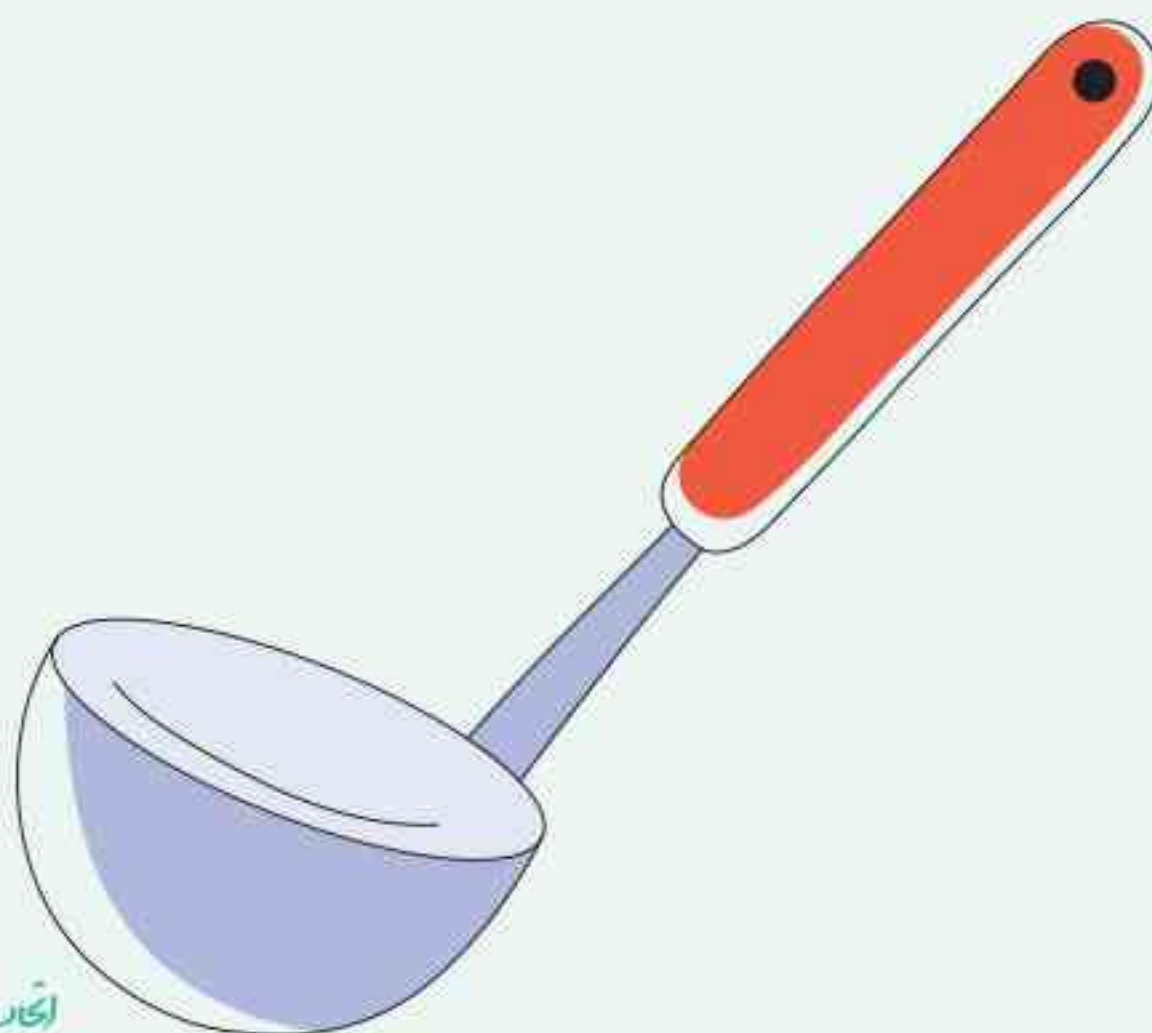


توان‌های گویا و عبارت‌های جبری

بدون تسلط به این فصل، جلوتر نروید!
اتحاد، کار با توان و رادیکال یعنی همه چیز... فصلی مختصر و مهم؛ کاربردی و لازم برای
کنکوری تجربی



انگار من و توانا محکم...

یا

عشق تو در دل من

نخیه ناشدنی است!

محبت را در دل خود

به توان رساندم اما...

بی‌پرستری!

ایستگاه ۱: توان و رادیکال و کاربرد آن‌ها در محاسبات

آشنایی با مفهوم ریشه‌ی عدد و توان گویای مدها، بحث اصلی ما در این ایستگاه است؛ البته به قوانین حاکم بر اعداد توان‌دار و رادیکالی هم توجه زیادی داشته باشید.

مفهوم ریشه و تعداد آن

تعریف: اگر $b^n = a$ باشد، در این صورت $b = \sqrt[n]{a}$ خواهد بود که مفهوم آن می‌شود: b ، **ریشه‌ی n ام عدد a است**. بنابراین می‌بینید که توان و رادیکال، هم‌خانواده‌اند! ($n \in \mathbb{N}, n \geq 2$)

ببین: چون 3^2 می‌شود ۹، پس ۳، یکی از ریشه‌های دوم ۹ است. $(-2)^4 = 16$ هم یعنی ۲- یکی از ریشه‌های چهارم ۱۶ است. اما دربارهِی تعداد ریشه‌های یک عدد، جدول زیر را حتماً به‌دقت بررسی کنید:

عدد a	وضع ریشه	تعداد ریشه‌ها	فرم ریشه‌ها	مثال نمونه
$a > 0$	n زوج	دو ریشه‌ی n ام دارد که قرینه‌ی همدیگرند.	$\sqrt[n]{a}, -\sqrt[n]{a}$	ریشه‌های دوم ۹ که عبارت‌اند از ± 3 .
	n فرد	یک ریشه‌ی n ام دارد.	$\sqrt[n]{a}$	ریشه‌ی سوم ۲۷ که می‌شود ۳.
$a < 0$	n زوج	ریشه‌ی n ام ندارد.	-	ریشه‌ی چهارم ۴- که وجود ندارد!
	n فرد	یک ریشه‌ی n ام دارد.	$\sqrt[n]{a}$	ریشه‌ی سوم ۸- که می‌شود ۲-.

① تست: کدام یک از اعداد زیر دقیقاً دو ریشه‌ی ششم دارد؟

(۱) $3 - 2\sqrt{2}$ (۲) $1 - \sqrt{2}$

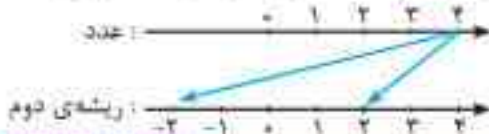
(۳) $\frac{2\sqrt{2}-2}{3}$

(۴) $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$

پاسخ: اگر عددی بخواهد دو ریشه‌ی ششم داشته باشد (چون ۶ زوج است)، باید خودش مثبت باشد؛ تنها عدد مثبت در بین گزینه‌ها $\frac{2\sqrt{2}-2}{3}$ است. **ببین:**

$$\frac{2\sqrt{2}-2}{3} = \frac{2(\sqrt{2}-1)}{3} \approx \frac{2(1.4-1)}{3} > 0$$

در کتاب درسی گفته شده می‌توانید دوتا محور زیر هم بکشید و اولی را به خود عدد و پایینی را به ریشه‌ی n ام آن اختصاص دهید؛ بعد هم هر عدد از محور بالا را با یک فلش (یا بیشتر) به ریشه‌ی n ام آن عدد روی محور پایین نسبت دهید. **ببین:**



① تست: ریشه‌ی چهارم عدد $a^2 + a - 2$ وجود ندارد. در این صورت چند مقدار صحیح برای a وجود دارد؟

(۴) ۳

(۳) ۲

(۲) ۱

(۱) صفر

پاسخ: چون ریشه‌ی چهارم عدد وجود نداشته (۴ زوج است)، پس حتماً عدد ما منفی بوده است.

$a^2 + a - 2 < 0$ → **ریشه‌ها پیدا کن** → $a = 1, -2$ → **تعیین علامت کن** → $\begin{array}{c|ccc} a^2+a-2 & + & - & + \\ \hline & -2 & 1 & \end{array}$ → **منفی بوده محدوده بگو** → $-2 < a < 1$ → $a \in \mathbb{Z}$ → $a = -1, 0$ → **تعداد** → ۲ تا

توان گویا و رادیکال

تعریف: اگر a عدد حقیقی و **مثبت** باشد، آن وقت توان $\frac{m}{n}$ ام عدد a را به فرم $a^{\frac{m}{n}}$ می‌نویسیم و البته می‌دانیم که $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$ و m عددی صحیح و n طبیعی است.

اگر $a \leq 0$ باشد، $a^{\frac{m}{n}}$ را تعریف نمی‌کنیم!

این جوری هم ببین: اگر a عددی منفی باشد، حق ندارد $a^{\frac{m}{n}}$ را به فرم $\sqrt[n]{a^m}$ بنویسید!

خب! حالا با کارهایی که مجاز به انجام آن‌ها روی رادیکال‌ها هستیم و همچنین قوانین توان آشنا می‌شویم.

این قوانین در جدول صفحه‌ی بعد آمده است. قبل از مطالعه‌ی جدول، این‌ها را قرارداد می‌کنیم:

۱ فرجه‌ی رادیکال، عدد طبیعی و مخالف ۱ است.

۲ همه‌ی توان‌ها اعداد گویا هستند.

۳ هر رادیکالی با فرجه‌ی زوج که از آن صحبت می‌کنیم، زیر رادیکالش نامنفی فرض می‌شود.

عملیات با اعداد توان‌داری که توان گویا دارند، کاملاً مشابه حالتی است که توان‌ها عدد صحیح بودند و بلد بودیم!

توان

۱	$a^0 = 1$	هر عدد غیر صفر به توان صفر برسد، جوابش می‌شود ۱.
۲	$a^m \times a^n = a^{m+n}$	در ضرب عددهای توانی با پایه‌ی مشترک، پایه را بنویسید و توان‌ها را جمع کنید.
۳	$a^m \times b^m = (ab)^m$	در ضرب عددهای توانی با توان یکسان، پایه‌ها را در هم ضرب کنید و توان مشترک را برایش بنویسید.
۴	$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$	در تقسیم دو عدد توانی با پایه‌های مشترک، پایه را نوشته و توان مخرج را از توان صورت کم کنید.
۵	$\frac{a^m}{b^m} = \left(\frac{a}{b}\right)^m$	در تقسیم دو عدد توانی با توان‌های مشترک، پایه‌ی صورت را بر پایه‌ی مخرج تقسیم کرده و توان مشترک را برایش بنویسید.
۶	$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ نتیجه: $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$	اگر می‌خواهید توان منفی را از بین ببرید، باید پایه‌ی عدد توانی را معکوس کنید.
۷	$(a^m)^n = a^{mn}$	اگر یک عدد توانی کلاً به توان برسد، پایه را نوشته و توان‌ها را در هم ضرب کنید.

در یک نگاه: قوانین کاربردی توان رو جمع‌وجور شده یادتون باشه:

$$\frac{x^a x^b}{(x^c)^d} = \frac{x^{a+b}}{x^{cd}} = x^{a+b-cd} \quad (x \neq 0)$$

رادیکال

۱	$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$	اگر می‌خواهید عددی رادیکالی را به فرم توانی بنویسید، توانش کسری می‌شود: صورت کسر، توان عدد زیر رادیکال و مخرجش، فرجه‌ی رادیکال.
۲	$(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$	اگر رادیکالی به توان برسد، می‌توانید توان را به عدد زیر رادیکال اختصاص دهید.
۳	$\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[nk]{a^{mk}} \quad (a > 0)$	می‌توانید هم توان عدد مثبت زیر رادیکال و هم فرجه را در عدد طبیعی یکسان و دلخواهی ضرب کنید.
۴	$a\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n b} \quad (a > 0)$	اگر بخواهید عدد مثبتی را به داخل رادیکال ببرید، باید آن را به توان فرجه برسانید.
۵	$(\sqrt[n]{a})^n \begin{cases} \xrightarrow{\text{فرد } n} a \\ \xrightarrow{\text{زوج } n} a \end{cases}$	اگر عدد رادیکالی به توان فرجه‌ی خودش برسد، رادیکال از بین می‌رود: برای n زوج قدرمطلق هم بگذارید.
۶	$\sqrt[n]{a^n} \begin{cases} \xrightarrow{\text{زوج } n} a \\ \xrightarrow{\text{فرد } n} a \end{cases}$	می‌توانید توان عدد زیر رادیکال را با فرجه ساده کنید، فقط اگر فرجه زوج است، قدرمطلق بگذارید...
۷	$\sqrt[n]{\sqrt[m]{p} \sqrt[q]{a}} = \sqrt[mnp]{a}$	اگر چند رادیکال بی‌ضریب، روی هم سوار بودند، فرجه‌هایشان را در هم ضرب کنید...

خاصیت $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$ به شما می‌گوید که عدد رادیکال‌دار، چیزی به جز عددی با توان گویا نیست و برعکس.

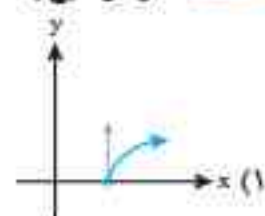
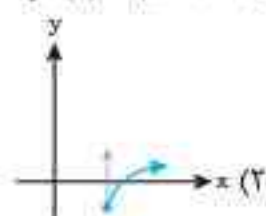
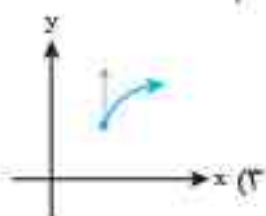
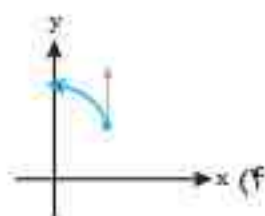
بین: $\sqrt[n]{a^2} = a^{\frac{2}{n}}$ و $b^{\frac{2}{n}} = \sqrt[n]{b^2} \quad (a, b > 0)$

 حواستان باشد $a^{m^n} \neq a^{nm}$: در واقع وجود پرانتز در خاصیت ۷ توان، باعث ضرب شدن توان‌ها می‌شود.

