

انتگرالگو

موج ۲۰

مرحله‌ای
و جامع

ویژه آمادگی شرکت در امتحان‌های نهایی و نیم‌سال

ریاضیات گسسته دوازدهم

نصیر کریمی جونی



مرورنامه
شب امتحان

امتحان‌های
نیم‌سال اول و
دوم

امتحان‌های
درس به درس

پاسخ‌های
تشریحی +
کلید تصحیح

امتحان‌های
نهایی اخیر

امتحان‌های
شبیه‌ساز نهایی

پیشگفتار

در ابتدا باید یک خدایوت جانانه به شما دانش آموزان عزیز دوازدهمی بگویم که در حال عبور از یکی از سال‌های پرچالش زندگی‌تان هستید. در این مسیر، یکی از اهداف مهم شما کسب نمره مناسب در امتحان نهایی است. خوشحالم که این کتاب را انتخاب کرده‌اید و با اطمینان به شما می‌گویم که با مطالعه آن، کسب نمره ۲۰ برای شما آسان می‌شود.

این کتاب کاملاً در چارچوب کتاب درسی نوشته شده است و دارای ویژگی‌های زیر است:

۱ درس‌نامه‌ای کارراه‌بینداز دارد که مطابق فصل‌ها و درس‌های کتاب دسته‌بندی شده است. در هر درس مفاهیم اصلی و قضایای مهم گفته شده است.

۲ آزمون‌محور است، تا برای هر آزمون در سطح مدرسه و امتحان نهایی آمادگی لازم را کسب کنید.

۳ پاسخنامه آزمون‌ها بر اساس پاسخنامه‌های امتحانات نهایی بارم‌بندی شده است. شما می‌توانید با مطالعه دقیق آن‌ها به این موضوع پی ببرید که قسمت‌های مهم در نوشتن پاسخ چیست؛

۴ همه مطالب کتاب درسی در آزمون‌ها پوشش داده شده‌اند. در این آزمون‌ها هر مطلب کتاب درسی را در قالب حداقل یک مسئله مشاهده می‌کنید؛

۵ این کتاب برای هر دانش‌آموز در هر سطحی مناسب است. دانش‌آموزان توانمند از این کتاب می‌توانند برای بهبود روش نوشتن خود استفاده کنند. همچنین دانش‌آموزانی که هنوز به هر دلیلی نتوانسته‌اند به مطالب کتاب درسی تسلط پیدا کنند، می‌توانند در زمان کوتاه نمره مناسبی کسب کنند.

علاوه بر درس‌نامه، این کتاب دارای ۲۵ آزمون، شامل آزمون‌های ۱۰ نمره‌ای و ۲۰ نمره‌ای است. آزمون‌های درس به درس ۱۰ نمره‌ای هستند و آزمون‌های نیم‌سال اول، نیم‌سال دوم و جامع (تألیفی و نهایی سال‌های اخیر) ۲۰ نمره‌ای.

نوع آزمون	تعداد آزمون‌ها	سرفصل
درس به درس	۷	هر درس ۱ آزمون
نیم‌سال اول	۴	فصل اول و فصل دوم (درس اول)
نیم‌سال دوم	۳	فصل دوم (درس دوم) و فصل سوم
جامع - شبیه‌ساز نهایی	۵	تمام کتاب
نهایی ۱۴۰۲	۳	تمام کتاب
نهایی ۱۴۰۳	۳	تمام کتاب

آزمون‌های جامع کاملاً تألیفی هستند و بودجه‌بندی آن‌ها بر اساس امتحان نهایی است. اما در سایر آزمون‌ها از سؤالات امتحانات نهایی سال‌های گذشته نیز استفاده شده است. این موضوع به ما و شما کمک می‌کند که به مهم‌ترین هدف کتاب برسیم و آن کسب نمره ۲۰ در امتحان نهایی ریاضیات گسسته است.

در پایان بر خود لازم می‌دانم از همکاران عزیزمان در نشر الگو، دکتر آریس آقانیانس برای مطالعه و ویراستاری علمی کتاب، خانم فاطمه احدی برای صفحه‌آرایی، خانم مرضیه کریمی برای رسم شکل‌ها و خانم ستین مختار مسئول واحد ویراستاری و حروف‌چینی تشکر و قدردانی کنم.

