

۱	فصل اول: دایره
۸	درس اول: مفاهیم اولیه و زاویه‌ها در دایره
۳۵	درس دوم: رابطه‌های طولی در دایره
۵۶	درس سوم: چندضلعی‌های محاطی و محیطی

۲	فصل دوم: تبدیل‌های هندسی و کاربردها
۷۴	درس اول: تبدیل‌های هندسی
۹۳	درس دوم: کاربرد تبدیل‌ها

۳	فصل سوم: روابط طولی در مثلث
۱۰۰	درس اول: قضیه سینوس‌ها
۱۰۶	درس دوم: قضیه کسینوس‌ها
۱۱۷	درس سوم: قضیه نیمسازهای زوایای داخلی و ...
۱۲۴	درس چهارم: قضیه هرون

۱۳۱	پاسخ‌های تشریحی
-----	-----------------

. کتاب‌های آی‌کیو .

IQ

IQ Books
Geometric

هندسه یازدهم



هندسه یازدهم

. فصل اول .

دایره

iq

Chapter One

Circle



John Forbes Nash

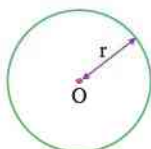
فصل اول

درس اول:

مفاهیم اولیه و زاویه‌ها در دایره

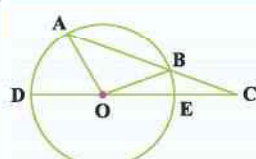
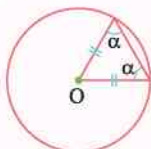
هندسه یازدهم

مفاهیم اولیه در دایره



دایره: مجموعه تمام نقاطی از صفحه که فاصله آن‌ها از یک نقطه ثابت، مقدار ثابتی است دایره گفته می‌شود. نقطه ثابت را مرکز دایره و مقدار ثابت را شعاع دایره می‌گوییم. دایره C به مرکز O و شعاع r را با $C(O, r)$ نمایش می‌دهیم.

نکته: اگر در دایره مثلثی دیده شود که دو ضلع از آن، دو شعاع دایره باشد، حتماً آن مثلث، متساوی الساقین است. برابر قرار دادن زاویه‌های زیر دو ساق، کلید حل مسئله است.



❓ در شکل مقابل، O مرکز دایره است. اگر $\widehat{AOD} = \widehat{BOE} = 6^\circ$ باشند، زاویه BCE چند درجه است؟

۲۰ (۲)

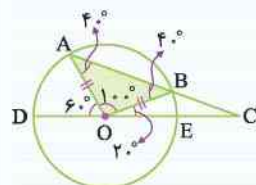
۱۵ (۱)

۳۰ (۴)

۲۵ (۳)

✔️ **گزینه ۲:** مثلث AOB متساوی الساقین است، زیرا $OA = OB = r$ می‌باشد. زاویه AOB برابر است با:

$$6^\circ + \widehat{AOB} + 2^\circ = 180^\circ \Rightarrow \widehat{AOB} = 172^\circ$$



بنابراین در مثلث متساوی الساقین AOB زاویه‌های زیر دو ساق، هر کدام 4° هستند. زاویه B در مثلث رنگی، زاویه خارجی مثلث OBC است، پس:

$$4^\circ = 2^\circ + \widehat{BCE} \Rightarrow \widehat{BCE} = 2^\circ$$

پس:

نکته: گاهی اوقات لازم است خودمان شعاع مناسبی را رسم کنیم تا مثلثی ایجاد شود و بتوانیم به خواسته سؤال برسیم.



❓ در شکل مقابل، O مرکز نیم دایره و DE برابر شعاع آن است. اگر $\widehat{OCD} = 3^\circ$ باشد، زاویه BDC چند درجه است؟

۲۰ (۲)

۱۵ (۱)

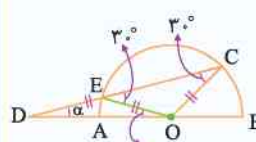
۳۰ (۴)

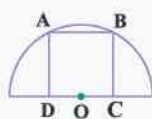
۲۵ (۳)

✔️ **گزینه ۱:** از O به E وصل می‌کنیم. مثلث COE متساوی الساقین است؛ زیرا $OC = OE = r$ ، پس زاویه E

در این مثلث نیز 3° است. از طرفی با توجه به این که DE برابر شعاع نیم دایره است، پس مثلث OED نیز متساوی الساقین بوده و چون زاویه $\widehat{CEO} = 3^\circ$ ، زاویه خارجی این مثلث است، داریم:

$$3^\circ = \alpha + \alpha \Rightarrow \alpha = 1.5^\circ$$





در شکل مقابل، O مرکز نیم‌دایره به شعاع $\frac{7}{5}$ است. مساحت مربع ABCD کدام است؟

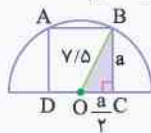
۳۰ (۲)

۵۴ (۱)

۴۵ (۴)

۳۶ (۳)

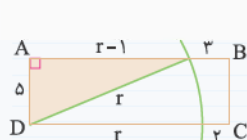
گزینه ۴ فرض می‌کنیم طول ضلع مربع a باشد. از O به B وصل می‌کنیم. در مثلث قائم‌الزاویه BCO به کمک قضیه فیثاغورس داریم:



$$\left(\frac{a}{2}\right)^2 + a^2 = \left(\frac{7}{5}\right)^2 \Rightarrow \frac{a^2}{4} + a^2 = \left(\frac{7}{5}\right)^2 \Rightarrow \frac{5}{4}a^2 = \left(\frac{7}{5}\right)^2$$

$$\Rightarrow a^2 = \frac{4}{5} \left(\frac{7}{5}\right)^2 = \frac{4}{5} \times \frac{7}{5} \times \frac{7}{5} = \frac{15 \times 15}{5} = 45 \Rightarrow S = a^2 = 45$$

عرض مستطیل ABCD برابر ۵ است. دایره‌ای به مرکز یکی از رأس‌ها، طول مستطیل را در دو نقطه قطع می‌کند. اگر طول قطعات کوچک‌تر ایجاد شده بر روی طول‌های مستطیل ۲ و ۳ باشد، شعاع دایره کدام است؟



۱۳ (۴)

۱۱ (۳)

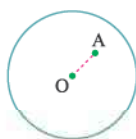
۱۰ (۲)

۸ (۱)

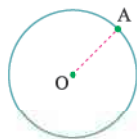
گزینه ۴ با توجه به توضیحات صورت تست، شکل مسئله به صورت مقابل است. در مثلث قائم‌الزاویه رنگی داریم:

$$5^2 + (r-1)^2 = r^2 \Rightarrow 25 + r^2 - 2r + 1 = r^2 \Rightarrow 2r = 26 \Rightarrow r = 13$$

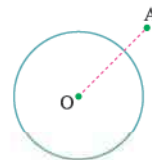
■ **اوضاع نسبی نقطه A و دایره $C(O, r)$:** اگر نقطه A بیرون دایره باشد، $OA > r$ است، اگر نقطه A روی دایره باشد، $OA = r$ خواهد بود و اگر نقطه A درون دایره باشد، $OA < r$ می‌باشد.



$OA < r \Leftrightarrow$ A درون دایره است.



$OA = r \Leftrightarrow$ A روی دایره است.



$OA > r \Leftrightarrow$ A بیرون دایره است.

فاصله نقطه A از مرکز دایره $C(O, 4)$ برابر $6 - x$ است. به ازای چه مقدار صحیح x، نقطه A درون دایره C است؟

۴ (۴)

۳ (۳)

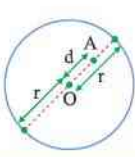
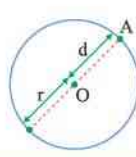
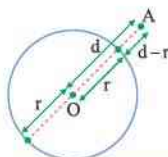
۲ (۲)

۱ (۱)

گزینه ۴ چون $OA = 6 - x$ فاصله دو نقطه است، پس $OA \geq 0$ می‌باشد. (فاصله منفی نمی‌شود.) از طرفی چون A درون دایره C است، پس $OA < r$ می‌باشد؛ بنابراین داریم:

$$0 \leq OA < r \Rightarrow 0 \leq 6 - x < 4 \Rightarrow -6 \leq -x < -2 \Rightarrow 2 < x \leq 6 \xrightarrow{x \in \mathbb{Z}} x = 3, 4, 5, 6$$

نتیجه اگر فاصله نقطه A تا مرکز دایره $C(O, r)$ را برابر d فرض کنیم، آن‌گاه بیش‌ترین و کم‌ترین فاصله نقطه A از نقاط محیط دایره C، از روابط زیر به دست می‌آید. توجه کنید که این روابط به وضعیت نقطه A و دایره C بستگی ندارد. در ضمن برای تعیین این دو نقطه کافی است خط‌گذرا از نقطه A و مرکز دایره را رسم کنیم.



کم‌ترین فاصله $|d - r|$

بیش‌ترین فاصله $d + r$

فاصله نقطه A از مرکز دایره $C(O, 4)$ برابر ۶ است. مجموع فاصله دورترین و نزدیک‌ترین نقاط دایره تا نقطه A کدام است؟

۱۶ (۴)

۱۴ (۳)

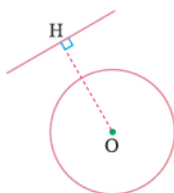
۱۲ (۲)

۱۰ (۱)

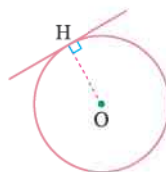
گزینه ۲ با توجه به داده‌های سؤال $d = 6$ و $r = 4$ است پس:

$$\begin{cases} \text{فاصله دورترین نقاط دایره تا A} = d + r = 6 + 4 = 10 \\ \text{فاصله نزدیک‌ترین نقاط دایره تا A} = d - r = 6 - 4 = 2 \end{cases} \Rightarrow \text{مجموع فاصله‌ها} = 10 + 2 = 12$$

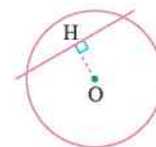
■ **اوضاع نسبی خط و دایره:** برای بررسی وضعیت خط d و دایره $C(O, r)$ ، کافی است فاصله مرکز دایره تا خط d یعنی OH را با شعاع دایره مقایسه کنیم:



خط، دایره را قطع نمی‌کند. $OH > r \Leftrightarrow$



خط بر دایره مماس است. $OH = r \Leftrightarrow$



خط و دایره متقاطع‌اند. $OH < r \Leftrightarrow$

نتیجه شعاع دایره در نقطه تماس، بر خط مماس بر دایره عمود است.

؟ خط d به فاصله $x - 10$ از مرکز دایره $C(O, 3)$ قرار دارد و دایره C را در دو نقطه قطع می‌کند. چند مقدار طبیعی برای x وجود دارد؟

۴ (۴)

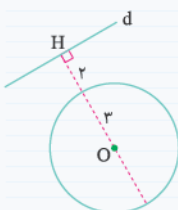
۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

✓ گزینه ۳ باید فاصله مرکز دایره تا خط d یعنی OH از شعاع دایره کم‌تر باشد. از طرفی واضح است که $OH \geq 0$ می‌باشد. پس:

$$0 \leq OH < r \Rightarrow 0 \leq 10 - x < 3 \Rightarrow -10 \leq -x < -7 \Rightarrow 7 < x \leq 10 \Rightarrow x = 8, 9, 10$$



؟ فاصله مرکز دایره $C(O, 3)$ از خط d برابر ۵ است. مجموع فاصله دورترین و نزدیک‌ترین نقاط دایره تا خط d کدام است؟

۸ (۱)

۱۰ (۲)

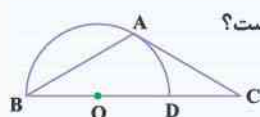
۱۲ (۳)

۱۴ (۴)

✓ گزینه ۲ چون فاصله مرکز دایره تا خط d از شعاع دایره بزرگ‌تر است، پس خط d دایره را قطع نمی‌کند.

$$\begin{cases} \text{فاصله دورترین نقاط دایره تا } d = OH + r = 5 + 3 = 8 \\ \text{فاصله نزدیک‌ترین نقاط دایره تا } d = OH - r = 5 - 3 = 2 \end{cases} \Rightarrow \text{مجموع فاصله‌ها} = 8 + 2 = 10$$

توجه کنید که اگر $OH > r$ باشد، مجموع فواصل برابر $2OH$ و مستقل از r است.



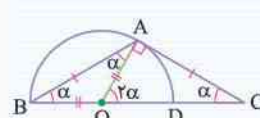
؟ در شکل مقابل، O مرکز دایره به شعاع ۲ است. اگر A نقطه تماس و $AB = AC$ باشد، طول پاره خط CD کدام است؟

۳ (۲)

$\sqrt{2}$ (۱)

$\sqrt{5}$ (۴)

۲ (۳)



✓ گزینه ۳ از O به A وصل می‌کنیم. شعاع گذرنده از نقطه تماس، بر خط مماس عمود است، پس $OA \perp BC$

AC عمود می‌باشد. از طرفی مثلث OAB و BAC متساوی الساقین هستند و زاویه AOD ، زاویه خارجی مثلث OAB است، پس زاویه‌ها به صورت مقابل هستند. در مثلث قائم‌الزاویه OAC داریم:

$$90^\circ + \alpha + 2\alpha = 180^\circ \Rightarrow 3\alpha = 90^\circ \Rightarrow \alpha = 30^\circ$$

$$OA = \frac{OC}{2} \Rightarrow 2 = \frac{OC}{2} \Rightarrow OC = 4 \Rightarrow CD = OC - OD = 4 - 2 = 2$$

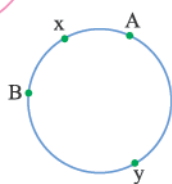
در مثلث قائم‌الزاویه، ضلع روبه‌رو به زاویه 30° نصف وتر است، پس:

■ **چند تعریف در دایره:**



■ **وتر و قطر دایره:** به پاره‌خطی که دو سر آن روی دایره باشد، وتر دایره می‌گویند و وتری که از مرکز دایره می‌گذرد، قطر دایره نامیده می‌شود. قطر دایره، بزرگ‌ترین وتر دایره است و طول آن دو برابر شعاع دایره می‌باشد.

■ **کمان:** کمان دایره شامل دو نقطه روی دایره و تمام نقاط بین آن دو نقطه است؛ بنابراین هر دو نقطه از دایره مانند A و B ، دو کمان AB را روی دایره مشخص می‌کنند. برای مشخص کردن آن‌ها از یکدیگر می‌توان از نقطه‌ای دیگر روی هر کمان استفاده کرد. مثلاً در شکل مقابل کمان‌های AxB و AyB ، کمان‌های ایجاد شده توسط نقاط A و B هستند. معمولاً منظور از کمان AB ، کمان کوچک‌تر ایجاد شده توسط نقاط A و B است، مثلاً در شکل مقابل $\widehat{AB}$ همان $\widehat{AxB}$ است.



■ **اندازه و طول کمان:** هر کمان دارای یک اندازه است که برحسب درجه بیان می شود و طول کمان نیز برحسب واحد طول معرفی می شود. دو کمان می توانند دارای اندازه های برابر و طول های متفاوت و یا طول های برابر ولی اندازه های متفاوت باشند، مثلاً در شکل مقابل، اندازه هر دو کمان 90° ولی طول های آن ها متفاوت است.

نکته در یک دایره، مجموع طول کمان ها برابر محیط دایره و مجموع اندازه کمان ها برابر 360° است.

❓ در شکل مقابل، $\widehat{AMB} = 4\widehat{ANB}$ و $\widehat{BN} = 3\widehat{AN}$ است. کمان BN چند درجه است؟

۵۴ (۲)	۳۶ (۱)
۶۰ (۴)	۱۸ (۳)

🔗 **گزینه ۲** در دایره، مجموع اندازه کمان ها برابر 360° است. پس:

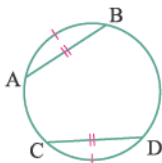
$$\widehat{AMB} + \widehat{ANB} = 360^\circ \xrightarrow{\widehat{AMB} = 4\widehat{ANB}} 4\widehat{ANB} + \widehat{ANB} = 360^\circ \Rightarrow \widehat{ANB} = 72^\circ$$

در صورت سؤال گفته شده $\widehat{BN} = 3\widehat{AN}$ است، پس:

$$\widehat{ANB} = 72^\circ \Rightarrow \widehat{AN} + \widehat{BN} = 72^\circ \Rightarrow \widehat{AN} + 3\widehat{AN} = 72^\circ \Rightarrow \widehat{AN} = 18^\circ \Rightarrow \widehat{BN} = 54^\circ$$

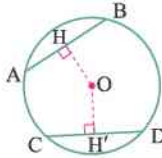
■ وترهای مساوی، نامساوی، موازی و عمود:

۱ اگر دو وتر از یک دایره با هم مساوی باشند، کمان های نظیر آن ها نیز با هم مساوی است و برعکس.



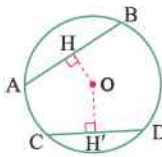
$$AB = CD \Leftrightarrow \widehat{AB} = \widehat{CD}$$

۲ در هر دایره، وترهای مساوی، از مرکز دایره به یک فاصله اند و برعکس.



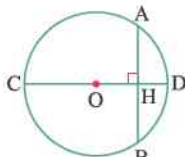
$$AB = CD \Leftrightarrow OH = OH'$$

۳ در هر دایره، از دو وتر نابرابر، آن که بزرگ تر است به مرکز دایره نزدیک تر است و برعکس.

