

مجموعہ کتابای جیے

آمار و احتمال

• حسین ہاشمی ظاہری

• تیمور جویبار

تقدیم به

نوه‌های عزیزم هانا و هامون

حسین هاشمی طاهری

تقدیم به

پدر و مادر عزیزم

تیمور جویبار

یکی از پارادوکس‌های جالب احتمال، مسئله مونتی هال (Monty Hall problem). این مسئله مربوط به یک مسابقه تلویزیونی می‌شه که توی اون سه تا در وجود داره که پشت یکی از اون‌ها یک جایزه (یک خودرو) قرار داره و دوتا در دیگه پوچ هستن. شرکت‌کننده برای بردن خودروی مورد نظر باید یکی از درها رو انتخاب کنه. مجری (که خودش میدونه خودرو پشت کدوم در قرار داره) یکی از درهای دیگه رو باز میکنه و نشون میده که پوچه. حالا به شرکت‌کننده میگه حاضری دری که انتخاب کردی رو با در باقی‌مونده عوض کنی؟

اگر جای اون شرکت‌کننده بودید نظرتون رو تغییر میدادید؟! یا نه؟! یا به انتخابتون اصرار می‌ورزیدید؟

شاید در نگاه اول اون دوتا در، هیچ تفاوتی با هم نداشته باشن. ولی علم آمار و احتمال جواب دقیق‌تری برای این مسئله داره و نشون میده که اگر شرکت‌کننده در رو عوض کنه احتمال برنده شدنش بیشتر می‌شه!^۱

حالا چرا اینا رو گفتیم؟! اینا رو گفتیم که بدونید اگر کتاب جیبی آمار و احتمال خیلی سبز رو بخونید (علاوه بر این که می‌تونید مثل آب خوردن تست بزنید) می‌تونید تو مسابقه‌ها شرکت کنید و میلیاردر بشید 

۱- اگر هنوز متقاعد نشدید می‌تونید عبارت «مسئله مونتی هال» یا «پارادوکس مونتی هال» رو توی اینترنت جست‌وجو کنید.

مقدمه مؤلفان

به نام خدا

درس آمار و احتمال از اون درساییه که درکش خیلی ساده و روانه و تو ذهن می‌مونه. حالا ما اومدیم این درسو خلاصه کردیم طوری که هیچ مطلبی جا نمونه و تازه اون مطلبِ بازشم کردیم و مشخصات زیر رو داره:

1 درس‌نامه‌اش کامل و کافیه و هر چی تو کتاب درسی هستش، تو این کتاب کامل‌ترش هست.

2 بعد از هر موضوع درسی، مثال و تست مربوط به اون موضوع رو جلو روتون گذاشتیم تا

درک اونو ساده کنه.

3 در آخر هر فصل، آزمونی شامل ۱۰ پرسش تستی گذاشتیم تا خودآزمایی کنین.

چیز دیگه‌ای هم مونده که نگفته باشیم؟

هاشمی طاهری - جویبار

فهرست

■ فصل ۱: آشنایی با مبانی ریاضیات

- درس ۱: آشنایی با منطق ریاضی ۱۰
درس ۲: جبر مجموعه‌ها ۲۵

■ فصل ۲: احتمال

- درس ۱: مبانی احتمال ۴۷
درس ۲: احتمال غیرهم‌شانس ۶۲
درس ۳: احتمال شرطی ۶۶
درس ۴: پیشامدهای مستقل و وابسته ۸۴

■ فصل ۳: آمار توصیفی

- درس ۱: توصیف و نمایش داده‌ها ۱۰۰
درس ۲: معیارهای گرایش به مرکز ۱۰۹
درس ۳: معیارهای پراکندگی ۱۱۸