نصیر کریمی جونی

فهرست مطالب

مرورنامه ۲۰

آزمون‌های جامع (شبه‌ساز نهایی و نهایی)

آزمون ۱۵: جامع (۱) - شبه‌ساز نهایی ۲۷

آزمون ۱۶: جامع (۲) - شبه‌ساز نهایی ۲۹

آزمون ۱۷: جامع (۳) - شبه‌ساز نهایی ۳۱

آزمون ۱۸: جامع (۴) - شبه‌ساز نهایی ۳۳

آزمون ۱۹: جامع (۵) - شبه‌ساز نهایی ۳۵

آزمون ۲۰: جامع (۶) - نهایی خرداد ۱۴۰۲ ۳۷

آزمون ۲۱: جامع (۷) - نهایی شهریور ۱۴۰۲ ۳۹

آزمون ۲۲: جامع (۸) - نهایی دی ۱۴۰۲ ۴۱

آزمون ۲۳: جامع (۹) - نهایی خرداد ۱۴۰۳ ۴۳

آزمون ۲۴: جامع (۱۰) - نهایی شهریور ۱۴۰۳ ۴۵

آزمون ۲۵: جامع (۱۱) - نهایی دی ۱۴۰۳ ۴۷

پاسخ‌های تشریحی ۵۰

آزمون‌های درس به درس و نیم‌سال

آزمون ۱: فصل اول - درس اول ۲

آزمون ۲: فصل اول - درس دوم ۳

آزمون ۳: فصل اول - درس سوم ۴

آزمون ۴: فصل دوم - درس اول ۵

آزمون ۵: نیم‌سال اول (۱) ۶

آزمون ۶: نیم‌سال اول (۲) ۷

آزمون ۷: نیم‌سال اول (۳) ۸

آزمون ۸: نیم‌سال اول (۴) ۹

آزمون ۹: فصل دوم - درس دوم ۱۱

آزمون ۱۰: فصل سوم - درس اول ۱۲

آزمون ۱۱: فصل سوم - درس دوم ۱۳

آزمون ۱۲: نیم‌سال دوم (۱) ۱۴

آزمون ۱۳: نیم‌سال دوم (۲) ۱۶

آزمون ۱۴: نیم‌سال دوم (۳) ۱۸

امتحان نهایی: ریاضیات گسسته		رشته: ریاضی و فیزیک		تألیفی		مدت امتحان: ۶۰ دقیقه	
ردیف	سؤالات						نمره
۱	درستی یا نادرستی گزاره‌های زیر را مشخص کنید. (الف) اگر k حاصل ضرب دو عدد طبیعی متوالی باشد، آن‌گاه $4k+1$ مربع کامل است. (ب) برای هر عدد طبیعی n بزرگ‌تر از ۱، عدد $2^n - 1$ اول است. (پ) مجموع هر دو عدد فرد عددی زوج است. (ت) حاصل جمع هر دو عدد گنگ عددی گنگ است.						۱
۲	جاهای خالی را با عبارت‌ها یا عددهای مناسب پر کنید. (الف) اگر a و b دو عدد حقیقی باشند و $ab=0$ ، آن‌گاه (ب) اگر تابع f در $x=a$ پیوسته ولی تابع g در $x=a$ ناپیوسته باشد، آن‌گاه تابع $f+g$ در $x=a$ است. (پ) حاصل ضرب هر عدد گویای در هر عدد گنگ عددی گنگ است.						۱
۳	گزینه درست را انتخاب کنید. (الف) اگر $a, b \in \mathbb{R}$ ، کدام یک از ترکیب‌های دوشروطی زیر درست است؟ $a < b \Leftrightarrow a^2 < b^2$ (۱) $a < b \Leftrightarrow a^3 < b^3$ (۲) $a < b \Leftrightarrow (a-b)^2 \geq 0$ (۳) $a < b \Leftrightarrow a^2 < b^3$ (۴) (ب) اگر $S = \{1, 2, 3, \dots, 11\}$ و A مجموعه همه اعداد $n \in S$ باشد که $\frac{n^2(n+1)^2}{4}$ یک عدد زوج است، آن‌گاه A چند عضو دارد؟ (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴) ۶						۰/۵
۴	ثابت کنید برای هر عدد طبیعی زوج n ، $n^2 - 5n + 7$ عددی فرد است.						۱
۵	گزاره درست را ثابت کنید و برای گزاره نادرست مثال نقض ارائه دهید. (الف) اگر از مربع عددی فرد یک واحد کم کنیم، حاصل همواره بر ۸ بخش پذیر است. (ب) میانگین پنج عدد طبیعی همان عدد وسطی است.						۱/۷۵
۶	اگر α و β دو عدد گنگ باشند و $\alpha + \beta$ گویا باشد، با استفاده از برهان خلف ثابت کنید $\alpha + 2\beta$ گنگ است.						۱/۵
۷	ثابت کنید میانگین حسابی دو عدد نامنفی، از میانگین هندسی آن‌ها کمتر نیست.						۱/۲۵
۸	گزاره زیر را به روش بازگشتی (گزاره‌های هم‌ارز) ثابت کنید: «برای هر دو عدد حقیقی x و y داریم $x^2 + y^2 + 1 \geq xy + x + y$ »						۱/۲۵
۹	آیا اعدادی صحیح مانند x و y وجود دارند که $x^2 + y^2 = (x+y)^2$.						۰/۷۵
جمع نمره		موفق باشید.					۱۰