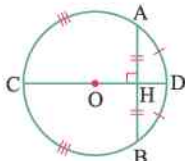


$$AB > CD \Leftrightarrow OH < OH'$$

۴ در هر دایره، قطر عمود بر وتر، آن وتر و کمان های مقابلش را نصف می کند و برعکس. یعنی در هر دایره، خطی که مرکز دایره را به وسط یک وتر یا وسط کمان نظیر آن وتر وصل می کند، بر آن وتر عمود است.

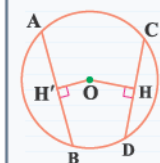


$$AB \perp CD \Leftrightarrow AH = HB, \widehat{AD} = \widehat{DB}$$



$$\begin{aligned} AH = HB &\Rightarrow AB \perp CD \\ \widehat{AD} = \widehat{DB} &\Rightarrow AB \perp CD \end{aligned}$$

❓ در دایره $C(O, 8)$ مطابق شکل مقابل، وترهای AB و CD به ترتیب با اندازه های $4x + 6$ و $2x + 8$ مفروض است. اگر x یک عدد طبیعی و $OH > OH'$ باشد، طول پاره خط OH کدام است؟



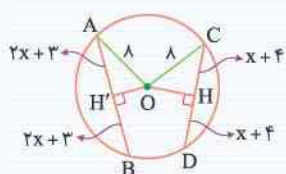
$$2\sqrt{5} \quad (۲)$$

$$2\sqrt{7} \quad (۱)$$

$$\sqrt{29} \quad (۴)$$

$$\sqrt{26} \quad (۳)$$

🔍 **گزینه ۱** چون $OH > OH'$ است، داریم:



$$OH > OH' \Rightarrow CD < AB \Rightarrow 2x + 8 < 4x + 6 \Rightarrow 2 < 2x \Rightarrow x > 1 \quad (1)$$

از طرفی چون $OH \perp CD$ و $OH' \perp AB$ هستند، پس OH و OH' وترهای AB و CD را نصف می‌کنند. در مثلث قائم‌الزاویه $OH'A$ ، طول ضلع قائم $H'A$ از وتر OA کوچک‌تر است. پس:

$$2x + 3 < 8 \Rightarrow 2x < 5 \Rightarrow x < \frac{5}{2} \quad (2)$$

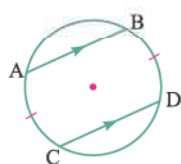
توجه کنید که CH هم از OC کوچک‌تر است، اما محدودیت مثلث $OH'A$ برای x بیش‌تر است. حال با توجه به روابط (۱) و (۲) و این‌که x عددی طبیعی است، داریم:

$$\begin{cases} x > 1 \\ x < \frac{5}{2} \end{cases} \Rightarrow 1 < x < \frac{5}{2} \xrightarrow{x \in \mathbb{N}} x = 2$$

حال در مثلث قائم‌الزاویه OHC داریم:

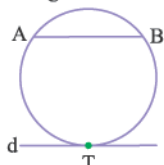
$$OC^2 = OH^2 + CH^2 \Rightarrow 6^2 = OH^2 + (x+4)^2 \xrightarrow{x=2} OH^2 = 28 \Rightarrow OH = \sqrt{28} = 2\sqrt{7}$$

۵ در هر دایره، کمان‌های محصور بین دو وتر موازی با هم برابرند، اما عکس این مطلب برقرار نیست.



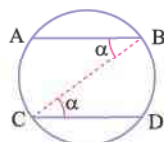
$$AB \parallel CD \Rightarrow \widehat{AC} = \widehat{BD}$$

نتیجه ۱ کمان‌های محصور بین خط مماس بر دایره و وتر موازی با آن، با یکدیگر برابرند.



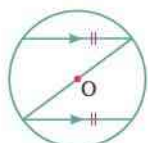
$$AB \parallel d \Rightarrow \widehat{AT} = \widehat{BT}$$

۲ در شکل مقابل، اگر $\widehat{AC} = \widehat{BD}$ باشد، داریم:



$$AB \parallel CD, \widehat{AC} = \widehat{BD} \Rightarrow \angle ABC = \angle DCB$$

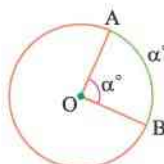
۶ هر دو وتر موازی که بر انتهای یک قطر از دایره می‌گذرند، مساوی‌اند و هر دو وتر مساوی که بر دو انتهای یک قطر از دایره می‌گذرند، در دو طرف آن قرار دارند و موازی‌اند.



معمولاً از مطالب فوق، در ترکیب با زاویه‌ها در دایره سؤال مطرح می‌شود.

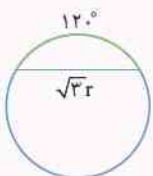
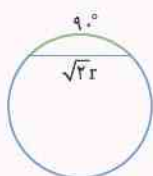
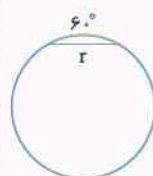
📌 زاویه در دایره

۱. **زاویه مرکزی:** زاویه‌ای است که رأس آن مرکز دایره و دو ضلع آن، دو شعاع از دایره می‌باشد. اندازه زاویه مرکزی با اندازه کمان روبه‌رو به آن برابر است.

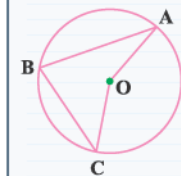


$$\angle AOB = \widehat{AB} = \alpha^\circ$$

نکته گاهی به جای این‌که اندازه کمانی را بدهند، طول وتر متناظر با آن را می‌دهند. برای به‌دست آوردن اندازه کمان، کافی است اندازه زاویه مرکزی متناظر با آن را به‌دست آوریم. برای این کار از مرکز دایره به دو سر آن وتر وصل می‌کنیم و از قضیه کسینوس‌ها در مثلث ایجادشده استفاده می‌کنیم، اما موارد روبه‌رو را می‌توان بدون استفاده از قضیه کسینوس‌ها هم به‌دست آورد و بهتر است این مقادیر را حفظ باشیم. در دایره به شعاع r داریم:



؟ در شکل مقابل، O مرکز دایره و $AB = \sqrt{3}OA$ و $BC = \sqrt{2}OC$ است. زاویه AOC چند درجه است؟



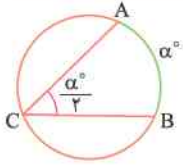
۱۳۰ (۲)

۱۲۰ (۱)

۱۵۰ (۴)

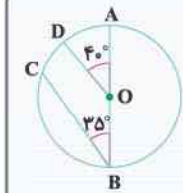
۱۴۰ (۳)

🔗 **گزینه ۴** چون وتر AB ، $\sqrt{3}$ برابر شعاع دایره است، پس $\widehat{AB} = 120^\circ$ می باشد. هم چنین چون وتر BC ، $\sqrt{2}$ برابر شعاع دایره می باشد، پس $\widehat{BC} = 90^\circ$ است، بنابراین داریم:
 $\widehat{AB} + \widehat{BC} + \widehat{AC} = 360^\circ \Rightarrow 120^\circ + 90^\circ + \widehat{AC} = 360^\circ \Rightarrow \widehat{AC} = 150^\circ$
 زاویه AOC زاویه مرکزی رو به کمان AC است، پس $\angle AOC = 150^\circ$ می باشد.



۲. **زاویه محاطی:** زاویه ای است که رأس آن روی دایره و دو ضلع آن، دو وتر از دایره می باشد. اندازه زاویه محاطی برابر با نصف کمان مقابل آن است.

$$\angle ACB = \frac{\widehat{AB}}{2} = \frac{\alpha^\circ}{2}$$

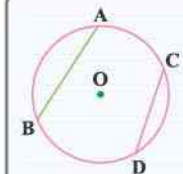


؟ در شکل مقابل، O مرکز دایره است. اندازه کمان CD چند درجه است؟

(۱) ۲۵ (۲) ۳۰

(۳) ۳۵ (۴) ۴۰

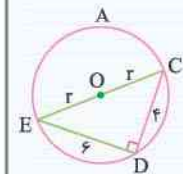
🔗 **گزینه ۲** زاویه AOD زاویه مرکزی است، پس $\widehat{AD} = 40^\circ$ می باشد. از طرفی زاویه ABC زاویه محاطی رو به کمان ADC است، پس $\widehat{ADC} = 2 \times 35^\circ = 70^\circ$ می باشد، پس:
 $\widehat{DC} = \widehat{ADC} - \widehat{AD} = 70^\circ - 40^\circ = 30^\circ$



؟ در شکل مقابل، طول وترهای AB و CD به ترتیب برابر ۶ و ۴ است. اگر $\widehat{AB} + \widehat{CD} = 180^\circ$ باشد، طول شعاع دایره کدام است؟

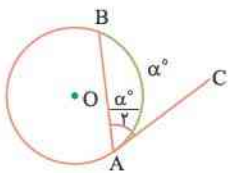
(۱) $2\sqrt{2}$ (۲) $\sqrt{15}$

(۳) $3\sqrt{2}$ (۴) $\sqrt{13}$



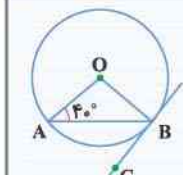
🔗 **گزینه ۴** از نقطه D وتر DE را به اندازه AB رسم می کنیم. چون $DE = AB$ است، پس کمان DE نیز با کمان AB برابر است. چون $\widehat{AB} + \widehat{CD} = 180^\circ$ ، پس $\widehat{CD} + \widehat{DE} = 180^\circ$ نیز برابر 180° می باشد. از طرفی چون کمان CDE برابر 180° است، پس وتر CE قطر دایره بوده و زاویه CDE ، زاویه محاطی رو به نیم دایره است و برابر 90° می باشد. حال در مثلث قائم الزاویه CDE داریم:

$$CE^2 = CD^2 + DE^2 \Rightarrow (2r)^2 = 16 + 36 \Rightarrow 4r^2 = 16 + 36 \Rightarrow r^2 = 4 + 9 = 13 \Rightarrow r = \sqrt{13}$$



۳. **زاویه ظلی:** زاویه ای است که رأس آن روی دایره، یک ضلع آن وتر دایره و ضلع دیگر آن مماس بر دایره است. اندازه هر زاویه ظلی برابر نصف کمان مقابل آن است.

$$\angle BAC = \frac{\widehat{AB}}{2} = \frac{\alpha^\circ}{2}$$

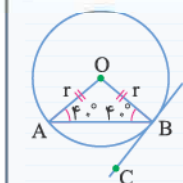


؟ در شکل مقابل CB بر دایره به مرکز O مماس است. اگر $\angle OAB = 40^\circ$ باشد، زاویه ABC چند درجه است؟

(۱) ۴۰ (۲) ۴۵

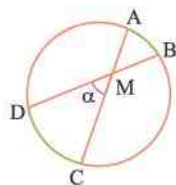
(۳) ۵۰ (۴) ۵۵

🔗 **گزینه ۳** مثلث AOB متساوی الساقین است، زیرا $OA = OB = r$ می باشد. بنابراین زاویه AOB برابر 100° است، زیرا:
 $40^\circ + \angle AOB + 40^\circ = 180^\circ \Rightarrow \angle AOB = 100^\circ$



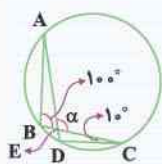
زاویه AOB زاویه مرکزی رو به کمان AB است، پس $\widehat{AB} = 100^\circ$ می باشد. از طرفی زاویه ABC زاویه ظلی رو به کمان AB است، پس:

$$\angle ABC = \frac{\widehat{AB}}{2} = \frac{100^\circ}{2} = 50^\circ$$



۴. زاویه بین دو وتر: زاویه بین دو وتر که درون دایره همدیگر را قطع کنند برابر با نصف مجموع کمان های مقابل به آن زاویه است.

$$\alpha = \frac{\widehat{AB} + \widehat{CD}}{2}$$



؟ در شکل مقابل، زاویه AEC چند درجه است؟

$$110^\circ (2)$$

$$100^\circ (1)$$

$$130^\circ (4)$$

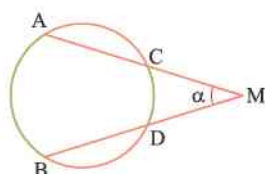
$$120^\circ (3)$$

✔ نکته ۲: زوایای BCD و ABC زوایای محاطی رو به کمان های BD و AC هستند، پس داریم:

$$\widehat{BCD} = \frac{\widehat{BD}}{2} \Rightarrow 10^\circ = \frac{\widehat{BD}}{2} \Rightarrow \widehat{BD} = 20^\circ \quad \widehat{ABC} = \frac{\widehat{AC}}{2} \Rightarrow 10^\circ = \frac{\widehat{AC}}{2} \Rightarrow \widehat{AC} = 20^\circ$$

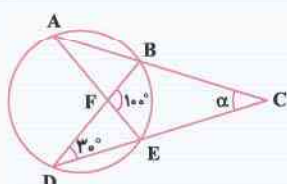
از طرفی AEC، زاویه بین دو وتر AC و BD است، پس:

$$\widehat{AEC} = \frac{\widehat{AC} + \widehat{BD}}{2} = \frac{20^\circ + 20^\circ}{2} = 110^\circ$$



۵. زاویه بین امتداد دو وتر: زاویه بین امتداد دو وتر که در نقطه ای خارج از دایره متقاطع اند، برابر نصف تفاضل کمان های مقابل به آن زاویه است.

$$\alpha = \frac{\widehat{AB} - \widehat{CD}}{2}$$



؟ در شکل مقابل $\widehat{BDC} = 30^\circ$ و $\widehat{BFE} = 100^\circ$ می باشند. زاویه ACD چند درجه است؟

$$30^\circ (2)$$

$$25^\circ (1)$$

$$40^\circ (4)$$

$$35^\circ (3)$$

✔ نکته ۴: زاویه BDE زاویه محاطی رو به کمان BE است، پس:

$$\widehat{BDE} = \frac{\widehat{BE}}{2} \Rightarrow 30^\circ = \frac{\widehat{BE}}{2} \Rightarrow \widehat{BE} = 60^\circ$$

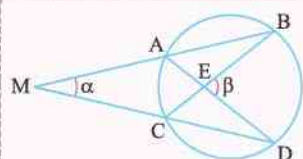
از طرفی زاویه BFE زاویه بین دو وتر است که کمان های BE و AD کمان های مقابل آن است، پس:

$$\widehat{BFE} = \frac{\widehat{BE} + \widehat{AD}}{2} \Rightarrow 100^\circ = \frac{60^\circ + \widehat{AD}}{2} \Rightarrow \widehat{AD} = 140^\circ$$

$$\widehat{ACD} = \frac{\widehat{AD} - \widehat{BE}}{2} \Rightarrow \alpha = \frac{140^\circ - 60^\circ}{2} = 40^\circ$$

زاویه ACD، زاویه بین امتداد دو وتر است، پس:

نکته در شکل مقابل داریم:



$$\begin{cases} \alpha = \frac{\widehat{BD} - \widehat{AC}}{2} \\ \beta = \frac{\widehat{BD} + \widehat{AC}}{2} \end{cases} \Rightarrow \alpha + \beta = \widehat{BD}$$

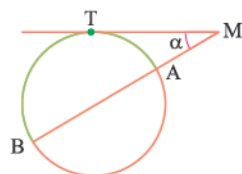
$$\alpha + 100^\circ = 140^\circ \Rightarrow \alpha = 40^\circ$$

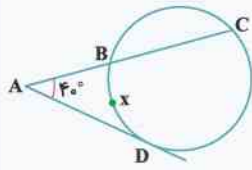
مثلاً در تمرین بالا بعد از این که $\widehat{AD} = 140^\circ$ به دست آمد، می توان گفت:

۶. زاویه بین امتداد وتر و مماس:

زاویه بین امتداد وتر و مماس بر دایره، برابر نصف تفاضل کمان های مقابل به آن زاویه است:

$$\alpha = \frac{\widehat{TB} - \widehat{TA}}{2}$$





۶. در شکل مقابل AD بر دایره مماس است. اگر $\widehat{CAD} = 40^\circ$ و $\widehat{BDC} = 140^\circ$ باشند، اندازه کمان BxD چند درجه است؟

۴۰ (۲)

۳۰ (۱)

۶۰ (۴)

۵۰ (۳)

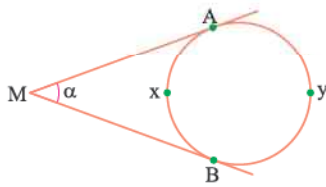
✔ گزینه ۱ زاویه CAD بین امتداد وتر و مماس است، پس:

$$\widehat{CAD} = \frac{\widehat{CD} - \widehat{BxD}}{2} \Rightarrow 40^\circ = \frac{\widehat{CD} - \widehat{BxD}}{2} \Rightarrow \widehat{CD} - \widehat{BxD} = 80^\circ$$

از طرفی $\widehat{BDC} = \widehat{CD} + \widehat{BxD}$ می باشد، پس $\widehat{CD} + \widehat{BxD} = 140^\circ$ است.

$$\begin{cases} \widehat{CD} - \widehat{BxD} = 80^\circ \\ \widehat{CD} + \widehat{BxD} = 140^\circ \end{cases} \Rightarrow \widehat{CD} = 110^\circ, \widehat{BxD} = 30^\circ$$

بنابراین داریم:



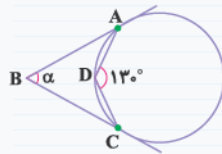
۷. زاویه بین دو مماس: اگر دو ضلع زاویه ای بر دایره مماس باشند، اندازه زاویه بین دو مماس برابر

نصف تفاضل کمان های مقابل به آن زاویه است:

$$\alpha = \frac{\widehat{AyB} - \widehat{AxB}}{2}$$

نکته رابطه فوق را می توان به صورت ساده زیر نیز نوشت:

$$\alpha = \frac{\widehat{AyB} - \widehat{AxB}}{2} \xrightarrow{\widehat{AyB} = 136^\circ - \widehat{AxB}} \alpha = \frac{136^\circ - \widehat{AxB} - \widehat{AxB}}{2} \Rightarrow \alpha = 18^\circ - \widehat{AxB} \Rightarrow \alpha + \widehat{AxB} = 18^\circ$$



۸. در شکل مقابل، BA و BC بر دایره مماس اند. اگر $\widehat{ADC} = 130^\circ$ باشد، زاویه ABC چند درجه است؟

۷۵ (۲)

۷۰ (۱)

۸۵ (۴)

۸۰ (۳)

✔ گزینه ۳ روش اول زاویه ADC محاطی رو به کمان AC است، پس:

$$\widehat{ADC} = \frac{\widehat{AC}}{2} = 130^\circ \Rightarrow \widehat{AC} = 260^\circ$$

$$260^\circ + \widehat{ADC} = 360^\circ \Rightarrow \widehat{ADC} = 100^\circ$$

از طرفی $\widehat{AC} + \widehat{ADC} = 360^\circ$ است، پس:

$$\widehat{ABC} = \frac{\widehat{AC} - \widehat{ADC}}{2} \Rightarrow \alpha = \frac{260^\circ - 100^\circ}{2} = 80^\circ$$

زاویه ABC زاویه بین دو مماس است، بنابراین داریم:

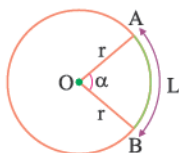
روش دوم زاویه ADC محاطی رو به کمان AC است، پس $\widehat{AC} = 260^\circ$ و این یعنی $\widehat{ADC} = 100^\circ$ می باشد. حال داریم:

$$\alpha + 100^\circ = 180^\circ \Rightarrow \alpha = 80^\circ$$

کمان و قطاع

طول کمان: چون محیط یک دایره، کمانی به اندازه 360° و به طول $2\pi R$ است، هم چنین اندازه کمان روبه رو به زاویه مرکزی، با اندازه آن زاویه برابر

است، می توان طول کمان AB را با یک تناسب ساده به دست آورد:



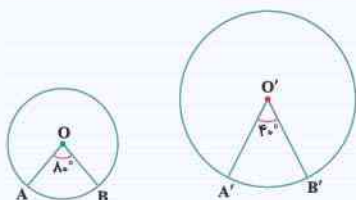
طول

اندازه

360° $2\pi r$

$$L \Rightarrow L = 2\pi r \times \frac{\alpha}{360^\circ}$$

❓ در شکل مقابل، طول کمان‌های AB و $A'B'$ با هم برابر است. شعاع دایره بزرگ‌تر چند برابر شعاع دایره کوچک‌تر است؟



۲ (۲)

۱/۵ (۱)

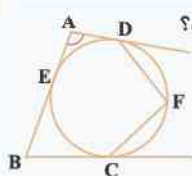
۳ (۴)

۲/۵ (۳)

✔️ گزینه ۲ فرض می‌کنیم طول هر دو کمان برابر L و شعاع دایره کوچک r و شعاع دایره بزرگ r' باشد، پس:

$$\begin{cases} L = 2\pi r \times \frac{36^\circ}{360^\circ} \\ L = 2\pi r' \times \frac{4^\circ}{360^\circ} \end{cases} \Rightarrow 2\pi r \times \frac{36^\circ}{360^\circ} = 2\pi r' \times \frac{4^\circ}{360^\circ} \Rightarrow r \times 36^\circ = r' \times 4^\circ \Rightarrow \frac{r'}{r} = 9$$

❓ در شکل مقابل، نقاط D و E نقاط تماس هستند. اگر $\widehat{BAD} = 10^\circ$ و $\widehat{ABC} = 70^\circ$ باشند، زاویه DFC چند درجه است؟



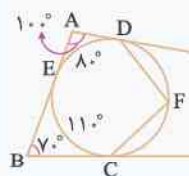
۱۱۰ (۲)

۱۰۵ (۱)

۹۰ (۴)

۹۵ (۳)

✔️ گزینه ۲ با توجه به زاویه‌های داده شده، اندازه کمان‌های روبه روی آن‌ها را به دست می‌آوریم:



$$\widehat{BAD} = 10^\circ \Rightarrow \widehat{ED} = 10^\circ$$

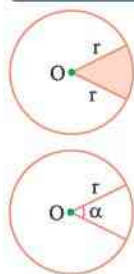
$$\widehat{ABC} = 70^\circ \Rightarrow \widehat{EC} = 70^\circ$$

زاویه DFC زاویه محاطی رو به کمان DEC است، پس:

$$\widehat{DFC} = \frac{10^\circ + 70^\circ}{2} = \frac{80^\circ}{2} = 40^\circ$$

■ **قطاع:** سطح محصور بین دو شعاع یک دایره را قطاع دایره می‌نامند.

■ **مساحت قطاع:** مساحت قطاع با زاویه مرکزی α به صورت زیر به دست می‌آید:



زاویه

 α
 360°

مساحت

 S
 πr^2

$$S = \pi r^2 \times \frac{\alpha}{360^\circ}$$

❓ اندازه زاویه مرکزی یک قطاع از دایره، 40° است. اگر مساحت این قطاع 4π باشد، شعاع دایره کدام است؟

۹ (۴)

۸ (۳)

۷ (۲)

۶ (۱)

✔️ گزینه ۱ کافی است مقادیر داده شده را در رابطه $S = \pi r^2 \times \frac{\alpha}{360^\circ}$ جای گذاری کنیم:

$$4\pi = \pi r^2 \times \frac{40^\circ}{360^\circ} \Rightarrow 4 = \frac{r^2}{9} \Rightarrow r^2 = 36 \Rightarrow r = 6$$

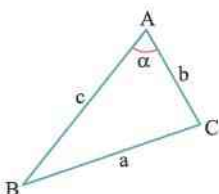
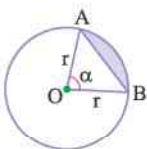
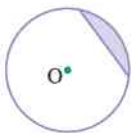
❗ نکته اگر به جای زاویه مرکزی قطاع، طول کمان را داشته باشیم، می‌توانیم از رابطه زیر استفاده کنیم:

$$\begin{aligned} L &= 2\pi r \times \frac{\alpha}{360^\circ} \\ S &= \pi r^2 \times \frac{\alpha}{360^\circ} \end{aligned} \Rightarrow \frac{L}{S} = \frac{2}{r} \Rightarrow S = \frac{rL}{2}$$

❓ مساحت قطاعی از دایره 6π است. اگر طول کمان قطاع 2π باشد، اندازه شعاع دایره کدام است؟

- ۳ (۱) ۴ (۲) ۶ (۳) ۱۲ (۴)

🔗 نکته ۳ با توجه به رابطه $S = \frac{rL}{2}$ که در آن S مساحت قطاع، r اندازه شعاع دایره و L طول کمان متناظر قطاع است، داریم:
 $6\pi = \frac{r \times 2\pi}{2} \Rightarrow r = 6$



■ **قطعه یک دایره:** در یک دایره، ناحیه محصور به یک وتر و کمان متناظرش را قطعه می‌نامیم.

■ **مساحت قطعه:** برای محاسبه مساحت قطعه، کافی است مساحت مثلث متساوی‌الساقین OAB را از مساحت قطاع کم کنیم؛ بنابراین داریم:

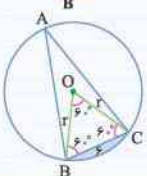
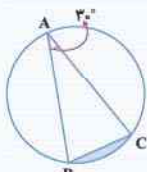
$$S_{\text{قطعه}} = S_{\text{قطاع}} - S_{\text{AOB}} \Rightarrow S_{\text{قطعه}} = \pi r^2 \times \frac{\alpha}{360^\circ} - \frac{1}{2} r^2 \sin \alpha$$

🔗 **یادآوری** در ریاضی دهم دیدید که مساحت مثلث برابر با نصف حاصل ضرب دو ضلع در سینوس زاویه بین آن دو ضلع است.

$$S = \frac{1}{2} bc \sin \alpha$$

❓ در شکل مقابل، طول وتر BC برابر ۶ است. اگر $\widehat{BAC} = 30^\circ$ باشد، مساحت قسمت رنگی کدام است؟

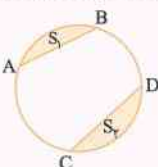
- ۶۰ (۱) $6\pi - 9\sqrt{3}$ (۲) $4\pi - 3\sqrt{3}$ (۳) $12\sqrt{3} - 9\pi$ (۴) $8\pi - 9\sqrt{3}$



🔗 **نکته ۱** از مرکز دایره به B و C وصل می‌کنیم. زاویه مرکزی BOC برابر 60° است. از طرفی مثلث BOC متساوی‌الساقین است. با توجه به این که زاویه رأس آن 60° است، پس متساوی‌الاضلاع نیز هست. حال داریم:

$$S_{\text{رنگی}} = S_{\text{قطاع}} - S_{\triangle BOC} = \pi \times 6^2 \times \frac{60^\circ}{360^\circ} - \frac{\sqrt{3}}{4} (6)^2 = 6\pi - 9\sqrt{3}$$

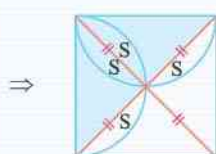
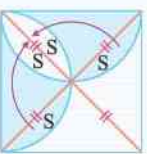
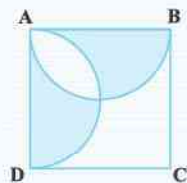
🔗 **نکته** اگر AB و CD دو وتر با طول‌های برابر از دایره باشند، آن‌گاه مساحت قطعه‌های متناظر با آن‌ها با هم برابر است.



$$AB = CD \Leftrightarrow S_1 = S_2$$

❓ در شکل مقابل، چهارضلعی ABCD مربع است. اضلاع AB و AD قطرهای دو نیم‌دایره می‌باشند. اگر مساحت مربع ۱۶ باشد، مساحت قسمت رنگی کدام است؟

- ۴ (۱) ۸ (۲) ۳ (۳) ۳ (۴)



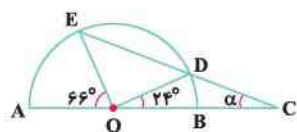
🔗 **نکته ۲** ابتدا قطرهای مربع را رسم می‌کنیم. می‌دانیم قطرهای مربع با هم برابرند و همدیگر را نصف می‌کنند؛ بنابراین مطابق شکل‌های مقابل داریم:

$$\Rightarrow S_{\text{رنگی}} = \frac{1}{4} S_{\text{مربع}} = \frac{1}{4} \times 16 = 4$$

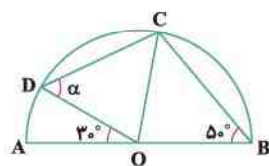
پرسش‌های چهارگزینه‌ای

درس
۱

مقدمات

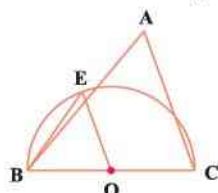

۱. در شکل زیر، O مرکز نیم‌دایره است. اندازه زاویه α چند درجه است؟

- ۱۸ (۱)
۲۰ (۲)
۲۱ (۳)
۲۴ (۴)

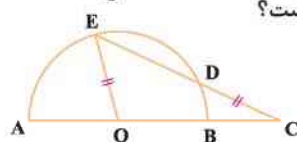


۲. در شکل مقابل، O مرکز نیم‌دایره است. اندازه زاویه ODC چند درجه است؟

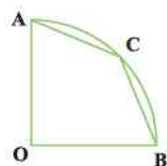
- ۶۵ (۱)
۶۰ (۲)
۵۵ (۳)
۵۰ (۴)

۳. در شکل زیر، O مرکز نیم‌دایره و AC موازی EO است. اگر $\widehat{ACB} = 7^\circ$ و $\widehat{ABE} = 5^\circ$ باشد، اندازه زاویه BAC چند درجه است؟


- ۴۰ (۱)
۵۰ (۲)
۶۰ (۳)
۷۰ (۴)

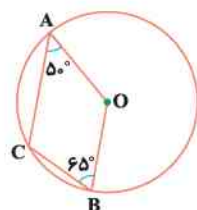
۴. در شکل زیر، O مرکز نیم‌دایره است. اگر $OE = DC$ و $\widehat{AOE} = 75^\circ$ باشد، اندازه زاویه OEC چند درجه است؟


- ۴۵ (۱)
۴۰ (۲)
۵۵ (۳)
۵۰ (۴)

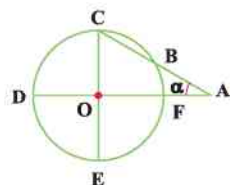
۵. در شکل مقابل، O مرکز ربع دایره است. اگر $\widehat{OAC} = 7^\circ$ باشد، اندازه زاویه OBC چند درجه است؟


- ۵۵ (۱)
۶۰ (۲)
۶۵ (۳)
۷۰ (۴)

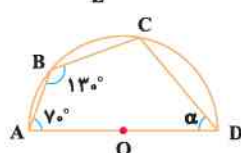
۶. در شکل مقابل، O مرکز دایره است. اندازه زاویه AOB چند درجه است؟



- ۱۲۰ (۱)
۱۳۰ (۲)
۱۴۰ (۳)
۱۵۰ (۴)

۷. در شکل مقابل، قطرهای دایره برهم عمودند. اگر $OD = AB$ باشد، اندازه زاویه α چند درجه است؟


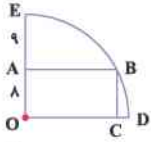
- ۲۵ (۱)
۳۰ (۲)
۳۵ (۳)
۴۰ (۴)

۸. در شکل مقابل، O مرکز نیم‌دایره است. اندازه زاویه α چند درجه است؟


- ۴۵ (۱)
۵۰ (۲)
۵۵ (۳)
۶۰ (۴)

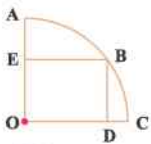
۹. در شکل مقابل، AB قطر نیم‌دایره است. اگر $AB = 2EC$ و $\widehat{ACD} = 2^\circ$ باشند، اندازه زاویه ADC چند درجه است؟


- ۱۲۰ (۱)
۱۱۰ (۲)
۱۰۰ (۳)
۹۵ (۴)



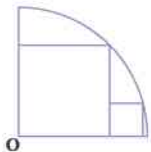
۱۰. در شکل مقابل، O مرکز ربع دایره است. مساحت مستطیل ABCO کدام است؟

- (۱) ۸۰
(۲) ۹۶
(۳) ۱۲۰
(۴) ۱۲۸



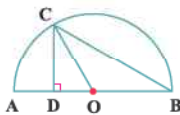
۱۱. در شکل مقابل، مستطیلی به ابعاد ۶ و ۸ درون ربع دایره‌ای به مرکز O قرار دارد. حاصل $CD + AE$ کدام است؟

- (۱) ۸
(۲) ۶
(۳) ۷
(۴) ۵



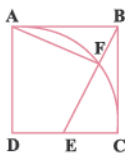
۱۲. در شکل مقابل، O مرکز ربع دایره و هر دو چهارضلعی مربع هستند. اگر طول ضلع مربع کوچک برابر ۲ باشد، طول ضلع مربع بزرگ کدام است؟

- (۱) ۵
(۲) $4\sqrt{2}$
(۳) $2 + 2\sqrt{2}$
(۴) $2 + 2\sqrt{3}$



۱۳. در شکل مقابل، O مرکز نیم دایره و CO نیمساز زاویه DCB است. اگر $DO = 4$ باشد، طول پاره خط AD کدام است؟

- (۱) ۴
(۲) ۶
(۳) ۳
(۴) ۵



۱۴. در شکل زیر، ABCD مربع به ضلع ۴ و دایره به مرکز D و شعاع ۴ رسم شده است. اگر E وسط ضلع مربع باشد، اندازه زاویه AFE چند درجه است؟

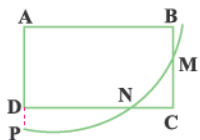
- (۱) ۹۵
(۲) ۸۵
(۳) ۹۰
(۴) ۸۰

۱۵. در مربعی به ضلع ۲ واحد، دایره‌ای به مرکز یک رأس آن و شعاع $\frac{2}{5}$ واحد، دو ضلع مربع را قطع می‌کند. فاصله نزدیک‌ترین رأس مربع تا نقطه تقاطع کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{4}$
(۲) $\frac{1}{2}$
(۳) $\frac{\sqrt{2}}{2}$
(۴) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

۱۶. در مستطیل به ابعاد ۴ و ۸، دایره به مرکز یک رأس مستطیل و شعاع ۵، اضلاع آن را در دو نقطه قطع می‌کند. فاصله این دو نقطه از هم کدام است؟

- (۱) $2\sqrt{7}$
(۲) $3\sqrt{2}$
(۳) ۴
(۴) $2\sqrt{5}$



۱۷. در شکل زیر، ABCD مستطیل است. دایره به مرکز A ضلع‌های مستطیل و امتداد آن‌ها را در نقاط M، N و P قطع کرده است. اگر $BM = 7$ ، $MC = 8$ و $DP = 10$ باشد، طول پاره خط NC کدام است؟

- (۱) ۴
(۲) ۳
(۳) $\frac{2}{5}$
(۴) $\frac{3}{5}$

۱۸. عرض مستطیل ABCD برابر ۵ است. دایره‌ای به مرکز یکی از رأس‌ها، طول مستطیل را در دو نقطه قطع می‌کند. اگر طول قطعات کوچک‌تر ایجاد شده بر روی طول‌های مستطیل ۲ و ۳ باشد، شعاع دایره کدام است؟

- (۱) ۱۰
(۲) ۱۳
(۳) ۱۱
(۴) ۸

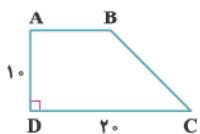


۱۹. در مستطیل شکل زیر، نقاط T و E روی دایره‌ای به رأس C و نقاط T و F روی دایره‌ای به رأس D قرار دارند. اگر $DE = EF = 4$ باشد، مساحت مستطیل ABCD کدام است؟

- (۱) ۳۶
(۲) ۴۴
(۳) ۵۲
(۴) ۴۸

۲۰. مربع ABCD به ضلع $3\sqrt{2}$ مفروض است. به مرکز رأس D و شعاع ۶ دایره‌ای رسم می‌کنیم. ضلع DC را از طرف C امتداد می‌دهیم تا دایره را در E قطع کند. اندازه زاویه CBE چند درجه است؟

- (۱) ۲۰
(۲) $22\frac{1}{2}$
(۳) ۲۵
(۴) ۳۰



۲۱. در دوزنقه شکل مقابل، دایره به رأس A از رئوس B و D می‌گذرد. اندازه زاویه C چند درجه است؟

- (۱) ۳۰
(۲) ۴۵
(۳) ۶۰
(۴) نمی‌توان تعیین کرد.