■ فصل ۴: آمار استنباطی

- درس ۱: گردآوری داده‌ها ۱۳۴
درس ۲: برآورد ۱۴۵

■ فصل ۵: چکیده نکات آمار و احتمال

- فصل اول ۱۵۷
فصل دوم ۱۵۹
فصل سوم ۱۶۳
فصل چهارم ۱۶۶

جبر مجموعه ها

مجموعه، یکی از مفاهیم تعریف نشده است که فقط از آن یک برداشت ذهنی داریم ولی در قالب کلمات نمی توان آن را بیان نمود. فرض کنید فردی بگوید «مجموعه، دسته ای از اشیاء است که ...» بعد می پرسیم «دسته اشیاء» به چه معنی است؟ در پاسخ بگوید «دسته اشیاء» به معنی «گروهی از اشیاء» است. باز می پرسیم «گروهی از اشیاء» به چه معنی است و شاید در جواب بگوید «توده ای از اشیاء». ما هم می گوییم «توده ای از اشیاء» یعنی چه و ... و سرانجام در جواب می گوید یعنی «مجموعه ای از اشیاء» در این جاست که از مجموعه به مجموعه رسیدیم. اصطلاحاً می گوییم در یک دور باطل گرفتار شده ایم، پس مجموعه را همانند نقطه، خط و ... یکی از عبارتهای تعریف نشده در نظر می گیریم. مجموعه را با حروف بزرگ مانند A ، B و ... نمایش می دهیم. به عنوان مثال؛ مجموعه $A = \{2, 4, 6, 8\}$. اگر بخواهیم این مجموعه را به صورت ریاضی تعریف کنیم، یکی از روش های آن به صورت $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x = 2k, x < 9, k \in \mathbb{Z}\}$ است.

تذکره اگر در مجموعه ای یک عضو چند بار تکرار شود، آن عضو را فقط یک بار می نویسیم، مثلاً $\{1, 2, 3\} = \{1, 2, 3, 3, 3, 2\}$.

نکته

مجموعه باید کاملاً واضح و یکتا باشد. مثلاً عبارت «چهار عدد زوج متوالی» نمی تواند معرف یک مجموعه باشد، زیرا $\{2, 4, 6, 8\}$ و $\{6, 8, 10, 12\}$ هر دو مجموعه چهار عدد زوج متوالی هستند ولی این دو مجموعه یکسان نیستند.

مجموعه تهی: مجموعه‌ای که شامل هیچ عضوی نباشد، مجموعه تهی می‌نامند. مثلاً عبارت «اعداد طبیعی که بین $\frac{1}{3}$ تا $\frac{3}{4}$ قرار دارند»، مجموعه‌ای تهی است. مجموعه تهی را با نماد $\emptyset$ نمایش می‌دهیم.

عضویت: اگر عنصری مانند a در مجموعه A باشد، اصطلاحاً می‌گوییم « a عضو A است» و آن را با نماد $a \in A$ نمایش می‌دهیم. اگر a در مجموعه A وجود نداشته باشد، آن را با نماد $a \notin A$ نمایش می‌دهیم.

مجموعه مرجع (مجموعه جهانی): در هر بحثی، عضوهای مجموعه‌ای که درباره‌اش بحث می‌کنیم درون مجموعه‌ای کلی قرار دارند، آن مجموعه کلی را مجموعه مرجع می‌نامند و با U نمایش می‌دهند.

مثلاً وقتی می‌گوییم «مجموعه دانش‌آموزان کلاس یازدهم دبیرستان فیروز بهرام» در واقع قسمتی از دانش‌آموزان استان تهران را در نظر گرفته‌ایم، پس مجموعه مرجع در این بحث می‌تواند «دانش‌آموزان استان تهران باشد». هر چند مجموعه مرجع می‌تواند «دانش‌آموزان ایران» نیز باشد.

زیرمجموعه

فرض کنید A و B دو مجموعه باشند، اگر تمام عضوهای A در مجموعه B نیز وجود داشته باشند، آن‌گاه می‌گوییم « A زیرمجموعه B است» و آن را با نماد $A \subseteq B$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ریاضی زیرمجموعه بودن: با توجه به تعریف فوق، هم‌ارزی

$$A \subseteq B \equiv (\forall x : x \in A \Rightarrow x \in B)$$

مقابل برقرار است:

تعریف زیرمجموعه نبودن: اگر عضوی در A وجود داشته باشد که آن عضو در B نباشد، می‌گوییم « A زیرمجموعه B نیست» و آن را با نماد $A \not\subseteq B$ نمایش می‌دهیم. به زبان ریاضی داریم:

$$A \not\subseteq B \equiv (\exists x : x \in A \wedge x \notin B)$$

مثال ۳۳

(الف) ثابت کنید تهی، زیرمجموعه هر مجموعه است.

(ب) ثابت کنید هر مجموعه‌ای، زیرمجموعه مجموعه مرجع است.