آزمون

۵

موضوع آزمون

صفحات پاسخ

نیمسال اول (۱)

۵۲ تا ۵۳

ردیف	سؤالات	نمره	امتحان نهایی: ریاضیات گسسته	رشته: ریاضی و فیزیک	تألیفی	مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه
۱	درستی یا نادرستی گزاره‌های زیر را مشخص کنید. (الف) اگر $a b$ ، آن‌گاه $[a, b] = b $. (ب) معادله هم‌نهشتی $ax \equiv b \pmod{m}$ دارای جواب است اگر و تنها اگر $(a, b) m$. (پ) در هر گراف G از مرتبه p ، داریم $\Delta(G) + \delta(G) = p - 1$. (ت) هر گراف ۲-منتظم همبند است.	۱	(دی ۹۸ و دی ۹۹) (دی ۹۸ و دی ۹۹)			
۲	جاهای خالی را با عبارت‌ها یا عددهای مناسب پر کنید. (الف) در یک گراف k -منتظم، ماکزیمم درجه رأس برابر با است. (ب) m عددی صحیح است. حاصل $(2m, 6m^3)$ برابر با است. (پ) گراف G را می‌نامیم هرگاه بین هر دو رأس آن حداقل یک مسیر وجود داشته باشد. (ت) اگر $a b$ و $b a$ ، آن‌گاه	۱	(خرداد ۹۹) (خرداد ۱۴۰۰) (خرداد ۱۴۰۱)			
۳	اگر a و b دو عدد صحیح باشند و ab عددی فرد باشد، ثابت کنید $a^2 + b^2$ زوج است.	۱/۲۵	(خارج خرداد ۹۸)			
۴	ثابت کنید حاصل جمع یک عدد گویا و یک عدد گنگ، عددی گنگ است.	۱	(شهریور ۱۴۰۰)			
۵	به روش بازگشتی ثابت کنید، اگر $a > 0$ آن‌گاه $a + \frac{1}{a} \geq 2$.	۱	(دی ۹۸)			
۶	اگر $n \in \mathbb{N}$ ، $n 9k+7$ و $n 7k+6$ ، ثابت کنید $n=1$ یا $n=5$.	۱	(خرداد ۹۹)			
۷	اگر a عددی صحیح و فرد باشد و $b a+2$ در این صورت باقی‌مانده تقسیم عدد $a^2 + b^2 + 3$ را بر ۸ بیابید.	۱/۵	(دی ۹۷)			
۸	اگر $a c$ ، آن‌گاه حاصل $(([c, 1], (a, [a, b])))$ را به دست آورید.	۱				
۹	بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک دو عدد $3n+4$ و $7n+9$ را بیابید.	۱/۵				
۱۰	اگر باقی‌مانده تقسیم اعداد m و n بر ۱۷ به ترتیب ۵ و ۳ باشد، در این صورت باقی‌مانده تقسیم عدد $(2m-5n)$ را بر ۱۷ محاسبه کنید. (شهریور ۹۹ و دی ۹۹ با تغییر)	۱/۲۵				
۱۱	باقی‌مانده تقسیم $27^7 + 19$ را بر ۱۳ بیابید.	۱/۵	(شهریور ۹۸)			
۱۲	معادله هم‌نهشتی $5x \equiv 11 \pmod{21}$ را حل کرده و جواب عمومی آن را بنویسید.	۱/۲۵	(خرداد ۹۹)			
۱۳	دانش‌آموزی در یک آزمون علمی شرکت کرده است. او به سؤالات ۵ امتیازی و ۳ امتیازی پاسخ داده و مجموعاً ۴۲ امتیاز کسب کرده است. (پاسخ هر سؤال یا امتیاز کامل دارد یا امتیازی ندارد). این دانش‌آموز به چه صورت‌هایی توانسته این امتیاز را کسب کند؟ (شهریور ۱۴۰۱)	۱/۷۵				
۱۴	گراف G در شکل مقابل را در نظر بگیرید. (الف) دوری به طول ۴ بنویسید. (ب) دو مسیر به طول ۳ با شروع از رأس b بنویسید. (پ) $N_G[d]$ را با اعضا مشخص کنید. (ت) آیا G همبند است؟	۱/۲۵				
۱۵	ثابت کنید که تعداد رأس‌های فرد هر گراف، عددی زوج است.	۱	(خرداد ۹۹ و دی ۹۷)			
۱۶	گراف G ، ۶ رأسی ۳-منتظم است. (الف) اندازه گراف G را بیابید. (ب) نمودار گراف G را رسم کنید.	۰/۷۵	(خرداد ۹۹)			
۱۷	گراف کامل K_p دارای ۳۶ یال است. در این گراف مرتبه گراف و $\Delta(G)$ را مشخص کنید.	۱	(دی ۹۷)			
۲۰	موفق باشید.	جمع نمره				