بین: $a^6 \xrightarrow{\text{پرانتز داریم، توان‌ها ضرب نمی‌شوند}} a^{3^2} \text{ (ب) } \xrightarrow{\text{اول توان را حساب کن}} a^{3^2} \text{ (الف) } (a^3)^2$

 از آن‌جا که ورود و خروج منفی از زیر رادیکال فرجه‌ی فرد آزاد است ($\sqrt[n]{-2} = -\sqrt[n]{2}$)، وقتی زیر رادیکال فرجه‌ی فرد، منفی باشد، بهتر این است که منفی را به بیرون از رادیکال منتقل کنید و سپس قوانین توان را به کار بگیرید...

① تست: نمودار تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \sqrt{x+2} + 4\sqrt{x-2}$ با شرط $x \leq 6$ ، کدام است؟



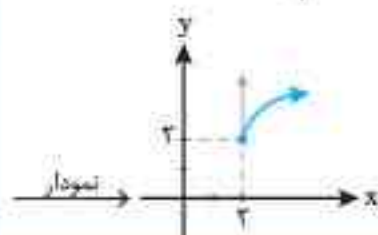
پاسخ: اول ضریب ۴ را ببریم داخل!

$$f(x) = \sqrt{x+2} + \sqrt{16(x-2)} = \sqrt{x+2} + \sqrt{16x-32}$$

$$\xrightarrow{\text{محاسبه } C} C^2 = (x+2)^2 - (16x-32) = x^2 + 4x + 4 - 16x + 32$$

$$= x^2 - 12x + 36 = (x-6)^2 \xrightarrow{\text{چون}} C = |x-6| \xrightarrow{\text{فرض } x \leq 6} C = -x+6$$

$$\xrightarrow{\text{رادیکال مرکب}} f(x) = \sqrt{\frac{(x+2)+(-x+6)}{2}} + \sqrt{\frac{(x+2)-(-x+6)}{2}} = \sqrt{4} + \sqrt{\frac{2x-4}{2}} \Rightarrow f(x) = 2 + \sqrt{x-2}$$



تخمین زدن عددهای رادیکالی یک رقمی؛ کم کردن شر رادیکال!



تکنیک معلم کنکور: گاهی بهتر است به جای کار کردن با عددهای رادیکالی، آن‌ها را اعشاری کنیم! خب اول هر مقدار از عددهای رادیکالی که قابلیت خارج شدن از رادیکال را دارند، بیرون بیاورید...

ببین:

الف) $\sqrt{27} = \sqrt{9 \times 3} = 3\sqrt{3}$

ب) $\sqrt{20} = \sqrt{4 \times 5} = 2\sqrt{5}$

و بعد این کادرهای خوش رنگ را به خاطر داشته باشید:

$$\sqrt{2} = 1/4, \sqrt{3} = 1/7, \sqrt{4} = 2, \sqrt{5} = 2/2, \sqrt{6} = 2/4, \sqrt{7} = 2/6, \sqrt{8} = 2/8, \sqrt{9} = 3$$

① تست: حاصل $\frac{\sqrt{8} + \sqrt{27}}{5 - \sqrt{6}}$ کدام است؟

(۱) $\sqrt{2} + \sqrt{3}$

(۲) $2\sqrt{5}$

(۳) $\sqrt{3} + 2\sqrt{2}$

(۴) $2\sqrt{3} + \sqrt{2}$

پاسخ:

$$\frac{\sqrt{8} + \sqrt{27}}{5 - \sqrt{6}} = \frac{2\sqrt{2} + 3\sqrt{3}}{5 - \sqrt{6}} \xrightarrow{\text{اعشاری کن}} \frac{2(1/4) + 3(1/7)}{5 - 2/4} \xrightarrow{\text{صورت و مخرج را در ۱۰ ضرب کن}} \frac{2(14) + 3(17)}{50 - 24} = \frac{28 + 51}{26} = \frac{79}{26} \approx 3$$

گزینه‌ها را هم با تخمین به ترتیب حساب می‌کنیم:

$$\sqrt{2} + \sqrt{3} \approx 1/4 + 1/7 = 3/11$$

$$2\sqrt{5} \approx 2(2/2) = 4/4, \sqrt{3} + 2\sqrt{2} \approx 1/7 + 2(1/4) = 4/5, 2\sqrt{3} + \sqrt{2} \approx 2(1/7) + 1/4 = 4/8$$

جای عددهای رادیکالی روی محور

عددهای رادیکالی به دو دسته‌ی کلی تقسیم می‌شوند:

۱ آن‌هایی که حاصلشان پس از ساده شدن، عددی گویا می‌شود. ببین:

$$\sqrt{2/25} = \sqrt{225/100} = \frac{\sqrt{225}}{\sqrt{100}} = \frac{15}{10} = 1/5$$

$$\sqrt{28} = \sqrt{4 \times 7} = 2\sqrt{7}$$

۲ آن‌هایی که حاصل گویا ندارند: این‌ها از زیر رادیکال به‌طور کامل خارج نمی‌شوند. ببین:

جواب این رادیکال‌ها، عددهای اعشاری نامنظمی هستند که پایان هم ندارند و تنها راه محاسبه‌شان استفاده از ماشین حساب است. در این جا می‌خواهیم

جای تقریبی این عددها را روی محور مشخص کنیم: فرض کنید می‌خواهیم $\sqrt[n]{a}$ را روی محور نشان دهیم: ($a > 0$)

ابتدا عددهای طبیعی را به توان n می‌رسانیم: $1^n, 2^n, 3^n, \dots$

حالا ببینید عدد a بین کدام دو عدد متوالی از عددهای بالا می‌افتد: عدد $\sqrt[n]{a}$ شما روی محوره بین پایه‌های دو عدد موردنظر است.

$$k^n < a < (k+1)^n \Rightarrow k < \sqrt[n]{a} < k+1$$

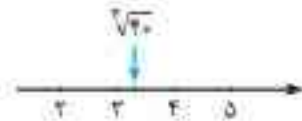
این جواری هم ببین:

ببین: برای فهمیدن جای تقریبی $\sqrt{20}$ کافی است دقت کنید که $2^2 < 20 < 3^2$: پس $\sqrt{20}$ روی محور بین ۲ و ۳ قرار می‌گیرد.

هرچه عدد a به k^m نزدیک‌تر باشد، می‌توان گفت که $\sqrt[m]{a}$ روی محور به k نزدیک‌تر است تا به $k+1$.

ببین: برای فهمیدن جای تقریبی $\sqrt[3]{40}$ روی محور، ابتدا توجه کنید که $3^3 < 40 < 4^3$: پس $\sqrt[3]{40}$ بین ۳ و ۴ است. اما 4^3 می‌شود ۶۴ و 3^3 می‌شود ۲۷. خوب ۴۰ به ۲۷ نزدیک‌تر است تا به ۶۴. بنابراین روی محور هم، $\sqrt[3]{40}$ به ۳ نزدیک‌تر خواهد بود.

این‌طوری:



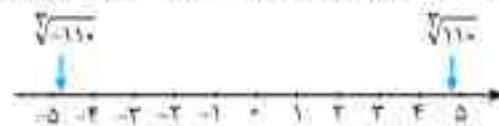
تکنیک معلم کنکور: برای $\sqrt[m]{a}$ ، اگر a منفی و فرجه فرد بود، پیشنهاد این است که منفی را خارج رادیکال ببرید و بعد جای $\sqrt[m]{a}$ را که حالا $a > 0$ است، تعیین کنید: در آخر انگار که جای قرینه‌ی عددی را بخواهید، به هدف می‌رسید.

❶ تست: حاصل $|\sqrt[3]{-110}|$ کدام است؟ (| نماد جزء صحیح است)

- (۱) ۵- (۲) ۴- (۳) ۳- (۴) ۳-

پاسخ: اگر اعداد طبیعی را به توان ۳ برسانیم با توجه به این که $5^3 = 125$ و $4^3 = 64$ خواهد شد داریم: $4 < \sqrt[3]{110} < 5$. جای عدد $\sqrt[3]{110}$ که روی محور مشخص شود، جای $\sqrt[3]{-110}$ که برابر است با $-\sqrt[3]{110}$ قرینه‌ی آن نسبت به مبدأ است:

این‌طوری:



بنابراین جزء صحیح $\sqrt[3]{-110}$ می‌شود ۵-.

❷ عدد $\sqrt[3]{-2\sqrt{40}}$ بین کدام دو عدد قرار دارد؟

- (۱) ۲-، ۱- (۲) ۳-، ۲- (۳) ۳-، ۲- (۴) ۱-، ۰-

پاسخ:

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{-2\sqrt{40}} &\xrightarrow{\text{ساده کن}} \sqrt[3]{-2^2 \times 40} \xrightarrow{\text{۲ رو بیرون رادیکال}} \sqrt[3]{-2^2 \times 40} \xrightarrow{\text{منفی رو بنده بیرون}} \sqrt[3]{-2^2 \times 40} \\ &\xrightarrow{\text{فرجه را ضرب کن}} \sqrt[3]{-160} \xrightarrow{\text{توان های ۶ را برای اعداد طبیعی چک کن}} \sqrt[3]{-160} \xrightarrow{\text{۲ به توان ۳ می رسد}} \sqrt[3]{-160} \xrightarrow{\text{جهت عوض کن}} -\sqrt[3]{160} \end{aligned}$$

$2^3 = 8, 3^3 = 27, 4^3 = 64, 5^3 = 125, 6^3 = 216$

مقایسه‌ی توان‌های مختلف یک عدد و ریشه‌های آن ...

در اعداد مثبت، بین اعداد بزرگ‌تر از ۱ و کوچک‌تر از آن، تفاوتی اساسی و مهم وجود دارد:

مدهای بزرگ‌تر از ۱، هرچه توان بیشتری داشته باشند، حاصل بزرگ‌تری دارند و هرچه توان کمتری داشته باشند، حاصل کوچک‌تری دارند.

ببین: $3^2 = 9$ و $3^3 = 27$

اما **مدهای بین صفر و یک، کاملاً برعکس هستند: به توان بیشتر که برسند، حاصل کوچک‌تری خواهند داشت.** و در صورت داشتن توان کوچک‌تر، بزرگ‌تر می‌شوند. **ببین:** $(0.1)^2 = 0.01$ و $(0.1)^3 = 0.001$

در باره‌ی اعداد منفی، ویژگی اعداد کوچک‌تر از ۱- با عددهای بین ۰ و ۱- و صفر متفاوت است. در جدول زیر می‌خواهیم توان‌های مختلف یک عدد و همچنین ریشه‌های متفاوت یک عدد را با هم مقایسه کنیم:

جدول مقایسه‌ی a^n و a^m و همچنین مقایسه‌ی $\sqrt[m]{a}$ و $\sqrt[n]{a}$

محدوده‌ی عدد	مقایسه‌ی توان‌های مختلف عدد a با هم	مقایسه‌ی ریشه‌های مختلف عدد a با هم
۱. اعداد بزرگ‌تر از ۱ ($a > 1$)	توان بیشتر، حاصل بیشتری دارد: $1 < a < a^2 < a^3 < a^4 < \dots$	فرجه‌ی بیشتر، حاصل کمتری دارد: $a > \sqrt{a} > \sqrt[3]{a} > \sqrt[4]{a} > \dots > 1$
۲. اعداد بین ۰ و ۱ ($0 < a < 1$)	توان بیشتر، حاصل کمتری دارد: $1 > a > a^2 > a^3 > a^4 > \dots > 0$	فرجه‌ی بیشتر، حاصل بیشتری دارد: $0 < a < \sqrt{a} < \sqrt[3]{a} < \sqrt[4]{a} < \dots < 1$
۳. اعداد کوچک‌تر از ۱- ($a < -1$)	توان‌های زوج توان بیشتر، حاصل بیشتری دارد: $1 < a < a^2 < a^4 < a^6 < \dots$ توان‌های فرد توان بیشتر، حاصل کمتری دارد: $\dots < a^5 < a^3 < a < -1$	فرجه‌ی فرد بیشتر، حاصل بیشتری دارد: $a < \sqrt[3]{a} < \sqrt[5]{a} < \dots < -1$
۴. اعداد بین ۱- و ۰- ($-1 < a < 0$)	توان‌های زوج توان بیشتر، حاصل کمتری دارد: $0 < \dots < a^4 < a^2 < a < 1$ توان‌های فرد توان بیشتر، حاصل بیشتری دارد: $-1 < a < a^3 < a^5 < \dots < 0$	فرجه‌ی فرد بیشتر، حاصل کمتری دارد: $-1 < \dots < \sqrt[3]{a} < \sqrt[5]{a} < a < 0$

در مورد عددهای کوچک‌تر از -1 و البته بین -1 و صفر، ریشه‌ی زوج نداریم و بحثی هم نکردیم! **آخه ریشه‌ی زوج عدد منفی وجود ندارد...**

می‌توانید ستون مربوط به مقایسه‌ی توان‌ها را با دادن عددهایی در ذهن حفظ کنید و ستون ریشه‌ها را از آن نتیجه بگیرید. آخه رادیکال در واقع توان کسری است. **ببین:**

$$a > 1 \xrightarrow{\text{توان بیشتر، حاصل بیشتر}} a^1 > a^{\frac{1}{2}} > a^{\frac{1}{3}} > a^{\frac{1}{4}} > \dots \quad (الف)$$

$$0 < a < 1 \xrightarrow{\text{توان بیشتر، حاصل کمتر}} a^1 < a^{\frac{1}{2}} < a^{\frac{1}{3}} < a^{\frac{1}{4}} < \dots \quad (ب)$$

دیگه برو واسه خودت!

در مورد عددهای منفی برای این‌که اشتباه نکنید، کافی است به‌خاطر بسپارید که **وقتی عددی منفی به توان زوج می‌رسد، مثبت می‌شود و وقتی به توان فرد می‌رسد، همچنان منفی باقی می‌ماند**؛ دیگه بقیه‌اش کاری نداره...