پاسخ (الف) می‌خواهیم ثابت کنیم $\emptyset \subseteq A$.

می‌دانیم عبارت $\emptyset \subseteq A$ معادل است با $\forall x: x \in \emptyset \Rightarrow x \in A$ است و این گزاره شرطی به انتفای مقدم، درست است، زیرا مقدم این شرط؛ یعنی $x \in \emptyset$ نادرست است، در نتیجه $\emptyset \subseteq A$.

(ب) می‌خواهیم ثابت کنیم اگر A مجموعه‌ای دلخواه باشد، آن‌گاه $A \subseteq U$ است. برای اثبات این رابطه، به روش برهان خلف عمل می‌کنیم یعنی فرض می‌کنیم؛ $A \not\subseteq U$. پس باید عضوی در A باشد که در U وجود نداشته باشد. این با تعریف مجموعه مرجع در تناقض است، زیرا همه عضوهای یک مجموعه باید در مجموعه مرجع باشند، پس فرض خلف باطل است و در نتیجه $A \subseteq U$.

متمم یک مجموعه

اگر A مجموعه‌ای دلخواه از مجموعه مرجع U باشد، آن‌گاه مجموعه تمام عضوهای U که در A نباشند، مجموعه متمم A می‌نامند و آن را با A' نمایش می‌دهند.

بیان ریاضی مجموعه متمم:

$$\forall x \in A' \Leftrightarrow x \in U \wedge x \notin A$$

$$\forall x \in A' \Leftrightarrow x \notin A$$

یا به بیان ساده‌تر:

دو مجموعه مساوی: دو مجموعه A و B را مساوی گویند، هرگاه هر کدام زیرمجموعه دیگری باشد؛ به بیان ریاضی داریم:

$$(A = B) \equiv (A \subseteq B \wedge B \subseteq A)$$



تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعه متناهی

اگر A مجموعه‌ای متناهی و شامل n عضو باشد، آن‌گاه تعداد زیرمجموعه‌های آن 2^n است، زیرا هر زیرمجموعه در مقایسه با عضوی دلخواه از A ، دو حالت دارد یا آن عضو در زیرمجموعه هست یا نیست. پس بنابر اصل شمارش، تعداد زیرمجموعه‌ها $2^n = \underbrace{2 \times 2 \times \dots \times 2}_{n \text{ مرتبه}}$ می‌باشد.

◀ **مجموعه توانی یک مجموعه:** مجموعه‌ای را که شامل تمام زیرمجموعه‌های یک مجموعه باشد مجموعه توانی می‌نامند. مجموعه توانی نظیر مجموعه A را با $P(A)$ نمایش می‌دهند. اگر مجموعه A دارای n عضو باشد، آن‌گاه $P(A)$ دارای 2^n عضو و دارای 2^{2^n} زیرمجموعه است.

تست

مجموعه توانی مجموعه $A = \{1, 2, \{2\}\}$ چند زیرمجموعه دارد؟

۶۴ (۲)

۸ (۱)

۲۵۶ (۴)

۱۲۸ (۳)

▶ **پاسخ | گزینه ۴:** مجموعه A سه عضوی است (توجه کنید که ۲ با $\{2\}$ مساوی نیست)، پس مجموعه A دارای $2^3 = 8$ زیرمجموعه می‌باشد. اگر تمام این زیرمجموعه‌ها را در یک مجموعه بگذاریم، آن‌گاه مجموعه توانی A به دست می‌آید که شامل ۸ عضو است، در نتیجه تعداد زیرمجموعه‌های این مجموعه توانی برابر 2^8 ؛ یعنی ۲۵۶ است.

◀ **زیرمجموعه محض یک مجموعه:** اگر $A \subseteq B$ و $A \neq B$ باشد، آن‌گاه می‌گوییم مجموعه A ، زیرمجموعه محض مجموعه B است. گاهی زیرمجموعه محض را زیرمجموعه «سره» نیز می‌نامند. اگر مجموعه‌ای n عضوی باشد، تعداد زیرمجموعه‌های محض آن $2^n - 1$ است.