ردیف	سؤالات	رشته: ریاضی و فیزیک	تألیفی	مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه
۱	درستی یا نادرستی عبارتهای زیر را مشخص کنید. الف) تعداد توابع غیریک‌به‌یک از مجموعه $A = \{a, b, c\}$ به خودش برابر ۲۱ است. ب) در گراف C_5 هر مجموعه احاطه‌گر مینیمال، احاطه‌گر مینیمم است.			نمره
۲	جاهای خالی را با عبارتهای مناسب پر کنید. الف) اصل لانه کبوتری در واقع قضیه‌ای است که با ثابت می‌شود. ب) با رقم‌های ۳، ۹، ۳ و ۹ تعداد کد پنج‌رقمی می‌توان نوشت.			۵/۰
۳	عدد احاطه‌گری گراف کدام گزینه از بقیه بزرگ‌تر است؟ K_V (۱) C_6 (۲) P_5 (۳) P_V (۴)			۵/۰
۴	در گراف G که شکل آن در مقابل داده شده است: الف) یک مجموعه احاطه‌گر مینیمال با ۳ عضو بنویسید. ب) عدد احاطه‌گری G را تعیین کنید.		(دی ۹۹)	۲
۵	در گراف شکل روبه‌رو یک مجموعه احاطه‌گر مینیمال مشخص کنید که مینیمم نباشد. (خرداد ۱۴۰۰)			۱
۶	ابتدا گراف P_4 را رسم کنید. سپس یک مجموعه احاطه‌گر مینیمم از آن را مشخص کنید. (خرداد ۱۴۰۱)			۱
۷	می‌خواهیم ۸ نفر را که دوه‌دو برادر یکدیگرند در دو طرف طول یک میز مستطیل‌شکل بنشانیم. اگر بخواهیم هر نفر روبه‌روی برادرش بنشیند، این کار را به چند روش می‌توان انجام داد؟ (دی ۱۴۰۱)			۱
۸	معادله $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 14$ چند جواب صحیح و نامنفی دارد، به شرط آنکه $x_1 > 2$ و $x_3 > 3$ باشند؟ (دی ۹۸)			۱
۹	برای کنار هم قرار گرفتن ۴ دانش‌آموز پایه دوازدهم و ۶ دانش‌آموز پایه یازدهم مسئله‌ای طرح کنید که پاسخ آن $7! \times 4!$ باشد. (شهریور ۱۴۰۱)			۱
۱۰	هشت نفر به چند روش می‌توانند در سه اتاق، سه نفره، چهار نفره و یک نفره قرار بگیرند؟ (شهریور ۹۹)			۵/۷۵
۱۱	قرار است چهار مدرس T_1, T_2, T_3 و T_4 در چهار جلسه متوالی در چهار کلاس C_1, C_2, C_3 و C_4 به گونه‌ای تدریس کنند که هر مدرس در هر کلاس دقیقاً یک جلسه تدریس کند. برای این منظور برنامه‌ریزی نمایید. (شهریور ۹۸)			۱