این‌جوری هم ببین: سه موردی که در آن‌ها **توان بیشتر، حاصل بیشتر می‌دهد**، عبارت‌اند از:

$$a > 1 \xrightarrow{m > n} a^m > a^n \quad (۱) \quad a < -1 \xrightarrow{m > n} a^m > a^n \quad (۲) \quad -1 < a < 0 \xrightarrow{m > n} a^m > a^n \quad (۳)$$

توان‌های m و n را گویا بگیرید، تا فرجه را هم با همین طرفند به‌خاطر بسپارید. یادتان نرود ریشه‌ی زوج عدد منفی نداریم!

① **تست:** از رابطه‌های داده‌شده، چه تعداد درست است؟

(الف) $(-2/1)^3 < (-2/1)^5$ (ب) $\sqrt[3]{2/1} < \sqrt[5]{2/1}$ (پ) $\sqrt[3]{0/21} < \sqrt[5]{0/21}$ (ت) $(-0/21)^3 < (-0/21)^5$

(۱) یک (۲) دو (۳) سه (۴) چهار

پاسخ: $-2/1$ ، عددی کوچک‌تر از -1 است و برای توان فرد بیشتر، حاصل کمتری می‌دهد. پس (الف) غلطه. برای $2/1$ که عددی بزرگ‌تر از 1 است، فرجه‌ی بیشتر، حاصل کمتر دارد؛ پس (ب) درسته. عدد $0/21$ بین صفر و یک است و برای این عددها فرجه‌ی بیشتر حاصل بیشتر می‌دهد؛ بنابراین (پ) غلطه. در مورد (ت)، دقت کنید که $-0/21$ عددی بین -1 و صفر است و برای این عددها، توان فرد بیشتر، حاصل بیشتر می‌دهد؛ پس مورد (ت) درسته.

① **هرگاه** $a-1 < \sqrt{a-1}$ باشد، در این صورت چند مقدار صحیح برای a وجود دارد؟

(۱) هیچ (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) بی‌شمار

پاسخ: ریشه‌ی چهارم $a-1$ مورد بحث قرار گرفته. پس $a-1$ نامنفی است؛ بنابراین:

۱ $a-1 \geq 0 \Rightarrow a \geq 1$

۲ $(a-1)^1 < (a-1)^{\frac{1}{4}} \xrightarrow{\text{توان بیشتر، حاصل کمتر داشته}} 0 < a-1 < 1 \xrightarrow{+1} 1 < a < 2$

اشتراک ۱ و ۲ می‌شود: $1 < a < 2$ که عدد صحیحی هم در این بازه نیست!

① **اگر بدانیم** $-1 < a^2 < a^5$ ، در این صورت کدام نتیجه نادرست است؟

(۱) $a^6 < a^{10}$ (۲) $a^7 > a^6$ (۳) $\sqrt[3]{a^2} > \sqrt[5]{a^2}$ (۴) $a < -1$

پاسخ: $\sqrt[3]{a^2} > \sqrt[5]{a^2} \xrightarrow{\text{فرجه بیشتر، حاصل کمتر}} a^2 > 1 \xrightarrow{\text{به توان دو برسون جهت عوض می‌شود}} a < -1$

$a^5 < a^2 < -1 \xrightarrow{\text{توان بیشتر، حاصل کمتر توان فرد}} a^5 < a^2 < -1$

$a < -1 \Rightarrow a^2 > 1 \xrightarrow{\text{توان بیشتر، حاصل بیشتر}} (a^2)^3 < (a^2)^5 \Rightarrow a^6 < a^{10}$

اما گزینه‌ی «۳» اینه: $(a^2)^2 > (a^2)^3$ که خب جهت نامساوی غلطه!

برای دو عدد حقیقی a و b که در رابطه‌ی $a < b$ صدق می‌کنند، می‌توانیم از دو طرف این نامساوی فرجه‌ی n بگیریم یا به طرف a برسائیم. (عدد طبیعی و فرد است.) اما اگر همین کار را برای n زوج بخواهید انجام دهید، **مثبت** بودن a و b الزامی است!

این‌جوری هم ببین:

$a < b$

فرد n : $a^n < b^n$, $\sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{b}$

زوج m : $a^m < b^m$, $\sqrt[m]{a} < \sqrt[m]{b}$ (با $a, b > 0$)

① **تست:** اگر $-2 < \sqrt[3]{a} < -1$ باشد، چند مقدار صحیح برای a وجود دارد؟

(۱) ۵ (۲) ۶ (۳) ۷ (۴) ۸

پاسخ:

$-2 < \sqrt[3]{a} < -1 \xrightarrow{\text{به توان ۳ برسون}} -8 < a < -1 \xrightarrow{a \in \mathbb{Z}} a \in \{-7, -6, -5, \dots, -2\} \xrightarrow{\text{تعداد}} ۶$

اینم برای سرگرمی: استادی می‌گفت: «اعداد کوچک‌تر از ۱ ویژگی‌های عجیبی دارند، مثل انسان‌های بخیل‌اند. $0/2$ را ببینید، وقتی در آن‌ها ضرب می‌شوی و می‌خواهی با آن‌ها مشارکت کنی، کوچکت می‌کنند: $3 \times 0/2 = 0/6$. وقتی می‌خواهی با آن‌ها تقسیم شوی و مشکلات را با آن‌ها تقسیم کنی، مشکلات بزرگ‌تر می‌شوند: $3 \div 0/2 = 15$. وقتی با آن‌ها جمع می‌شوی و در کنارشان هستی، چیز زیادی به تو اضافه نمی‌کنند: $3 + 0/2 = 3 + 0/2$. و اگر آن‌ها را از خودت دور کنی، چیز زیادی از دست نداده‌ای: $3 - 0/2 = 2/8$ »

فصل ۳ - درس ۴

ایستگاه ۲: محاسبات در عبارت‌های جبری

همه‌ی آنچه که درباره‌ی عبارت‌های جبری می‌خواهیم، این‌جاست: اتحادها، تجزیه و کاربرد آن‌ها. به این بخش لازم مسلط شوید.

مفاهیم ابتدایی محاسبات جبری

ابتدا تعریف‌های لازم را مرور می‌کنیم:

۱	چندجمله‌ای	یک عبارت جبری که شامل متغیری مثل x بوده و همه‌ی توان‌های x در آن، اعداد حسی هستند. ببین: $4x^3 - 2x^2 + x - 5$
۲	درجه‌ی چندجمله‌ای	بزرگ‌ترین توان x را در بین همه‌ی توان‌های موجود برای x پیدا کنید: این عدد می‌شود درجه‌ی چندجمله‌ای. ببین: عبارت $1 - 5x^2 + 3x$ ، یک چندجمله‌ای درجه‌ی دوم است.
۳	اتحاد	یک تساوی جبری همیشه درست است. اتحادها به ازای همه‌ی مقدارهای متغیرهای موجود در آن اتحاد برقرارند.
۴	تجزیه کردن	یعنی عبارت جبری را به صورت ضرب چند عدد یا پرانتز درآوریم. داخل پرانتزها می‌تواند $+$ یا $-$ باشد. ببین: $9 - 16x^2 \xrightarrow{\text{تجزیه}} (3 - 4x)(3 + 4x)$

اتحادهای جبری

در این جا لیست مهم‌ترین اتحادهای جبری با نتیجه‌های کاربردی آن‌ها را می‌آوریم:

نام اتحاد	فرم ریاضی اتحاد
۱	مربع دو جمله‌ای $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
۲	مزدوج $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$
۳	مکعب دو جمله‌ای $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$
۴	چاق و لاغر $(a + b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3$ $(a - b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$
۵	جمله‌ی مشترک $(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$
۶	مربع سه جمله‌ای $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$

① تست: حاصل عبارت $19/9 \times 20/1$ کدام است؟

پاسخ: $399/99$ (۱) $398/99$ (۲) $399/99$ (۳) $399/99$ (۴)

$19/9 \times 20/1 = (20 - 0/1)(20 + 0/1) \xrightarrow{\text{اتحاد مزدوج}} 20^2 - (0/1)^2 = 400 - 0/1 = 399/99$

① فرض مستطیلی $2k - 1$ و طول آن $1 + 4k^2 + 2k$ است ($k > 1$). اگر مساحت این مستطیل ۶۳ باشد، مقدار k کدام است؟

پاسخ: $2/5$ (۱) 3 (۲) $2/5$ (۳) 2 (۴)

طول $\times$ عرض = مساحت $\rightarrow S = (2k - 1)(1 + 4k^2 + 2k)$
 $\xrightarrow{\text{اتحاد چاق و لاغر}} S = (2k)^3 - (1)^3 = 8k^3 - 1$
 $\xrightarrow{\text{مرتبه کن}} S = (2k - 1) \times (4k^2 + 2k + 1)$
 $\xrightarrow{\text{مساحت ۶۳ است}} 8k^3 - 1 = 63 \Rightarrow 8k^3 = 64 \Rightarrow k^3 = 8 \xrightarrow{8=2^3} k = 2$
 طبق فرض

① برای سه عدد a ، b و c با مجموع ۱۲ می‌دانیم $ab + bc + ac = 47$. در این صورت مجموع مجذورات این سه عدد کدام است؟

پاسخ: 40 (۱) 50 (۲) 60 (۳) 55 (۴)

$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc \xrightarrow{\text{فاکتوراز}} (a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ac)$
 $\xrightarrow{\text{معادله حل کن}} a^2 + b^2 + c^2 = 144 - 94 = 50$
 جای گذاری کن

برای به توان ۳ رساندن عددهای اعشاری، از اتحاد مکعب دوجمله‌ای استفاده کنید.

❶ تست: مقدار $2/9^3$ کدام است؟

پاسخ: $24/389$ (۱) $24/389$ (۲) $23/289$ (۳) $23/279$ (۴)

$$2/9^3 = (3 - 0.1)^3 \xrightarrow{\text{اتحاد مکعب دوجمله‌ای}} 3^3 - 3(3)^2(0.1) + 3(3)(0.1)^2 - (0.1)^3$$

$$\xrightarrow{\text{حساب کن}} 27 - 2.7 + 0.09 - 0.001 = 24.389$$

از اتحادها چند نتیجه‌ی معروف به دست می‌آید که خوب است آن‌ها را بلد باشیم:

فرم ریاضی اتحاد کمکی	کاربرد اتحاد
$x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy$ $x^2 + y^2 = (x - y)^2 + 2xy$	وقتی مجموع مربعات دو عدد را می‌خواهید، بر حسب جمع و ضرب آن دو عدد یا با داشتن تفاضل و حاصل ضرب آن‌ها.
$x^3 + y^3 = (x + y)^3 - 3xy(x + y)$ $x^3 - y^3 = (x - y)^3 + 3xy(x - y)$	وقتی مجموع یا تفاضل مکعبات دو عدد را می‌خواهید، با داشتن مجموع و حاصل ضرب آن دو عدد.
$(x + y)^2 + (x - y)^2 = 2(x^2 + y^2)$	وقتی مجموع، تفاضل و مجموع مربعات دو عدد در تست حضور دارند و ضرب آن‌ها هیچ نقشی در سؤال ندارد!
$(x + y)^2 - (x - y)^2 = 4xy$	وقتی مجموع، تفاضل و ضرب دو عدد در تست حضور دارند.

❶ تست: اگر $x + \frac{1}{x} = 5$ باشد، مقدار $x^2 + \frac{1}{x^2}$ کدام است؟

پاسخ: 23 (۱) 20 (۲) 23 (۳) 25 (۴)

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = (x + \frac{1}{x})^2 - 2x \times \frac{1}{x} \xrightarrow{\text{ساده کن}} x^2 + \frac{1}{x^2} = (x + \frac{1}{x})^2 - 2 \xrightarrow{x + \frac{1}{x} = 5} x^2 + \frac{1}{x^2} = 5^2 - 2 = 25 - 2 = 23$$

❶ تفاضل دو عدد a و b برابر ۵ بوده و $a^2 + b^2 = 97$ است. مقدار $a + b$ کدام می‌تواند باشد؟

پاسخ: 13 (۱) 12 (۲) 13 (۳) 14 (۴)

$$(a + b)^2 + (a - b)^2 = 2(a^2 + b^2) \xrightarrow{\text{جای گذاری کن}} (a + b)^2 + (5)^2 = 2(97)$$

$$\xrightarrow{\text{ساده کن}} (a + b)^2 + 25 = 194 \Rightarrow (a + b)^2 = 169 \xrightarrow{\text{جذر بگیر}} |a + b| = 13 \Rightarrow a + b = \pm 13 \xrightarrow{\text{گزینه‌ها}} a + b = 13$$

مزدوج‌های دومینووار...