سؤال

اگر به مجموعه‌ای n عضوی، ۲ عضو اضافه شود، آن گاه به تعداد زیر مجموعه‌های محض آن ۴۸ عضو اضافه می‌شود، n کدام است؟

(۱) ۴ (۲) ۵ (۳) ۳ (۴) ۲

پاسخ | گزینه ۱ تعداد زیرمجموعه‌های محض یک مجموعه n عضوی،

$2^n - 1$ ، و تعداد زیرمجموعه‌های محض یک مجموعه $(n+2)$ عضوی $2^{n+2} - 1$ است، پس داریم:

$$(2^{n+2} - 1) - (2^n - 1) = 48 \Rightarrow 2^2 \times 2^n - 2^n = 48$$

$$\Rightarrow 3 \times 2^n = 48 \Rightarrow 2^n = 16 \Rightarrow 2^n = 2^4 \Rightarrow n = 4$$

این مسئله را با عددگذاری نیز می‌توان حل نمود!

سؤال

مجموعه $A = \{n \mid n \in \mathbb{N} \wedge 2^n \leq 3n \leq 2^{n+1}\}$ چند زیرمجموعه دارد؟

(۱) ۴ (۲) ۸ (۳) ۱۶ (۴) ۳۲

پاسخ | گزینه ۲ واضح است که n می‌تواند ۱ باشد، زیرا:

$$n = 1 \Rightarrow 2^1 \leq 3 \times 1 \leq 2^{1+1} \Rightarrow 2 \leq 3 \leq 4$$

n می‌تواند ۲ یا ۳ نیز باشد، زیرا:

$$n = 2 \Rightarrow 2^2 \leq 3 \times 2 \leq 2^{2+1} \Rightarrow 4 \leq 6 \leq 8$$

$$n = 3 \Rightarrow 2^3 \leq 3 \times 3 \leq 2^{3+1} \Rightarrow 8 \leq 9 \leq 16$$

اما n نمی‌تواند ۴ یا بزرگ‌تر از ۴ باشد، زیرا به عنوان مثال؛ اگر $n = 4$ باشد، آن گاه $2^4 \leq 3 \times 4$ درست نیست.

پس مجموعه A ، دارای ۳ عضو است و در نتیجه $2^3 = 8$ زیرمجموعه دارد.



تست ۱۱

اگر $A = \{1, 2, \{1, 2\}, \{1, \{1, 2\}\}, \{2\}\}$ و $B = \{\{1\}, \{1, 2\}\}$ باشند، تعداد زیرمجموعه‌های $A \cap B'$ کدام است؟ (سراسری ریاضی)

۴ (۱) ۸ (۲) ۱۶ (۳) ۳۲ (۴)

پاسخ گزینه ۳

$$A \cap B' = A - B = \{1, 2, \{1, \{1, 2\}\}, \{2\}\}$$

چون $A \cap B'$ دارای ۴ عضو است، پس تعداد زیرمجموعه‌های آن $2^4 = 16$ می‌باشد.

تست ۱۲

مجموعه A دارای ۵۱۲ زیرمجموعه است. مجموعه $A \cap B$ دارای ۳ عضو است. تعداد زیرمجموعه‌های $(B \cup A)'$ ، کدام است؟ (سراسری خارج ریاضی)

۱۶ (۱) ۳۲ (۲) ۴۸ (۳) ۶۴ (۴)

پاسخ گزینه ۴

یک مجموعه n عضوی دارای 2^n زیرمجموعه است، پس اگر تعداد عضوهای A برابر n باشد، داریم:

$$2^n = 512 = 2^9 \Rightarrow n = 9 \Rightarrow n(A) = 9$$

از طرفی $n(A \cap B) = 3$ است، پس:

$$n(A - B) = n(A) - n(A \cap B) = 9 - 3 = 6$$

و همچنین داریم:

$$(B \cup A)' = B' \cap A \Rightarrow n(B \cup A)' = n(A \cap B') = n(A - B) = 6$$

بنابراین تعداد زیرمجموعه‌های $(B \cup A)'$ برابر $2^6 = 64$ است.

عطفی $(x \in A \wedge y \in \emptyset)$ ، نادرست است، یعنی تالی شرط نادرست است و در نتیجه ترکیب شرطی فوق نادرست می‌باشد، پس به تناقض رسیده‌ایم. بنابراین، فرض خلف باطل است و در نتیجه $A \times \emptyset = \emptyset$ ، به دلیل مشابه ثابت می‌شود $\emptyset \times A = \emptyset$.