۲۲. مربع ABCD به ضلع ۴ واحد مفروض است. شعاع دایره گذرا بر دو رأس A و B و مماس بر ضلع CD کدام است؟

- (۱) $2\frac{1}{2}$
(۲) $\frac{2}{5}$
(۳) $2\sqrt{2}$
(۴) ۳

(ریاضی خارج ۹۵)

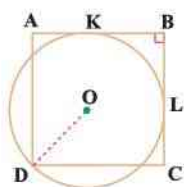
۲۳. مربع $ABCD$ مفروض است. شعاع دایره گذرا از دو رأس A و B و مماس بر ضلع CD برابر 5 است. مساحت مربع کدام است؟

- ۶۴ (۱) ۲۵ (۲) ۳۶ (۳) ۴۹ (۴)

۲۴. در شکل مقابل، $ABCD$ و نقاط L و K نقاط تماس هستند. اگر مرکز دایره، $OD = 5$ و $AK = 3$ باشند،

مساحت مستطیل کدام است؟

- ۶۴ (۱) ۷۲ (۲) ۸۰ (۳) ۸۰ (۴)



۲۵. نقطه A بیرون دایره $C(O, 3)$ قرار دارد. اگر $OA = 8 - x$ باشد، برای x چند مقدار طبیعی وجود دارد؟

- ۶ (۱) ۵ (۲) ۴ (۳) ۳ (۴)

۲۶. نزدیک ترین و دورترین فاصله نقطه A از دایره ای به ترتیب 7 و 13 است. شعاع دایره می تواند باشد؟

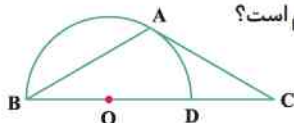
- ۲ (۱) ۱۰ (۲) ۴ (۳) ۶ (۴)

۲۷. خط d و دایره $C(O, 4)$ مفروض است. اگر فاصله مرکز دایره تا خط d برابر 10 باشد، فاصله نزدیک ترین نقاط دایره تا خط d کدام است؟

- ۵ (۱) ۴ (۲) ۶ (۳) ۷ (۴)

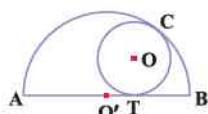
۲۸. در شکل مقابل، O مرکز نیم دایره به شعاع 2 است. اگر نقطه تماس A و $AB = AC$ باشد، طول پاره خط CD کدام است؟

- $\sqrt{7}$ (۱) ۳ (۲) $\sqrt{5}$ (۳) ۲ (۴)



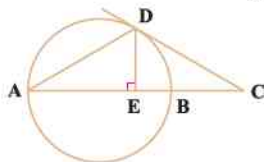
۲۹. در شکل زیر، O مرکز دایره، O' مرکز نیم دایره و نقاط T و C نقاط تماس هستند. اگر $AT = 8$ و $TB = 4$ باشند، اندازه شعاع دایره کدام است؟

- ۴ (۱) $\frac{8}{3}$ (۲) $\frac{9}{2}$ (۳) $\frac{7}{3}$ (۴)



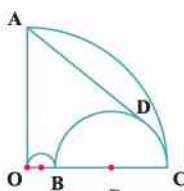
۳۰. در شکل زیر، AB قطر دایره و CD بر دایره مماس است. اگر $BC = 2BE = 4$ باشد، اندازه شعاع دایره کدام است؟

- ۵ (۱) $3\sqrt{2}$ (۲) ۴ (۳) ۳ (۴)



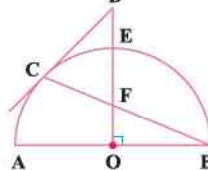
۳۱. در شکل مقابل، دو نیم دایره به شعاع های 1 و 4 درون ربع دایره ای به مرکز O قرار دارند. اگر AD بر نیم دایره بزرگتر مماس باشد، طول AD کدام است؟

- $2\sqrt{30}$ (۱) $3\sqrt{10}$ (۲) $3\sqrt{20}$ (۳) $2\sqrt{15}$ (۴)



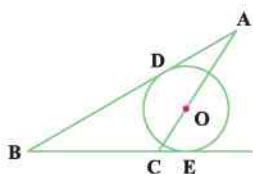
۳۲. در شکل مقابل، O مرکز نیم دایره و C نقطه تماس است. اگر $DC = 8$ باشد، طول پاره خط DF کدام است؟

- ۹ (۱) ۱۰ (۲) ۱۱ (۳) ۸ (۴)



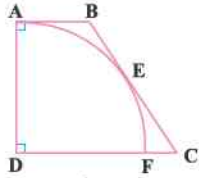
۳۳. در شکل زیر، O مرکز دایره، نقاط D و E نقاط تماس، $\angle ABC = 30^\circ$ و $BC = 6$ است. اگر مساحت مثلث ABC برابر 24 باشد، اندازه شعاع دایره کدام است؟

- $\frac{3}{4}$ (۱) $\frac{24}{11}$ (۲) $\frac{5}{7}$ (۳) $\frac{8}{9}$ (۴)



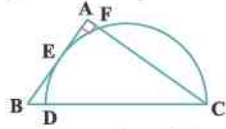
۳۴. در مثلث قائم الزاویه، دایره به مرکز رأس قائمه بر وتر مثلث مماس است. اگر طول قطعات ایجاد شده روی وتر توسط نقطه تماس 5 و 8 باشد، فاصله نقاط تلاقی دایره با اضلاع قائم مثلث کدام است؟

- $4\sqrt{5}$ (۱) $3\sqrt{5}$ (۲) $5\sqrt{3}$ (۳) $4\sqrt{3}$ (۴)



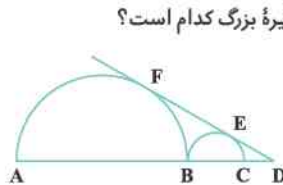
۳۵. در شکل زیر، $ABCD$ دوزنقه قائم‌الزاویه و D مرکز نیم‌دایره است. اگر A و E نقاط تماس، $EC = 8$ و $FC = 2$ باشد، طول پاره خط BE کدام است؟

- (۱) ۸
(۲) ۱۰
(۳) ۹
(۴) ۷



۳۶. در شکل مقابل، E نقطه تماس است. اگر $AB = 27$ و $AC = 36$ باشد، طول شعاع نیم‌دایره کدام است؟

- (۱) ۱۸
(۲) ۲۰
(۳) ۱۵
(۴) ۲۲



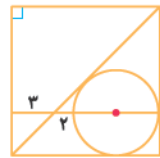
۳۷. در شکل زیر، نقاط E و F نقاط تماس هستند. اگر شعاع نیم‌دایره کوچک برابر ۱ و $CD = 1$ باشد، شعاع نیم‌دایره بزرگ کدام است؟

- (۱) ۶
(۲) ۳
(۳) ۲
(۴) ۴

۳۸. در یک دایره به مرکز O ، شعاع OA را به اندازه خود تا نقطه B امتداد می‌دهیم. از نقطه B بر مماس دلخواه دایره عمود BD را فرود می‌آوریم. اگر $\widehat{ADB} = 34^\circ$ باشد، زاویه $\widehat{OAD}$ چند درجه است؟

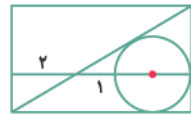
(ریاضی ۹۲)

- (۱) ۶۸
(۲) ۷۳
(۳) ۱۰۲
(۴) ۱۴۶



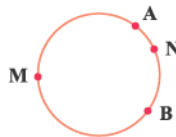
۳۹. در شکل زیر، محیط بزرگ‌ترین چهارضلعی کدام است؟

- (۱) $22/5$
(۲) $21/25$
(۳) $12/5$
(۴) $11/25$



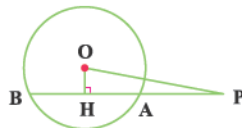
۴۰. مساحت مستطیل زیر کدام است؟

- (۱) ۳۹
(۲) ۳۳
(۳) ۲۷
(۴) ۲۱



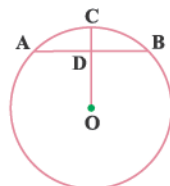
۴۱. در شکل مقابل، $\widehat{AMB} = 4^\circ$ و $\widehat{ANB} = 3^\circ$ است. اندازه کمان BN چند درجه است؟

- (۱) ۳۶
(۲) ۵۴
(۳) ۱۸
(۴) ۶۰



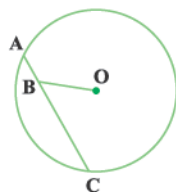
۴۲. در شکل زیر $AB = 6$ ، $OH = 1$ و $\widehat{OHA} = 90^\circ$. اندازه شعاع دایره چه قدر است؟

- (۱) $\sqrt{13}$
(۲) $\sqrt{12}$
(۳) $\sqrt{10}$
(۴) $\sqrt{11}$



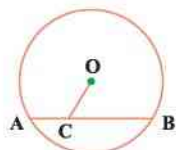
۴۳. در دایره شکل مقابل، O مرکز دایره و C وسط کمان AB است. اگر $AB = 6$ و $CD = 1$ باشند، طول شعاع دایره کدام است؟

- (۱) ۴
(۲) $3\sqrt{2}$
(۳) $2\sqrt{5}$
(۴) ۵



۴۴. در شکل مقابل، O مرکز دایره است. اگر $AB = 7$ ، $OB = 5\sqrt{2}$ و $BC = 17$ باشد، طول شعاع دایره کدام است؟

- (۱) ۱۲
(۲) ۱۳
(۳) ۱۴
(۴) ۱۵

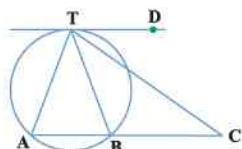


۴۵. در شکل مقابل، O مرکز دایره است. اگر $OC = \sqrt{5}$ و $BC = 2AC = 4$ باشند، طول شعاع دایره کدام است؟

- $$\begin{array}{ll} \sqrt{13} (2) & 2\sqrt{3} (1) \\ \sqrt{15} (4) & \sqrt{14} (3) \end{array}$$

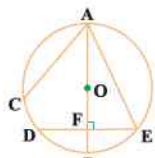
۴۶. دو دایره هم‌مرکز مفروض‌اند. طول وترى از دایره بزرگ‌تر که به دایره کوچک‌تر مماس است برابر ۱۰ می‌باشد. مساحت ناحیه محدود بین دو دایره کدام است؟

- ۲۰π (۱) ۲۴π (۲) ۲۵π (۳) ۲۸π (۴)
۴۷. در دایره‌ای، فاصله مرکز تا دو وتر AB و CD برابر ۳ و $\sqrt{21}$ است. اگر طول وتر بزرگ‌تر ۸ باشد، طول وتر کوچک‌تر کدام است؟
- ۲ (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۶ (۴)



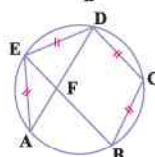
۴۸. در شکل مقابل TD در نقطه T بر دایره مماس است. اگر $TA = BC$ ، $TD \parallel AC$ و $\widehat{TAC} = 70^\circ$ باشند، زاویه $\widehat{DTC}$ چند درجه است؟

- $$\begin{array}{cc} \varphi \Delta(\gamma) & \gamma \Delta(1) \\ \gamma \Delta(\varphi) & \varphi \Delta(\gamma) \end{array}$$



۴۹. در شکل مقابل، O مرکز دایره و $AC = DE$ است. اگر $\hat{AED} = 65^\circ$ باشد، کمان CD چند درجه است؟

- | | |
|-------|-------|
| ३० (५ | ३५ (१ |
| ४० (५ | ४५ (३ |



در شکل زیر وترهای مساوی مشخص شده‌اند. اگر $\widehat{ADC} = 75^\circ$ باشد، زاویه $\widehat{AEB}$ چند درجه است؟

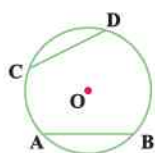
- | | |
|--------------------|----------|
| $\gamma_D(\gamma)$ | $F_0(1)$ |
| $\gamma_D(\beta)$ | $F_0(3)$ |

۵۱. در دایره‌ای به شعاع ۵، طول وتر AB برابر ۸ است. فاصله مرکز دایره از این وتر کدام است؟

۵۲. در دایره‌ای وتر AB برابر ۱۶ و وتر CD برابر ۱۰ است. اگر $\widehat{AB} = \widehat{CD}$ باشد، طول شعاع دایره کدام است؟
- (۱) $\frac{3}{2}$ (۲) $\frac{5}{2}$ (۳) $\frac{2}{3}$ (۴) $\frac{3}{2}$

۵۳. در دایره‌ای به شعاع $\sqrt{35}$ ، طول وتر AB دو برابر طول وتر CD است. اگر فاصله مرکز دایره تا وتر CD سه برابر فاصله آن تا وتر AB باشد، طول وتر CD کدام است؟

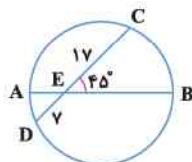
- $$\lambda\sqrt{Y}(F) \qquad F\sqrt{Y}(Y) \qquad \Delta\sqrt{Y}(Y) \qquad \epsilon\sqrt{Y}(1)$$



۵۴. در شکل زیر، O مرکز دایره و $AB = 3CD$ است. اگر فاصله O تا AB و CD به ترتیب برابر ۴ و ۹ باشد، اندازه شعاع دایره کدام است؟

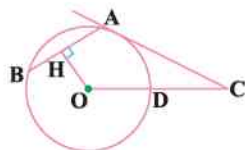
- $$\begin{array}{ll} \sqrt{113} \text{ (2)} & \sqrt{13} \text{ (1)} \\ \sqrt{133} \text{ (4)} & \sqrt{123} \text{ (3)} \end{array}$$

۵۵. در شکل مقابل، AB قطر دایره است. طول شعاع دایره کدام است؟



- 15(1)
13(2)
12(3)
14(4)

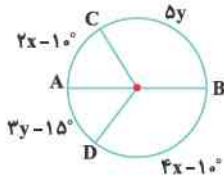
۵۶. در شکل مقابل، O مرکز دایره و A نقطه تماس است. اگر $AB = 4\sqrt{5}$ ، $OH = 4$ و $AC = 8$ باشد، طول پاره خط CD کدام است؟



- $$\begin{array}{l} \gamma(1) \\ f(2) \\ \Delta(3) \\ f/\Delta(f) \end{array}$$

زاویه مرکزی، محاطی و ظلی

۵۷. در شکل مقابل، O مرکز دایره است. اندازه زاویه DOC چند درجه است؟



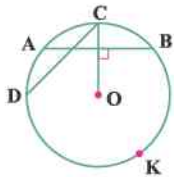
۹۰ (۱)

۹۵ (۲)

۱۱۵ (۳)

۱۲۵ (۴)

۵۸. در شکل مقابل، O مرکز دایره است. اگر $\widehat{AB} = 120^\circ$ و $\widehat{BKD} = 160^\circ$ باشند، اندازه زاویه OCD چند درجه است؟



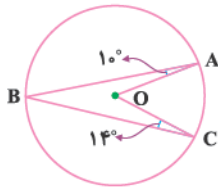
۳۰ (۱)

۲۵ (۲)

۲۰ (۳)

۱۵ (۴)

۵۹. در شکل مقابل، O مرکز دایره است. اندازه زاویه AOC چند درجه است؟



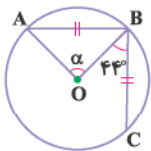
۲۴ (۱)

۲۸ (۲)

۴۸ (۳)

۳۶ (۴)