تکنیک معلم کنکور: گاهی ضرب چند عبارت جبری را داریم که دوتای اول در آن، اتحاد مزدوج هستند و جوابش که درمی‌آید با جمله‌ی بعدی ضرب، مجدداً اتحاد مزدوج دیگری می‌شود و همین‌طور مانند دومینو تا آخر اتحاد مزدوج را به کار می‌گیریم تا حاصل به دست آید. فرم این عبارت‌ها به صورت مقابل است:

❶ تست: حاصل عبارت $(x-1)(x+1)(x^2+1)(x^4+1)(x^8+1)$ به ازای $x = \sqrt[16]{3}$ برابر کدام است؟

پاسخ: 2 (۱) 2 (۲) 3 (۳) 4 (۴)

$$(x-1)(x+1)(x^2+1)(x^4+1)(x^8+1) = (x^2-1)(x^2+1)(x^4+1)(x^8+1) = (x^4-1)(x^4+1)(x^8+1) = (x^8-1)(x^8+1) = x^{16}-1$$

$$\xrightarrow{x = \sqrt[16]{3}} x^{16}-1 = (\sqrt[16]{3})^{16}-1 = 3-1 = 2$$

تجزیه کردن عبارت‌های جبری

اگر عبارتی جبری را در یک عبارت جبری دیگر ضرب کنید، مضربی از هر کدام به دست می‌آید و به هر کدام از عبارت‌های اولیه برای چندجمله‌ای حاصل، عامل می‌گوییم. **ببین:** $(x-1)(x+2) = x^2 + x - 2$ پس $x-1$ یک عامل برای $x^2 + x - 2$ است و $x^2 + x - 2$ مضرب $x-1$ و $x+2$... مهم‌ترین و البته پرکاربردترین روش‌های تجزیه کردن یک عبارت جبری این‌ها هستند:

❶ **فاکتورگیری:** موقعی که همه‌ی جمله‌ها یک عامل مشترک دارند: **ببین:**

$$x^2y^2 + 2x^2y^2 + x^2y^2 = x^2y^2(x^2 + 2xy + y^2) \xrightarrow{\text{اتحاد مربع دوجمله‌ای}} x^2y^2(x+y)^2$$

عامل مشترک



۲ دسته‌بندی: در این روش جمله‌ها را به دو یا چند دسته تقسیم می‌کنیم و در هر دسته از یک عامل مشترک موجود فاکتور می‌گیریم. خود دسته‌ها عامل مشترکی را به دست می‌دهند. در نهایت از عامل مشترک موجود در دسته‌ها فاکتور می‌گیریم که عبارت را تجزیه می‌کند: **ببین:**

$$x^3 + 7x^2 - 4x - 28 \xrightarrow{\text{دسته‌بندی می‌کنیم}} (x^3 - 4x) + (7x^2 - 28) \xrightarrow{\text{جدا جدا فاکتور بگیر}} x(x^2 - 4) + 7(x^2 - 4) \\ \xrightarrow{\text{از } (x^2 - 4) \text{ فاکتور بگیر}} (x^2 - 4)(x + 7) \xrightarrow{\text{اتحاد مزدوج}} (x - 2)(x + 2)(x + 7)$$

۳ اتحادها: با استفاده از اتحادهایی مثل مزدوج، جمله‌ی مشترک و چاق و لاغر می‌توانیم ضرب ایجاد کنیم.

۱ تست: در تجزیه‌ی عبارت $a^2(1-x) + (b^2 + c^2 + 2bc)(x-1)$ کدام عامل وجود ندارد؟

۱) $a+b-c$ ۲) $a+b+c$ ۳) $b+c-a$ ۴) $x-1$

پاسخ:

$$a^2(1-x) + (b^2 + c^2 + 2bc)(x-1) = -a^2(x-1) + (b^2 + c^2 + 2bc)(x-1)$$

از ۱- فاکتور بگیر

$$\xrightarrow{\text{حالا از } x-1 \text{ فاکتور بگیر}} (x-1)(-a^2 + (b^2 + c^2 + 2bc)) = (x-1)(-a^2 + (b+c)^2)$$

اتحاد مربع دو جمله‌ای

$$\xrightarrow{\text{اتحاد مزدوج}} (x-1)((b+c)^2 - a^2) \xrightarrow{\text{مرتب کن}} (x-1)(b+c-a)(b+c+a) = (x-1)(b+c-a)(a+b+c)$$

عامل $a+b-c$ وجود ندارد با گزینه‌ها مطابقت بده

تجزیه‌ی دو جمله‌ای با توان‌های زوج ...

یک دو جمله‌ای که توان هر دو عدد حاضر در آن زوج بوده و علامت وسط هم منها باشد، با اتحاد مزدوج تجزیه می‌شود. **ببین:** $a^4 - b^4$

برای تجزیه‌ی کامل این عبارت‌ها، اول یک اتحاد مزدوج می‌زنیم و در پرانتزهای حاصل برای هر کدام که مقدور بود، دوباره مزدوج را اجرا می‌کنیم. در پایان نگاه می‌کنیم، شاید برای پرانتزهای باقی‌مانده، اتحادی مثل چاق و لاغر یا قابل اجرا باشد.

الف $x^6 - 1$ مزدوج $\rightarrow (x^3 - 1)(x^3 + 1)$ چاق و لاغر $\rightarrow (x-1)(x^2 + x + 1)(x+1)(x^2 - x + 1)$

ب $x^4 - y^4$ مزدوج $\rightarrow (x^2 - y^2)(x^2 + y^2) = (x-y)(x+y)(x^2 + y^2)$ مزدوج $\rightarrow (x-y)(x+y)(x^2 + y^2)(x^2 + y^2)$

گویا کردن مخرج کسر

تعریف: منظور از گویا کردن مخرج کسر این است که کاری کنیم تا بدون عوض شدن جواب کسر، مخرج آن به عددی گویا تبدیل شود. راه گویا کردن مخرج کسر این است که هم صورت و هم مخرج کسر را در عددی یا عبارتی ضرب کنیم تا مخرج پس از ساده شدن، رادیکال نداشته باشد. حالا ببینید باید چه عاملی را برای گویا کردن استفاده کنید:

رادیکال‌های فرجه‌ی ۲

فرم اصلی کسر	عبارتی که باید در صورت و مخرج ضرب کنید...	حاصل کسر پس از گویا شدن مخرج آن...
$\frac{\text{کسر}}{\sqrt{a}}$	$\sqrt{a}$	$\frac{\text{کسر}}{\sqrt{a}} = \frac{\text{کسر} \cdot \sqrt{a}}{a}$
$\frac{\text{کسر}}{\sqrt{a} \pm \sqrt{b}}$	$\frac{\text{کسر}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$ را در $\sqrt{a} - \sqrt{b}$	$\frac{\text{کسر}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} = \frac{\text{کسر}(\sqrt{a} - \sqrt{b})}{a - b}$
	$\frac{\text{کسر}}{\sqrt{a} - \sqrt{b}}$ را در $\sqrt{a} + \sqrt{b}$	$\frac{\text{کسر}}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} = \frac{\text{کسر}(\sqrt{a} + \sqrt{b})}{a - b}$

دو عبارت مانند $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ و $\sqrt{a} - \sqrt{b}$ را که شامل **مجموع و تفاضل دو قسمت یکسان** هستند، مزدوج یکدیگر می‌گوییم.

۱ تست: ساده‌شده‌ی عبارت $\frac{\sqrt{6}}{5-2\sqrt{6}} - \sqrt{150}$ کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۸
 ۳) ۹ ۴) ۱۲

پاسخ:

$$\begin{aligned}
 & \frac{\sqrt{6}}{5-2\sqrt{6}} - \sqrt{150} \xrightarrow{\text{صورت و مخرج را در } 5+2\sqrt{6} \text{ ضرب کن}} \frac{\sqrt{6}(5+2\sqrt{6})}{(5-2\sqrt{6})(5+2\sqrt{6})} - \sqrt{150} \\
 & \xrightarrow{\text{ضرب کن}} \frac{\sqrt{6}(5+2\sqrt{6})}{5^2 - (2\sqrt{6})^2} - \sqrt{150} \xrightarrow{\text{ساده کن}} \frac{5\sqrt{6}+12}{25-24} - \sqrt{150} = 5\sqrt{6}+12 - \sqrt{150} \\
 & \xrightarrow{150=25 \times 6} 5\sqrt{6}+12 - \sqrt{25 \times 6} = 5\sqrt{6}+12 - 5\sqrt{6} = 12 \\
 & \quad \downarrow \\
 & \quad \text{می‌شود } 5\sqrt{6}
 \end{aligned}$$

رادیکال‌های فرجه‌ی ۳

فرم اصلی کسر	عبارتی که باید در صورت و مخرج ضرب کنید...	حاصل کسر پس از گویا شدن مخرج آن...
۱ $\frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{a}}$	$\sqrt[3]{a^2}$	$\frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{a}} = \frac{\sqrt[3]{a^3}}{a}$
۲ $\frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{a^2}}$	$\sqrt[3]{a}$	$\frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{a^2}} = \frac{\sqrt[3]{a^3}}{a}$
۳ $\frac{\sqrt[3]{a} \pm \sqrt[3]{b}}{\sqrt[3]{a} \pm \sqrt[3]{b}}$	$\sqrt[3]{a^2} - \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2}$ را در $\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}$	$\frac{\sqrt[3]{a} \pm \sqrt[3]{b}}{\sqrt[3]{a} \pm \sqrt[3]{b}} = \frac{(\sqrt[3]{a^2} - \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2})}{a \pm b}$
	$\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2}$ را در $\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b}$	$\frac{\sqrt[3]{a} \pm \sqrt[3]{b}}{\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b}} = \frac{(\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2})}{a - b}$

در حالت کلی تر وقتی مخرج کسری به فرم $\sqrt[3]{a^m}$ باشد ($m < n$)، برای گویا کردن مخرج آن، صورت و مخرج را در $\sqrt[3]{a^{n-m}}$ ضرب می‌کنیم.

① تست: ساده‌شده‌ی کسر $\frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2}-1}$ کدام است؟

۱) $2 + \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$ ۲) $1 + \sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2}$ ۳) $\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$ ۴) $2 + \sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2}$

پاسخ:

$$\frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2}-1} = \frac{\sqrt[3]{2}(\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2} + 1)}{(\sqrt[3]{2}-1)(\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2} + 1)} \xrightarrow{\text{جای دلاور}} \frac{\sqrt[3]{2}(\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2} + 1)}{(\sqrt[3]{2})^3 - (1)^3} \xrightarrow{\text{ضرب کن}} \frac{\sqrt[3]{8} + \sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2}}{2-1} = 2 + \sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2}$$

پیدا کردن مقدار تقریبی جذریک عدد؛ یک پایان‌بندی توپ...

با این روش مقدار یک عدد رادیکالی با فرجه‌ی دو را با کمک عدد مربع کامل نزدیکش تخمین می‌زنیم.

تکنیک معلم کنکور: فرض کنید مقدار تقریبی $\sqrt{x}$ را می‌خواهیم ($x > 0$): کمی فکر می‌کنیم تا عددی مربع کامل و خیلی نزدیک به x پیدا کنیم و آن را a^2 می‌نامیم: انگار عدد x را به فرم $a^2 + b$ نوشته باشیم: **به مربع کامل بعلاوه یا منهای عددی دیگر...! ببین:** برای تخمین $\sqrt{17}$ ، نزدیک‌ترین عدد مطلوب 4^2 و برای $\sqrt{24}$ عدد 5^2 است! حالا فرمول مقابل را اجرا کنید:

$$\sqrt{a^2 + b} \simeq a + \frac{b}{2a}$$

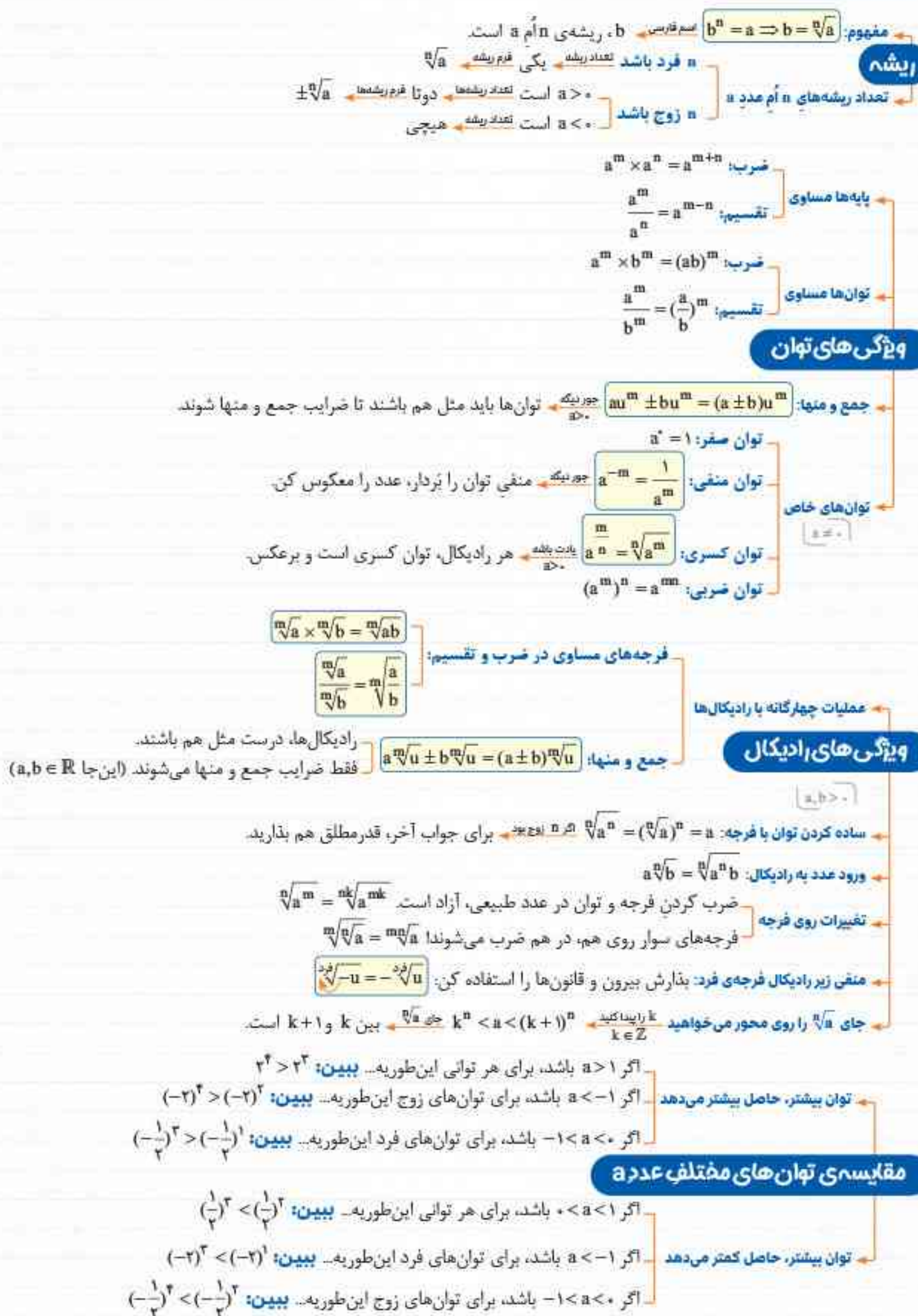
b می‌تواند مثبت یا منفی باشد.