ب) چون A و B ناتهی هستند، پس $A \times B$ شامل عضو است و تهی نمی‌باشد. اگر $(x, y) \in A \times B$ دلخواه از $A \times B$ باشد، چون $A \times B = B \times A$: پس آن عضو در $B \times A$ نیز هست و برعکس.

$$\forall (x, y) \in A \times B \Leftrightarrow (x, y) \in B \times A$$

از رابطه بالا داریم: $\forall x \in A \wedge \forall y \in B \Leftrightarrow x \in B \wedge y \in A$

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall x \in A \Rightarrow x \in B \Rightarrow A \subseteq B \\ \forall y \in B \Rightarrow y \in A \Rightarrow B \subseteq A \end{array} \right. \Rightarrow A = B \quad \text{در نتیجه:}$$

پرسش‌های تستی

۱- اگر $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x - \frac{3}{4}| \leq \frac{5}{4}\}$ دامنه متغیر باشد، ارزش کدام گزاره درست است؟

$$\forall x \in A : x + 4 < 8 \quad (2)$$

$$\exists x \in A : x + 5 = 3 \quad (1)$$

$$\forall x \in A : x^2 > 0 \quad (4)$$

$$\exists x \in A : \frac{1}{x} \in \mathbb{Z} \quad (3)$$

۲- نقیض گزاره $(\forall x \in \mathbb{Q}; x^2 \geq x) \wedge (\exists x \in \mathbb{R}; x^2 = -1)$ کدام است؟

$$(\forall x \in \mathbb{Q}; x^2 < x) \vee (\exists x \in \mathbb{R}; x^2 \neq -1) \quad (1)$$

$$(\exists x \in \mathbb{Q}; x^2 < x) \vee (\forall x \in \mathbb{R}; x^2 \neq -1) \quad (2)$$

$$(\exists x \in \mathbb{Q}; x^2 \geq x) \wedge (\forall x \in \mathbb{R}; x^2 = -1) \quad (3)$$

$$(\exists x \in \mathbb{R}; x^2 < x) \wedge (\forall x \in \mathbb{R}; x^2 \neq -1) \quad (4)$$



۳- گزاره $\sim p \Rightarrow (\sim q \Rightarrow r)$ هم‌ارز با کدام گزینه است؟

$$(p \vee q) \wedge r \quad (1) \quad (p \vee q) \vee r$$

$$(p \wedge q) \vee p \quad (2) \quad (p \vee \sim q) \vee r$$

۴- کدام گزاره زیر، هم‌ارز منطقی گزاره $q \Leftrightarrow (\sim p \vee q)$ است؟ (سراسری ریاضی)

$$\sim p \Leftrightarrow q \quad (1) \quad p \vee q \quad (2) \quad q \quad (3) \quad \sim p \Leftrightarrow q \quad (4)$$

۵- اگر $A = \{1, 2, 3, 4\}$ و $B = \{2, 3, 4, 5\}$ و $A \cap B \subseteq X \subseteq A \cup B$ ، آن‌گاه

چند مجموعه متمایز می‌توانند به جای X قرار گیرند؟

$$2 \quad (1) \quad 3 \quad (2) \quad 4 \quad (3) \quad 5 \quad (4)$$

۶- اگر $A \cup (B - A) = B$ باشد، آن‌گاه کدام گزینه درست است؟

$$A \subseteq B \quad (1) \quad B \subseteq A \quad (2) \quad A \neq \emptyset \quad (3) \quad B = \emptyset \quad (4)$$

۷- اگر A و B دو مجموعه ناتهی باشند، آن‌گاه $(A \cap B') - (B - A)$ برابر

کدام مجموعه است؟ (سراسری خارج ریاضی)

$$B' \quad (1) \quad \emptyset \quad (2) \quad A \cap B \quad (3) \quad A - B \quad (4)$$

۸- اگر $n \in \mathbb{N}$ و $A_n = (-\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$ ، آن‌گاه حاصل $\bigcup_{i=1}^n A_i$ کدام است؟

$$\{0\} \quad (1) \quad (-1, 1) \quad (2) \quad \{-1, -1\} \quad (3) \quad \{0\} \quad (4)$$