۶۰. در دایره شکل مقابل، O مرکز دایره و $AB = BC$ است. اندازه زاویه α چند درجه است؟



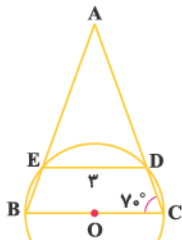
۸۸ (۱)

۹۰ (۲)

۹۲ (۳)

۹۴ (۴)

۶۱. در شکل زیر شعاع دایره ۳ واحد است. اندازه کمان EDC به درجه کدام است؟



(ریاضی ۱۴۰۰)

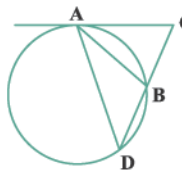
۸۰ (۱)

۹۰ (۲)

۱۰۰ (۳)

۱۲۰ (۴)

۶۲. در شکل زیر، اندازه قطعه مماس AC برابر وتر AB است. الزاماً کدام برابری درست است؟



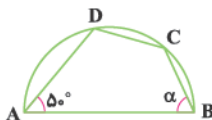
BC = BA (۱)

BD = AC (۲)

BC = BD (۳)

DA = DC (۴)

۶۳. در شکل مقابل، AB قطر نیم دایره است. اگر $CD = CB$ و $\widehat{DAB} = 50^\circ$ باشند، اندازه زاویه ABC چند درجه است؟



۵۵ (۲)

۵۰ (۱)

۶۵ (۴)

۶۰ (۳)

۶۴. در دایره‌ای به قطر AB، وتر CD موازی قطر AB رسم شده است. اندازه $\widehat{ACD} - \widehat{ADC}$ کدام است؟

۹۰ (۴)

۶۰ (۳)

۴۵ (۲)

۳۰ (۱)

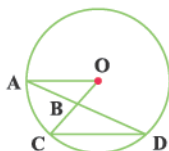
۶۵. در شکل مقابل، O مرکز دایره و شعاع OA با وتر CD موازی است. اگر $\widehat{ABC} = 36^\circ$ باشد، اندازه زاویه AOC چند درجه است؟

۳۶ (۱)

۱۸ (۲)

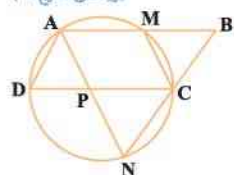
۲۴ (۳)

۳۰ (۴)



۶۶. در شکل زیر چهارضلعی $ABCD$ متوازی الاضلاع است. تعداد مثلث‌های متساوی الساقین کدام است؟

(ریاضی خارج ۹۹)



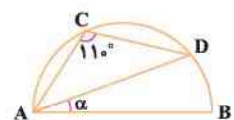
۱ (۱)

۲ (۲)

۳ (۳)

۴ (۴)

۶۷. در شکل مقابل، AB قطر نیم‌دایره است. اگر $\widehat{ACD} = 11^\circ$ باشد، اندازه زاویه BAD چند درجه است؟



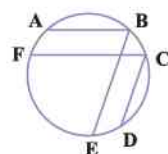
۲۵ (۲)

۲۰ (۱)

۳۵ (۴)

۳۰ (۳)

۶۸. در شکل مقابل، اگر $AB \parallel FC$ ، $CD \parallel BE$ ، $\widehat{AB} = 6^\circ$ ، $\widehat{CD} = 4^\circ$ و $\widehat{EF} = 11^\circ$ باشد، اندازه زاویه FCD چند درجه است؟



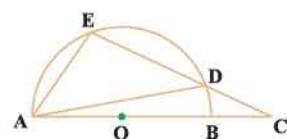
۹۰ (۱)

۵۵ (۲)

۷۰ (۳)

۸۰ (۴)

۶۹. در شکل مقابل، O مرکز نیم‌دایره است. اگر $\widehat{ACE} = 25^\circ$ و $\widehat{CAD} = 1^\circ$ باشد، اندازه زاویه DAE چند درجه است؟



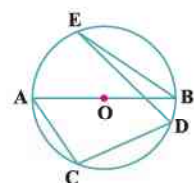
۵۰ (۲)

۴۵ (۱)

۳۵ (۴)

۵۵ (۳)

۷۰. در شکل مقابل، O مرکز دایره است. اگر $\widehat{ACD} = 1^\circ$ باشد، اندازه زاویه DEB چند درجه است؟



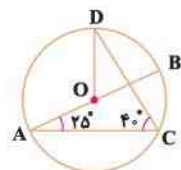
۱۰ (۱)

۱۵ (۲)

۲۰ (۳)

۲۵ (۴)

۷۱. در شکل مقابل، O مرکز دایره است. اندازه زاویه ODC چند درجه است؟



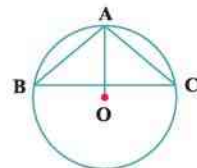
۱۰ (۱)

۲۰ (۲)

۳۰ (۳)

۱۵ (۴)

۷۲. در شکل مقابل، O مرکز دایره است. اگر $\widehat{OAC} = 5^\circ$ باشد، اندازه زاویه B در مثلث ABC چند درجه است؟



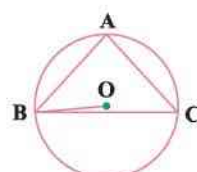
۳۰ (۱)

۴۰ (۲)

۵۰ (۳)

۴۵ (۴)

۷۳. در شکل مقابل، O مرکز دایره است. اگر $\widehat{CBO} = 5^\circ$ باشد، اندازه زاویه BAC چند درجه است؟



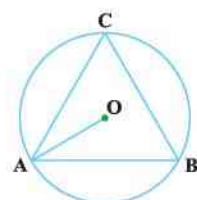
۸۵ (۱)

۸۰ (۲)

۷۵ (۳)

۷۰ (۴)

۷۴. در شکل مقابل، O مرکز دایره است. اگر $\widehat{ABC} = 5^\circ$ باشد، اندازه زاویه CAO چند درجه است؟

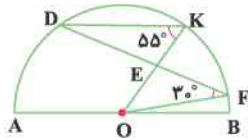


۲۵ (۱)

۳۰ (۲)

۳۵ (۳)

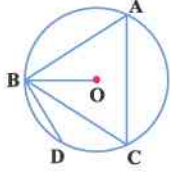
۴۰ (۴)



۷۵. در شکل مقابل، O مرکز نیم دایره است. اندازه زاویه KDF چند درجه است؟

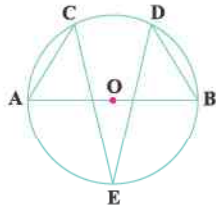
- (۱) ۱۵
(۲) ۲۰
(۳) ۲۵
(۴) ۳۰

۷۶. در شکل مقابل، O مرکز دایره است. اگر $OB = BD$ و $\widehat{CBD} = 35^\circ$ باشد، اندازه زاویه BAC چند درجه است؟



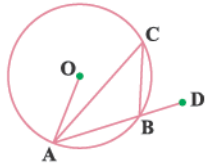
- (۱) ۵۰
(۲) ۵۵
(۳) ۶۰
(۴) ۶۵

۷۷. در شکل مقابل، O مرکز دایره است. اگر $\widehat{CAB} = 65^\circ$ و $\widehat{ABD} = 50^\circ$ باشند، اندازه زاویه CED چند درجه است؟



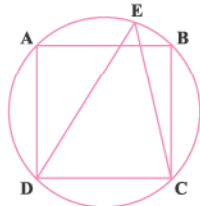
- (۱) ۲۵
(۲) ۲۰
(۳) ۳۰
(۴) ۳۵

۷۸. در شکل زیر نقاط A، B و D در یک راستا قرار دارند. اگر O مرکز دایره و $\widehat{CBD} = 70^\circ$ باشد، اندازه زاویه OAC چند درجه است؟



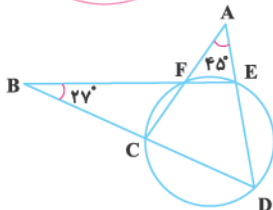
- (۱) ۱۰
(۲) ۱۵
(۳) ۲۰
(۴) ۲۵

۷۹. در شکل مقابل، ABCD مربع است. اگر $\widehat{ADE} = 30^\circ$ باشد، اندازه زاویه BCE چند درجه است؟



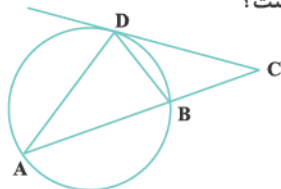
- (۱) ۳۰
(۲) ۱۵
(۳) ۲۰
(۴) ۱۰

۸۰. در شکل مقابل، اندازه زاویه ADB چند درجه است؟



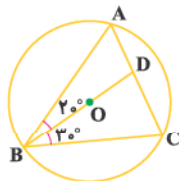
- (۱) ۴۸
(۲) ۵۴
(۳) ۶۰
(۴) ۷۴

۸۱. در شکل مقابل، D نقطه تماس است. اگر $BC = BD$ و $\widehat{ADB} = 75^\circ$ باشند، اندازه زاویه DAC چند درجه است؟



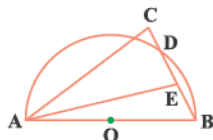
- (۱) ۴۵
(۲) ۴۰
(۳) ۳۵
(۴) ۳۰

۸۲. در شکل مقابل، O مرکز دایره است. اندازه زاویه BDC چند درجه است؟

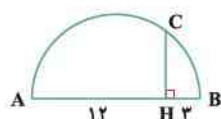


- (۱) ۷۰
(۲) ۷۵
(۳) ۸۰
(۴) ۸۵

۸۳. در شکل مقابل، O مرکز نیم دایره است. اگر $CD = DE$ و $\widehat{ACB} = 80^\circ$ باشند، اندازه زاویه CAE چند درجه است؟

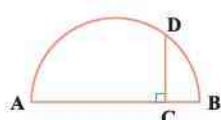


- (۱) ۱۰
(۲) ۱۵
(۳) ۲۰
(۴) ۲۵



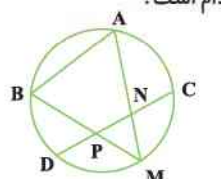
۸۴. در شکل زیر، AB قطر نیم‌دایره است. طول پاره‌خط CH کدام است؟

- (۱) $9\sqrt{2}$ (۲) ۶
(۳) ۷ (۴) $4\sqrt{2}$



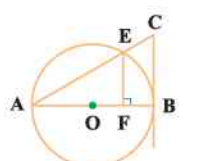
۸۵. در شکل زیر، DC بر قطر نیم‌دایره عمود است. اگر $DB = 2\sqrt{5}$ و $AC = 8$ باشند، طول پاره‌خط DC کدام است؟

- (۱) ۳ (۲) $2\sqrt{3}$
(۳) ۴ (۴) $3\sqrt{2}$



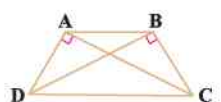
۸۶. در شکل زیر، M دورترین نقطه کمان CD از وتر CD است. اگر $MA = 4$ ، $MB = 5$ و $MN = 3$ باشد، اندازه MP کدام است؟

- (۱) ۳
(۲) $2/6$
(۳) $2/4$
(۴) $3/2$



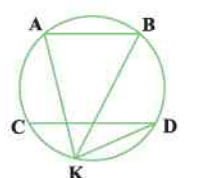
۸۷. در شکل زیر، AB قطر دایره است. اگر $CB = 6$ و $EF = 4$ باشند، اندازه شعاع دایره کدام است؟

- (۱) $2\sqrt{5}$
(۲) $3\sqrt{2}$
(۳) ۴
(۴) $2\sqrt{3}$



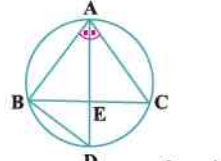
۸۸. در شکل زیر، $ABCD$ دوزنقه است. اگر $\widehat{CAB} = 30^\circ$ باشد، اندازه زاویه BDC چند درجه است؟

- (۱) ۶۰ (۲) ۴۵
(۳) ۳۰ (۴) ۱۵



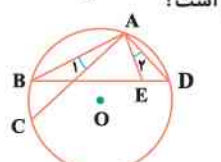
۸۹. در شکل زیر، $AB \parallel CD$ است. اگر $\widehat{AKB} = \widehat{BKD}$ و $\widehat{DK} = \widehat{CK}$ باشند، اندازه زاویه ABK چند درجه است؟

- (۱) ۷۵
(۲) ۶۵
(۳) ۷۰
(۴) ۶۰



۹۰. در شکل مقابل، AD نیمساز زاویه A است. اگر $AE = 5$ و $BD = 6$ باشد، طول پاره‌خط ED کدام است؟

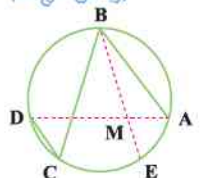
- (۱) ۳ (۲) ۴
(۳) ۵ (۴) $3/5$



۹۱. در شکل زیر، O مرکز دایره و زوایای A_1 و A_2 برابرند. اگر $AD = 6$ ، $AE = 4$ و $AC = 15$ باشد، طول وتر AB کدام است؟

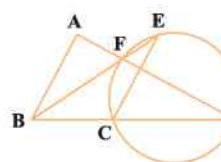
- (۱) ۸
(۲) ۱۰
(۳) ۱۲
(۴) ۱۴

(ریاضی خارج ۹۳)



۹۲. در شکل زیر $AB = 6$ ، $BC = 8$ ، $CD = 3$ و $AE = CD$. اندازه AM کدام است؟

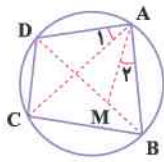
- (۱) ۲
(۲) $2/25$
(۳) $2/5$
(۴) $2/75$



۹۳. در شکل مقابل $AB \parallel CE$ است. اگر $AF = 4$ و $FD = 12$ باشد، طول پاره‌خط AB کدام است؟

- (۱) ۸
(۲) ۱۴
(۳) ۱۶
(۴) ۱۸

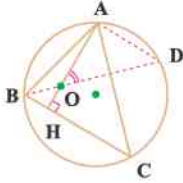
(ریاضی ۹۳)



۹۴. در شکل مقابل، $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$ ، حاصل $AD \cdot BC$ برابر کدام است؟

- (۱) $DM \cdot AC$
- (۲) $BM \cdot AC$
- (۳) $AB \cdot CD$
- (۴) $BD \cdot BM$

(ریاضی ۹۳)

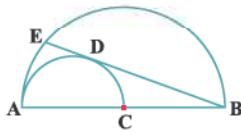


۹۵. در شکل زیر، O محل تلاقی ارتفاع‌های مثلث ABC است. اندازه زاویه AOD برابر کدام است؟

- (۱) $\hat{OBC}$
- (۲) $\hat{CAD}$
- (۳) $\hat{OAC}$
- (۴) $\hat{ADO}$

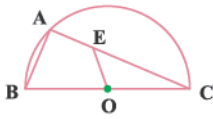
۹۶. در شکل مقابل، وتر BE بر نیم‌دایره کوچک مماس است. اگر $AC = 10$ و $BC = 8$ باشد، طول پاره خط DE کدام است؟

- (۱) ۵
- (۲) $\frac{60}{13}$
- (۳) $\frac{30}{7}$
- (۴) $\frac{61}{12}$



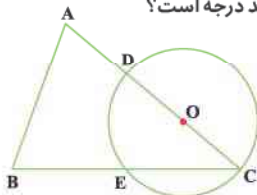
۹۷. در شکل زیر، O مرکز نیم‌دایره به شعاع $\frac{6}{5}$ است. اگر $AB = 5$ و $AE = 3$ باشد، طول پاره خط OE کدام است؟

- (۱) $\sqrt{13}$
- (۲) $\frac{\sqrt{61}}{2}$
- (۳) $2\sqrt{3}$
- (۴) $\sqrt{10}$



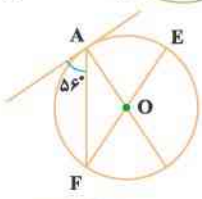
۹۸. در شکل مقابل، O مرکز دایره و E وسط ضلع BC است. اگر $AB = CD$ و $\hat{ACB} = 40^\circ$ باشد، اندازه زاویه ABC چند درجه است؟

- (۱) 40°
- (۲) 50°
- (۳) 60°
- (۴) 70°



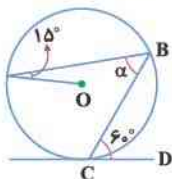
۹۹. در شکل مقابل، O مرکز، FE قطر دایره و زاویه A برابر 56° است. کمان AE چند درجه است؟

- (۱) 68°
- (۲) 66°
- (۳) 64°
- (۴) 62°



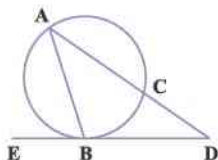
۱۰۰. در شکل مقابل، O مرکز دایره و CD بر دایره مماس است. اندازه زاویه α کدام است؟

- (۱) 3°
- (۲) 4°
- (۳) 45°
- (۴) 55°



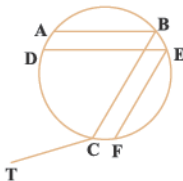
۱۰۱. در شکل مقابل، B نقطه تماس است. اگر $AB = AC$ و $\hat{ABE} = 69^\circ$ باشند، اندازه زاویه BAC چند درجه است؟