ببین:

الف) $\sqrt{24} = \sqrt{25-1} = \sqrt{5^2-1} \simeq 5 + \frac{-1}{2(5)} = 5 - \frac{1}{10} = 4/9$

ب) $\sqrt{18} = \sqrt{16+2} = \sqrt{4^2+2} \simeq 4 + \frac{2}{2(4)} = 4 + \frac{1}{4} = 4/25$

فصل در یک نگاه



مقایسه‌ی فرجه‌های مختلفی عدد a

فرجه‌ی بیشتر، حاصل بیشتری دارد
اگر $0 < a < 1$ باشد، برای هر فرجه‌ای این طوریه...
اگر $a < -1$ باشد، برای فرجه‌های فرد این طوریه...

فرجه‌ی بیشتر، حاصل کمتری دارد
اگر $a > 1$ باشد، برای هر فرجه‌ای این طوریه...
اگر $-1 < a < 0$ باشد، برای فرجه‌های فرد این طوریه...

رادیکال مرکب: $\sqrt[A \pm B]{C} = \sqrt{\frac{A+C}{2}} \pm \sqrt{\frac{A-C}{2}}$ که در آن $C^2 = A^2 - B^2$

رادیکال‌های خاص

حفظی‌ها: $\sqrt{4} = 2, \sqrt{5} = 2/2, \sqrt{6} = 2/3, \sqrt{7} = 2/4, \sqrt{8} = 2/5, \sqrt{9} = 3$

تخمین: $\sqrt{a^2 + b} \approx a + \frac{b}{2a}$

دوجمله‌ای: $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$ نتیجه

$$\left. \begin{aligned} a^2 + b^2 &= (a \pm b)^2 \mp 2ab \\ (a+b)^2 + (a-b)^2 &= 2a^2 + 2b^2 \\ (a+b)^2 - (a-b)^2 &= 4ab \end{aligned} \right\}$$

سه‌جمله‌ای: $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$

مزدوج: $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$ مزدوج دومینوار

$$(a+b)(a^2 + b^2)(a^4 + b^4) = \frac{a^8 - b^8}{a - b}$$

اتحادها

جمله‌ی مشترک: $(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab$

چاق و لاغر: $(a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2) = a^3 \pm b^3$

مکعب دوجمله‌ای: $(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$

تکرید در تجزیه‌ی عبارت‌های جبری هم، از این‌ها استفاده کنید...

صورت و مخرج را در $\sqrt{a}$ ضرب کن

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}}$$

صورت و مخرج را در مزدوج مخرج ضرب کن: $\frac{\sqrt{a} \mp \sqrt{b}}{\sqrt{a} \pm \sqrt{b}} \times \frac{\sqrt{a} \pm \sqrt{b}}{\sqrt{a} \pm \sqrt{b}}$

گویا کردن: برای کسی به فرم...

صورت و مخرج را در لنگه‌ی چاق مخرج ضرب کنیم: $\frac{\sqrt{a^2} \mp \sqrt{ab} + \sqrt{b^2}}{\sqrt{a} \pm \sqrt{b}} \times \frac{\sqrt{a^2} \mp \sqrt{ab} + \sqrt{b^2}}{\sqrt{a^2} \mp \sqrt{ab} + \sqrt{b^2}}$

صورت و مخرج را در $\sqrt[n]{a^{n-m}}$ ضرب کن. ($m < n$)

$$\frac{\sqrt[n]{a^{n-m}}}{\sqrt[n]{a^m}}$$

پرسش‌های چهارگزینه‌ای

برای دوران مرور و جمع‌بندی، فقط تست‌های با شماره‌ی صورتی...

ایستگاه ۱: توان و رادیکال و کاربرد آن‌ها در محاسبات



عدد	a	۷۲۹
ریشه‌ی ششم	$-2\sqrt[3]{2}$	$-b^2$

$$128 \pm 3\sqrt{2} \quad (2)$$

$$64\sqrt{2} \pm 3\sqrt{3} \quad (4)$$

۳۹۱. با توجه به جدول روبه‌رو حاصل $a+b$ کدام است؟

$$128 \pm \sqrt{2} \quad (1)$$

$$64\sqrt{2} \pm \sqrt{3} \quad (3)$$

۳۹۲. یکی از ریشه‌های چهارم عدد ۲۵۶ با کدام گزینه‌ی زیر می‌تواند برابر باشد؟

(۱) یکی از ریشه‌های ششم عدد ۵۱۲

(۲) یکی از ریشه‌های دوم عدد ۱۶

(۳) ریشه‌ی سوم عدد ۱۲۸

۳۹۳. عدد $(\frac{1}{64})^{-12}$ را به‌صورت عدد 2^m نوشته‌ایم. مقدار m کدام است؟

$$72 \quad (4)$$

$$36 \quad (3)$$

$$18 \quad (2)$$

$$-18 \quad (1)$$

۳۹۴. حاصل عبارت $\sqrt[3]{256} + \sqrt[5]{-1} - \sqrt[4]{\frac{1}{1.24}} + \sqrt[3]{0.00027}$ کدام است؟

$$2/8 \quad (4)$$

$$3/8 \quad (3)$$

$$3/52 \quad (2)$$

$$2/52 \quad (1)$$

۳۹۵. هرگاه a عددی منفی و b عددی مثبت باشد، حاصل کسر $\frac{\sqrt[3]{(a-b)^2}}{\sqrt{(a-b)^2}}$ کدام است؟

$$b-a \quad (4)$$

$$a-b \quad (3)$$

$$-1 \quad (2)$$

$$1 \quad (1)$$

۳۹۶. اگر $a = \sqrt[3]{6}$ ، $b = \sqrt[3]{4}$ و $c = \sqrt[3]{15}$ باشد، آن‌گاه کدام نامساوی درست است؟

$$b > c > a \quad (4)$$

$$c > b > a \quad (3)$$

$$c > a > b \quad (2)$$

$$a > b > c \quad (1)$$

۳۹۷. چه تعداد عدد صحیح به جای a می‌توان قرار داد تا نامساوی $-4 < \sqrt[3]{a} < -3$ برقرار باشد؟

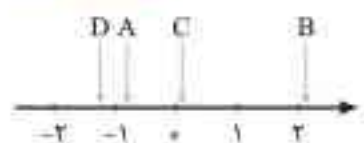
$$28 \quad (4)$$

$$25 \quad (3)$$

$$26 \quad (2)$$

$$27 \quad (1)$$

۳۹۸. کدام نقطه روی محور به‌درستی نشان داده شده است؟



$$A = \sqrt[3]{-0.0008}, B = \sqrt[3]{1}, C = \sqrt[3]{0.25}, D = \sqrt[3]{-7/2}$$

$$A \quad (1)$$

$$B \quad (2)$$

$$C \quad (3)$$

$$D \quad (4)$$

۳۹۹. اگر عدد مثبت a کمتر از ۱ باشد، کدام عدد از بقیه بزرگ‌تر است؟

$$\sqrt[3]{a} \quad (4)$$

$$\sqrt{a} \quad (3)$$

$$a^2 \quad (2)$$

$$a \quad (1)$$

۴۰۰. اگر $A = \sqrt[3]{4\sqrt[3]{16}(\frac{1}{4})^{-2}}$ باشد، حاصل A^{-2} (۲۸) کدام است؟

$$1 \quad (4)$$

$$0.75 \quad (3)$$

$$0.5 \quad (2)$$

$$0.25 \quad (1)$$

۴۰۱. حاصل عبارت $\frac{\sqrt[3]{2\sqrt{8}}}{\sqrt[3]{2\sqrt{2} \times 16^{-2}}}$ کدام است؟

$$8\sqrt[3]{2} \quad (4)$$

$$8\sqrt[3]{2} \quad (3)$$

$$16\sqrt[3]{2} \quad (2)$$

$$16\sqrt[3]{2} \quad (1)$$

۴۰۲. اگر x عددی حقیقی در بازه‌ی (۰، ۱) باشد، مقادیر a، b و c به‌ترتیب از راست به چپ کدام‌اند؟

$$-\sqrt{x}, \sqrt{x}, x^2 \quad (2)$$

$$-\sqrt{x}, -\sqrt{x}, x^2 \quad (1)$$

$$-x^2, \sqrt{x}, \sqrt{x} \quad (4)$$

$$-x^2, x^2, \sqrt{x} \quad (3)$$

۴۰۳. اگر عدد a ریشه‌ی سوم عدد $2\sqrt[3]{8}$ باشد، مقدار x در تساوی $ax = \sqrt[3]{16}$ کدام است؟

$$\frac{1}{\sqrt[3]{2}} \quad (4)$$

$$\sqrt[3]{2} \quad (3)$$

$$\frac{1}{\sqrt[3]{2}} \quad (2)$$

$$\sqrt[3]{2} \quad (1)$$

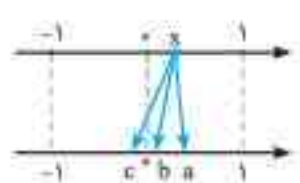
۴۰۴. ریشه‌ی دهم عدد $2a^2 - 5a + 2$ وجود ندارد. اگر a عددی طبیعی باشد، ریشه‌ی پنجم عدد $3a^2 + 20a + 41$ کدام است؟

$$\sqrt[5]{60} \quad (4)$$

$$3 \quad (3)$$

$$2\sqrt[5]{2} \quad (2)$$

$$2 \quad (1)$$



(کنکور ۹۸)

(کنکور تیر ۱۴۰۳)

آموزش ۴۵+

تألیف ۷۷۰+

(کنکور ارشد ۱۴۰۴)

۴۰۵. برای چند عدد طبیعی، ریشه‌ی دوم عبارت $\frac{1-a}{9-3a}$ وجود ندارد؟

- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵

(کنکور دی ۱۴۰۱)

۴۰۶. ریشه‌ی هفتم عدد مثبت a ، مساوی ۲۷ برابر عدد a با توان $\frac{15}{7}$ است. $(\frac{1}{a} - 3)$ چند برابر $(1 + \sqrt{3})$ است؟

- (۱) $6 - 3\sqrt{3}$ (۲) ۳ (۳) ۶ (۴) $6 + 3\sqrt{3}$

۴۰۷. حاصل عبارت $\sqrt[3]{220} - \sqrt[3]{135}$ با تقریب کمتر از ۰/۱ کدام است؟

- (۱) ۳/۴ (۲) ۳/۵ (۳) ۳/۶ (۴) ۲/۹

۴۰۸. حاصل عبارت $25 \times 85 \times (32)^{-1}$ با کدام یک از مقادیر زیر برابر است؟

- (۱) ۱ (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) ۴ (۴) $\frac{1}{4}$

۴۰۹. حاصل عبارت $81^3 \times (5 \times (\frac{3^{-2}}{5})^2)^2$ کدام است؟

- (۱) ۶ (۲) ۸ (۳) ۹ (۴) ۱۰

۴۱۰. حاصل عبارت $(\sqrt{3})^{-6} \times (9 - 3^{-2})^{-1} + \frac{(81)^{-0.75}}{242}$ کدام است؟

- (۱) ۲۷ (۲) $\frac{1}{27}$ (۳) $\frac{1}{3}$ (۴) ۳

(خارج ۹۵)

۴۱۱. حاصل عبارت $\sqrt[6]{12} \sqrt[5]{54} \sqrt[3]{2} \sqrt[4]{6}$ کدام است؟

- (۱) $6\sqrt[2]{2}$ (۲) $3\sqrt[6]{32}$ (۳) $2\sqrt[3]{9}$ (۴) ۶

(خارج ۹۸)

۴۱۲. اگر $A = \sqrt[5]{9\sqrt{3}} (12)^{-1/5}$ باشد، حاصل $(1 + A^{-1})^2$ کدام است؟

- (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴) ۶

۴۱۳. عبارت $(\sqrt{15} - 1)(\sqrt{15} + \sqrt{15})$ برابر کدام یک از گزینه‌های زیر است؟

- (۱) $\sqrt{15}$ (۲) ۱ (۳) $7\sqrt{2}$ (۴) $2\sqrt{7}$

(کنکور تیر ۱۴۰۱)

۴۱۴. حاصل عبارت $\sqrt[3]{(4 + \sqrt{7})^{-1}} \sqrt{1 + \sqrt{7}}$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) $\sqrt[3]{2}$ (۳) ۲ (۴) $2\sqrt[3]{2}$

۴۱۵. حاصل عبارت $-3 - \frac{2x}{5} + \sqrt{\frac{2x}{5}} + 3$ به ازای چند مقدار صحیح x همواره نامنفی است؟

- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵

۴۱۶. سه مکعب به صورت تودرتو داخل یکدیگر قرار گرفته‌اند. اگر حجم مکعب بیرونی (مکعب بزرگ‌تر) برابر ۶۴ و حجم مکعب داخلی (مکعب کوچک‌تر) برابر ۲۷ باشد، کدام گزینه نمی‌تواند بیانگر طول ضلع مکعب میانی باشد؟

(کتاب درسی)

- (۱) ۳/۴ (۲) $\sqrt[3]{54}$ (۳) $\sqrt{27}$ (۴) $\sqrt{10}$

۴۱۷. با توجه به شکل روبه‌رو، حاصل $a + b$ کدام است؟

- (۱) $3\sqrt{5} - 3$ (۲) $3\sqrt{5} + 3$ (۳) $3\sqrt{5} - 5$ (۴) ۱



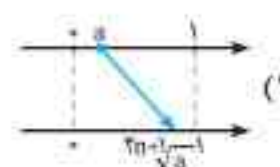
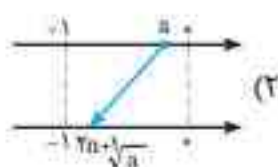
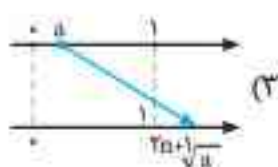
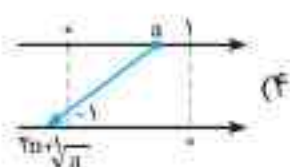
۴۱۸. کدام یک از عددهای زیر در صورت وجود به ۱- نزدیک‌تر است؟

- (۱) $-\sqrt[3]{0.0081}$ (۲) $\sqrt[3]{-0.0081}$ (۳) $\sqrt{-0.0081}$ (۴) $\sqrt[3]{-0.0081}$

۴۱۹. اگر $A = \frac{\sqrt{23} + \sqrt[3]{23}}{6}$ و $B = \frac{\sqrt{73} + \sqrt[3]{73}}{6}$ باشد، حاصل عبارت $B - A$ به کدام بازه تعلق دارد؟

- (۱) (۰, ۱) (۲) $(\frac{2}{3}, \frac{4}{3})$ (۳) $(\frac{4}{3}, 2)$ (۴) (۲, ۳)

۴۲۰. هرگاه a یک عدد حقیقی باشد به طوری که $a^2 > a^2 > a^2$ ، آن گاه کدام گزینه ریشهی $a(2n+1)$ را به درستی نمایش می دهد؟ ($n \in \mathbb{N}$) (کتاب درسی)



(کتاب درسی)

۴۲۱. حاصل $\sqrt[3]{2500} - \sqrt[3]{1280}$ با تقریب کمتر از ۰/۱ کدام است؟

۴۲۲. چند عدد طبیعی وجود دارد که یکی از ریشه های مثبت چهارم آن بین دو عدد $\sqrt{2}$ و $\sqrt{5}$ و ریشه ی پنجم آن در بازه ی $(1, \sqrt{3})$ باشد؟

۴۲۳. اگر $a = 3^{k+2}$ و $b = 9^k$ باشد، آن گاه کدام رابطه بین a و b همواره برقرار است؟

۴۲۴. از رابطه ی $4^{2x-1} \times 3^{y+2} = 96$ حاصل $\frac{9}{4}(x+y)^{-1}$ کدام است؟

۴۲۵. کدام گزینه ی زیر همواره به ازای هر عدد حقیقی a و b برقرار است؟ (m و n اعداد طبیعی هستند.)