۹- مجموعه $A \times B$ دارای ۵۴ عضو و مجموعه $A \cap B$ دارای ۸ زیرمجموعه

است. مجموعه $A \cup B$ چند عضو می‌تواند داشته باشد؟

$$9 \quad (1) \quad 10 \quad (2) \quad 12 \quad (3) \quad 14 \quad (4)$$

۱۰- اگر $A = [1, 3]$ و $B = [-1, 2]$ ، آن‌گاه مساحت $A \times B - B \times A$ کدام است؟

$$5 \quad (1) \quad 6 \quad (2) \quad 3 \quad (3) \quad 4 \quad (4)$$

پاسخ پرسش های تستی

۱- گزینه «۳» ابتدا عضوهای مجموعه A را مشخص می کنیم:

$$|x - \frac{3}{2}| \leq \frac{5}{2} \Rightarrow -\frac{5}{2} \leq x - \frac{3}{2} \leq \frac{5}{2}$$

$$\Rightarrow -1 \leq x \leq 4 \Rightarrow A = \{-1, 0, 1, 2, 3, 4\}$$

با توجه به عضوهای مجموعه A ، هرگز $x + 5 = 3$ نمی شود، پس گزینه (۱) نادرست است.

اگر $x = 4$ ، آن گاه $x + 4 = 8$ پس گزینه (۲) نیز نادرست است و اگر $x = 0$ ، آن گاه $x^2 \neq 0$ ، پس گزینه (۴) نیز نادرست است. اما $-1 \in A$ و $\frac{1}{-1} \in \mathbb{Z}$ ، پس گزینه (۳) درست است.

۲- گزینه «۲» می دانیم نقیض $p \wedge q$ هم ارز $p \vee \sim q$ است و نقیض سوری وجودی (عمومی) سور عمومی (وجودی) است که قسمت گزاره نمای آن نقیض شده باشد، پس گزینه (۲) پاسخ تست است.

۳- گزینه «۱» می دانیم $A \Rightarrow B \equiv A \vee B$ ، پس داریم:

$$\sim p \Rightarrow (\sim q \Rightarrow r) \equiv (\sim p) \vee (\sim q \Rightarrow r)$$

$$\equiv p \vee (q \vee r) = (p \vee q) \vee r$$

۴- گزینه «۲» می دانیم $A \Leftrightarrow B \equiv (A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$ پس:

$$(\sim p \vee q) \Leftrightarrow q \equiv [(\sim p \vee q) \Rightarrow q] \wedge [q \Rightarrow (\sim p \vee q)]$$

حال به کمک هم ارزی $A \Rightarrow B \equiv \sim A \vee B$ داریم:

$$\equiv [(p \wedge \sim q) \vee q] \wedge [\underbrace{\sim q \vee (\sim p \vee q)}_{\text{همواره درست}}] \equiv (p \wedge \sim q) \vee q$$

همواره درست

طبق ویژگی توزیع پذیری داریم:

$$\equiv (p \vee q) \wedge (\sim q \vee q) \equiv (p \vee q) \wedge T \equiv p \vee q$$

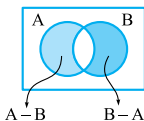


- ۵- گزینه «۳» چون $A \cap B = \{2, 3, 4\}$ و باید $A \cap B \subseteq X$ باشد، پس حتماً مجموعه X شامل عضوهای $A \cap B$ است؛ یعنی X حتماً شامل ۲، ۳ و ۴ می‌باشد. از طرفی $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ و چون $X \subseteq A \cup B$ ، پس هر یک از دو عضو ۱ و ۵ می‌توانند در X باشند یا نباشند، مجموعه $\{1, 5\}$ دارای چهار زیرمجموعه است که اجتماع هر یک از آنها با $\{2, 3, 4\}$ می‌تواند جای مجموعه X قرار بگیرد، پس چهار مجموعه می‌تواند به جای X گذاشته شود.
- ۶- گزینه «۱»

$$\begin{aligned} A \cup (B - A) &= A \cup (B \cap A') && \text{تعریف تفاضل} \\ &= (A \cup B) \cap (A \cup A') && \text{توزیع پذیری } \cup \text{ در } \cap \\ &= (A \cup B) \cap U = A \cup B \end{aligned}$$

پس بنابر فرض مسئله $A \cup B = B$ و در نتیجه $A \subseteq B$.
توجه داشته باشیم که اگر $A = \emptyset$ باشد، رابطه $A \cup (B - A) = B$ برقرار است؛ پس گزینه (۳) نمی‌تواند پاسخ تست باشد.