- (۱) 39°
- (۲) 43°
- (۳) 42°
- (۴) 40°



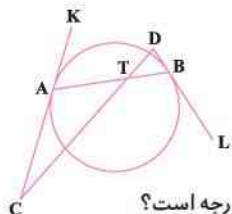
۱۰۲. در شکل زیر، $EF \parallel BC$ و $AB \parallel DE$ است. اگر $\hat{AB} = 60^\circ$ ، $\widehat{CD} = 100^\circ$ و $EF = 80^\circ$ باشد، اندازه زاویه BCT چند درجه است؟ (ریاضی خارج ۱۴۰۱)

- (۱) 90°
- (۲) 95°
- (۳) 100°
- (۴) 110°



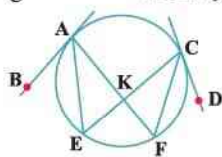
۱۰۳. در شکل مقابل، نقاط A و B نقاط تماس هستند. اگر $\widehat{BTC} = 14^\circ$ و $\widehat{KCD} = 25^\circ$ باشند، اندازه زاویه

CDL چند درجه است؟



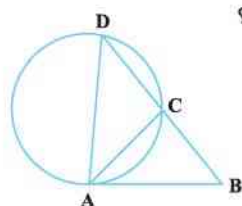
- | | |
|---------------|---------------|
| $\phi_5(2)$ | $\phi_5(1)$ |
| $\gamma_5(4)$ | $\gamma_5(3)$ |

۱۰۴. در شکل مقابل، نقاط A و C نقاط تماس هستند. اگر $\hat{BAE} = 38^\circ$ و $\hat{DCF} = 42^\circ$ باشند، اندازه زاویه EKF چند درجه است؟



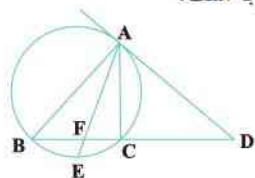
9. (1)
9.5 (2)
10. (3)
10.5 (4)

۱۰۵. در شکل مقابل، A نقطه تماس است. اگر $\hat{A}BD = 50^\circ$ و $\hat{D}AC = 40^\circ$ باشند، اندازه زاویه CAB چند درجه است؟



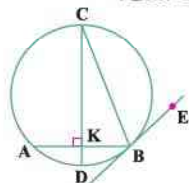
- $$\begin{aligned} F &= (1) \\ F \Delta &= (2) \\ \Delta &= (3) \\ 3 &= (F) \end{aligned}$$

۱۰۶. در شکل مقابل، نقطه A نقطه تماس است. اگر $\widehat{BAE} = \widehat{EAC}$ و $\widehat{AFD} = 70^\circ$ باشند، اندازه زاویه ADB چند درجه است؟



- $$\begin{aligned} & \Delta(1) \\ & F(2) \\ & F(3) \\ & \Delta(4) \end{aligned}$$

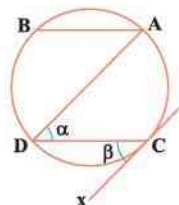
۱۰۷. در شکل مقابل، $ABC \perp CD$ و $AK = KB$ است. اگر B نقطه تماس و $\widehat{CBE} = 7^\circ$ باشند، اندازه زاویه BCD چند درجه است؟



- $$\begin{aligned} 1 &= (1) \\ 15 &= (2) \\ 2 &= (3) \\ 25 &= (4) \end{aligned}$$

۱۰۸. در شکل مقابل، وتر AB برابر شعاع دایره و $AB \parallel CD$ ، زاویه $\beta = \angle \alpha$ و CX مماس بر دایره است. کمان

BD چند درجه است؟



- $$\begin{aligned} \Delta &= (1) \\ \epsilon &= (2) \\ \gamma &= (3) \\ \gamma\Delta &= (4) \end{aligned}$$

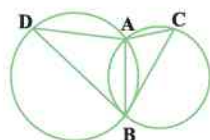
۱۰۹. دو دایره متقاطع در نقطه A مشترک‌اند. خط گذرا بر A دو دایره مفروض را در B و C قطع می‌کند. مماس‌ها بر هر دایره در B و C در نقطه M

(ریاضی خارج ۹۴)

مقاطع اند. در مثلث MBC با چرخش خط قاطع، کدام جزء ثابت می ماند؟

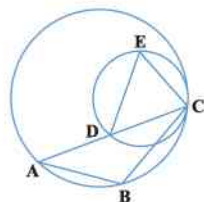
- MA (1) (2) محيط (3) مساحت (4) زاویه BMC

۱۱۰. در شکل مقابل DB و CB بر دایره‌ها مماس‌اند. اگر $AC = 4$ و $AD = 16$ باشد، طول وتر مشترک AB کدام است؟

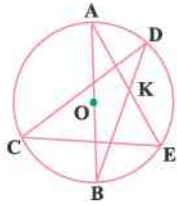


- $$\begin{aligned} & 6\sqrt{2} (1) \\ & 7 (2) \\ & 6 (3) \\ & 1 (4) \end{aligned}$$

در شکل مقابل، دو دایره در نقطه C بر هم مماس اند. اگر $\widehat{DEC} = 50^\circ$ باشد، اندازه زاویه ABC چند درجه است؟



11. (1)
12. (2)
13. (3)
14. (4)



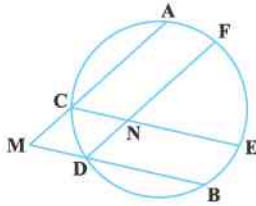
۱۱۲. در شکل مقابل، O مرکز دایره است. اگر $\widehat{BKE} = 54^\circ$ باشد، اندازه زاویه DCE چند درجه است؟

۳۲ (۱)

۳۴ (۲)

۳۶ (۳)

۴۲ (۴)



۱۱۳. در شکل زیر $\widehat{AC} = 85^\circ$ و $\widehat{BD} = 75^\circ$ است. اگر $\widehat{CNF} = 135^\circ$ باشد،

(ریاضی آزمون مجدد ۱۴۰۱)

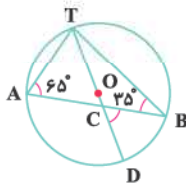
اندازه کمان EF چند درجه است؟

۴۰ (۲)

۴۵ (۱)

۳۰ (۴)

۳۵ (۳)



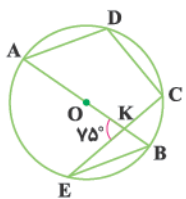
۱۱۴. در شکل زیر، O مرکز دایره، $\widehat{A} = 65^\circ$ و $\widehat{B} = 35^\circ$ می‌باشند. اندازه زاویه C چند درجه است؟

۶۰ (۱)

۶۱ (۲)

۶۲ (۳)

۶۳ (۴)



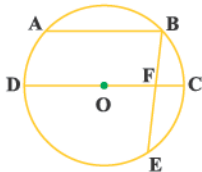
۱۱۵. در شکل مقابل، O مرکز دایره و $AD = DC = EB$ است. اگر $\widehat{AKE} = 75^\circ$ باشد، اندازه زاویه ADC چند درجه است؟

۹۰ (۱)

۱۰۰ (۲)

۱۱۰ (۳)

۱۲۰ (۴)



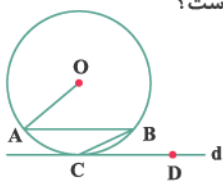
۱۱۶. در شکل مقابل، O مرکز دایره و $AB \parallel CD$ است. اگر $AB = BE$ و $\widehat{CE} = 60^\circ$ باشند، اندازه زاویه OFE چند درجه است؟

۶۵ (۱)

۷۰ (۲)

۷۵ (۳)

۸۰ (۴)



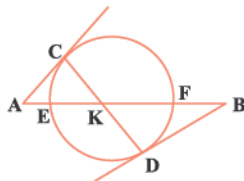
۱۱۷. در شکل زیر، O مرکز دایره و وتر AB با مماس d موازی است. اگر $\widehat{OAB} = 40^\circ$ باشد، اندازه زاویه BCD چند درجه است؟

۲۰ (۱)

۲۵ (۲)

۳۰ (۳)

۳۵ (۴)



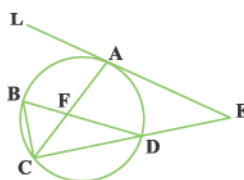
۱۱۸. در شکل مقابل، نقاط C و D نقاط تماس هستند. اگر $\widehat{CAB} = 48^\circ$ و $\widehat{DBA} = 33^\circ$ باشند، اندازه زاویه CKB چند درجه است؟

۱۲۰ (۱)

۱۲۵ (۲)

۱۳۰ (۳)

۱۳۵ (۴)



۱۱۹. در شکل زیر EL در نقطه A بر دایره مماس است. اگر $\widehat{CAL} = 80^\circ$ ، $\widehat{CFD} = 110^\circ$ و $\widehat{BCA} = 50^\circ$ باشند، اندازه

زاویه CEL چند درجه است؟

۲۵ (۱)

۳۰ (۲)

۳۵ (۳)

۴۰ (۴)

فصل اول: دایره

پایه ۱۱

۳ ۱

چون OD و OE شعاع نیم دایره هستند و اندازه زاویه EOD برابر $90^\circ = (24^\circ + 66^\circ) - 180^\circ$ است، پس مثلث EOD قائم الزاویه متساوی الساقین است و زاویه ها به صورت شکل زیر هستند. زاویه $D = 45^\circ$ زاویه خارجی مثلث ODC است، پس:

$$45^\circ = \alpha + 24^\circ \Rightarrow \alpha = 21^\circ$$

۳ ۲

مثلث های DOC و COB متساوی الساقین هستند. پس اندازه زاویه ها به صورت مقابل است. در نقطه O داریم:

$$\begin{aligned} 30^\circ + 18^\circ - 2\alpha + 8^\circ &= 180^\circ \\ \Rightarrow 2\alpha &= 110^\circ \Rightarrow \alpha = 55^\circ \end{aligned}$$

۳ ۳

چون $EO \parallel AC$ و $\angle ACB = 70^\circ$ ، پس $\angle EOB = 70^\circ$ می باشد. مثلث BOE متساوی الساقین است، پس $\angle E = \angle B = 55^\circ$ حال در مثلث ABC داریم:

$$\hat{A} + 50^\circ + 70^\circ = 180^\circ \Rightarrow \hat{A} = 60^\circ \Rightarrow \hat{BAC} = 60^\circ$$

۳ ۴

از O به D وصل می کنیم. دو مثلث متساوی الساقین ایجاد می شود که زاویه ها به صورت شکل زیر می باشند. زاویه EDO زاویه خارجی مثلث ODC است، پس $\beta = 2\alpha$ می باشد. از طرفی زاویه AOE زاویه خارجی مثلث EOC است. پس $75^\circ = \alpha + \beta$ است. بنابراین داریم:

$$\begin{aligned} \beta &= 2\alpha \\ \alpha + \beta &= 75^\circ \Rightarrow \alpha + 2\alpha = 75^\circ \Rightarrow \alpha = 25^\circ \\ \Rightarrow \beta &= 2 \times 25^\circ = 50^\circ \Rightarrow \hat{OEC} = 50^\circ \end{aligned}$$

۳ ۵

از O به C وصل می کنیم. مثلث AOC متساوی الساقین است و داریم:

$$\begin{aligned} \hat{AOC} &= 180^\circ - (70^\circ + 70^\circ) = 40^\circ \\ \hat{COB} &= 90^\circ - 40^\circ = 50^\circ \end{aligned}$$

حال در مثلث متساوی الساقین COB داریم:

$$\alpha + \alpha + 50^\circ = 180^\circ \Rightarrow 2\alpha = 130^\circ \Rightarrow \alpha = 65^\circ$$

۲ ۶

کافی است شعاع OC را رسم کنیم. دو مثلث متساوی الساقین تشکیل می شود و داریم:

$$\begin{cases} \hat{COB} = 180^\circ - (65^\circ + 65^\circ) = 50^\circ \\ \hat{COA} = 180^\circ - (50^\circ + 50^\circ) = 80^\circ \end{cases}$$

$$\Rightarrow \hat{AOB} = \hat{COB} + \hat{COA} = 50^\circ + 80^\circ = 130^\circ$$

۲ ۷

از O به B وصل می کنیم. چون OB شعاع دایره است و طبق فرض $OD = AB$ ؛ پس $OB = AB$ خواهد بود و در نتیجه مثلث OBA متساوی الساقین است. واضح است که

مثلث BOC نیز متساوی الساقین بوده و زوایا به صورت مقابل هستند. دقت کنید زاویه B در مثلث BOC، زاویه خارجی مثلث OBA است. حال در مثلث BOC داریم:

$$2\alpha + 2\alpha + (90^\circ - \alpha) = 180^\circ \Rightarrow 3\alpha = 90^\circ \Rightarrow \alpha = 30^\circ$$

۲ ۸

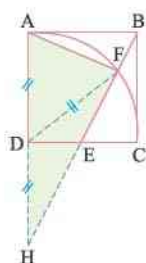
از O به B و C وصل می کنیم. مثلث های AOB و COD متساوی الساقین هستند، زیرا $OA = OB = R$ و $OC = OD = R$. از طرفی مثلث BOC نیز متساوی الساقین است و چون زوایای زیر دو ساق 60° هستند، پس زاویه O نیز از مثلث BOC برابر 60° است و در نتیجه مثلث BOC متساوی الاضلاع خواهد بود. پس زاویه O از مثلث COD برابر 80° خواهد شد. حال در مثلث COD داریم:

$$\alpha + \alpha + 80^\circ = 180^\circ \Rightarrow 2\alpha = 100^\circ \Rightarrow \alpha = 50^\circ$$

۳ ۹

AB قطر دایره است و چون $AB = 2EC$ می باشد، پس EC برابر شعاع دایره است. از مرکز نیم دایره به D و E وصل می کنیم. مثلث OEC متساوی الساقین است. زاویه OED زاویه خارجی مثلث OEC است پس برابر $20^\circ + 20^\circ = 40^\circ$ می باشد. از طرفی مثلث DOE متساوی الساقین است پس $\hat{ODE} = 40^\circ$ می باشد و داریم:

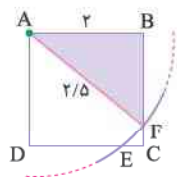
$$\begin{aligned} \hat{DOE} &= 180^\circ - 40^\circ - 40^\circ = 100^\circ \Rightarrow \hat{AOD} = 180^\circ - 100^\circ - 20^\circ = 60^\circ \\ \text{بنابراین در مثلث متساوی الساقین AOD داریم:} \\ 60^\circ + \alpha + \alpha &= 180^\circ \Rightarrow \alpha = 60^\circ \\ \text{حال زاویه ADC برابر است با:} \\ \Rightarrow \hat{ADC} &= 40^\circ + 60^\circ = 100^\circ \end{aligned}$$



پس $DF = DA = 4$ و این یعنی در مثلث AFH ، میانه وارد بر ضلع AH نصف آن است. پس مثلث AFH قائم الزاویه است و این یعنی $\angle AFE = 90^\circ$ می باشد.

۱۵ ۲

در مربع شکل زیر، به مرکز A و شعاع $2/5$ دایره ای رسم می کنیم تا اضلاع مربع را در E و F قطع کند. از A به F وصل می کنیم. در مثلث قائم الزاویه ABF داریم:



$$AF^2 = AB^2 + BF^2 \Rightarrow 6/25 = 4 + BF^2$$

$$\Rightarrow BF^2 = 2/25 \Rightarrow BF = 1/5$$

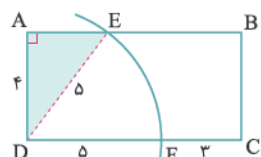
فاصله نزدیک ترین رأس مربع تا نقطه تقاطع CF است. پس:

$$CF = BC - BF = 2 - 1/5 = 9/5 = 1\frac{4}{5}$$

به هر رنگ، می روئیم ۳، ۴ و ۵ اعداد فیثاغورسی هستن. از طرفی هر مضرب غیر صفر از اعداد فیثاغورسی هم اعداد فیثاغورسی میشن. $2 = \frac{1}{p} \times 3$ و $2 = \frac{1}{p} \times 5$ هستن، پس BF برابر $1/5 = 1/5 \times 3$ میشه.

۱۶ ۴

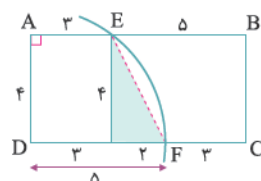
دایره به شعاع ۵ و به مرکز رأس D رسم شده است که طول های مستطیل را در نقاط E و F قطع می کند. در مثلث قائم الزاویه رنگی داریم:



$$\Delta^2 = 4^2 + AE^2$$

$$\Rightarrow AE^2 = 9 \Rightarrow AE = 3$$

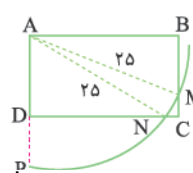
حال کافی است از E بر DC عمود کنیم. در مثلث قائم الزاویه ایجاد شده داریم:



$$EF^2 = 2^2 + 4^2 \Rightarrow EF^2 = 20$$

$$\Rightarrow EF = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

۱۷ ۱



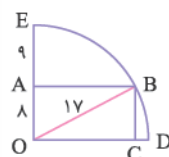
واضح است که عرض مستطیل برابر ۱۵ می باشد. زیرا:

$$AD = BC = BM + MC = 7 + 8 = 15$$

از طرفی، $DP = 10$ است. پس شعاع دایره یعنی AP برابر $25 = 15 + 10$ می باشد.