۴۲۶. عبارت $A = \frac{\sqrt[3]{4\sqrt{5}-1}}{\sqrt[3]{5\sqrt{5}}}$ چند برابر $(\sqrt{5})^{-1}$ است؟

۴۲۷. مقدار x در تساوی $\frac{\sqrt{8 \times 8^x}}{\sqrt{4\sqrt{16} \times 4^x}} = \frac{1}{\sqrt{32}}$ کدام است؟

۴۲۸. مقدار x در تساوی $\frac{\sqrt[3]{5\sqrt{25\sqrt{125}}}}{\sqrt[3]{\frac{5}{5}}} = 5^{1-x}$ کدام است؟

۴۲۹. حاصل عبارت $\sqrt[3]{4+2\sqrt{3}} \times \sqrt[3]{\sqrt{3}-1} \times \sqrt[3]{4}$ کدام است؟

۴۳۰. حاصل عبارت $(\sqrt[3]{3\sqrt{3}} + \sqrt[3]{2\sqrt{2}})(\sqrt[3]{3\sqrt{9}} - \sqrt[3]{2\sqrt{8}})$ کدام است؟

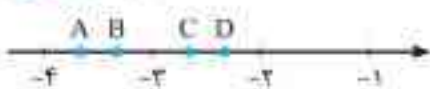
۴۳۱. حاصل عبارت $(\sqrt{2}-\sqrt{3}+\sqrt{2}+\sqrt{3})\sqrt[3]{2\sqrt{2}}$ برابر کدام است؟

۴۳۲. حاصل عبارت $(\frac{\sqrt{2}+\sqrt{5}}{\sqrt{10}+2})(\sqrt{3}-\sqrt{5}-\sqrt{3}+\sqrt{5})$ کدام است؟

۴۳۳. اگر $(a+b)^{2022} = 1$ باشد، حاصل $(a+\sqrt{1+a^2})(b+\sqrt{1+b^2})$ کدام است؟

۴۳۴. اگر $(a+b)^{2022} = 1$ باشد، حاصل $(a+\sqrt{1+a^2})(b+\sqrt{1+b^2})$ کدام است؟

(کتاب درسی)



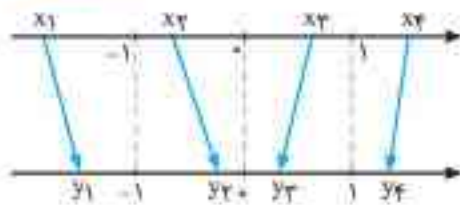
B (۲)

D (۴)

A (۱)

C (۳)

۴۳۴. کدام حرف، نمایش عدد $-\sqrt[3]{17}$ روی محور را به درستی نشان می‌دهد؟
 ۴۳۵. در شکل زیر، هر یک از اعداد روی محور بالایی به یکی از نقاط مشخص شده روی محور پایینی که متناظر با ریشه‌ی سوم آن است، متصل شده است. چه تعداد از پیکان‌ها درست است؟



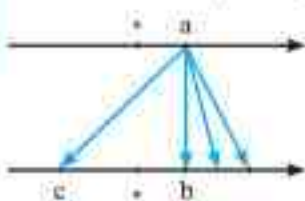
(۱) یک

(۲) دو

(۳) سه

(۴) چهار

۴۳۶. در محورهای زیر، عدد حقیقی a به ریشه‌های سوم، چهارم و پنجم خود وصل شده است. اگر b برابر 0.0081 باشد، مقدار c کدام است؟

(۱) -0.004 (۲) -0.081 (۳) -0.027 (۴) -0.008

۴۳۷. چه تعداد از روابط زیر درست است؟

$$(-0.1)^7 < (-0.1)^8 \quad \text{پ}$$

$$\sqrt[3]{2/5} < \sqrt[3]{2/5} \quad \text{ب}$$

$$(-1/7)^8 < (-1/7)^7 \quad \text{الف}$$

$$\sqrt{-0.1} < -0.1 \quad \text{ت}$$

$$\sqrt[3]{0.002} < \sqrt[3]{0.002} \quad \text{ث}$$

(۱) یک

(۲) دو

(۳) سه

(۴) چهار

۴۳۸. هرگاه x و y اعداد صحیح باشند به طوری که $x+1 < \sqrt[3]{-75000} < x$ و $y = \sqrt[3]{117649}$ ، آن‌گاه حاصل $x+y$ کدام است؟

(۱) ۱۵

(۲) صفر

(۳) -۳

(۴) -۱

۴۳۹. اگر $\sqrt{x+y} + \sqrt{x-6y} = 7y^2$ و $\sqrt{x^2+x^2y} - \sqrt{x^2-6x^2y} = 15$ باشد، حاصل $\sqrt[3]{4y(x+1)}$ کدام است؟ ($x, y > 0$)

(۱) ۴

(۲) ۳

(۳) ۲

(۴) ۱

۴۴۰. اگر $x = \sqrt{5-2\sqrt{6}} - \sqrt{4-2\sqrt{3}}$ ، $A = [x, x^4]$ و $B = [x^2, x^2]$ باشد، حاصل $A \cap B$ کدام است؟

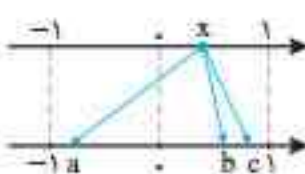
$$[x, x^2] \cup (x^2, x^4]$$

$$[x, x^2]$$

$$[x^2, x^2]$$

(۱) $\emptyset$

۴۴۱. در شکل زیر، نقطه‌ی x از محور بالا به ریشه‌های مرتبه‌ی چهارم و پنجم خود روی محور پایین وصل شده است. اگر $a+2bc=0$ باشد، آن‌گاه حاصل $\sqrt{x^{-1/2}} + x^{-1/2}$ کدام است؟

(۱) $\frac{1}{2}$ (۲) $\frac{3}{2}$ (۳) $\frac{9}{4}$ (۴) $\frac{3}{4}$

۴۴۲. هرگاه داشته باشیم $\frac{\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{7}{2} + \sqrt{8 - \sqrt{25} + \sqrt{96}}}$ ، مقدار $\alpha + \beta$ کدام است؟

(۱) ۲

(۲) ۴

(۳) ۵

(۴) ۴/۶

۴۴۳. مقدار تقریبی $[\sqrt[3]{47} + (\sqrt[3]{10} \cdot \sqrt{5})]$ با یک رقم اعشار کدام است؟ (|| نماد جزء صحیح است.)

(۱) ۵/۴

(۲) ۵/۶

(۳) ۴/۸

(۴) ۴/۶

۴۴۴. اگر $A = \sqrt[3]{27\sqrt{3}} \times (12)^{-\frac{5}{2}}$ و $B = \sqrt[3]{8\sqrt[3]{22}} \times (\frac{1}{2})^{-\frac{4}{2}}$ باشد، حاصل $(1+A^{-1})^{\frac{1}{2}} \times (B)^{-\frac{2}{5}}$ کدام است؟

(۱) ۴/۷۵

(۲) ۴/۵

(۳) ۴/۲۵

(۴) ۴

ایستگاه ۲: محاسبات در عبارت‌های جبری



۴۴۵. حاصل $(1-5)^3$ کدام است؟

(۱) ۱۱۶۷۴۲۵

(۲) ۱۱۲۷۴۲۵

(۳) ۱۱۵۷۴۲۵

(۴) ۱۱۵۷۴۲۵

۴۴۶. اگر $\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} = \sqrt{5}$ باشد، آن‌گاه حاصل $x + \frac{1}{x}$ چقدر است؟

(۱) ۸

(۲) ۷

(۳) ۳

(۴) ۵

۴۴۷. حاصل عبارت $(2x - \frac{2}{3})(4x^2 + \frac{4}{3}x + \frac{4}{9})$ به ازای $x = \frac{1}{3\sqrt{3}}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{4}{27}$ (۲) $\frac{1}{54}$ (۳) $-\frac{1}{54}$ (۴) $-\frac{4}{27}$

۴۴۸. هرگاه $x - y = -7$ و $x^2 - y^2 = 77$ باشد، آن گاه حاصل $(x + y)^2$ کدام است؟

- (۱) ۶۴ (۲) ۸۱ (۳) ۱۲۱ (۴) ۱۴۴

۴۴۹. مجموع سه عدد برابر $2k + 1$ و مجموع حاصل ضرب دوی آن‌ها برابر $k^2 - 1$ است. اگر مجموع مجذورات این سه عدد برابر $11k$ باشد، مقدار کوچک‌تر k کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{3}$ (۲) $\frac{1}{4}$ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) ۳

۴۵۰. حاصل عبارت $(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}})(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}})(x + \frac{1}{x})(x^2 + \frac{1}{x^2})$ به ازای $x = \sqrt[3]{3}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{10}{3}$ (۲) $\frac{8}{3}$ (۳) $\frac{4}{3}$ (۴) $\frac{2}{3}$

۴۵۱. اگر $a + \frac{4}{a} = 7$ باشد، حاصل $a^2 + \frac{28}{a}$ کدام است؟

- (۱) ۴۰ (۲) ۴۱ (۳) ۴۳ (۴) ۴۵

۴۵۲. اگر $a^2 + b^2 + 2ab^2 + 2ab^2 = a^2 + b^2 + 2ab$ و $a = 2 - \sqrt{3}$ باشد، آن گاه مقدار b کدام می‌تواند باشد؟

- (۱) $\sqrt{3} - 1$ (۲) $2 - \sqrt{3}$ (۳) $2 + \sqrt{3}$ (۴) $1 + \sqrt{3}$

۴۵۳. حاصل عبارت $\frac{2 - \sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}} + \sqrt{48}$ کدام است؟

- (۱) $2\sqrt{3}$ (۲) ۵ (۳) $3\sqrt{3}$ (۴) ۷

۴۵۴. اگر $B = \frac{\frac{2}{\sqrt{2}} + \sqrt{14}}{\frac{8}{\sqrt{2}} + \sqrt{14}}$ باشد، حاصل $2B + 1$ کدام است؟

- (۱) $\sqrt{2}$ (۲) $\sqrt{7}$ (۳) $2\sqrt{2}$ (۴) $2\sqrt{7}$

۴۵۵. حاصل عبارت $\sqrt[3]{(1 - \sqrt{2})^3} + \frac{1}{1 - \sqrt{2}}$ کدام است؟

- (۱) $-2\sqrt{2}$ (۲) -۲ (۳) ۲ (۴) $2\sqrt{2}$

۴۵۶. عدد ۲ را به صورت ضرب دو عدد گنگ $\sqrt{5} - \sqrt{3}$ و a نوشته‌ایم. عدد a کدام است؟

- (۱) $\sqrt{5} + \sqrt{3}$ (۲) $\sqrt{25} + \sqrt{9}$ (۳) $\sqrt{25} + \sqrt{15} + \sqrt{9}$ (۴) $\sqrt{25} - \sqrt{15} + \sqrt{9}$

۴۵۷. ساده‌شده‌ی عبارت $A = \frac{x^2 - 7x + 12}{x^2 - 27} \times \frac{3x^2 + 9x + 27}{x^2 + x - 20}$ برابر کدام گزینه‌ی زیر است؟

- (۱) $\frac{1}{x + 5}$ (۲) $\frac{3}{x + 5}$ (۳) $\frac{1}{x - 5}$ (۴) $\frac{3}{x - 5}$

۴۵۸. اگر $A = 1 - \frac{3}{x - 3}$ و $B = \frac{x}{x^2 - 9} - \frac{2}{x + 3}$ باشد، آن گاه حاصل $A + B$ کدام است؟

- (۱) $-(x + 3)$ (۲) $x + 3$ (۳) $\frac{x + 3}{x - 6}$ (۴) $\frac{x - 3}{x + 1}$

۴۵۹. حاصل عبارت $750^2 - 700^2 - 50^2$ کدام است؟

- (۱) ۷۰۰۰۰ (۲) ۶۴۰۰۰ (۳) ۷۶۰۰۰ (۴) ۶۶۰۰۰

۴۶۰. کدام عبارت را به جای A قرار دهیم تا عبارت $9x^2y^2 + x^2 + A$ به صورت توان دوم یک دو جمله‌ای درآید؟

- (۱) $-3x^2y$ (۲) $-6x^2y$ (۳) $3x^2y^2$ (۴) $6x^2y^2$

۴۶۱. حاصل عبارت $(xy - 1)(x^2y^2 + xy + 1)$ به ازای $x = \sqrt[3]{2}$ و $y = \sqrt[3]{4}$ کدام است؟

- (۱) ۶ (۲) ۷ (۳) ۹ (۴) ۱۷

(کنکور اردیبهشت ۱۴۰۳)

(کتاب درسی)

تثبیت ۷۰٪

(کتاب درسی)

۴۶۲. هرگاه $\sqrt{x+2} + \sqrt{x-4} = 3$ باشد، آن‌گاه حاصل $\sqrt{x+2} - \sqrt{x-4}$ کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) $\sqrt{2}$ (۳) $2\sqrt{2}$ (۴) ۱

۴۶۳. حاصل عبارت $(x^{12} + x^6 + 1)(x^{12} + x^6 + 1)(x^4 + x^2 + 1)(x^4 + x^2 + 1)(x-1)(x+1)$ به ازای $x = \sqrt[6]{6}$ کدام است؟

- (۱) ۵ (۲) ۲۱۵ (۳) ۷ (۴) ۲۱۷

۴۶۴. اگر $x+y=13$ و $x^2+y^2=97$ باشد، آن‌گاه مقدار $|x-y|$ کدام است؟

- (۱) ۶ (۲) ۵ (۳) ۲ (۴) ۱۵

۴۶۵. حاصل عبارت $P = 2(2x+3y)(4x^2+9y^2)(16x^4+81y^4)(x-\frac{2}{3}y)$ به ازای $x = \sqrt[3]{3}$ و $y = \sqrt[3]{2}$ به صورت $k(2^a - 3^b)$ قابل نمایش است، مقدار k کدام است؟

- (۱) ۶ (۲) ۱۲ (۳) ۱۸ (۴) ۲۴

(کنکور ارشد ۱۴۰۴)

۴۶۶. اگر $\frac{1}{x^2+1} = 9$ باشد، مقدار $\frac{100}{(x^2+1)^2} + (x^2+1)^2$ کدام است؟

- (۱) ۹۸ (۲) ۹۰ (۳) ۸۸ (۴) ۸۰

۴۶۷. در تجزیه $P(x) = 5x^3 - 11x^2 + (8a+1)x - 6$ عامل $x-2$ دیده می‌شود. در تجزیه $P(2x+3)$ کدام عامل دیده نمی‌شود؟

- (۱) $2x-1$ (۲) $2x+1$ (۳) $2x$ (۴) $4x+5$

۴۶۸. مساحت مستطیلی $8x^2-1$ و عرض آن $2x-1$ است. محیط آن کدام است؟

- (۱) $8x^2+8x$ (۲) $4x^2+2x+1$ (۳) $4x^2+4x$ (۴) $8x^2+4x+2$

۴۶۹. حاصل $\frac{1}{3\sqrt{8}-\sqrt{5}+\sqrt{3}}$ کدام است؟

- (۱) $\sqrt{3}-1$ (۲) $\sqrt{3}-\sqrt{2}$ (۳) $\sqrt{3}+1$ (۴) $\sqrt{3}+\sqrt{2}$

۴۷۰. حاصل عبارت $(x+x^{-1})^3$ به ازای $x=1-\sqrt{2}$ کدام است؟

- (۱) $-\sqrt{2}$ (۲) -1 (۳) $\sqrt{2}$ (۴) ۱

۴۷۱. عبارت $\frac{1}{(\sqrt{5}+\sqrt{2})(\sqrt{5}+\sqrt{2})}$ برابر کدام گزینه است؟

- (۱) $\sqrt{5}-\sqrt{2}$ (۲) $\frac{1}{3}(\sqrt{5}-\sqrt{2})$ (۳) $\sqrt{5}+\sqrt{10}+\sqrt{2}$ (۴) $\frac{\sqrt{10}}{3}$

(کنکور ۹۹)

۴۷۲. حاصل عبارت $\frac{\sqrt{8}+\sqrt{27}}{5-\sqrt{6}} - 2(\sqrt[3]{9}-1)^{-1}$ کدام است؟

- (۱) $1+\sqrt{3}$ (۲) $-1+\sqrt{2}$ (۳) $1-\sqrt{2}$ (۴) $\sqrt{2}-2\sqrt{3}$

۴۷۳. حاصل عبارت $\frac{4x^2-16y^2}{x^2+x^2-6x} \div \frac{4x^2-8xy}{x^2+3x}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{x-2y}{x^2+3x}$ (۲) $\frac{x+2y}{x^2+3x}$ (۳) $\frac{x-2y}{x^2-2x}$ (۴) $\frac{x+2y}{x^2-2x}$

(کنکور ۱۴۰۰)

۴۷۴. فرض کنید $a = \sqrt[3]{\sqrt{6}-2}$ و $b = \sqrt[3]{\sqrt{6}+2}$. مقدار $(a^3+b^3-2ab)^2(a^3+b^3+2ab)^2$ کدام است؟

- (۱) $4(2+\sqrt{3})$ (۲) $4(2-\sqrt{3})$ (۳) $16(2+\sqrt{3})$ (۴) $16(2-\sqrt{3})$

۴۷۵. اگر $x = \sqrt{2}+1$ باشد، آن‌گاه حاصل $\frac{x^2+2x+1}{x^2-2x+3}$ کدام است؟

- (۱) $2+\sqrt{2}$ (۲) $\frac{3}{2}+\sqrt{2}$ (۳) $\frac{3}{2}-\sqrt{2}$ (۴) $2\sqrt{2}$

۴۷۶. هرگاه $x^2 + \frac{1}{x^2} = \sqrt{5}$ باشد، آن‌گاه حاصل $\sqrt{(x^2 - \frac{1}{x^2})^2 + 8}$ کدام است؟

- (۱) ۳ (۲) $\sqrt{13}$ (۳) $\sqrt{3}$ (۴) ۵

۴۷۷. کدام یک از گزینه‌های زیر، یک عامل برای x^3+64 است؟

- (۱) x^2-2x+8 (۲) x^2+2x-8 (۳) x^2+4x-8 (۴) x^2-4x+8

(کتاب درسی)

۴۷۸. کسر $\frac{y^5 - y^3 - 12y}{8y^2 + 16y}$ پس از ساده‌سازی شامل کدام عامل است؟

- (۱) y (۲) $y+2$ (۳) y^2-3 (۴) $y-2$

۴۷۹. کدام گزینه یکی از عوامل در تجزیه‌ی عبارت $A = a^2 + b^2 + 2ab - 1$ است؟

- (۱) $a-b-1$ (۲) $a-b+1$ (۳) $a+b+1$ (۴) $a+b-1$

۴۸۰. اگر بزرگ‌ترین عامل مشترک دو چندجمله‌ای $p(x) = x^5 + ax^2$ و $q(x) = x^7 + 2x^2 + 2x^2$ ، دو جمله‌ای $x^m + x^r$ باشد، مقدار na کدام است؟

(کنکور اردیبهشت ۱۴۰۴)

- (۱) -2 (۲) -1 (۳) 2 (۴) 1

۴۸۱. اگر $2a^2 + 4b^2 - 4ab - 2a + 1 = 0$ ، آن‌گاه حاصل $2a + 2b$ کدام است؟

- (۱) 2 (۲) 4 (۳) $\frac{5}{2}$ (۴) $\frac{7}{2}$

۴۸۲. هرگاه $a^2 + \frac{1}{a^2} = 24$ باشد، آن‌گاه حاصل $a^2 + \frac{1}{a^2}$ کدام است؟ (a عددی مثبت است).

- (۱) 198 (۲) 196 (۳) 202 (۴) 204

۴۸۳. هرگاه $(a-b)(a+b) = 5$ باشد، حاصل $a^6 - 15a^2b^2 - b^6$ کدام است؟

- (۱) 125 (۲) -125 (۳) 25 (۴) -25

(خارج ۱۴۰۰)

۴۸۴. فرض کنید $a = \sqrt[3]{7-4\sqrt{3}}$ ، مقدار $(a + \frac{1}{a} + \sqrt{2})^2 (a + \frac{1}{a} - \sqrt{2})^2$ ، کدام است؟

- (۱) 9 (۲) 16 (۳) 25 (۴) 49

۴۸۵. اگر $0 < a < 1$ و $a^2 + \frac{4}{a^2} = 12$ باشد، مقدار $a^2 - \frac{4}{a^2}$ کدام است؟

- (۱) $14\sqrt{2}$ (۲) $28\sqrt{2}$ (۳) $-28\sqrt{2}$ (۴) $-14\sqrt{2}$

۴۸۶. اگر $\alpha = \sqrt[3]{3\sqrt{2}-4}$ و $\beta = \sqrt[3]{3\sqrt{2}+4}$ باشد، حاصل عبارت $(\alpha^2 + \beta^2 - \alpha\beta)(\alpha^2 + \beta^2 + \alpha\beta)$ کدام است؟

- (۱) 6 (۲) 8 (۳) $6\sqrt{2}$ (۴) $7\sqrt{2}$

۴۸۷. اگر حاصل عبارت $\frac{(x^2 + \frac{1}{x^2})(x^2 + \frac{1}{x^2})(x^4 + \frac{1}{x^4})(x^4 + \frac{1}{x^4})}{(x^2 - \frac{1}{x^2})}$ به ازای $x = \sqrt[3]{2}$ برابر با $2^a - 2^b$ باشد، حاصل $a-b$ کدام است؟

- (۱) 12 (۲) 16 (۳) 18 (۴) 24

۴۸۸. حاصل عبارت $\frac{1}{\sqrt{11}+\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{18}+\sqrt{11}} + \frac{1}{\sqrt{25}+\sqrt{18}}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{2}{7}$ (۲) $\frac{3}{7}$ (۳) $\frac{1}{3}$ (۴) $\frac{2}{3}$

۴۸۹. حاصل عبارت $\frac{1}{2+\sqrt{2}} + \frac{1}{2\sqrt{2}+2\sqrt{2}} + \frac{1}{4\sqrt{2}+2\sqrt{2}}$ برابر کدام است؟

- (۱) 1 (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) 2 (۴) 3

(خارج ۹۹)

۴۹۰. حاصل عبارت $\frac{\sqrt{27}-1}{4+\sqrt{3}} + (2-\sqrt{3})^{-1}$ ، کدام است؟

- (۱) $1+2\sqrt{3}$ (۲) $2\sqrt{3}$ (۳) $1+\sqrt{3}$ (۴) 1

(کنکور اردیبهشت ۱۴۰۴)

۴۹۱. حاصل عبارت $\frac{\sqrt{1+\sqrt{3}} + \sqrt{\sqrt{3}-1}}{\sqrt{\sqrt{3}-\sqrt{2}}}$ - ۲، کدام است؟

- (۱) $-2\sqrt{3}$ (۲) $-\sqrt{6}$ (۳) $2\sqrt{3}$ (۴) $\sqrt{6}$

۴۹۲. هرگاه $\frac{\sqrt[3]{2}+1}{1-\sqrt[3]{2}} = A+B(\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2})$ باشد، آن‌گاه مقدار $A+B$ کدام است؟

- (۱) 5 (۲) -1 (۳) 1 (۴) -5

۴۹۳. مخارج کسر $\frac{x^{1/25}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}+1}$ را گویا کرده و حاصل کسر برابر $\sqrt{6}-\sqrt{2}+2$ شده است. مقدار x کدام است؟

- (۱) ۱۶ (۲) ۲۵۶ (۳) ۸۱ (۴) ۶۲۵

۴۹۴. اگر $\frac{ax^2-2ax}{x^2-x-2} \times \frac{2x+2}{x^2-x-2} = 3$ باشد، مقدار a کدام است؟

- (۱) ۳ (۲) ۶ (۳) ۴ (۴) ۹

۴۹۵. اگر $\sqrt{x+a}-\sqrt{x-4}=2$ باشد، حاصل عبارت $\sqrt{x+a}+\sqrt{x-4}-2$ کدام است؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) $\frac{3}{4}$ (۴) $\frac{3}{2}$

۴۹۶. حاصل عبارت $\frac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{5}+2}{2} \times (8+2\sqrt{15}) \times 2^{\sqrt{5}-2}$ به صورت 2^a قابل بیان است. مقدار (a^2+1) کدام است؟

- (۱) ۲۱ (۲) ۱۳ (۳) ۱۹ (۴) ۱۵

۴۹۷. عبارت $\frac{1}{\sqrt{2}-\sqrt[3]{4}}$ برابر با $(a+\frac{\sqrt{2}}{2}b)(1+\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4})$ است. حاصل $a+b$ کدام است؟

- (۱) صفر (۲) ۲ (۳) -۲ (۴) ۱

۴۹۸. هرگاه $x = \sqrt{3+2\sqrt{2}} + \sqrt{3-2\sqrt{2}}$ باشد، آن‌گاه حاصل x^2+2x کدام است؟

- (۱) $\pm 22\sqrt{2}$ (۲) $22\sqrt{2}$ (۳) $\pm 11\sqrt{2}$ (۴) $11\sqrt{2}$

۴۹۹. اگر $a^2=b^2+1$ باشد، حاصل کسر $\frac{b^2-a^2+1}{2a^2b^2}$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) -۱ (۳) a^2b^2 (۴) ab

۵۰۰. کدام عبارت در تجزیه‌ی عبارت a^4+4 وجود دارد؟

- (۱) a^4-a^2+2 (۲) a^4-2a^2+2 (۳) a^4+a^2+2 (۴) a^4+2a^2+4

۵۰۱. اگر $\frac{x-1}{\sqrt[3]{x-1}} = \sqrt[3]{x}f(x)+1$ باشد، جواب معادله‌ی $f(x)+1=0$ کدام است؟

- (۱) -۱ (۲) -۲ (۳) -۴ (۴) -۸

۵۰۲. هرگاه $f(x) = \frac{7}{x^2+x+1} + \frac{7}{x^2-x+1}$ باشد، مقدار $f(x)$ به ازای $x = \frac{\sqrt{3}+\sqrt{63}}{3}$ کدام است؟

- (۱) ۳/۶ (۲) ۶ (۳) ۸ (۴) ۸/۴

۵۰۳. اگر $x = \sqrt[3]{3+2\sqrt{2}}$ باشد، آن‌گاه حاصل $x^{11} + \frac{1}{x^{11}}$ برابر کدام است؟

- (۱) ۱۹۶ (۲) ۱۹۸ (۳) ۲۰۰ (۴) ۲۰۲

۵۰۴. اگر $A = \sqrt[3]{9+4\sqrt{5}}$ و $B = \frac{\sqrt{5}-3}{2}$ باشد، آن‌گاه حاصل $\frac{A}{B} + 1/5\sqrt{5}$ کدام است؟

- (۱) -۳ (۲) -۳/۵ (۳) -۴ (۴) -۴/۵

۵۰۵. اگر $\frac{1}{a^2+1} + \frac{1}{a^2-1} = 2$ باشد، حاصل $(\frac{1}{a^2-\sqrt{a^2+1}} + \frac{1}{a^2+\sqrt{a^2+1}})^{201}$ چقدر است؟

- (۱) ۲ (۲) -۲ (۳) ۱ (۴) -۱

آزمون فصل

⌚ زمان پیشنهادی: ۲۰ دقیقه

۵۰۶. کدام یک از مقایسه‌های زیر نادرست است؟

- (۱) $(0/1)^7 < (0/1)^5$ (۲) $(-0/1)^9 > (-0/1)^5$ (۳) $(-1/2)^3 > (-1/2)^5$ (۴) $(1/2)^3 > (1/2)^5$

۵۰۷. در کدام گزینه هر یک از اعداد واقع بر محور بالایی، به‌درستی به عدد متناظر با ریشه‌ی پنجم خود روی محور پایینی وصل شده‌اند؟



$$-125(F) \quad 125(T) \quad 250(T) \quad -250(I)$$
$$\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} \quad \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} \quad \sqrt{3}+\sqrt{2} \quad \sqrt{3}-\sqrt{2}$$
$$-(\sqrt{F} + r\sqrt{F} + F)(F) \quad \frac{1}{r}(\sqrt{F} + r\sqrt{F} + F)(F) \quad -\sqrt{F} + F(F) \quad \frac{\sqrt{F}}{r} + F(F)$$

TV (F)	TF (T)	TD (T)	TF (I)
1	1	1	1
2	2	2	2
3	3	3	3
4	4	4	4
5	5	5	5
6	6	6	6
7	7	7	7
8	8	8	8
9	9	9	9
10	10	10	10
11	11	11	11
12	12	12	12
13	13	13	13
14	14	14	14
15	15	15	15
16	16	16	16
17	17	17	17
18	18	18	18
19	19	19	19
20	20	20	20
21	21	21	21
22	22	22	22
23	23	23	23
24	24	24	24
25	25	25	25
26	26	26	26
27	27	27	27
28	28	28	28
29	29	29	29
30	30	30	30
31	31	31	31
32	32	32	32
33	33	33	33
34	34	34	34
35	35	35	35
36	36	36	36
37	37	37	37
38	38	38	38
39	39	39	39
40	40	40	40
41	41	41	41
42	42	42	42
43	43	43	43
44	44	44	44
45	45	45	45
46	46	46	46
47	47	47	47
48	48	48	48
49	49	49	49
50	50	50	50
51	51	51	51
52	52	52	52
53	53	53	53
54	54	54	54
55	55	55	55
56	56	56	56
57	57	57	57
58	58	58	58
59	59	59	59
60	60	60	60
61	61	61	61
62	62	62	62
63	63	63	63
64	64	64	64
65	65	65	65
66	66	66	66
67	67	67	67
68	68	68	68
69	69	69	69
70	70	70	70
71	71	71	71
72	72	72	72
73	73	73	73
74	74	74	74
75	75	75	75
76	76	76	76
77	77	77	77
78	78	78	78
79	79	79	79
80	80	80	80
81	81	81	81
82	82	82	82
83	83	83	83
84	84	84	84
85	85	85	85
86	86	86	86
87	87	87	87
88	88	88	88
89	89	89	89
90	90	90	90
91	91	91	91
92	92	92	92
93	93	93	93
94	94	94	94
95	95	95	95
96	96	96	96
97	97	97	97
98	98	98	98
99	99	99	99
100	100	100	100

$$-1(\tau) \quad 1(\tau) \quad \frac{1}{\tau}(\tau) \quad \tau(\tau)$$
$$-\Delta(f) \qquad \Delta(f) \qquad -\Delta(f) \qquad \Delta(f)$$
$$\sqrt{f}(t) \quad \sqrt{f}(t) \quad \sqrt{f}(t) \quad \sqrt{f}(t)$$
$$\frac{x-y}{x-1} (f) \quad \frac{x+y}{x+1} (f) \quad \frac{x-y}{x-1} (f) \quad \frac{x+y}{x+1} (f)$$

صد آزمون برای صد درصد



براکت و قدر مطلق

$[u] = k - \frac{k-1}{2} \rightarrow k \leq u < k+1$	$ u = k - \frac{k-1}{2} \rightarrow u = \pm k$	مساوی عدد شوند.
$a \leq x \leq b \Rightarrow x - \frac{a+b}{2} \leq \frac{b-a}{2}$	$ u \leq k - \frac{k-1}{2} \rightarrow -k \leq u \leq k$	نامساوی‌ها
$x \geq b \wedge x \leq a \Rightarrow x - \frac{a+b}{2} \geq \frac{b-a}{2}$	$ u \geq k - \frac{k-1}{2} \rightarrow u \geq k \vee u \leq -k$	فرینه
$[-x] = \begin{cases} -x & x \in \mathbb{Z} \\ -[x]-1 & x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$	$ -u = u $	

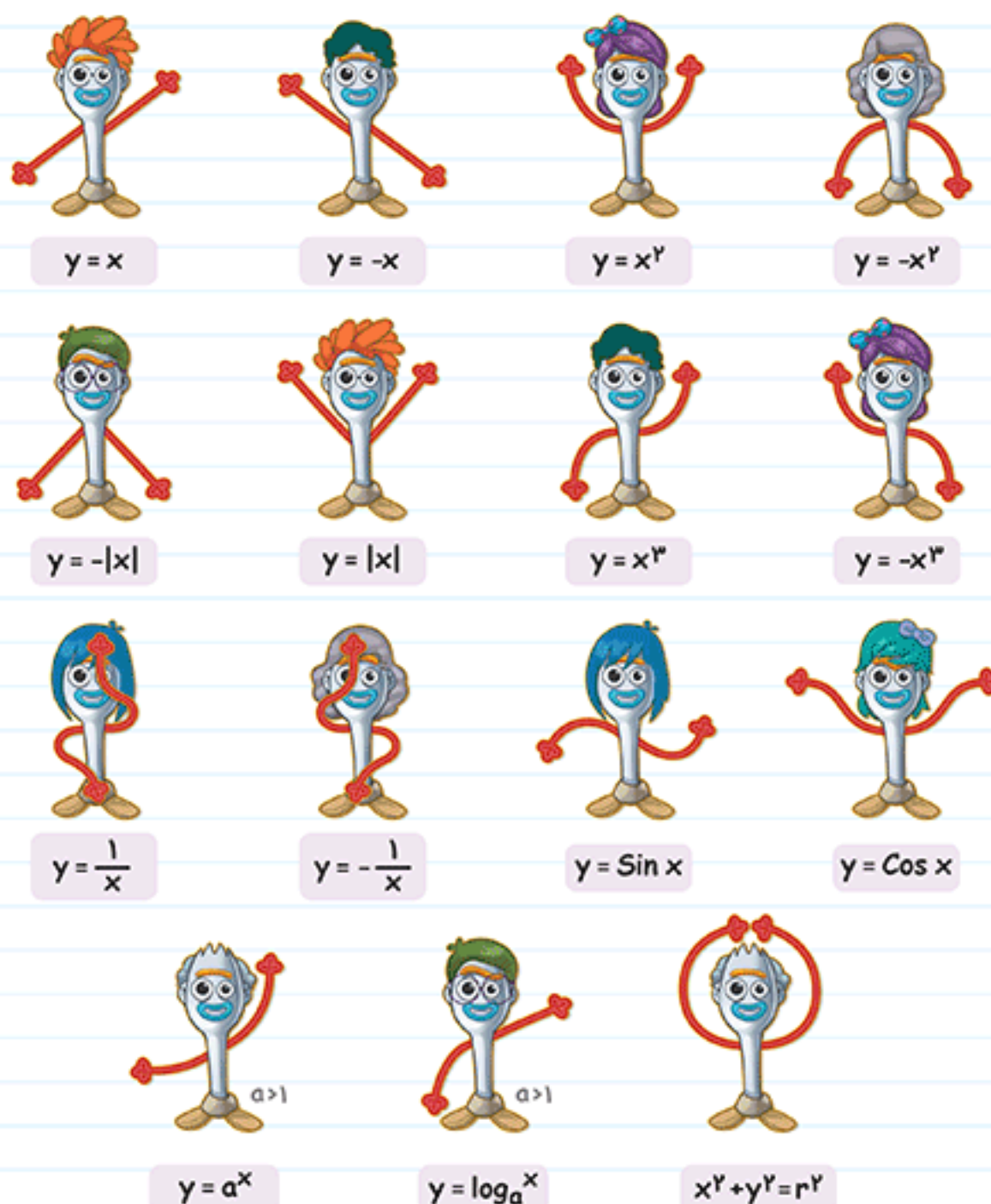
فرمول‌های لگاریتم

تغییر مبنا	انتقال توان	کسر به منها	ضرب به جمع	چرخش
$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$	$\log_a x^m = m \log_a x$	$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$	$\log_a (xy) = \log_a x + \log_a y$	$\log_a u = k \Rightarrow u = a^k$

مثلثات هندسی

$\tan \alpha = \frac{b}{c}, \cos \alpha = \frac{c}{a}, \sin \alpha = \frac{b}{a}$	
$S = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2, h = \frac{\sqrt{3}}{2} a$	
$b = \frac{\sqrt{3}}{2} a, c = \frac{a}{2}$	

رقص با تابع‌ها



تکنیک‌های آمار

میانگی Q ₂	داده‌ها را از کوچک به بزرگ مرتب کنید: داده‌ی وسطی (n فرد) یا میانگین دو داده‌ی وسطی (n زوج) می‌شود.
داده‌ی وسط	اگر تعداد داده‌ها زیاد بود: برای n فرد شماره‌ی داده‌ی وسط $\frac{n+1}{2}$ و برای n زوج، شماره‌ی داده‌های وسطی $\frac{n}{2}$ و بعدی آن است.
چارک اول Q ₁	داده‌ها را از کوچک به بزرگ مرتب کنید و میانگین را حساب کنید: حالا بین داده‌های کمتر از میانگین مجدداً میانگین بگیرید.
چارک سوم Q ₃	داده‌ها را از کوچک به بزرگ مرتب کنید و میانگین را حساب کنید: حالا بین داده‌های بیشتر از میانگین مجدداً میانگین بگیرید.
تبدیل داده‌ها	اگر داده‌ها را از $x_1, x_2, \dots, x_n$ واریانس از σ^2 تبدیل می‌شود به $a\bar{x} + b$ و میانگین از $\bar{x}$ تبدیل می‌شود به $a\bar{x} + b$ و انحراف معیار از σ تبدیل می‌شود به $a\sigma$.
تساوی داده‌ها	اگر واریانس، انحراف معیار یا ضریب تغییرات صفر باشند، یعنی تمام داده‌ها مساوی‌اند و برعکس.

اعمال جبری دو تابع

شماپه	$(f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x)$ $(kf)(x) = kf(x)$ $(\frac{f}{g})(x) = \frac{f(x)}{g(x)}, (fg)(x) = f(x)g(x)$ $(gof)(x) = g(f(x)), (fog)(x) = f(g(x))$
دامنه	$D_{f \pm g} = D_f = D_g$ $D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g - \{x g(x) = 0\}$ $D_{fog} = \{x x \in D_g, g(x) \in D_f\}, D_{gof} = \{x x \in D_f, f(x) \in D_g\}$
وجود عضو	$(a, b) \in fog \Rightarrow (a, m) \in g, (m, b) \in f$
ترکیب دو تابع	صعودی و نزولی: صعودی می‌شود تابعی صعودی ولی صعودی و نزولی نتیجه‌اش تابعی نزولی است.

احتمال پیشرفته

احتمال شرطی	$P(A B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ یا $P(A B) = \frac{n(A \cap B)}{n(B)}$
پیشامدهای مستقل	$P(A \cap B) = P(A)P(B)$
پیشامدهای غیرمستقل	$P(A \cap B) = P(A)P(B A)$
احتمال کل	در نمودار: $P_1 + P_2 + P_3 + \dots$
ساختن ظرف جدید	ظرف دوم: $m+n$ ظرف اول: m ظرف جدید: $m+n$

معادله‌ی خط

با داشتن شیب m و نقطه‌ی $A(x_1, y_1)$	با داشتن دو نقطه‌ی $B(x_2, y_2), A(x_1, y_1)$	با داشتن طول از مبدأ p و عرض از مبدأ q	موازی محور x ها	موازی محور y ها	رسم خط
$y - y_1 = m(x - x_1)$	$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$	$\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1$	$y = k$	$x = t$	دو نقطه پیدا کن

بازه‌ها

$[a, +\infty)$	$(a, +\infty)$	$(-\infty, a]$	$(-\infty, a)$	(a, b)	$[a, b]$	$[a, b)$	$(a, b]$
----------------	----------------	----------------	----------------	----------	----------	----------	----------

فرمول‌های دستوری لگاریتم

معکوس کن	لگاریتم‌ها را تبدیل به یکی کن	با لگاریتم در توان کار کن
$\log_a x = \frac{1}{\log_x a}$	$m \log_a a + n \log_a b = \log_a (a^m b^n)$	$a \log_a b = b$