- ۷- گزینه «۴»
 $(A \cap B') - (B - A) = (A - B) - (B - A)$
با توجه به این که، $A - B$ و $B - A$ دو مجموعه جدا از هم هستند، داریم:
 $(A - B) - (B - A) = A - B$. به شکل زیر توجه کنید:



- ۸- گزینه «۲»
 $A_1 = (-\frac{1}{1}, \frac{1}{1}) = (-1, 1)$, $A_2 = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$
 $A_3 = (-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}), \dots$

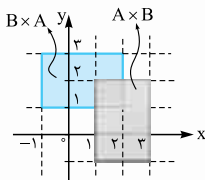
ملاحظه می شود همه A_n ها زیر مجموعه A_1 هستند، پس اجتماع تمام آن ها برابر A_1 ؛ یعنی برابر $(-1, 1)$ می باشد.

۹- گزینه «۳» چون $8 = 2^3$ ، پس $A \cap B$ دارای سه عضو است در نتیجه هر یک از مجموعه های A و B حداقل سه عضو دارند. اما حاصل ضرب تعداد عضوهای آن ها باید 54 باشد. واضح است که $54 = 2 \times 27 = 3 \times 18 = 6 \times 9$. چون A و B نمی توانند ۲ عضوی باشند، زیرا حداقل عضوهای A و B ، ۳ هستند، پس ۲ نمی تواند برقرار باشد، در نتیجه دو حالت باقی می ماند:

$$\begin{cases} n(A) = 3 \\ n(B) = 18 \end{cases} \Rightarrow n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = 18$$

$$\begin{cases} n(A) = 6 \\ n(B) = 9 \end{cases} \Rightarrow n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = 12$$

۱۰- گزینه «۱» نمودارهای $A \times B$ و $B \times A$ در شکل زیر رسم شده اند. واضح است که قسمت مشترک آن ها مربعی به ضلع ۱ است و در نتیجه مساحت آن ۱ می باشد. از طرفی مساحت $A \times B = 6$ است، پس مساحت $A \times B - B \times A$ برابر $6 - 1 = 5$ می باشد.



چکیدہ نکات آمار و احتمال

فصل (۵)

فصل اول

- هر جمله خبری را یک گزاره می نامند.
- ارزش یک گزاره، درست (د یا T) یا نادرست (ن یا F) است.
- اگر گزاره‌ای دارای یک یا چند متغیر باشد، آن را گزاره‌نما می نامند.
- مجموعه مقادیری که می تواند جای متغیر در گزاره‌نما قرار گیرد و آن را به یک گزاره تبدیل کند، دامنه متغیر نامیده می شود.
- بزرگ‌ترین زیرمجموعه‌ای از دامنه متغیر که گزاره‌نما را به گزاره‌ای درست تبدیل می کند، مجموعه جواب گزاره‌نما نامیده می شود.
- ارزش ترکیب عطفی دو گزاره، همیشه نادرست است مگر زمانی که هر دو گزاره درست باشند.
- ارزش ترکیب فصلی دو گزاره، همیشه درست است مگر زمانی که هر دو گزاره نادرست باشند.
- یک گزاره شرطی، همیشه درست است مگر زمانی که مقدم درست و تالی نادرست باشد.
- یک گزاره دوشروطی فقط زمانی درست است که ارزش هر دو مؤلفه آن یکسان باشند؛ یعنی هر دو درست یا هر دو نادرست باشند.
- هم‌ارزی‌های زیر مهم هستند:

$$1 \quad p \Rightarrow q \equiv \sim p \vee q$$

$$2 \quad p \Rightarrow q \equiv \sim q \Rightarrow \sim p$$

$$3 \quad \sim (p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$$

قوانین دمورگان:

$$4 \quad \sim (p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$$

$$5 \quad p \vee (p \wedge q) \equiv p$$

قوانین جذب:

$$6 \quad p \wedge (p \vee q) \equiv p$$



■ ترکیب‌های فصلی و عطفی دارای ویژگی‌های جابه‌جایی، شرکت‌پذیری و توزیع‌پذیری هستند.