از A به M و N وصل می کنیم. چون شعاع های دایره هستند، پس $AM = AN = 25$. به کمک قضیه فیثاغورس در مثلث قائم الزاویه ABM داریم:

$$AM^2 = AB^2 + BM^2 \Rightarrow 25^2 = AB^2 + 7^2 \Rightarrow AB^2 = 576 \Rightarrow AB = 24$$



از O به B وصل می کنیم. چون OE و OB شعاع هستند، پس $OB = OE = 8 + 9 = 17$ است. از آن جایی که OB قطر مستطیل $ABCO$ است، داریم:

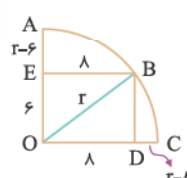
$$OA^2 + AB^2 = OB^2 \Rightarrow 6^2 + AB^2 = 17^2 \Rightarrow AB^2 = 225$$

$$\Rightarrow AB = 15$$

بنابراین مساحت مستطیل $ABCO$ برابر است با:

$$S = 8 \times 15 = 120$$

۱۱ ۲



از O به B وصل می کنیم. اندازه ها به صورت مقابل هستند. در مثلث قائم الزاویه OEB داریم:

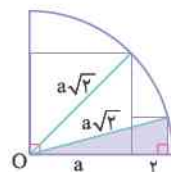
$$6^2 + 8^2 = r^2 \Rightarrow 100 = r^2 \Rightarrow r = 10$$

بنابراین $AE = 10 - 6 = 4$ و $CD = 10 - 8 = 2$ هستند و داریم:

$$CD + AE = 2 + 4 = 6$$

۱۲ ۳

فرض می کنیم طول ضلع مربع بزرگ a باشد، بنابراین شعاع ربع دایره که برابر قطر مربع بزرگ است، برابر $a\sqrt{2}$ است. به کمک قضیه فیثاغورس در مثلث رنگی داریم:



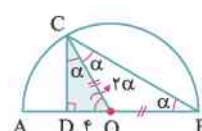
$$(a+2)^2 + 2^2 = (a\sqrt{2})^2$$

$$\Rightarrow a^2 + 4a + 4 + 4 = 2a^2$$

$$\Rightarrow a^2 - 4a - 8 = 0 \Rightarrow a = 2 + 2\sqrt{2}$$

۱۳ ۱

مثلث COB متساوی الساقین است، زیرا $OB = OC = r$. زاویه DOC



زاویه خارجی مثلث COB است، پس $\angle DOC = 2\alpha$. از طرفی CO نیمساز زاویه DCB است، پس $\angle DCO = \alpha$. در مثلث قائم الزاویه CDO داریم:

$$90^\circ + \alpha + 2\alpha = 180^\circ \Rightarrow 3\alpha = 90^\circ \Rightarrow \alpha = 30^\circ$$

می دانیم در مثلث قائم الزاویه ضلع روبه رو به زاویه 30° نصف وتر است. پس $OC = 8$ و این یعنی شعاع دایره برابر ۸ است. پس داریم:

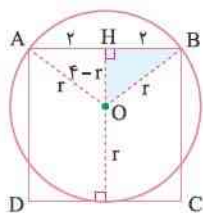
$$AD = OA - OD = 8 - 4 = 4$$

۱۴ ۳

BE را از سمت E امتداد می دهیم تا امتداد ضلع مربع را در H قطع کند. دو مثلث BCE و HDE همنهشت هستند، پس $AD = DH = BC = 4$ می باشد. حال، از D به F وصل می کنیم. چون شعاع دایره است،

۲۲ ۲

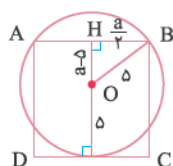
با توجه به توضیحات صورت تست، شکل مسئله به صورت زیر است. در مثلث قائم الزاویه OHB به کمک قضیه فیثاغورس داریم:



$$\begin{aligned} r^2 &= 2^2 + (4-r)^2 \\ \Rightarrow r^2 &= 4 + 16 + r^2 - 8r \\ \Rightarrow 8r &= 20 \Rightarrow r = 2.5 \end{aligned}$$

نکته اگر دایره‌ای از دو رأس مربع بگذرد و مماس بر ضلع دیگر مربع به ضلع a باشد، شعاع دایره برابر $r = \frac{a}{8}$ خواهد بود.

۲۳ ۱



روش اول با توجه به شکل مقابل و با فرض این که طول ضلع مربع برابر a باشد، داریم:

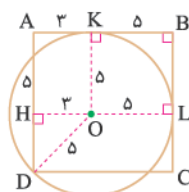
$$\begin{aligned} \Delta OHB : OB^2 &= OH^2 + HB^2 \Rightarrow 25 = (a-5)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 \\ \Rightarrow 25 &= a^2 - 10a + 25 + \frac{a^2}{4} \Rightarrow \frac{5}{4}a^2 - 10a = 0 \\ \Rightarrow 5a\left(\frac{a}{4} - 2\right) &= 0 \Rightarrow a = 8 \Rightarrow S_{\text{مربع}} = a^2 = 64 \end{aligned}$$

روش دوم با توجه به این که می‌دانیم $r = \frac{a}{8}$ است، پس:

$$5 = \frac{a}{8} \Rightarrow a = 8 \Rightarrow S = a^2 = 64$$

۲۴ ۲

از O به K و L وصل می‌کنیم. اندازه‌ها به صورت زیر می‌باشند. به کمک قضیه فیثاغورس در مثلث قائم الزاویه OHD داریم:



$$\begin{aligned} OD^2 &= OH^2 + HD^2 \\ \Rightarrow 25 &= 9 + HD^2 \Rightarrow HD = 4 \end{aligned}$$

بنابراین $AD = 5 + 4 = 9$ و $AB = 3 + 5 = 8$ است، پس:

$$S = 9 \times 8 = 72$$

۲۵ ۳

با توجه به داده‌های تست و شکل مقابل داریم:



$$OA > R \Rightarrow 8 - x > 3 \Rightarrow x < 5$$

بنابراین مقادیر طبیعی x می‌تواند ۱ یا ۲ یا ۳ یا ۴ باشد.

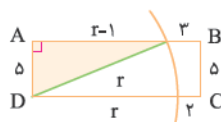
بنابراین اندازه طول مستطیل برابر ۲۴ است، یعنی $AB = CD = 24$.

حال در مثلث قائم الزاویه ADN داریم:

$$\begin{aligned} 25^2 &= 15^2 + DN^2 \Rightarrow DN^2 = 400 \Rightarrow DN = 20 \\ \Rightarrow NC &= 24 - 20 = 4 \end{aligned}$$

۱۸ ۲

با توجه به توضیحات ارائه شده در صورت تست، شکل مسئله به صورت مقابل است.

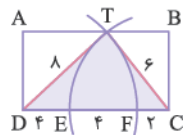


در مثلث قائم الزاویه رنگی داریم:

$$\begin{aligned} 5^2 + (r-1)^2 &= r^2 \Rightarrow 25 + r^2 - 2r + 1 = r^2 \\ \Rightarrow 2r &= 26 \Rightarrow r = 13 \end{aligned}$$

۱۹ ۴

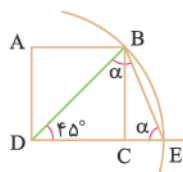
با توجه به شکل مقابل $CT = CE = 6$ و $DT = DF = 8$ است. چون اضلاع مثلث DTC برابر ۶، ۸ و ۱۰ و $10^2 = 8^2 + 6^2$ است، پس مثلث DTC قائم الزاویه است و داریم:



$$S_{ABCD} = 2S_{DTC} = 2 \times \frac{1}{2} \times 6 \times 8 = 48$$

۲۰ ۲

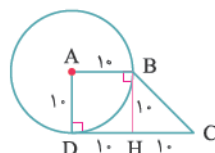
طول قطر مربع برابر $3\sqrt{2} \times \sqrt{2} = 6$ است. پس دایره به رأس D و به شعاع قطر مربع است. شکل مسئله را رسم می‌کنیم. از D به B وصل می‌کنیم. مثلث BDE متساوی الساقین است. از طرفی قطر مربع نیمساز زوایای مربع نیز است. در مثلث BDE داریم:



$$\begin{aligned} 45^\circ + \alpha + \alpha &= 180^\circ \Rightarrow 2\alpha = 135^\circ \Rightarrow \alpha = 67.5^\circ \\ \widehat{CBE} &= \widehat{DBE} - \widehat{DBC} \Rightarrow \widehat{CBE} = 67.5^\circ - 45^\circ = 22.5^\circ \end{aligned}$$

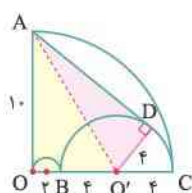
۲۱ ۲

چون دایره به رأس A از رأس‌های B و D می‌گذرد، پس $AB = AD = 10$. از نقطه B عمودی بر CD رسم می‌کنیم. واضح است چهارضلعی ABHD مربع است. در نتیجه $BH = 10$ و چون $CD = 20$ است، پس $DH = HC = 10$. مثلث BHC، قائم الزاویه و متساوی الساقین است، پس $\widehat{C} = 45^\circ$.



$$\begin{aligned} OD^Y &= OE, OC \Rightarrow r^Y = (r - Y)(r + f) \Rightarrow r^Y = r + Yr - \lambda \\ \Rightarrow Yr &= \lambda \Rightarrow r = f \end{aligned}$$

۲ ۳۱

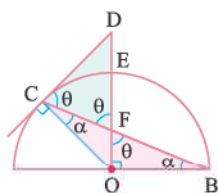


از A به مرکز نیم دایره بزرگ تر وصل می کنیم.
 $O'D$ بر AD عمود بوده و چون $O'D$
 شعاع نیم دایره است، پس $\angle O'D = 90^\circ$.
 حال در مثلث های قائم الزاویه AOO' و
 ADO' داریم:

$$\begin{cases} AO^r + OO^r = AO^r \\ AD^r + DO^r = AO^r \end{cases} \Rightarrow AO^r + OO^r = AD^r + DO^r$$

۱۷۴

از O به C وصل می‌کنیم. OC بر CD عمود است. از طرف دیگر $OC = OB$ است. پس مثلث BOC متساوی الساقین است. حال فرض می‌کنیم زاویه DCF برابر θ باشد، پس $\alpha + \theta = 90^\circ$. از طرفی در مثلث قائم‌الزاویه FOB نیز زاویه F برابر θ خواهد شد، به دلیل این‌که زاویه F در

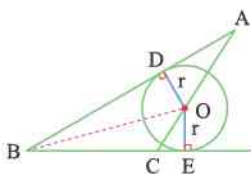


مثلث DCF با این زاویه متقابل به رأس است، پس زاویه F در این مثلث هم برابر θ می‌شود و این یعنی مثلث DCF متساوی‌الساقین است و در نتیجه $DF = DC = \lambda$.

۱۴ ۲۳

از O به D و E وصل می‌کنیم. OD بر AB و OE بر BE عمود است. از آنجایی که مساحت مثلث ABC برابر ۲۴ است، داریم:

$$S = \frac{1}{2} AB \times BC \times \sin 30^\circ \Rightarrow 24 = \frac{1}{2} \times AB \times 6 \times \frac{1}{2} \Rightarrow AB = 16$$



حال از O به B وصل می‌کنیم و داریم:

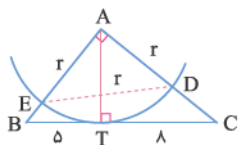
$$S_{\Delta ABC} = S_{\Delta AOB} + S_{\Delta BOC} = \frac{1}{2} AB \times r + \frac{1}{2} BC \times r$$

$$\Rightarrow 24 = \frac{1}{2} \times 16 \times r + \frac{1}{2} \times 8 \times r \Rightarrow 24 = 4r + 4r \Rightarrow r = \frac{24}{8}$$

۱۴ ۱۳۴

ابتدا شکل مسأله را رسم می‌کنیم. فاصله نقاط D و E مد نظر سؤال است. ابتدا از A به T وصل می‌کنیم. بر BC عمود است. در مثلث قائم الزاویه ABC داریم:

$$AT^{\gamma} = BT \times CT \Rightarrow r^{\gamma} = \Delta \times \Lambda = f \circ \Rightarrow r = \gamma \sqrt{1} \circ$$



حال در مثلث قائم الزاویه EAD داریم:

اگر نقطه A بیرون دایره باشد، آن‌گاه نزدیک‌ترین فاصله نقطه A تا دایره برابر $d - r$ است و دورترین فاصله آن تا دایره برابر $d + r$ است، پس:

$$\begin{cases} d-r=y \\ d+r=1r \end{cases} \Rightarrow r d = r \circ \Rightarrow d = 1 \circ \Rightarrow r = r$$

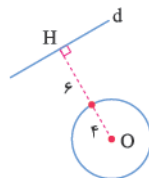
حال فرض می‌کنیم نقطه A درون دایره باشد. در این حالت نزدیک‌ترین فاصله نقطه A تا دایره برابر $r - d$ و دورترین فاصله آن تا دایره برابر $d + r$ است. پس داریم:

$$r - d = \gamma$$

$$\begin{cases} r-d=y \\ d+r=1 \end{cases} \Rightarrow yr=y \Rightarrow r=1.$$

دقت کنید نقطه A نمی‌تواند روی دایره باشد. چون در این حالت نزدیک‌ترین فاصله نقطه A از دایره برابر صفر می‌شود.

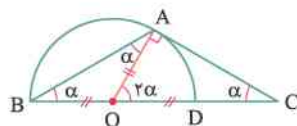
3 27



مطابق شکل مقابل، فاصله نزدیک‌ترین نقاط دایره تا خط d برابر ۶ است.

3 28

از O به A وصل می‌کنیم. OA بر AC عمود است. از طرفی مثلث AOB متساوی‌الساقین است. در ضمن مثلث ABC نیز متساوی‌الساقین است، پس زاویه‌ها به صورت مقابل هستند. دقت کنید زاویه AOD زاویه خارجی مثلث OAB است. در مثلث قائم‌الزاویه OAC داریم:



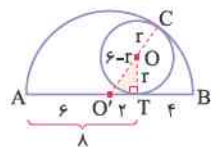
$$90^\circ + \alpha + 2\alpha = 180^\circ \Rightarrow 3\alpha = 90^\circ \Rightarrow \alpha = 30^\circ$$

می دانیم در مثلث قائم الزاویه، ضلع روبه رو به زاویه 30° نصف وتر است. پس:

$$OA = \frac{OC}{r} \Rightarrow r = \frac{OC}{r} \Rightarrow OC = r \Rightarrow CD = OC - OD = r - r = r$$

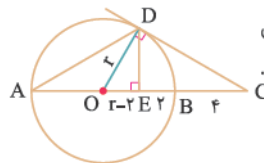
۲ ۲۹

با توجه به این که $AT = 8$ و $TB = 4$ است، پس اندازه شعاع نیم‌دایره برابر $\frac{4+8}{2} = 6$ می‌باشد. با توجه به شکل مقابل، در مثلث قائم‌الزاویه $O'TO$ داریم:



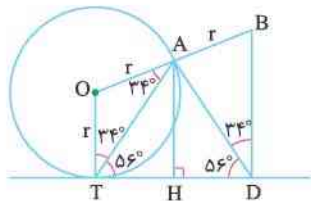
$$\begin{aligned} (s-r)^r &= r^r + r^r \Rightarrow 3s - 12r + r^r = s + r^r \Rightarrow 12r = 2r \\ \Rightarrow r &= \frac{2r}{12} = \frac{1}{6} \end{aligned}$$

3 30

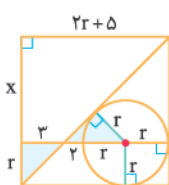


از مرکز نیم‌دایره یعنی O به D وصل می‌کنیم. OD بر مماس DC عمود است. در مثلث قائم‌الزاویه ODC داریم:

یعنی مثلث TAD متساوی الساقین است. پس $\widehat{ATH} = \widehat{ADH} = 56^\circ$.
زاویه $\widehat{OTA}$ متمم زاویه $\widehat{ATH} = 56^\circ$ است. پس $\widehat{OTA} = 34^\circ$ و چون
مثلث AOT متساوی الساقین است، پس $\widehat{OAT} = 34^\circ$. بنابراین زاویه
OAD برابر است با:



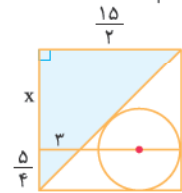
$$\widehat{OAD} = 34^\circ + (18^\circ - 56^\circ - 56^\circ) = 102^\circ$$



می‌دانیم شعاع گذرنده از نقطه تماس بر خط
مماس بر دایره عمود است. با توجه به شکل
مقابل دو مثلث رنگی هم‌نهشت هستند، پس
طول ضلع قائم مثلث رنگی بالایی برابر ۳ است.
حال به کمک قضیه فیثاغورس داریم:

$$r^2 + 3^2 = (r+2)^2 \Rightarrow r^2 + 9 = r^2 + 4r + 4 \Rightarrow 4r = 5 \Rightarrow r = \frac{5}{4}$$

در شکل زیر به کمک قضیه تالس در مثلث رنگی داریم:



$$\frac{\frac{5}{4}}{\frac{5}{4} + x} = \frac{3}{\frac{15}{2}} \Rightarrow \frac{5}{4} \times \frac{2}{3} = \frac{15}{2} + 3x$$

$$\Rightarrow \frac{5}{2} - \frac{15}{4} = 3x \Rightarrow \frac{45}{8} = 3x \Rightarrow x = \frac{15}{8}$$

بنابراین محیط بزرگ‌ترین چهارضلعی برابر است با:

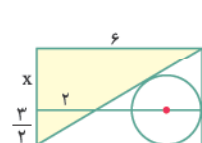
$$\text{محیط} = 2\left(\frac{15}{2} + \left(\frac{5}{4} + \frac{15}{8}\right)\right) = 15 + \frac{25}{4} = 15 + 6\frac{1}{4} = 21\frac{1}{4}$$

می‌دانیم شعاع گذرنده از نقطه تماس بر خط مماس بر دایره عمود است.
با توجه به شکل زیر دو مثلث رنگی هم‌نهشت هستند، پس طول ضلع
قائم مثلث رنگی بالایی برابر ۲ می‌باشد.



$$(r+1)^2 = r^2 + 2^2 \Rightarrow r^2 + 2r + 1 = r^2 + 4 \Rightarrow 2r = 3 \Rightarrow r = \frac{3}{2}$$

حال به کمک قضیه تالس دو مثلث رنگی داریم:



$$\frac{\frac{3}{2}}{\frac{3}{2} + x} = \frac{2}{6} \Rightarrow 3 + 2x = 9$$

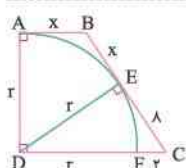
$$\Rightarrow 2x = 6 \Rightarrow x = 3$$

بنابراین مساحت مستطیل برابر است با:

$$S = 6 \times \left(\frac{3}{2} + 3\right) = 9 + 18 = 27$$

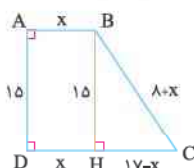
$$ED^2 = AE^2 + AD^2 \Rightarrow ED^2 = r^2 + r^2 \Rightarrow ED = \sqrt{2}r$$

$$\xrightarrow{r=\sqrt{5}} ED = 2\sqrt{20} = 4\sqrt{5}$$



از D به E وصل می‌کنیم. DE بر BC عمود
است. از طرفی $BE = BA = x$ می‌باشد.
در مثلث قائم‌الزاویه DEC داریم:

$$r^2 + x^2 = (r+x)^2 \Rightarrow r^2 + x^2 = r^2 + 2rx + x^2 \Rightarrow 2rx = 0 \Rightarrow r = 0$$



حال، از رأس B بر قاعده CD عمود
می‌کنیم. با توجه به اندازه‌های شکل،
به کمک قضیه فیثاغورس در مثلث
قائم‌الزاویه CHB، داریم:

$$15^2 + (17-x)^2 = (x+x)^2$$

$$\Rightarrow 225 + 289 - 34x + x^2 = 64 + 16x + x^2$$

$$\Rightarrow 50x = 450 \Rightarrow x = 9 \Rightarrow BE = 9$$

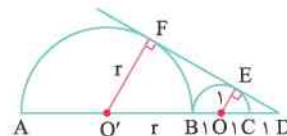
در مثلث قائم‌الزاویه BAC طول وتر BC برابر ۴۵ است. زیرا $AB = 9 \times 3$
و $AC = 9 \times 4$ هستند و می‌دانیم اعداد ۳، ۴ و ۵ و هر مضرب غیرصفر
آن‌ها اعداد فیثاغورسی هستند، پس $BC = 9 \times 5 = 45$ می‌باشد. حال
از مرکز نیم‌دایره به نقطه تماس وصل می‌کنیم. OE بر AB عمود است،
پس OE با AC موازی است. به کمک تالس در مثلث BAC داریم:

$$\frac{OE}{AC} = \frac{BO}{BC} \Rightarrow \frac{r}{36} = \frac{45-r}{45}$$

$$\Rightarrow 45r = 36 \times 45 - 36r$$

$$\xrightarrow{\div 9} 5r = 4 \times 45 - 4r \Rightarrow 9r = 4 \times 45 \Rightarrow r = 20$$

از مرکز نیم‌دایره‌ها به نقاط تماس وصل می‌کنیم، می‌دانیم OE و OF
عمودند، پس با هم موازی‌اند. حال به کمک قضیه تالس در مثلث
O'DF داریم:



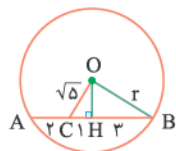
$$\frac{DO}{DO'} = \frac{OE}{O'F} \Rightarrow \frac{2}{3+r} = \frac{1}{r} \Rightarrow 2r = 3+r \Rightarrow r = 3$$

ابتدا مطابق توضیحات صورت تست، شکل مسئله را رسم می‌کنیم:

از مرکز دایره به نقطه تماس یعنی T وصل می‌کنیم، بنابراین $\widehat{T} = 90^\circ$ خواهد
بود. از A بر ساق TD عمود می‌کنیم. طبق عکس قضیه تالس در دوزنقه
OBDT نتیجه می‌شود که $TH = HD$. پس AH عمود منصف پاره خط
TD است، پس اگر از A به T وصل کنیم، $AT = AD$ خواهد بود و این

۲ ۴۵

از مرکز دایره عمود OH را بر وتر AB وارد می‌کنیم. چون OH بر AB عمود است، پس H وسط وتر AB است. با توجه به این که $BC = 2AC = 4$ است، داریم: $BH = 3$ ، $HC = 1$ ، $AC = 2$. به کمک قضیه فیثاغورس در مثلث قائم‌الزاویه OHC داریم:



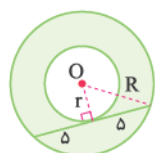
$$\begin{aligned} OC^2 &= OH^2 + HC^2 \\ \Rightarrow 5 &= OH^2 + 1 \Rightarrow OH^2 = 4 \end{aligned}$$

حال به کمک قضیه فیثاغورس در مثلث قائم‌الزاویه OHB مقدار r معلوم می‌شود:

$$OB^2 = OH^2 + HB^2 \Rightarrow r^2 = 4 + 9 \Rightarrow r = \sqrt{13}$$

۳ ۴۶

به شکل مقابل توجه کنید. می‌دانیم شعاع گذرنده از نقطه تماس بر خط مماس عمود است. از طرفی شعاع عمود بر یک وتر آن را نصف می‌کند. با فرض این که شعاع دایره بزرگ R و شعاع دایره کوچک r باشد، داریم:



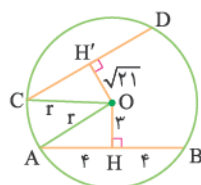
$$R^2 = r^2 + 25 \Rightarrow R^2 - r^2 = 25$$

مساحت ناحیه محدود بین دو دایره برابر است با:

$$\pi R^2 - \pi r^2 = \pi (R^2 - r^2) = \pi \times 25 = 25\pi$$

۳ ۴۷

شکل مسئله را رسم می‌کنیم. چون $OH' > OH$ می‌باشد، پس $AB > CD$ است، بنابراین طبق فرض سؤال $AB = 8$ است. چون OH بر AB عمود است، پس $AH = BH = 4$ می‌باشد. حال از O به A وصل می‌کنیم. مثلث OHA قائم‌الزاویه می‌باشد و داریم:



$$\begin{aligned} OA^2 &= OH^2 + AH^2 \\ \Rightarrow r^2 &= 9 + 16 = 25 \Rightarrow r = 5 \end{aligned}$$

با وصل کردن O به C در مثلث قائم‌الزاویه OH'C داریم:

$$\Rightarrow 5^2 = (\sqrt{2})^2 + CH'^2 \Rightarrow CH'^2 = 4 \Rightarrow CH' = 2$$

چون OH' بر CD عمود است، پس آن را نصف می‌کند و داریم:

$$CD = 2CH' = 2 \times 2 = 4$$

۱ ۴۸

چون $TD \parallel AC$ است، پس $\widehat{AT} = \widehat{BT}$ و در نتیجه $TA = TB$ است. از طرفی $TA = BC$ است پس $TB = BC$ می‌باشد و در نتیجه مثلث‌های TBC و ATB متساوی‌الساقین می‌باشند. زاویه TBA زاویه خارجی مثلث TBC است، پس:

$$70^\circ = \alpha + \alpha \Rightarrow \alpha = 35^\circ$$

۲ ۴۱

محیط دایره توسط نقاط A و B به دو کمان ANB و AMB تقسیم شده است. پس:

$$\begin{aligned} \text{محیط دایره} &= \widehat{AMB} + \widehat{ANB} \Rightarrow 360^\circ = 4\widehat{ANB} + \widehat{ANB} \\ \Rightarrow \widehat{ANB} &= \frac{360^\circ}{5} = 72^\circ \end{aligned}$$

از طرفی داریم:

$$\begin{aligned} \widehat{ANB} &= \widehat{BN} + \widehat{AN} \Rightarrow 72^\circ = 3\widehat{AN} + \widehat{AN} = 4\widehat{AN} \\ \Rightarrow \widehat{AN} &= 18^\circ \Rightarrow \widehat{BN} = 3 \times \widehat{AN} = 3 \times 18^\circ = 54^\circ \end{aligned}$$

۳ ۴۲

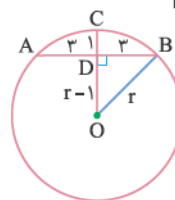
چون OH بر وتر AB عمود است، پس $AH = HB = 3$. از O به B وصل می‌کنیم. در مثلث قائم‌الزاویه OHB داریم:



$$OB^2 = OH^2 + HB^2 \Rightarrow R^2 = 1 + 9 = 10 \Rightarrow R = \sqrt{10}$$

۴ ۴۳

چون C وسط کمان AB است، پس OC عمود بر وتر AB بوده و آن را نصف می‌کند. پس $AD = DB = 3$ می‌باشند. حال از O به B وصل می‌کنیم. OB شعاع دایره است، لذا $OB = r$ و $OD = OC - CD = r - 1$ می‌باشند. بنابراین در مثلث قائم‌الزاویه ODB داریم:



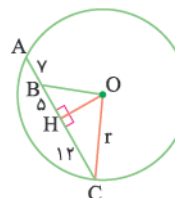
$$\begin{aligned} OB^2 &= OD^2 + BD^2 \Rightarrow r^2 = (r-1)^2 + 3^2 \\ \Rightarrow r^2 &= r^2 - 2r + 1 + 9 \Rightarrow 2r = 10 \Rightarrow r = 5 \end{aligned}$$

۲ ۴۴

از O بر وتر AC عمود OH را رسم می‌کنیم. می‌دانیم وتر را نصف می‌کند. طول وتر AC برابر $24 = 12 + 12$ است، پس $CH = 12$ و $BH = 5$ می‌شود. در مثلث قائم‌الزاویه OHB داریم:

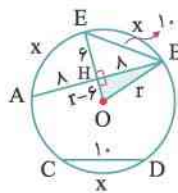
$$\begin{aligned} OB^2 &= BH^2 + OH^2 \Rightarrow (5\sqrt{2})^2 = 5^2 + OH^2 \\ \Rightarrow OH^2 &= 50 - 25 = 25 \Rightarrow OH = 5 \end{aligned}$$

حال از O به C وصل می‌کنیم، $OC = r$ می‌باشد. در مثلث قائم‌الزاویه OHC داریم:



$$\begin{aligned} OC^2 &= OH^2 + CH^2 \\ \Rightarrow r^2 &= 5^2 + 12^2 = 169 \\ \Rightarrow r &= 13 \end{aligned}$$

از O بر وتر AB عمود کرده و امتداد می دهیم تا کمان AB را در نقطه E قطع کند. می دانیم وتر AB و کمان AB نصف می شوند. از طرفی چون کمان EB

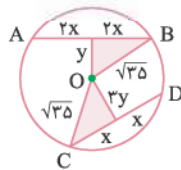


با کمان CD برابرند، پس وتر EB نیز با وتر CD برابر است. پس $EB = 10$. از آن جایی که ۶، ۸ و ۱۰ اعداد فیثاغورسی هستند، پس $HE = 6$. حال در مثلث قائم الزاویه رنگی داریم:

$$r^2 = (r-6)^2 + 8^2 \Rightarrow r^2 = r^2 - 12r + 36 + 64$$

$$\Rightarrow 12r = 100 \Rightarrow r = \frac{25}{3}$$

۵۳ ۳



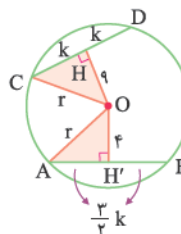
با توجه به فرضیات صورت تست، شکل مسئله به صورت مقابل است. به کمک قضیه فیثاغورس در مثلث های رنگی داریم:

$$\begin{cases} (2x)^2 + y^2 = 35 \Rightarrow 4x^2 + y^2 = 35 \\ x^2 + 9(35 - 4x^2) = 35 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + (3y)^2 = 35 \Rightarrow x^2 + 9y^2 = 35 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 35x^2 = 35 \times 8 \Rightarrow x = \sqrt{8} \Rightarrow CD = 2x = 2\sqrt{8} = 4\sqrt{2}$$

۵۴ ۴



از O بر AB و CD عمود کرده و به A و C نیز وصل می کنیم. OH و OH' به ترتیب برابر ۹، ۴ و $OC = OA = r$ می باشد. از طرفی، داریم:

$$2AB = 3CD \Rightarrow \frac{AB}{CD} = \frac{3}{2} \Rightarrow \begin{cases} AB = 3k \\ CD = 2k \end{cases}$$

چون OH و OH' بر وترهای AB و CD عمودند، پس آن ها را نصف می کنند و داریم:

$$CH = DH = k, \quad AH' = BH' = \frac{3}{2}k$$

به کمک قضیه فیثاغورس در دو مثلث رنگی، داریم:

$$\begin{cases} r^2 = 9^2 + k^2 \\ r^2 = 4^2 + \left(\frac{3}{2}k\right)^2 \end{cases} \Rightarrow 0 = 65 - \frac{5}{4}k^2 \Rightarrow \frac{5}{4}k^2 = 65$$

$$\Rightarrow k^2 = \frac{4}{5} \times 65 = 52$$

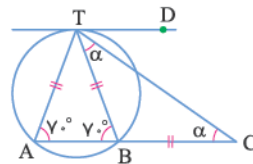
بنابراین با جای گذاری $k^2 = 52$ در تساوی $r^2 = 9^2 + k^2$ ، داریم:

$$r^2 = 81 + 52 = 133 \Rightarrow r = \sqrt{133}$$

۵۵ ۲

چون AB قطر دایره است، پس مرکز دایره روی AB قرار دارد. از O بر وتر CD عمود OH را وارد می کنیم. H وسط وتر CD خواهد بود.

چون $TD \parallel AC$ می باشد، بنابر قضیه خطوط موازی و مورب $\widehat{TBA} = \widehat{BTD} = 70^\circ$ است.



بنابراین داریم:

$$\widehat{DTC} = \widehat{BTD} - \widehat{BTC} \Rightarrow \widehat{DTC} = 70^\circ - 35^\circ = 35^\circ$$

۴۹ ۲

در مثلث قائم الزاویه AFE داریم:

$$65^\circ + \widehat{BAE} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{BAE} = 25^\circ$$

شعاع عمود بر وتر DE، کمان DBE را نصف می کند، پس:

$$\widehat{BAE} = 25^\circ \Rightarrow \frac{\widehat{BE}}{2} = 25^\circ \Rightarrow \widehat{BE} = 50^\circ \Rightarrow \widehat{DB} = 50^\circ$$

چون وترهای AC و DE مساوی اند، پس کمان های AC و DE نیز برابرند:

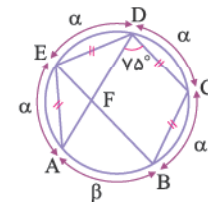
$$\widehat{AC} = \widehat{DBE} \Rightarrow \widehat{AC} = 50^\circ + 50^\circ = 100^\circ$$

AB قطر دایره است، پس:

$$\widehat{AC} + \widehat{CD} + \widehat{DB} = 180^\circ \Rightarrow 100^\circ + \widehat{CD} + 50^\circ = 180^\circ$$

$$\Rightarrow \widehat{CD} = 30^\circ$$

۵۰ ۱



می دانیم کمان های متناظر با وترهای مساوی با هم برابرند. از طرفی زاویه ADC محاطی است، پس:

$$\widehat{ADC} = \frac{\widehat{ABC}}{2} \Rightarrow 75^\circ = \frac{\alpha + \beta}{2} \Rightarrow \alpha + \beta = 150^\circ$$

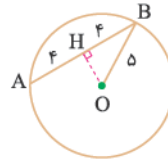
واضح است که $4\alpha + \beta = 360^\circ$ می باشد، پس:

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 150^\circ \\ 4\alpha + \beta = 360^\circ \end{cases} \Rightarrow 3\alpha = 210^\circ \Rightarrow \alpha = 70^\circ \Rightarrow \beta = 80^\circ$$

زاویه AEB زاویه محاطی روبه کمان AB است، پس:

$$\widehat{AEB} = \frac{\widehat{AB}}{2} = \frac{\beta}{2} = \frac{80^\circ}{2} = 40^\circ$$

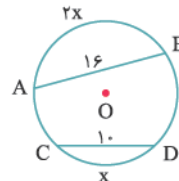
۵۱ ۱



می دانیم قطر (شعاع) عمود بر وتر، آن را نصف می کند. پس با توجه به شکل مقابل، در مثلث قائم الزاویه OHB داریم:

$$OB^2 = OH^2 + BH^2 \Rightarrow 25 = OH^2 + 16 \Rightarrow OH^2 = 9 \Rightarrow OH = 3$$

۵۲ ۱



با توجه به فرضیات سؤال، شکل مسئله به صورت مقابل است: