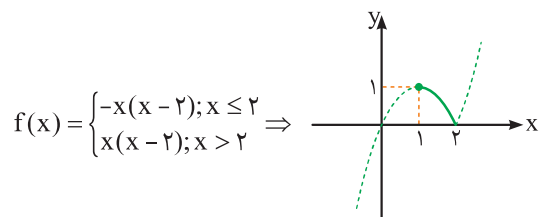
۲ ۴۵۸

بهتر است، نمودار تابع f را رسم کنیم. توجه کنید در ضابطه بالایی، وقتی $-1 < x < 0$ است، پس $[x] = -1$ می‌باشد:



۳ ۴۵۹

روش اول نمودار تابع $f(x) = x|x-2|$ را رسم می‌کنیم:



ضابطه تابع f در بازه نزولی به صورت زیر است:

$$y = -x(x-2) = -x^2 + 2x - 1 + 1 = -(x-1)^2 + 1; 1 \leq x \leq 2$$

حالا وارون تابع $f(x) = -(x-1)^2 + 1$ را به دست می‌آوریم:

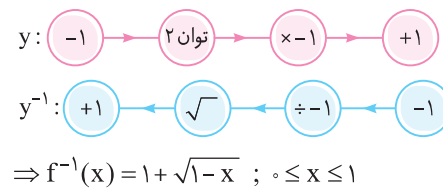
$$y = -(x-1)^2 + 1 \Rightarrow (x-1)^2 = 1-y \Rightarrow |x-1| = \sqrt{1-y}$$

در ضمن چون تابع را در بازه $1 \leq x \leq 2$ وارون می‌کنیم، پس عبارت درون قدر مطلق نامنفی است و داریم:

$$x-1 = \sqrt{1-y} \Rightarrow x = 1 + \sqrt{1-y} \Rightarrow f^{-1}(x) = 1 + \sqrt{1-x}$$

برد تابع f در این بازه برابر $0 \leq y \leq 1$ است، پس دامنه f^{-1} نیز برابر $0 \leq x \leq 1$ است.

روش دوم برای پیدا کردن ضابطه تابع وارون، از روش زیر می‌توانیم استفاده کنیم:

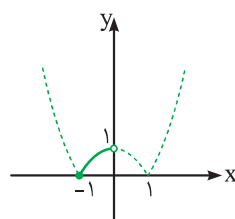


۴ ۴۵۵

روش اول چون $[x] = -1$ است، پس

$-1 \leq x < 0$ است. حالا نمودار تابع

$y = x^2 - 1$ را رسم می‌کنیم:



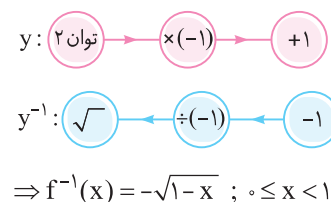
حالا تابع $y = -x^2 + 1; -1 \leq x < 0$ را وارون می‌کنیم. توجه کنید برد تابع برابر بازه $[0, 1)$ است:

$$y = -x^2 + 1 \Rightarrow x^2 = 1-y \Rightarrow |x| = \sqrt{1-y}$$

$$\xrightarrow{-1 \leq x < 0} |x| = \sqrt{1-y} \Rightarrow -x = \sqrt{1-y}$$

$$\Rightarrow x = -\sqrt{1-y} \Rightarrow f^{-1}(x) = -\sqrt{1-x}; 0 \leq x < 1$$

روش دوم می‌توانیم ضابطه تابع وارون را به روش زیر نیز پیدا کنیم:

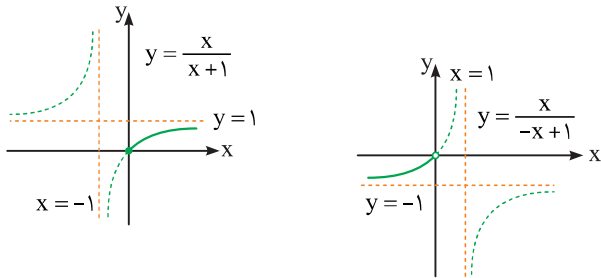


۲ ۴۱۳

ابتدا تابع را به صورت دو ضابطه ای می نویسیم:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{x+1} & ; x \geq 0 \\ \frac{x}{-x+1} & ; x < 0 \end{cases}$$

سپس هر ضابطه را به صورت جداگانه رسم می کنیم تا برد آن ها را مشخص کنیم:


 توجه کنید برد ضابطه $y = \frac{x}{x+1}$ برابر بازه $[0, 1)$ و برد ضابطه $y = \frac{x}{-x+1}$ برابر بازه $(-1, 0)$ است.

 حالا ضابطه وارون f را پیدا می کنیم:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{x+1} & ; x \geq 0 \\ \frac{x}{-x+1} & ; x < 0 \end{cases} \xrightarrow{\text{طبق وارون همگرافیک}} f^{-1}(x) = \begin{cases} \frac{-x}{x-1} & ; 0 \leq x < 1 \\ \frac{-x}{-x-1} & ; -1 < x < 0 \end{cases}$$

 می توانیم ضابطه f^{-1} را به صورت زیر مرتب کنیم:

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} \frac{x}{1-x} & ; 0 \leq x < 1 \\ \frac{x}{1+x} & ; -1 < x < 0 \end{cases} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x}{1-|x|} & ; \frac{-1 < x < 1}{|x| < 1}$$

 با مقایسه ضابطه f^{-1} با صورت سؤال، نتیجه می گیریم $a=1$ و $b=1$ است و $a \times b = 1$ است.

۴ ۴۱۴

 ابتدا ضابطه تابع f را به صورت زیر می نویسیم:

$$f(x) = x^2 - 2x - 3 = (x-1)^2 - 4; x \geq 1$$

 حالا ضابطه وارون f را به دست می آوریم:

$$y = (x-1)^2 - 4 \Rightarrow (x-1)^2 = y+4 \Rightarrow |x-1| = \sqrt{y+4}$$

$$\xrightarrow{x \geq 1} x-1 = \sqrt{y+4} \Rightarrow x = \sqrt{y+4} + 1$$

$$\Rightarrow f^{-1}(x) = \sqrt{x+4} + 1$$

 حالا نقاط تلاقی نمودارهای f و f^{-1} را به دست می آوریم:

$$f^{-1}(x) = g(x) \Rightarrow \sqrt{x+4} + 1 = \frac{x-9}{2} \xrightarrow{\text{جای گذاری گزینه ها}} x = 21$$

 مراحل تولید تابع f به شکل زیر است:

$$f: (-1) \rightarrow 2 \rightarrow -4$$

$$f^{-1}: (+1) \leftarrow +\sqrt{} \leftarrow +4 \Rightarrow f^{-1}(x) = \sqrt{x+4} + 1$$

۲ ۴۰۹

 ابتدا ضابطه f را ساده می کنیم:

$$f(x) = \frac{3x+2+2x-2}{x-1} = \frac{5x}{x-1} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x}{x-5}$$

آگه مخرج مشترک نمی گرفتی. گزینه (۳) رو میزدی که غلطه!

هایلایت

 اگر تابع کسری $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ یک به یک باشد:

$$f(x) = \frac{ax+b}{cx+d} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{-dx+b}{cx-a}$$

 اگر $a+d=0$ باشد، وارون تابع با خود تابع برابر است.

۴ ۴۱۰

 چون $f^{-1}(x) = \frac{5x-3}{bx+4}$ است، پس $f(x) = \frac{-4x-3}{bx-5}$ است. حالا

 چون برد f برابر $\mathbb{R} - \{-2\}$ است، پس:

$$\frac{-4}{b} = -2 \Rightarrow b = 2 \Rightarrow f(x) = \frac{-4x-3}{2x-5}$$

 از طرفی دامنه تابع برابر $\mathbb{R} - \{a\}$ است، پس:

$$a = \frac{5}{2} \Rightarrow ab = \frac{5}{2} \times 2 = 5$$

۲ ۴۱۱

 ابتدا ضابطه $f(x)$ را پیدا می کنیم:

$$x = \frac{f(x) - 3x}{f(x) + 4} \Rightarrow xf(x) + 4x = f(x) - 3x$$

$$\Rightarrow xf(x) - f(x) = -7x \Rightarrow f(x)(x-1) = -7x$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{-7x}{x-1} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x}{x+7}$$

۴ ۴۱۲

$$f(f(x)) = \frac{af(x)+1}{2f(x)-1} \Rightarrow f(x) = \frac{ax+1}{2x-1}$$

 از طرفی چون $f^{-1}(0) = -2$ است، پس $f(-2) = 0$ است:

$$f(-2) = \frac{-2a+1}{-4-1} = 0 \Rightarrow a = \frac{1}{2}$$

 پس $g(x) = \frac{4x+1}{2x+\frac{1}{2}}$ است. چون صورت این کسر، مضربی از مخرج آن است، پس تابع g وارون پذیر نیست.

هایلایت

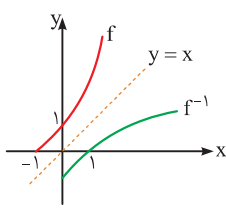
 در توابع هموگرافیک $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ ، اگر صورت و مخرج کسر پس

از فاکتورگیری با هم ساده شوند و عدد ثابت باقی بماند، تابع یک به

یک نبوده و در نتیجه وارون پذیر نیست. این اتفاق در صورتی رخ

 می دهد که $ad = bc$ باشد.