■ هرگاه در ابتدای گزاره‌نمایی عبارتی مانند «به ازای هر مقدار» یا «هر چه باشد» یا نظیر این‌ها بیاید، آن را به یک گزاره با سور عمومی تبدیل می‌کند.

■ هرگاه در ابتدای گزاره‌نمایی عبارتی مانند «وجود دارد» یا «به ازای بعضی مقادیر» یا نظیر این‌ها بیاید، آن را به یک گزاره با سور وجودی تبدیل می‌کند.

■ نقیض گزاره‌ای که با سور عمومی بیان شده است، گزاره‌ای با سور وجودی است که قسمت گزاره‌نمایی آن نقیض شده باشد و برعکس.

■ مجموعه، یکی از مفاهیم تعریف نشده است.

■ $A \subseteq B \equiv \forall x: x \in A \Rightarrow x \in B$ تعریف زیرمجموعه بودن:

■ $A \not\subseteq B \equiv \exists x: x \in A \wedge x \notin B$ تعریف زیرمجموعه نبودن:

■ تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعه n عضوی، برابر با 2^n است.

■ همه زیرمجموعه‌های یک مجموعه مانند A ، مجموعه جدیدی تشکیل می‌دهند که آن را مجموعه توانی A می‌نامند و با $P(A)$ نمایش می‌دهند.

■ اگر A مجموعه‌ای n عضوی باشد، آن گاه تعداد عضوهای مجموعه توانی آن 2^n و تعداد زیرمجموعه‌های مجموعه توانی برابر با 2^{2^n} است.

■ اگر $A \subseteq B$ ، آن گاه $A \cup B = B$ و $A \cap B = A$ و برعکس.

■ دو مجموعه، زمانی مساوی هستند که هر کدام زیرمجموعه دیگری

باشد؛ به بیان دیگر: $(A = B) \equiv (A \subseteq B \wedge B \subseteq A)$

ویژگی‌های مهم مجموعه‌ها:

$$A \cup A = A \quad \text{۱}$$

$$A \cup \emptyset = A \quad \text{۲}$$

$$A \cap A = A \quad \text{۳}$$

$$A \cap \emptyset = \emptyset \quad \text{۴}$$

$$A \cap U = A \quad \text{۶}$$

$$A \cup U = U \quad \text{۵}$$

$$A \cap A' = \emptyset \quad \text{۸}$$

$$A \cup A' = U \quad \text{۷}$$

■ قوانین جذب:

$$\text{۱} \quad A \cup (A \cap B) = A$$

$$\text{۲} \quad A \cap (A \cup B) = A$$

■ قوانین دمورگان:

$$\text{۱} \quad (A \cup B)' = A' \cap B'$$

$$\text{۲} \quad (A \cap B)' = A' \cup B'$$

■ اجتماع و اشتراک در مجموعه‌ها دارای ویژگی‌های جابه‌جایی، شرکت‌پذیری و توزیع‌پذیری هستند.

■ ضرب دکارتی دو مجموعه: اگر A و B دو مجموعه دلخواه باشند، آن‌گاه $A \times B$ تمام زوج‌های مرتبی هستند که عنصر اول آن‌ها عضو مجموعه A و عنصر دوم آن‌ها عضو مجموعه B است.

■ ضرب دو مجموعه در حالت کلی دارای خاصیت جابه‌جایی نیست؛ یعنی اگر A و B دو مجموعه باشند، در حالت کلی $A \times B \neq B \times A$.

■ اگر مجموعه A دارای n عضو و مجموعه B دارای p عضو باشد، آن‌گاه $A \times B$ و $B \times A$ دارای $n \cdot p$ عضو هستند و اگر $A \cap B$ دارای k عضو باشد، آن‌گاه مجموعه‌های $A \times B$ و $B \times A$ دارای k^2 عضو مشترک هستند. هم‌چنین مجموعه $(A \times B) \cup (B \times A)$ دارای $2np - k^2$ عضو است.

فصل دوم

■ اصل شمارش: اگر عملی را بتوان به n_1 طریق و عمل دیگری را بتوان به n_2 طریق انجام داد، چنان‌چه انجام این دو عمل با هم امکان‌پذیر باشد، تعداد روش‌های انجام آن‌ها $n_1 \times n_2$ است.