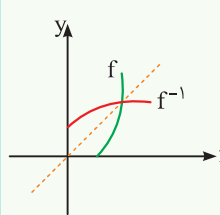
۴ ۴۱۸



نمودار تابع $f(x) = x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2$ با دامنه $(-1, +\infty)$ بالای خط $y = x$ قرار دارد و هیچ نقطه تلاقی با آن ندارد، پس f و f^{-1} همدیگر را قطع نمی‌کنند.

هایلایت

برای پیدا کردن نقاط برخورد نمودارهای f و f^{-1} ، راهکار کلی این است که ضابطه f^{-1} را به دست آوریم و سپس معادله $f(x) = f^{-1}(x)$ را حل کنیم.



در توابع اکیداً صعودی و توابع هموگرافیک نقاط برخورد f و f^{-1} [در صورت وجود] همان نقاط برخورد f و خط $y = x$ است. پس در این توابع معادله $f(x) = x$ را حل می‌کنیم.

در توابع اکیداً نزولی، می‌توانیم برای پیدا کردن محل تلاقی f و f^{-1} از رسم نمودار استفاده کنیم.

۲ ۴۱۹

تابع $f(x) = \sqrt{x+3} - 1$ یک تابع اکیداً صعودی است. بنابراین برای پیدا کردن محل تقاطع این تابع با وارونش، معادله $f(x) = x$ را حل می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \sqrt{x+3} - 1 &= x \Rightarrow \sqrt{x+3} = x+1 \Rightarrow x+3 = x^2 + 2x + 1 \\ \Rightarrow x^2 + x - 2 &= 0 \Rightarrow (x+2)(x-1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=-2 \end{cases} \end{aligned}$$

پس فاصله نقطه $M(1,1)$ از مبدأ مختصات برابر است با:

$$|OM| = \sqrt{(1-0)^2 + (1-0)^2} = \sqrt{2}$$

۲ ۴۲۰

چون تابع f یک تابع هموگرافیک است، پس برای مشخص کردن نقاط برخورد f و f^{-1} می‌توانیم معادله $f(x) = x$ را حل کنیم:

$$\begin{aligned} \frac{x+4}{x-2} &= x \Rightarrow x+4 = x^2 - 2x \\ \Rightarrow x^2 - 3x - 4 &= 0 \xrightarrow{a+c=b} \begin{cases} x=-1 \\ x=4 \end{cases} \end{aligned}$$

۳ ۴۲۱

تابع $f(x) = x^3 + 3x - 12$ از جمع دو تابع اکیداً صعودی $y = x^3$ و $y = 3x - 12$ به دست آمده، پس اکیداً صعودی است. بنابراین برای پیدا کردن محل برخورد این تابع با وارونش، معادله $f(x) = x$ را حل می‌کنیم:

$$\begin{aligned} x^3 + 3x - 12 &= x \Rightarrow x^3 + 2x - 12 = 0 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow A(2, 2) \\ \Rightarrow OA &= \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2} \end{aligned}$$

۳ ۴۱۵

ابتدا نقطه برخورد f و g^{-1} را پیدا می‌کنیم:

$$\begin{aligned} f(x) = g^{-1}(x) &\Rightarrow x^2 - 3x + 1 = 3x - 4 \Rightarrow x^2 - 6x + 5 = 0 \\ \xrightarrow{\text{مجموع ضرایب برابر صفر}} \begin{cases} x=1 \\ x=5 \end{cases} \end{aligned}$$

چون دو تابع f و g^{-1} در نقطه $A(1, -1)$ متقاطع‌اند، پس دو تابع f^{-1} و g در نقطه $A'(-1, 1)$ متقاطع‌اند.

هایلایت

اگر دو تابع f و g^{-1} در نقطه $A(a, b)$ متقاطع باشند، آن‌گاه دو تابع f^{-1} و g در نقطه $A'(b, a)$ متقاطع‌اند.

۲ ۴۱۶

ابتدا ضابطه تابع f را ساده می‌کنیم:

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 - 4x + 1 = (x-2)^2 - 3; x \leq 2 \\ \text{سپس وارون تابع } f \text{ را به دست می‌آوریم:} \\ y &= (x-2)^2 - 3 \Rightarrow (x-2)^2 = y+3 \Rightarrow |x-2| = \sqrt{y+3} \\ \xrightarrow{x \leq 2} -(x-2) &= \sqrt{y+3} \Rightarrow x = 2 - \sqrt{y+3} \\ \Rightarrow f^{-1}(x) &= 2 - \sqrt{x+3} \end{aligned}$$

حالا نقاط تقاطع توابع $y = \sqrt{f(x)+3}$ و $y = 1 - f^{-1}(x)$ را به دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} 1 - f^{-1}(x) &= \sqrt{f(x)+3} \Rightarrow \sqrt{x+3} - 1 = \sqrt{(x-2)^2} \\ \Rightarrow \sqrt{x+3} - 1 &= |x-2| \xrightarrow{x \leq 2} \sqrt{x+3} - 1 = -(x-2) \\ \Rightarrow \sqrt{x+3} &= -x+3 \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=6 \end{cases} \xrightarrow{y=|x-2|} y=1 \\ \Rightarrow A(1, 1) &\Rightarrow |OA| = \sqrt{2} \end{aligned}$$

روشن دوم مراحل تولید تابع f به شکل زیر است:

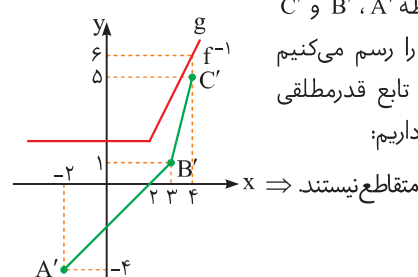
$$f: -2 \rightarrow \text{توان } 2 \rightarrow -3$$

$$f^{-1}: +3 \rightarrow -\sqrt{} \rightarrow +2 \Rightarrow f^{-1}(x) = 2 - \sqrt{x+3}$$

۴ ۴۱۷

با توجه به شکل صورت سؤال، سه نقطه $A(-4, -2)$ ، $B(1, 3)$ و $C(5, 4)$ روی نمودار تابع f قرار دارند، پس سه نقطه $A'(-2, -4)$ ، $B'(3, 1)$ و $C'(4, 5)$ روی نمودار تابع f^{-1} هستند.

حالا به کمک سه نقطه A' ، B' و C' نمودار تابع $f^{-1}(x)$ را رسم می‌کنیم و با توجه به نمودار تابع قدرمطلق $g(x) = x + |x-2|$ داریم:



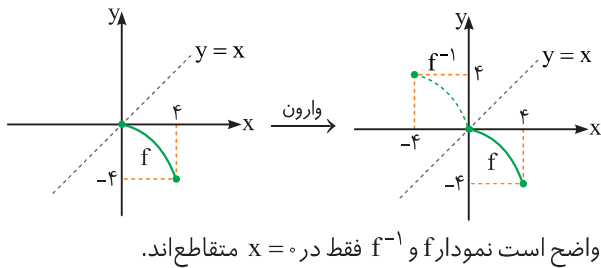
۱ ۴۲۴

تابع f ، از جمع دو تابع اکیداً نزولی $y_1 = \sqrt{4-x}$ و $y_2 = -\sqrt{x} - 2$ به دست آمده است، بنابراین تابع f اکیداً نزولی است. حال دامنه تابع f را پیدا می‌کنیم:

$$y_1 = \sqrt{4-x} : 4-x \geq 0 \Rightarrow x \leq 4 \Rightarrow D_{y_1} = (-\infty, 4]$$

$$y_2 = -\sqrt{x} - 2 : x \geq 0 \Rightarrow D_{y_2} = [0, +\infty)$$

بنابراین $D_f = D_{y_1} \cap D_{y_2} = [0, 4]$ است. حالا یک تابع اکیداً نزولی به صورت فرضی و با دامنه $[0, 4]$ رسم می‌کنیم:



واضح است نمودار f و f^{-1} فقط در $x=0$ متقاطع‌اند.

۲ ۴۲۵

تابع $y = \log_4(2^{x+2} + 32)$ از ترکیب دو تابع اکیداً صعودی $f(x) = \log_4 x$ و $g(x) = 2^{x+2} + 32$ به دست آمده (تابع fog) پس اکیداً صعودی است. پس برای پیدا کردن نقطه برخورد این تابع با وارونش، داریم:

$$\log_4(2^{x+2} + 32) = x \Rightarrow 4^x = 2^{x+2} + 32 \Rightarrow (2^x)^2 - 4 \times (2^x) - 32 = 0$$

$$\xrightarrow{2^x = t} t^2 - 4t - 32 = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = -4 \text{ (رد)} \\ t = 8 \Rightarrow 2^x = 8 \Rightarrow x = 3 \end{cases}$$

پس $A(3, 3)$ است و فاصله آن از نقطه $O(0, 0)$ برابر $OA = 3\sqrt{2}$ است.

۳ ۴۲۶

دامنه تابع f به صورت بازه $[1, +\infty)$ و برد تابع f برابر بازه $(-\infty, 2]$ است. در ضمن می‌دانیم $f \circ f^{-1}(x) = x ; x \in R_f$ و $f^{-1} \circ f(x) = x ; x \in D_{f^{-1}}$ است. حالا چون $x=3$ در برد تابع f قرار ندارد، پس $f \circ f^{-1}(3)$ تعریف نشده است.

هایلایت

اگر تابع $f(x)$ وارون پذیر باشد، ترکیب این تابع با وارونش، همواره برابر با x است:

۱ $(f^{-1} \circ f)(x) = x ; x \in D_f$

۲ $(f \circ f^{-1})(x) = x ; x \in D_{f^{-1}}$

❗ اگر دو تابع f و g به گونه‌ای باشند که $(fog)(x) = x$ و $(gof)(x) = x$ ، آن‌گاه توابع f و g وارون یکدیگرند.

۲ ۴۲۷

برای این‌که تساوی داده شده برقرار باشد، باید f تابعی وارون پذیر با دامنه و برد یکسان باشد. در میان گزینه‌ها، دامنه و برد توابع موجود در گزینه‌های (۱) و (۴) به صورت بازه $[2, +\infty)$ و دامنه و برد تابع گزینه (۳) برابر $\mathbb{R} - \{1\}$ است. اما در گزینه (۲) دامنه تابع برابر $\mathbb{R}$ و برد آن برابر $(1, +\infty)$ است.

❗ به پوره دنگه! «فاصله نقطه تقاطع تابع $f(x) = 2x - 3 + \sqrt{x-1}$ با وارون خود، از مبدأ مختصات کدام است؟»

پوآب: چون f تابعی اکیداً صعودی است، پس:

$$f(x) = x \Rightarrow 2x - 3 + \sqrt{x-1} = x \Rightarrow x = 2$$

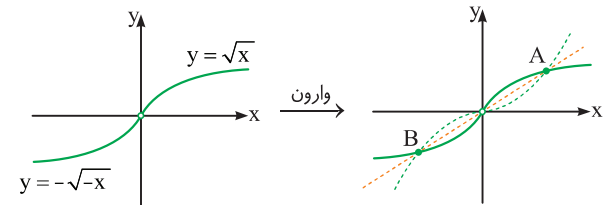
$$\Rightarrow A(2, 2) \Rightarrow |OA| = 2\sqrt{2}$$

۲ ۴۲۲

ابتدا ضابطه تابع f را ساده می‌کنیم:

$$f(x) = \frac{|x|}{x} \sqrt{|x|} = \begin{cases} \sqrt{x} & ; x > 0 \\ -\sqrt{-x} & ; x < 0 \end{cases}$$

حالا نمودار تابع f را به همراه وارون آن در یک دستگاه مختصات رسم می‌کنیم:



با توجه به این‌که تابع f اکیداً صعودی است، برای پیدا کردن محل برخورد دو تابع f و f^{-1} می‌توانیم معادله $f(x) = x$ را حل کنیم:

$$x > 0 : f(x) = x \Rightarrow \sqrt{x} = x \Rightarrow x = 1 \Rightarrow A(1, 1)$$

$$x < 0 : f(x) = x \Rightarrow -\sqrt{-x} = x \Rightarrow x = -1 \Rightarrow B(-1, -1)$$

بنابراین فاصله دو نقطه A و B برابر است با:

$$AB = \sqrt{(-1-1)^2 + (-1-1)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

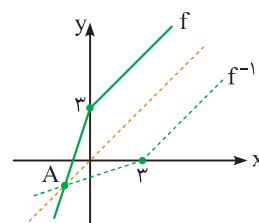
۲ ۴۲۳

ابتدا ضابطه تابع f را در $x=0$ باز می‌کنیم:

$$f(x) = 2x + 3 - |x| = \begin{cases} 2x + 3 - x & ; x \geq 0 \\ 2x + 3 + x & ; x < 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} x + 3 & ; x \geq 0 \\ 3x + 3 & ; x < 0 \end{cases}$$

حالا نمودار تابع f و قرینه آن را نسبت به نیمساز ناحیه اول و سوم (یعنی $y=x$) رسم می‌کنیم:



با توجه به نمودار، واضح است نمودار تابع f و f^{-1} در $x < 0$ برخورد دارند. از آن جایی‌که f صعودی است، پس می‌توانیم برای پیدا کردن محل برخورد f و f^{-1} ، معادله $f(x) = x$ را حل کنیم:

$$x < 0 : f(x) = x \Rightarrow 3x + 3 = x \Rightarrow 2x = -3 \Rightarrow x = -\frac{3}{2}$$

پس $A(-\frac{3}{2}, -\frac{3}{2})$ است و فاصله آن از مبدأ مختصات برابر $\frac{3}{2}\sqrt{2}$ است.

۲ ۴۳۱

چون در تابع $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{3x - \sqrt{x}}$ رابطه $a + d = 0$ برقرار است، پس $f(x) = f^{-1}(x)$ است، بنابراین:

$$f(f(f(\sqrt{2}))) = f(f^{-1}(f(\sqrt{2}))) = f(\sqrt{2}) \\ = \frac{\sqrt{2} \times \sqrt{2}}{3\sqrt{2} - \sqrt{2}} = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

به پوره دیگه! یادش بفر در کتاب میکرو طبقه بندی ریاضی سال ۹۹ و قبل از این که سرکله این تیپ سوال در کنکورها پیدا بشه، این تست رو آورده بودم؛ اگر $f(x) = \frac{2x+1}{5x-2}$ باشد، حاصل $f \circ f(\sqrt{5})$ کدام است؟ جواب: $\sqrt{5}$

۳ ۴۳۲

تابع $f(x) = x + \sqrt{x} + 3$ از جمع دو تابع اکیداً صعودی $y = x$ و $y = \sqrt{x} + 3$ به دست آمده است. پس تابعی اکیداً صعودی است که دامنه آن برابر $[0, +\infty)$ و برد آن $[3, +\infty)$ است. در ضمن می دانیم $x \geq 3$ ؛ $f \circ f^{-1}(x) = x$ است. حالا نقطه برخورد این تابع را با $y = \sqrt{-x+6}$ پیدا می کنیم:

$$\sqrt{-x+6} = x \Rightarrow -x+6 = x^2 \Rightarrow x^2 + x - 6 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -3 \\ x = 2 \end{cases}$$

هر دو مقدار x به دست آمده در دامنه تابع $f \circ f^{-1}(x)$ وجود ندارد، پس این دو تابع متقاطع نیستند.

۲ ۴۳۳

می دانیم $(f^{-1} \circ g)^{-1}(2) = g^{-1}(f(2))$ است. در ضمن با توجه به ضابطه f واضح است که $f(2) = 2^3 + 2 = 10$ است. پس $g^{-1}(f(2)) = g^{-1}(10)$ است. حالا برای پیدا کردن $g^{-1}(10)$ کافی است، ضابطه g را برابر 10 قرار دهیم:

$$\frac{1-x}{x+2} = 10 \Rightarrow 1-x = 10x+20 \Rightarrow 11x = -19 \Rightarrow x = -\frac{19}{11}$$

هایلایت

برای به دست آوردن تابع $f^{-1} \circ g^{-1}$ با داشتن توابع f و g ، می توانیم تابع $g \circ f$ را به دست آوریم و سپس آن را وارون کنیم، یعنی:

$$(f^{-1} \circ g^{-1})(x) = (g \circ f)^{-1}(x)$$

۳ ۴۳۴

می دانیم $g^{-1} \circ f^{-1}(x) = (f \circ g)^{-1}(x)$ است، پس می توانیم تابع $f \circ g(x)$ را پیدا کنیم و سپس آن را وارون کنیم:

$$f(g(x)) = -5 + \frac{1}{\frac{x+3}{x+2} - 1} = -5 + \frac{1}{\frac{1}{x+2}} = x - 3$$

$$\xrightarrow{\text{وارون}} (f \circ g)^{-1}(x) = (g^{-1} \circ f^{-1})(x) = x + 3$$

۲ ۴۳۵

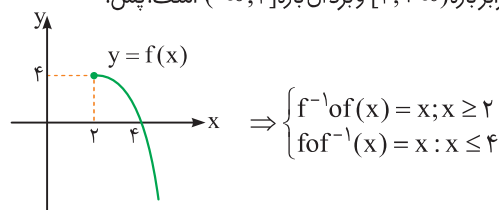
تابع $(f \circ g)(x) = \frac{3x+1}{x+1}$ را وارون می کنیم:

$$(f \circ g)^{-1}(x) = \frac{-x+1}{x-3} \Rightarrow g^{-1}(f^{-1}(x)) = \frac{-x+1}{x-3}$$

$$\xrightarrow{x=4} g^{-1}(f^{-1}(4)) = \frac{-4+1}{4-3} = -3 \Rightarrow g^{-1}(1) = -3$$

۳ ۴۳۸

ابتدا نمودار تابع $f(x) = 4x - x^2$ ؛ $x \geq 2$ را رسم می کنیم: دامنه تابع f برابر بازه $[2, +\infty)$ و برد آن بازه $(-\infty, 4]$ است. پس:



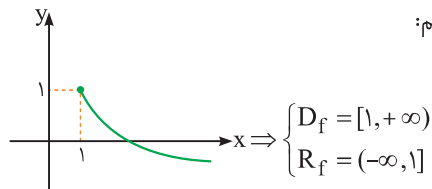
دامنه مشترک $f \circ f^{-1}$ و $f^{-1} \circ f$ برابر بازه $[2, 4]$ است. حالا توابع $f \circ f^{-1}$ و $f^{-1} \circ f$ را در دامنه مشترک با هم جمع می کنیم:

$$\Rightarrow y = (f^{-1} \circ f)(x) + (f \circ f^{-1})(x) = x + x = 2x; 2 \leq x \leq 4$$

که نمودار این تابع در گزینه (۳) آمده است.

۱ ۴۳۹

ابتدا دامنه و برد تابع $f(x) = 1 - \sqrt{x-1}$ را به دست می آوریم. با توجه به نمودار تابع f داریم:



بنابراین داریم:

$$(f^{-1} \circ f)(x) = x, \quad x \in [1, +\infty)$$

$$(f \circ f^{-1})(x) = x, \quad x \in (-\infty, 1]$$

بنابراین، دامنه دو تابع $(f^{-1} \circ f)(x)$ و $(f \circ f^{-1})(x)$ فقط در $x = 1$ مشترک هستند. پس نمودار دو تابع $(f^{-1} \circ f)(x)$ و $(f \circ f^{-1})(x)$ فقط در $x = 1$ متقاطع هستند.

۳ ۴۴۰

با توجه به ماشین تابع داده شده $g(f(x)) = x$ است، پس دو تابع f و g وارون یکدیگر هستند، یعنی $g(x) = f^{-1}(x)$ است. حالا وارون تابع $f(x) = 3 - \sqrt{x+1}$ را به دست می آوریم. توجه کنید برد تابع f برابر $(-\infty, 3]$ است:

$$y = 3 - \sqrt{x+1} \Rightarrow \sqrt{x+1} = 3 - y \Rightarrow x+1 = (3-y)^2$$

$$\Rightarrow x = (y-3)^2 - 1 \Rightarrow f^{-1}(x) = (x-3)^2 - 1; x \leq 3$$

بنابراین $g(x) = (x-3)^2 - 1; x \leq 3$ است. حالا باید نامعادله $g(x) < 0$ را حل کنیم:

$$g(x) = (x-3)^2 - 1 < 0 \Rightarrow (x-3)^2 < 1 \Rightarrow |x-3| < 1$$

$$\Rightarrow -1 < x-3 < 1 \Rightarrow 2 < x < 4 \xrightarrow{x \leq 3} 2 < x \leq 3$$

به پوره دیگه! طراح به جای این که f و g رو به شکل ماشین نمایش بده، می تونست بگه «اگر $f(x) = 3 - \sqrt{x+1}$ و ترکیب دو تابع f و g تابع همانی باشد، ضابطه تابع g کدام است؟

$$g(x) = (x-3)^2 - 1; x \leq 3$$

جواب:

۱ ۶۳۲

$$\begin{aligned} 2x + 5 + \frac{10}{x-2} &= \frac{x^2 + 4x - 2}{2-x} \\ \Rightarrow 2x + 5 &= \frac{x^2 + 4x - 2}{2-x} + \frac{10}{2-x} \Rightarrow 2x + 5 = \frac{x^2 + 4x + 8}{2-x} \\ \text{طرفین} &\rightarrow x^2 + 4x + 8 = -2x^2 - x + 10 \\ \text{وسطین} &\Rightarrow 3x^2 + 5x - 2 = 0 \Rightarrow \text{معادله کُمکی: } x^2 + 5x - 6 = 0 \\ \Rightarrow (3x-1)(x+\frac{6}{3}) &= 0 \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{3} \\ x = -2 \end{cases} \end{aligned}$$

۲ ۶۳۳

در طرف چپ معادله مخرج مشترک می‌گیریم:

$$\begin{aligned} \text{طرف چپ: } \frac{x-2}{x-5} + \frac{x-1}{x+4} &= \frac{(x-2)(x+4) + (x-1)(x-5)}{(x-5)(x+4)} \\ &= \frac{2x^2 - 4x - 3}{x^2 - x - 20} \\ \text{حالا معادله را حل می‌کنیم:} \\ \frac{2x^2 - 4x - 3}{x^2 - x - 20} &= \frac{x^2 - 6x + 5}{x^2 - x - 20} \xrightarrow{x \neq 5, -4} 2x^2 - 4x - 3 = x^2 - 6x + 5 \\ \Rightarrow x^2 + 2x - 8 &= 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -4 \\ x = 2 \end{cases} \end{aligned}$$

۴ ۶۳۴

در طرف چپ معادله مخرج مشترک می‌گیریم:

$$\begin{aligned} \frac{1}{x+1} + \frac{-2x+1}{(x+1)(x-4)} &= \frac{2x+1}{x+4} \Rightarrow \frac{-x-3}{(x+1)(x-4)} = \frac{2x+1}{x+4} \\ \text{طرفین وسطین} &\rightarrow 2x^3 - 5x^2 - 11x - 4 = -x^2 - 7x - 12 \\ \Rightarrow 2x^3 - 4x^2 - 4x + 8 &= 0 \Rightarrow x^3 - 2x^2 - 2x + 4 = 0 \\ \Rightarrow x^2(x-2) - 2(x-2) &= 0 \Rightarrow (x-2)(x^2-2) = 0 \\ \Rightarrow \begin{cases} x-2=0 \Rightarrow x=2 \\ x^2-2=0 \Rightarrow x^2=2 \Rightarrow x=\pm\sqrt{2} \end{cases} \end{aligned}$$

۲ ۶۳۵

$$\begin{aligned} \frac{1}{x(x-1)} + \frac{x(x)}{(x-1)(x)} + \frac{(x-1)(x-1)}{x(x-1)} &= 3 \\ \Rightarrow \frac{1+x^2+(x-1)^2}{x(x-1)} &= 3 \Rightarrow \frac{2x^2-2x+2}{x^2-x} = 3 \\ \Rightarrow 2x^2-3x &= 2x^2-2x+2 \Rightarrow \frac{x^2-x-2}{(x+1)(x-2)} = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 2 \end{cases} \end{aligned}$$

۲ ۶۳۶

با در نظر گرفتن شرط $x \neq 0, -1, 1, 2$ ، طرفین معادله را در عبارت $x(x+1)(x-1)(x-2)$ ضرب می‌کنیم:

$$\begin{aligned} x(x-1)(x-2) - (x+1)(x-1)(x-2) &= 3x(x+1)(x-2) - x(x+1)(x-1) \\ &= \frac{-x^2+3x-2}{-x^2-x} \\ \Rightarrow 3x-2 &= -x \Rightarrow 4x = 2 \Rightarrow x = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

پس معادله فقط یک ریشه دارد.

فصل سوم: معادله و نامعادله



۱ ۶۳۸

در طرف چپ معادله مخرج مشترک می‌گیریم:

$$\frac{x}{x-2} - \frac{3}{x+3} = 2 \Rightarrow \frac{x(x+3) - 3(x-2)}{(x-2)(x+3)} = 2$$

$$\Rightarrow 2x^2 + 2x - 12 = x^2 + 6 \Rightarrow x^2 + 2x - 18 = 0$$

حاصل ضرب ریشه‌های این معادله $P = \frac{c}{a} = -18$ است.

هابلایت

حل معادلات گویا

- ۱ ابتدا صورت و مخرج همه کسرها را تجزیه می‌کنیم.
- ۲ مخرج مشترک کسرها را به دست می‌آوریم و طرفین تساوی را به شکل یک کسر می‌نویسیم و طرفین وسطین می‌کنیم.
- ۳ معادله جدید ایجاد شده را حل می‌کنیم.

۴ ۶۳۹

$$\frac{x-3}{x-4} + \frac{1}{2x-2} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{(x-3)(2x-2) + (x-4)}{(x-4)(2x-2)} = \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{2x^2 - 7x + 2}{2x^2 - 10x + 8} = \frac{2}{3} \Rightarrow 6x^2 - 21x + 6 = 4x^2 - 20x + 16$$

$$\Rightarrow 2x^2 - x - 10 = 0 \Rightarrow \text{معادله کُمکی: } x^2 - x - 2 = 0$$

$$\Rightarrow (2x-5)(x+\frac{4}{2}) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{5}{2} \\ x = -2 \end{cases}$$

۳ ۶۳۰

صورت و مخرج کسر دوم را در $(x+1)$ ضرب می‌کنیم تا مخرج‌ها یکسان شوند:

$$\frac{2x+2}{x(x+1)} + \frac{(3x-2)(x+1)}{x(x+1)} = 1 \Rightarrow \frac{2x+2+(3x-2)(x+1)}{x^2+x} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{3x^2+3x}{x^2+x} = 1 \Rightarrow \frac{3(x^2+x)}{x^2+x} = 1 \xrightarrow{x \neq -1, 0} 3 \neq 1$$

پس این معادله جواب ندارد.

۲ ۶۳۱

$$\frac{x^2}{x^2-4} - \frac{1}{x-2} = \frac{1}{x+2} \Rightarrow \frac{x^2}{x^2-4} = \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x-2}$$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{x^2-4} = \frac{(x-2) + (x+2)}{(x+2)(x-2)} \Rightarrow \frac{x^2}{x^2-4} = \frac{2x}{x^2-4}$$

$$\xrightarrow{x \neq -2, 2} x^2 = 2x \Rightarrow x^2 - 2x = 0 \Rightarrow x(x-2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$$

۳ ۶۳۷

با فرض $\frac{x+1}{2} = t$ معادله به صورت $t - \frac{2}{t} = 1$ در می‌آید:

$$t - \frac{2}{t} = 1 \Rightarrow t^2 - t - 2 = 0 \xrightarrow{a+c=b} t = -1, t = 2$$

$$1) \frac{x+1}{2} = -1 \Rightarrow x+1 = -2 \Rightarrow x = -3$$

$$2) \frac{x+1}{2} = 2 \Rightarrow x+1 = 4 \Rightarrow x = 3$$

بنابراین حاصل ضرب ریشه‌ها برابر $-3 \times 3 = -9$ است.

۱ ۶۳۸

در سمت راست معادله، مخرج‌ها را تجزیه می‌کنیم و مخرج مشترک می‌گیریم:

$$\frac{x-1}{(x-3)(x+3)} + \frac{2}{x(x+3)} = \frac{(x-1)(x) + 2(x-3)}{x(x-3)(x+3)}$$

حال معادله را حل می‌کنیم:

$$\frac{4}{x(x-3)} = \frac{(x+3)(x-2)}{x(x-3)(x+3)}$$

$$\xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} 4 = x - 2 \Rightarrow x = 6$$

تنها جواب قابل قبول $x = 6$ است.

۲ ۶۳۹

$$-\frac{x-1}{x-3} - \frac{x^2}{x^2-9} = 1 - \frac{x+2}{x+3}$$

$$\frac{-(x-1)(x+3)}{(x-3)(x+3)} - \frac{x^2}{x^2-9} = \frac{x^2-9}{x^2-9} - \frac{(x+2)(x-3)}{(x+3)(x-3)}$$

$$\Rightarrow \frac{-2x^2-2x+3}{x^2-9} = \frac{x^2-9}{x^2-9} - \frac{x^2-9}{x^2-9}$$

$$\Rightarrow -2x^2 - 2x + 3 = x - 3$$

$$\Rightarrow -2x^2 - 3x + 6 = 0 \Rightarrow \text{مجموع ریشه‌ها} = -\frac{b}{a} = -\frac{3}{-2} = 1.5$$

۴ ۶۴۰

در سمت چپ معادله، مخرج کسر را تجزیه و مخرج مشترک می‌گیریم:

$$\frac{4}{(x+1)(x-3)} - \frac{2}{(x-1)(x-3)} = 3$$

$$\xrightarrow{\text{مخرج مشترک}} \frac{2(x-3)}{4(x-1) - 2(x+1)} = 3$$

با شرط $x \neq 3$ ، عبارت $x-3$ صورت و مخرج را با هم ساده می‌کنیم:

$$\frac{2}{(x+1)(x-1)} = 3 \Rightarrow 3x^2 - 5 = 0 \Rightarrow x = \pm \sqrt{\frac{5}{3}}$$

پس مجموع جواب‌های معادله برابر $\sqrt{\frac{5}{3}} - \sqrt{\frac{5}{3}} = 0$ خواهد بود.

۳ ۶۴۱

مخرج کسرهای معادله را تجزیه می‌کنیم:

$$\frac{1}{x(x+1)} + \frac{x^2}{(x-1)(x+1)} = \frac{5x-1}{x(x-1)(x+1)}$$

با شرط $\pm 1, x \neq 0$ ، معادله را در $x(x-1)(x+1)$ ضرب می‌کنیم:

$$x-1+x^3 = 5x-1 \Rightarrow x^3-4x=0$$

$$\Rightarrow x(x-2)(x+2)=0 \Rightarrow \begin{cases} x_1=0 \\ x_2=2 \\ x_3=-2 \end{cases}$$

$x=0$ ریشه مخرج کسر است، پس معادله ۲ جواب قرینه دارد.

۳ ۶۴۲

ابتدا مخرج کسرها را تجزیه می‌کنیم:

$$\frac{1}{(x+1)(x+2)} + \frac{1}{(x+2)(x+3)} + \frac{1}{(x+3)(x+4)} = \frac{1}{\lambda}$$

اکنون در سمت چپ معادله، مخرج مشترک می‌گیریم:

$$\frac{(x+3)(x+4) + (x+1)(x+4) + (x+1)(x+2)}{(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)} = \frac{1}{\lambda}$$

$$\Rightarrow \frac{3x^2+15x+18}{(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)} = \frac{1}{\lambda}$$

$$\Rightarrow \frac{3(x+2)(x+3)}{(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)} = \frac{1}{\lambda}$$

$$\Rightarrow \frac{3}{(x+1)(x+4)} = \frac{1}{\lambda} \Rightarrow x^2+5x+4=24 \Rightarrow x^2+5x-20=0$$

در معادله درجه دو بالا، مجموع جواب‌های معادله برابر $-\frac{5}{1} = -5$ است.

۱ ۶۴۳

چون $x=3$ یک جواب معادله است، پس در آن صدق می‌کند:

$$\frac{x-2}{ax-5} = \frac{a+2}{x-1} - 1 \Rightarrow \frac{1}{3a-5} = \frac{a+2}{2} - 1$$

با شرط $a \neq \frac{5}{3}$ طرفین معادله را در $2(3a-5)$ ضرب می‌کنیم و خواهیم داشت:

$$2 = (3a-5)(a+2) - 2(3a-5) \Rightarrow 3a^2 - 5a - 2 = 0$$

از معادله درجه دوم $3a^2 - 5a - 2 = 0$ مجموع مقادیر a برابر $S = \frac{5}{3}$ است.

۳ ۶۴۴

برای ساده‌تر شدن محاسبات فرض می‌کنیم $A = x^2 - 4x + 2$ باشد $(A \neq 0)$ ، پس:

$$\frac{A+4}{A} = A+1 \Rightarrow A^2 + A = A+4 \Rightarrow A^2 = 4 \Rightarrow A = \pm 2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A = x^2 - 4x + 2 = 2 \Rightarrow x^2 - 4x = 0 \Rightarrow x = 0, x = 4 \\ A = x^2 - 4x + 2 = -2 \Rightarrow x^2 - 4x + 4 = 0 \Rightarrow x = 2 \end{cases}$$

بنابراین جواب بزرگتر معادله برابر $x = 4$ است.

۲ ۶۴۵

ابتدا عبارت‌های درجه دو موجود در صورت و مخرج کسرها را تجزیه می‌کنیم:

$$\frac{(2x+1)(x+2)}{(2x+1)(x+3)} \times \frac{(x-3)(x+3)}{(x-2)(x+2)} + \frac{x-2}{x+2} = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{x-3}{x-2} + \frac{x-2}{x+2} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{(x-3)(x+2) + (x-2)^2}{(x-2)(x+2)} = \frac{1}{3}$$

۶۴۹ ۴

طرفین وسطین می‌کنیم و داریم:

$$\frac{ax^3 + 2x}{x+1} = x^2 - x \Rightarrow ax^3 + 2x = x^3 - x^2 + x^2 - x$$

$$\Rightarrow ax^3 - x^3 + 3x = 0 \Rightarrow x((a-1)x^2 + 3) = 0$$

یکی از ریشه‌های این معادله برابر $x = 0$ است. حالا برای این که معادله دارای سه ریشه متمایز باشد، باید عبارت $(a-1)x^2 + 3$ دارای ۲ ریشه متمایز باشد، پس ضریب x^2 باید منفی باشد:

$$a-1 < 0 \Rightarrow a < 1$$

اما به ازای $a = -2$ این معادله دارای ۲ جواب است:

$$\frac{-2x^3 + 2x}{x+1} = x^2 - x \Rightarrow \frac{-2x(x-1)(x+1)}{x+1} = x(x-1)$$

$$\Rightarrow -2x(x-1) = x(x-1) \Rightarrow 3x(x-1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases}$$

پس مجموعه مقادیر قابل قبول برای a ، بازه $(-2, 1) \cup (-\infty, -2)$ است.

۶۵۰ ۴

اگر بهروز کل کار را در x ساعت انجام دهد، پس در هر ساعت $\frac{1}{x}$ کار را انجام می‌دهد. حال چون بهروز کار را ۹ ساعت زودتر از فرهاد انجام می‌دهد، پس فرهاد کل کار را در $x+9$ ساعت انجام می‌دهد، پس در هر ساعت $\frac{1}{x+9}$ کار را انجام می‌دهد. از طرفی اگر هر دو باهم کار کنند، این کار در ۲۰ ساعت انجام می‌شود، پس:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x+9} = \frac{1}{20} \Rightarrow \frac{(x+9)+x}{x(x+9)} = \frac{1}{20} \Rightarrow \frac{2x+9}{x^2+9x} = \frac{1}{20}$$

$$\Rightarrow x^2 + 9x = 40x + 180 \Rightarrow x^2 - 31x - 180 = 0$$

$$\Rightarrow x = 36, x = -5$$

هایلایت

مسائل کاربردی معادلات گویا، به سه تیپ کلی تقسیم می‌شوند:

۱ فرض کنید A کاری را به تنهایی در t_A ساعت و B همان کار را به تنهایی در t_B ساعت انجام می‌دهد. اگر هر دو باهم کار کنند، این کار در t_{AB} ساعت انجام خواهد شد. در این صورت رابطه زیر برقرار است:

$$\frac{1}{t_A} + \frac{1}{t_B} = \frac{1}{t_{AB}}$$

۲ در بعضی از مسائل اطلاعاتی راجع به غلظت یک محلول داده می‌شود. از درس شیمی می‌دانیم غلظت، کمیتی است که بیان می‌کند چه مقدار از یک حل شونده در حلال، حل شده است. برای حل این مسائل، ابتدا وزن محلول را در غلظت آن ضرب می‌کنیم تا وزن حل شونده به دست آید.

۳ در بعضی از مسائل اطلاعاتی راجع به سرعت یک متحرک داده می‌شود. از درس فیزیک می‌دانیم: $\text{جابه‌جایی} = \text{زمان سپری‌شده} \times \text{سرعت}$

$$\Rightarrow \frac{2x^2 - 5x - 2}{x^2 - 4} = \frac{1}{3} \Rightarrow 6x^2 - 15x - 6 = 10x^2 - 40$$

$$\Rightarrow 4x^2 + 15x - 34 = 0$$

حاصل جمع وارون ریشه‌های معادله برابر است با:

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta} = \frac{S}{P} = \frac{-b}{\frac{a}{c}} = \frac{-b}{c} = \frac{15}{34}$$

۶۴۶ ۳

با توجه به معادله $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{(1-x)^2} = \frac{16}{9}$ داریم:

$$\frac{1}{x^2} + \frac{1}{(x-1)^2} = \frac{16}{9} \Rightarrow \frac{2x^2 - 2x + 1}{x^2(x-1)^2} = \frac{16}{9}$$

$$\Rightarrow \frac{2(x^2 - x) + 1}{(x^2 - x)^2} = \frac{16}{9}$$

حال با تغییر متغیر $x^2 - x = t$ داریم:

$$\frac{2t+1}{t^2} = \frac{16}{9} \Rightarrow \frac{16 \cdot t^2 - 18t - 9}{(10t-3)(16t+3)} = 0 \Rightarrow \begin{cases} t_1 = \frac{3}{10} \\ t_2 = -\frac{3}{16} \end{cases}$$

هر دو t قابل قبول اند (ریشه‌های مخرج را صفر نمی‌کنند) پس داریم:

$$t = \frac{3}{10} \Rightarrow x^2 - x = \frac{3}{10} \Rightarrow x^2 - x - \frac{3}{10} = 0$$

$$\xrightarrow{\Delta > 0} S_1 = -\left(-\frac{1}{10}\right) = 1$$

$$t = -\frac{3}{16} \Rightarrow x^2 - x = -\frac{3}{16} \Rightarrow x^2 - x + \frac{3}{16} = 0$$

$$\xrightarrow{\Delta > 0} S_2 = -\left(-\frac{1}{16}\right) = 1$$

پس مجموع ریشه‌های معادله برابر $1+1=2$ است.

۶۴۷ ۱

مخرج مشترک می‌گیریم:

$$\frac{3x-1}{x^2+x-6} = \frac{a(x-2)}{(x+3)(x-2)} + \frac{b(x+3)}{(x-2)(x+3)}$$

$$\Rightarrow \frac{3x-1}{x^2+x-6} = \frac{ax-2a+bx+3b}{x^2+x-6}$$

با شرط $x \neq 2, -3$ صورت کسرها را برابر هم می‌گذاریم:

$$3x-1 = (a+b)x - 2a+3b \Rightarrow \begin{cases} a+b=3 \\ -2a+3b=-1 \end{cases} \Rightarrow a=2, b=1$$

پس $a-b=1$ است.

۶۴۸ ۲

چون $x=4$ جواب معادله است، پس در آن صدق می‌کند:

$$\frac{5-x}{3+2x} = \frac{7x+1}{a^2-(2x+1)^2} \xrightarrow{x=4} \frac{1}{3+8} = \frac{28+1}{a^2-9^2}$$

$$\Rightarrow a^2 - 81 = 11 \times 29 \Rightarrow a^2 = 319 + 81 = 400 \Rightarrow a = \pm 20$$

۶۵۱ ۲

اگر فرض کنیم شیر اول در a ساعت، شیر دوم در b ساعت و شیر سوم در c ساعت استخر را پر کنند، پس در یک ساعت شیر اول $\frac{1}{a}$ و شیر دوم $\frac{1}{b}$ و شیر سوم $\frac{1}{c}$ کار انجام می‌دهند، داریم:

$$۱) \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{10} \quad ۲) \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{6}$$

$$۳) \frac{1}{a} + \frac{1}{c} = \frac{1}{14}$$

$$(۱)-(۲): \frac{1}{c} = \frac{1}{6} - \frac{1}{10} = \frac{1}{15} \xrightarrow{\text{جایگذاری در (۳)}} \frac{1}{a} + \frac{1}{15} = \frac{1}{14} \\ \Rightarrow \frac{1}{a} = \frac{1}{14} - \frac{1}{15} = \frac{1}{210}$$

پس شیر اول در ۲۱۰ ساعت استخر را پر می‌کند.

۶۵۲ ۴

اگر سرعت پرنده در هوای آرام را v در نظر بگیریم، سرعت آن هنگامی که هم جهت باد حرکت می‌کند برابر $v + 5$ و سرعت آن هنگامی که خلاف جهت باد حرکت می‌کند، برابر $v - 5$ است. با توجه به این که مجموع زمان رفت و برگشت ۹ دقیقه ($\frac{9}{60}$ ساعت) است، داریم:

$$\frac{1}{v+5} + \frac{1}{v-5} = \frac{9}{60} = \frac{3}{20} \xrightarrow{\text{جایگذاری گزینه‌ها}} v = 15$$

۶۵۳ ۳

اگر سرعت آب برابر v باشد، هنگامی که قایق در جهت آب حرکت می‌کند سرعت آن برابر $100 + v$ و هنگامی که در خلاف جهت آب حرکت می‌کند، سرعتش برابر $100 - v$ می‌شود. حال از آن جایی که اختلاف زمان رفت و برگشت ۵ دقیقه است، پس:

$$\frac{1200}{100-v} - \frac{1200}{100+v} = 5 \xrightarrow{\div 5} \frac{240}{100-v} - \frac{240}{100+v} = 1 \\ \xrightarrow{\text{جایگذاری گزینه‌ها}} v = 20$$

۶۵۴ ۲

اگر سرعت دو قطار را v در نظر بگیریم؛ سرعت قطار A در مسیر برگشت $v - 5$ و سرعت قطار B در مسیر برگشت $v - 10$ است؛ با توجه به رابطه $t = \frac{x}{v}$ و این که قطار A، $\frac{2}{3}$ دقیقه (400 ثانیه) زودتر می‌رسد، داریم:

$$\begin{cases} t_B = \frac{x}{v_B} \Rightarrow t_B = \frac{2000}{v-10} \\ t_A = \frac{x}{v_A} \Rightarrow t_A = \frac{2000}{v-5} \end{cases} \\ \Rightarrow t_B - t_A = \frac{2}{3} \Rightarrow 2000 \left(\frac{1}{v-10} - \frac{1}{v-5} \right) = \frac{2}{3} \\ \Rightarrow 1500 = v^2 - 15v + 50 \Rightarrow v^2 - 15v - 1000 = 0 \\ \Rightarrow (v-20)(v+5) = 0 \Rightarrow \begin{cases} v = -5 \\ v = 20 \end{cases}$$

چون سرعت در مسیر رفت مثبت است پس $v = 20$ قابل قبول است؛ طبق فرمول $t = \frac{x}{v}$ مدت زمانی که دو قطار سپری می‌کنند برابر (برحسب دقیقه) $t = \frac{2000}{20} = 100$ است.

۶۵۵ ۳

وزن خالص ماده حل شده در هر حالت را به دست می‌آوریم:

$$\frac{\text{وزن ماده حل شده}}{11} = \frac{40}{100} \Rightarrow \text{وزن ماده حل شده} = 4/4$$

$$\frac{\text{وزن ماده حل شده}}{4} = \frac{70}{100} \Rightarrow \text{وزن ماده حل شده} = 2/8$$

حال با مخلوط کردن رنگ‌ها، $11 + 4 = 15$ کیلوگرم رنگ ایجاد می‌شود. می‌خواهیم غلظت محلول را به ۵۰ درصد برسانیم. اگر فرض کنیم x کیلوگرم از محلول تبخیر می‌شود، پس خواهیم داشت:

$$\frac{\text{وزن ماده حل شده}}{\text{وزن کل}} = \frac{50}{100} \Rightarrow \frac{4/4 + 2/8}{15-x} = \frac{50}{100} \Rightarrow \frac{7/2}{15-x} = \frac{1}{2} \\ \Rightarrow 15-x = 14/4 \Rightarrow x = 0/6$$

۶۵۶ ۳

ابتدا وزن نمک را در هر یک از محلول‌های اولیه به دست می‌آوریم:

$$100 \times \frac{24}{100} = 24 \text{ وزن نمک} \quad 100 \times \frac{14}{100} = 14 \text{ وزن نمک} \quad 100 \times \frac{24}{100} = 24 \text{ وزن نمک}$$

با مخلوط کردن دو محلول $100 + 40 = 140$ کیلوگرم محلول آب نمک داریم که $24 + 14 = 38$ کیلوگرم آن نمک است. حال می‌خواهیم غلظت محلول را به ۲۰ درصد برسانیم. اگر فرض کنیم x کیلوگرم نمک باید اضافه کنیم، خواهیم داشت:

$$\frac{\text{وزن نمک}}{\text{وزن کل}} = \frac{20}{100} \Rightarrow \frac{38+x}{140+x} = \frac{20}{100} \Rightarrow 400 + 100x = 280 + 20x \Rightarrow 80x = -120 \Rightarrow x = -1/5$$

۶۵۷ ۱

حجم محلول با غلظت ۸۰ درصد را x لیتر در نظر می‌گیریم و حجم الکلی در محلول‌های اولیه را به دست می‌آوریم:

$$80\% \text{ حجم الکلی در محلول } 80 \text{ درصد}$$

$$20\% \text{ حجم الکلی در محلول } 20 \text{ درصد}$$

حال با مخلوط کردن این دو محلول $1 + 8x$ لیتر الکلی داریم، پس غلظت محلول حاصل برابر است با:

$$\frac{8x+1}{x+5} = \frac{50}{100} = \frac{1}{2} \Rightarrow 16x+2 = x+5 \Rightarrow 15x = 3 \Rightarrow x = 0/2$$

۶۵۸ ۲

مقدار مس در آلیاژ اولیه برابر است با:

$$12 \times \frac{45}{100} = \frac{27}{5} = 5/4$$

حال با اضافه کردن x کیلوگرم قلع به این آلیاژ، مقدار $12 + x$ کیلوگرم آلیاژ ۴۰ درصد به دست می‌آید، پس:

$$\frac{5/4}{12+x} = \frac{40}{100} = \frac{2}{5} \Rightarrow 24 + 2x = 27 \Rightarrow x = 3/2$$

۶۵۹ ۱

اگر تعداد اسباب بازی‌های خریداری شده قبل از تخفیف را x در نظر بگیریم، قیمت هر اسباب بازی $\frac{12000}{x}$ است. بعد از تخفیف او می‌تواند ۴ اسباب بازی بیشتر بخرد، پس قیمت هر اسباب بازی بعد از تخفیف $\frac{12000}{x+4}$ است.

۶۶۳ ۲

اگر فرهاد کل کار را در x ساعت انجام دهد، بهروز کل کار را به تنهایی در $x - 7$ ساعت انجام می‌دهد. فرهاد نصف کار را در $\frac{x}{2}$ ساعت انجام خواهد داد، پس نصف دیگر کار که توسط هر دو انجام می‌شود در $20 - \frac{x}{2}$ ساعت انجام می‌شود. پس اگر هر دو باهم کار کنند، کل کار در $x - 40$ ساعت انجام می‌شود. پس:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x-7} = \frac{1}{40-x} \xrightarrow{\text{جایگذاری گزینه‌ها}} x = 28$$

۶۶۴ ۳

فرض کنیم شیر B در t ساعت استخر را پُر می‌کند، پس شیر A در $t + 15$ ساعت استخر را پُر می‌کند. پس شیر A در هر ساعت $\frac{1}{t+15}$ و شیر B در هر ساعت $\frac{1}{t}$ استخر را پُر می‌کنند. در ضمن دو شیر باهم در ۴ ساعت استخر را پُر می‌کنند، پس در هر ساعت $\frac{1}{4}$ استخر پُر می‌شود. بنابراین:

$$\frac{1}{t} + \frac{1}{t+15} = \frac{1}{4} \Rightarrow 4(t+15+t) = t(t+15)$$

$$\Rightarrow t^2 + 7t - 60 = 0 \Rightarrow (t+12)(t-5) = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = -12 \\ t = 5 \end{cases}$$

شیر A در هر ساعت $\frac{1}{5}$ استخر را پُر می‌کند و شیر B در هر ساعت $\frac{1}{5}$ استخر را پُر می‌کند، پس:

$$1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5} = 16 \times \frac{1}{20}$$

یعنی ۱۵ شیر از نوع A باید به استخر اضافه کنیم.

۶۶۵ ۲

فرض کنیم راننده مسیر ۲۰۰ کیلومتری را با سرعت v طی کند. در این صورت زمان رسیدن به مقصد برابر است با:

$$t_1 = \frac{200}{v}$$

حالا اگر سرعتش را ۲۰ کیلومتر بر ساعت کاهش دهد، همین مسیر را با سرعت $v - 20$ طی می‌کند و زمان رسیدن به مقصد برابر است با:

$$t_2 = \frac{200}{v-20}$$

حالا چون در حالت دوم ۵۰ دقیقه (یعنی $\frac{5}{6}$ ساعت) دیرتر به مقصد می‌رسد، پس:

$$t_2 - t_1 = \frac{5}{6} \Rightarrow \frac{200}{v-20} - \frac{200}{v} = \frac{5}{6}$$

$$\Rightarrow \frac{200v - 200v + 4000}{v(v-20)} = \frac{5}{6} \Rightarrow v^2 - 20v = 4800$$

$$\Rightarrow v^2 - 20v - 4800 = 0 \Rightarrow (v-80)(v+60) = 0 \Rightarrow \begin{cases} v = 80 \checkmark \\ v = -60 \times \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{v}{v-20} = \frac{80}{80-20} = \frac{4}{3}$$

۶۶۶ ۱

طرفین معادله را به توان ۲ می‌رسانیم و داریم:

$$\sqrt{x^2 - 2} = \sqrt{x} \Rightarrow x^2 - 2 = x \Rightarrow x^2 - x - 2 = 0 \xrightarrow{a+c=b} \begin{cases} x = -1 \\ x = 2 \end{cases}$$

به ازای $x = -1$ عبارت زیر رادیکال‌ها منفی است، پس $x = 2$ تنها جواب معادله است.

از آنجایی که برای هر اسباب‌بازی ۱۰۰۰ تومان تخفیف در نظر گرفته شده، پس:

$$\frac{120000}{x} = \frac{120000}{x+4} + 1000 \xrightarrow{\div 1000} \frac{120}{x} = \frac{120}{x+4} + 1$$

$$\Rightarrow \frac{120}{x} = \frac{120+x+4}{x+4} \Rightarrow 120x + 480 = 124x + x^2$$

$$\Rightarrow x^2 + 4x - 480 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 20 \\ x = -24 \end{cases}$$

پس قیمت هر اسباب‌بازی قبل تخفیف ۶۰۰۰ است. $\frac{120000}{20} = 6000$

۶۶۰ ۴

در یک مستطیل طلایی با طول x و عرض y داریم:

$$\frac{x}{y} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \Rightarrow \frac{x}{3+\sqrt{5}} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \Rightarrow x = \frac{8+4\sqrt{5}}{2} = 4+2\sqrt{5}$$

$$\Rightarrow S = x \cdot y = (4+2\sqrt{5})(3+\sqrt{5}) = 22+10\sqrt{5}$$

$$12+4\sqrt{5}+6\sqrt{5}+10$$

هابلایت

عدد طلایی و مستطیل طلایی

۱ به عدد $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ عدد طلایی می‌گویند.

۲ اگر در یک مستطیل با طول x و عرض y رابطه زیر برقرار باشد، مستطیل را مستطیل طلایی می‌نامند.

$$\frac{x}{y} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

۶۶۱ ۴

طول و عرض مستطیل اولیه را به ترتیب $5k$ و x فرض می‌کنیم:



$$\Rightarrow \frac{5k+x}{4k} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \xrightarrow{\times 4} 5 + \frac{x}{k} = 2+2\sqrt{5} \Rightarrow \frac{x}{k} = 2\sqrt{5} - 3$$

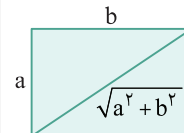
حال نسبت مساحت مستطیل طلایی به مستطیل اولیه را به دست می‌آوریم:

$$\frac{(4k)(5k+x)}{(5k)(4k)} = 1 + \frac{1}{5} \left(\frac{x}{k} \right) = 1 + \frac{1}{5} (2\sqrt{5} - 3)$$

$$= \frac{4}{5} + \frac{2\sqrt{5}}{5} = \frac{4}{5} (1 + \sqrt{5})$$

۶۶۲ ۱

مستطیل مقابل را در نظر بگیرید:



$$\frac{\text{قطر}}{\text{عرض}} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \Rightarrow \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

$$\xrightarrow{\text{توان}} \frac{a^2+b^2}{a^2} = \frac{(1+\sqrt{5})^2}{4} \Rightarrow 1 + \frac{b^2}{a^2} = \frac{6+2\sqrt{5}}{4}$$

$$\Rightarrow 1 + \frac{b^2}{a^2} = \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} \Rightarrow \frac{b^2}{a^2} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

بنابراین مجذور نسبت طول به عرض مستطیل برابر است با:

$$\left(\frac{b}{a} \right)^2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

۱ ۱۴۹۹

از نمودارهای داده شده ابتدا حد راست را در $x = 3$ محاسبه می‌کنیم:

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 3^+} (f+g)(x) = 4 \\ \lim_{x \rightarrow 3^+} (f-g)(x) = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) + \lim_{x \rightarrow 3^+} g(x) = 4 \\ \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) - \lim_{x \rightarrow 3^+} g(x) = 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = 3$$

حالا با توجه به نمودارها، حد چپ را در $x = 3$ محاسبه می‌کنیم:

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 3^-} (f+g)(x) = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 3^-} (f-g)(x) = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) + \lim_{x \rightarrow 3^-} g(x) = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) - \lim_{x \rightarrow 3^-} g(x) = 5 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 3^-} g(x) = -2$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) + \lim_{x \rightarrow 3^-} g(x) = 3 - 2 = 1$$

۳ ۱۵۰۰

یک بار حد راست و یک بار حد چپ را محاسبه می‌کنیم:

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^+} (f+g)(x) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} (f-g)(x) = 5 \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 2/5$$

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^-} (f+g)(x) = 2 \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} (f-g)(x) = 3 \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 2/5$$

چون حد راست و حد چپ برابر با $2/5$ هستند پس: $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2/5$

۱ ۱۵۰۱

با توجه به نمودارهای دو تابع f و g داریم:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^+} (2f(x) - g(x)) = 1 &\Rightarrow 2 \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) - \lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) \\ &= 2(a+1) - (b+2) = 1 \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} (f(x) + g(x)) = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) + \lim_{x \rightarrow 1^-} g(x)$$

$$= (2b+3) + (7-a) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2a+2-b-2=1 \Rightarrow 2a-b=1 \\ 2b+3+7-a=0 \Rightarrow 2b-a=-1 \end{cases} \Rightarrow a=4, b=-3$$

بنابراین حاصل $a \times b = 4 \times (-3) = -12$ است.

۱ ۱۵۰۲

ابتدا خواسته سؤال را ساده می‌کنیم و سپس مقدار آن را به دست می‌آوریم:

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f \circ f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} f(f(x)) = f(f(3^+)) = f(1) = 5$$

۲ ۱۴۹۴

وقتی $x \rightarrow 2^+$ ، پس $x > 2$ است، بنابراین $[x] = 2$ است.

برای محاسبه عبارت داریم:

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} [x] \cdot f(x) + 2 \lim_{x \rightarrow (-\frac{5}{2})^+} f(-x) - \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x-1)$$

$$2 \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) + 2 \lim_{x \rightarrow (\frac{5}{2})^-} f(x) - \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 2(1) + 2(\frac{1}{2}) - (1) = 2$$

۲ ۱۴۹۵

با توجه به نمودار صورت سؤال، داریم:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 1 \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow (-2)^-} f(x) = 3$$

بنابراین با توجه به رابطه داده شده، داریم:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) - \lim_{x \rightarrow (-2)^-} f(x) = 1 - 3 = -2$$

با توجه به نمودار، چون $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = -2$ است، پس رابطه

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -2$ به ازای $a = 2$ برقرار است.

۴ ۱۴۹۶

با توجه به نمودار داده شده داریم:

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{f(1-x^2) + f(x+1)}{f(x^2-4)} = \frac{\lim_{x \rightarrow 2^+} f(1-x^2) + \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x+1)}{\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x^2-4)}$$

$$= \frac{\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) + \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x)}{\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)} = \frac{2+2}{-1} = -4$$

۲ ۱۴۹۷

ابتدا با توجه به تساوی $\lim_{x \rightarrow 3^+} (f(-x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow 3^-} (g(x) - f(x))$ داریم:

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(-x) + \lim_{x \rightarrow 3^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} g(x) - \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x)$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow (-3)^-} f(x) + \lim_{x \rightarrow 3^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} g(x) - \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x)$$

حالا با توجه به نمودار داده شده، مقادیر حدهای فوق را مشخص کرده و در معادله فوق جای‌گذاری می‌کنیم:

$$(a) + (a) = (3) - (a) \Rightarrow 3a = 3 \Rightarrow a = 1$$

۲ ۱۴۹۸

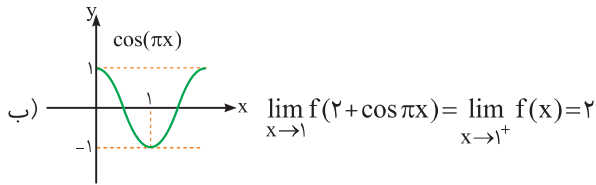
با توجه به نمودار تابع f ، $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 3$ است. از طرفی

$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = a$ می‌باشد، پس $a = 3$ است. حالا با توجه به نمودار

تابع g داریم:

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} g(ax-2) = \lim_{x \rightarrow 1^+} g(3x-2) = \lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) = 2$$

۲ ۱۵۰۳



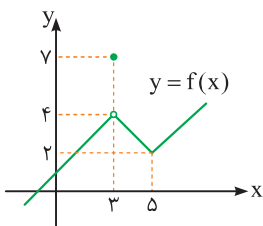
$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(2 - x^2) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 1$$

بنابراین گزینه «۲» پاسخ سؤال است.

۱ ۱۵۰۷

 چون تابع $f \times g$ روی مجموعه اعداد حقیقی پیوسته است، پس در

$$\lim_{x \rightarrow 3} (f \times g)(x) = (f \times g)(3) \quad \text{داریم: } x = 3$$


 با توجه به نمودار تابع f در

 شکل مقابل $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 4$ و $f(3) = 7$ است، پس:

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) \times \lim_{x \rightarrow 3} g(x) = f(3) \times g(3)$$

$$\Rightarrow 4 \times 14 = 7 \times g(3) \Rightarrow g(3) = 8$$

۲ ۱۵۰۸

 با توجه به نمودار داده شده $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 4^-$ ، پس $\lim_{x \rightarrow 4^-} f^{-1}(x) = 1$ است. هم چنین با توجه به نمودار داریم:

$$\lim_{x \rightarrow (-2)^+} [f(x)] = [4^+] = 4$$

بنابراین حاصل عبارت خواسته شده برابر است با:

$$\lim_{x \rightarrow (-2)^+} [f(x)] + \lim_{x \rightarrow 4^-} f^{-1}(x) = 4 + 1 = 5$$

۲ ۱۵۰۹

 در ابتدا با توجه به ضابطه g ، مقدار $g(2)$ و $g(4)$ را محاسبه می کنیم:

$$g(2) = f(\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)) + \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = f(3) + 4 = 4 + 4 = 8$$

$$g(4) = f(\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x)) + \lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = f(4) + 0 = 4 + 0 = 4$$

$$\text{بنابراین حاصل عبارت } \frac{g(2)}{g(4)} = \frac{8}{4} = 2 \text{ است.}$$

۲ ۱۵۱۰

به بررسی گزینه ها می پردازیم:

 (۱) چون $x - 2 \geq 0$ و $x - 2$ زیر رادیکال هستند، پس باید $x - 2 \geq 0$ باشد، پس:

$$\{x - 2 \geq 0\} \cap \{x - 2 \geq 0\} \Rightarrow D_f = \{2\}$$

 در این تابع چون همسایگی $x = 2$ وجود ندارد، پس حد نداریم.

 (۲) وقتی $x \rightarrow 2$ حد عبارت $[x] + [-x]$ برابر -1 می شود، پس:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-1}{[x] + [-x]} = \lim_{x \rightarrow 2} -(x-1) = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(-x)}{f \circ f(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow 1^+} f(-x)}{\lim_{x \rightarrow 1^+} f(f(x))}$$

 می دانیم $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(-x)}{f \circ f(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow 1^+} f(-x)}{\lim_{x \rightarrow 1^+} f(f(x))}$ حالا با توجه به

نمودار مقدار هر یک از حدها را به دست می آوریم:

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(-x) = \lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(x) = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(f(x)) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 1$$

$$\frac{\lim_{x \rightarrow 1^+} f(-x)}{\lim_{x \rightarrow 1^+} f(f(x))} = \frac{2}{1} = 2 \quad \text{بنابراین خواهیم داشت:}$$

۲ ۱۵۰۴

 برای محاسبه مقدار a ، با توجه به نمودار تابع f ، داریم:

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} (f(2-x) + af(2)) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f \circ f(x)$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^+} f(2-x) + af(2) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(f(x))$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) + af(2) = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x) \Rightarrow 0 + a = 2$$

 بنابراین مقدار a برابر 2 می شود.

هایلایت

حد تابع مرکب

 برای به دست آوردن حد تابع مرکب $f \circ g$ در $x = a$ ابتدا باید حد تابع درونی یعنی g را در $x = a$ به دست آوریم. اگر $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = L$ باشد، آن گاه:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(g(x)) = \lim_{x \rightarrow L} f(x)$$

 اگر نمودار تابع f در $x = L$ دارای بُرش باشد [یعنی هر چه x به L نزدیک می شود، $f(x)$ به L نزدیک می شود] باید مشخص کنیم که g با مقادیر بیشتر از L به L نزدیک می شود یا با مقادیر کمتر از آن. سپس حد تابع f را وقتی $x \rightarrow L^+$ یا $x \rightarrow L^-$ محاسبه می کنیم.

۱ ۱۵۰۵

تنها مورد الف درست است. بررسی همه عبارت ها:

$$\text{الف) } \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x^2 + x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 2$$

$$\text{ب) } \lim_{x \rightarrow 0^-} (f^2(x) - f(x)) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f^2(x) - \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 2^2 - 2 = 4 - 2 = 2$$

$$\text{پ) } \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x^2 - x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 2$$

بنابراین گزینه «۱» پاسخ سؤال است.

۲ ۱۵۰۶

عبارت های (الف) و (ب) به درستی محاسبه شده اند.

به بررسی عبارت ها می پردازیم:

$$\text{الف) } \lim_{x \rightarrow 1^+} f([x] - x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(1^+ - x)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1^+} f(1 - x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 2$$