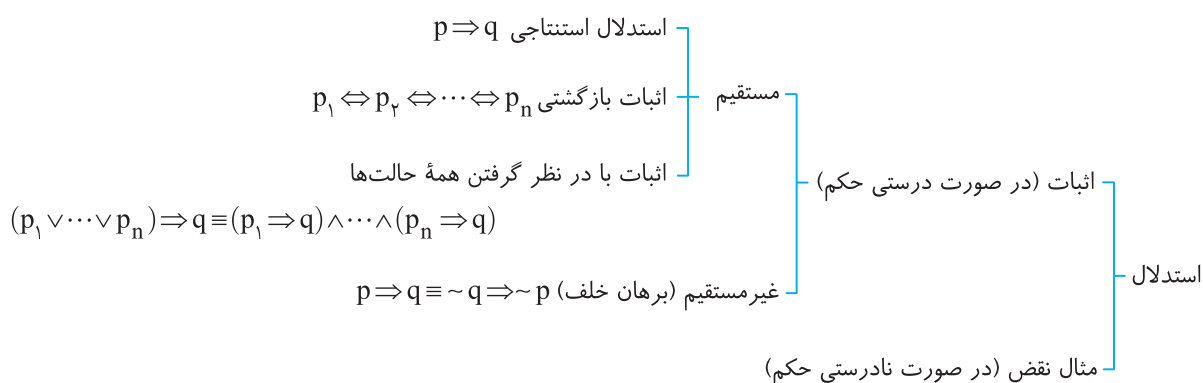
ردیف	سؤالات	نمره
۱۲	الف) مربع لاتین A را در نظر بگیرید. با اعمال جایگشت $1 \rightarrow 3$ $2 \rightarrow 2$ $3 \rightarrow 4$ $4 \rightarrow 1$ مربع لاتین B را به دست آورید. ب) آیا دو مربع لاتین A و B متعامدند؟ دلیل بیاورید.	۲
۱۳	از بین اعداد طبیعی ۱ تا ۳۰۰، $(1 \leq n \leq 300)$ چند عدد وجود دارد که بر ۴ بخش پذیر است ولی بر ۵ بخش پذیر نیست؟ (دی ۱۴۰۰)	۱/۵
۱۴	در یک کلاس ۳۴ نفری، ۱۵ نفر فوتبال، ۱۱ نفر والیبال و ۹ نفر بسکتبال بازی می کنند. اگر بدانیم ۳ نفر هم فوتبال، هم والیبال و هم بسکتبال بازی می کنند و ۵ نفر فوتبال و والیبال، ۶ نفر والیبال و بسکتبال و ۳ نفر فوتبال و بسکتبال بازی می کنند، مشخص کنید چند نفر فقط در یک رشته بازی می کنند. (خرداد ۱۴۰۰)	۱/۷۵
۱۵	در بین اعداد طبیعی مانند n، به طوری که $1 \leq n \leq 100$، چند عدد وجود دارد که بر ۶ یا ۱۰ بخش پذیر است؟ (خرداد ۹۹)	۱
۱۶	ثابت کنید در بین هر سه عدد طبیعی، حداقل دو عدد طبیعی وجود دارد که مجموعشان عددی زوج است. (دی ۱۴۰۰)	۱
۱۷	حداقل چند نقطه از داخل مثلثی متساوی الاضلاع به طول ضلع ۲، انتخاب کنیم تا مطمئن باشیم حداقل دو نقطه از آنها فاصله شان کمتر از ۱ است؟ (شهریور ۱۴۰۱)	۱/۲۵
۱۸	۵۴ شاخه گل را حداکثر در چند گلدان قرار دهیم تا اطمینان داشته باشیم گلدانی هست که در آن حداقل ۵ شاخه گل قرار گرفته است؟ (خرداد ۱۴۰۰)	۰/۷۵
	موفق باشید.	جمع نمره ۲۰

مرورنامه

استدلال ریاضی

فصل اول درس اول

در برخورد با هر مسئله ریاضی الگوریتم زیر را بررسی می‌کنیم.



- **مثال نقض:** به مثالی که نشان می‌دهد یک حکم کلی درست نیست، **مثال نقض** می‌گوییم.
- **استدلال استنتاجی:** به نتیجه‌گیری منطقی بر پایه واقعیت‌هایی که درستی آن‌ها را پذیرفته‌ایم، **استدلال استنتاجی** گفته می‌شود.
- **گزاره‌های هم‌ارز (معادل):** دو حکم را هم‌ارز یا معادل می‌گوییم هرگاه بتوان درستی هر یک را از درستی دیگری نتیجه گرفت.

بخش‌پذیری در اعداد صحیح

فصل اول درس دوم

تعریف عدد صحیح a که مخالف صفر است، **شمارنده** عدد b است - یا a, b را می‌شمارد (عاد می‌کند) یا $a | b$ یا b بر a بخش‌پذیر است - هرگاه عددی صحیح مانند q وجود داشته باشد به‌طوری که $b = aq$. اگر عدد b بر عدد a بخش‌پذیر نباشد یا عدد a عدد b را عاد نکند، می‌نویسیم $a \nmid b$.

ویژگی‌های رابطه عاد کردن

- **ویژگی ۱:** اگر عدد a عدد b را بشمارد، آن‌گاه عدد a هر مضرب صحیح عدد b را نیز می‌شمارد، یعنی $a | b \Rightarrow \forall m \in \mathbb{Z} : a | mb$
- **ویژگی ۲:** اگر عدد a عدد b را بشمارد و عدد b نیز عدد c را بشمارد، آن‌گاه عدد a عدد c را می‌شمارد، یعنی $a | b \wedge b | c \Rightarrow a | c$

اثبات:

$$a | b \Rightarrow \exists q_1 \in \mathbb{Z} : b = aq_1 \quad (۱)$$

$$b | c \Rightarrow \exists q_2 \in \mathbb{Z} : c = bq_2 \xrightarrow{(۱)} c = (aq_1)q_2 = a(q_1q_2) \xrightarrow{q_1q_2=q} c = aq \Rightarrow a | c$$

- **ویژگی ۳:** اگر عددی دو عدد را بشمارد، آن‌گاه مجموع و تفاضل آن دو عدد را نیز می‌شمارد، یعنی $a | b \wedge a | c \Rightarrow a | b \pm c$

اثبات:

$$\begin{cases} a | b \Rightarrow \exists q_1 \in \mathbb{Z} : b = aq_1 \\ a | c \Rightarrow \exists q_2 \in \mathbb{Z} : c = aq_2 \end{cases} \Rightarrow b \pm c = a(\underbrace{q_1 \pm q_2}_q) \Rightarrow a | b \pm c$$

ویژگی ۴: اگر $a|b$ و $b \neq 0$ ، آن گاه $|a| \leq |b|$.

اثبات: چون $a|b$ ، پس عددی صحیح مانند q وجود دارد به طوری که $b = aq$ و چون $b \neq 0$ ، پس $q \neq 0$ و چون $q \in \mathbb{Z}$ ، پس $|q| \geq 1$. حال اگر طرفین نامساوی اخیر را در $|a|$ ضرب کنیم، خواهیم داشت

$$1 \leq |q| \xrightarrow{|a| \geq 0} |a| \times 1 \leq |a| |q| \Rightarrow |a| \leq |aq| \Rightarrow |a| \leq |b|$$

نتیجه: اگر $a|b$ و $b|a$ ، آن گاه $a = \pm b$.

اثبات:

$$\begin{cases} a|b \xrightarrow{(۴)} |a| \leq |b| \\ b|a \xrightarrow{(۴)} |b| \leq |a| \end{cases} \Rightarrow |a| = |b| \Rightarrow a = \pm b$$

• **عدد اول:** هر عدد طبیعی و بزرگتر از ۱ که هیچ شمارندهٔ مثبتی به جز ۱ و خودش نداشته باشد، **عدد اول** نامیده می‌شود. مجموعهٔ اعداد اول که ثابت شده است مجموعه‌ای نامتناهی است، به صورت $P = \{2, 3, 5, 7, 11, \dots\}$ نمایش داده می‌شود.

◆ **تعریف** عدد طبیعی d را **ب.م.م.** دو عدد صحیح a و b می‌نامیم (a و b هر دو با هم صفر نیستند) و می‌نویسیم $(a, b) = d$ هرگاه دو شرط (الف) و (ب) برقرار باشند و اگر این دو شرط برقرار باشند، آن گاه $(a, b) = d$.

(الف) $d|a, d|b$

(ب) $\forall m > 0: m|a, m|b \Rightarrow m \leq d$

◆ **تعریف** عدد طبیعی c را **ک.م.م.** دو عدد صحیح و ناصفر a و b می‌نامیم و می‌نویسیم $[a, b] = c$ هرگاه دو شرط (الف) و (ب) برقرار باشند و اگر این دو شرط برقرار باشند، آن گاه $[a, b] = c$.

(الف) $a|c, b|c$

(ب) $\forall m > 0: a|m, b|m \Rightarrow c \leq m$

◆ **توجه:** با توجه به تعاریف ب.م.م. و ک.م.م. داریم

$$a|b \Rightarrow (a, b) = |a| \quad ۱$$

$$a|b \Rightarrow [a, b] = |b| \quad ۲$$

قضیه تقسیم

اگر a عددی صحیح و b عددی طبیعی باشد، آن گاه اعداد صحیح یکتایی مانند q و r یافت می‌شوند به طوری که $a = bq + r$ و $0 \leq r < b$.

هم‌نهشتی در اعداد صحیح و کاربردها

فصل اول درس سوم

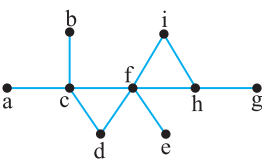
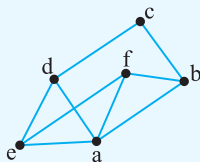
◆ **تعریف** برای هر عدد طبیعی مانند m و هر دو عدد صحیح مانند a و b ، اگر $m|a - b$ ، می‌گوییم a **هم‌نهشت** با b است به پیمانهٔ m و می‌نویسیم $a \equiv b^m$. تعریف رابطهٔ هم‌نهشتی به پیمانهٔ m به زبان ریاضی عبارت است از

$$\forall a, b \in \mathbb{Z} \quad \forall m \in \mathbb{N}: a \equiv b^m \Leftrightarrow m|a - b$$

قرارداد

مجموعهٔ همهٔ اعداد صحیحی را که باقی‌ماندهٔ تقسیم آن‌ها بر عدد طبیعی m برابر r است، یعنی $\{x \in \mathbb{Z} | x = mk + r\}$ **کلاس** یا **دستهٔ هم‌نهشتی** r به پیمانهٔ m می‌نامیم و آن را با نماد $[r]_m$ نمایش می‌دهیم.

ردیف	سؤالات	نمره	امتحان نهایی: ریاضیات گسسته	رشته: ریاضی و فیزیک	تألیفی	مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه
۱	درستی یا نادرستی گزاره‌های زیر را مشخص کنید. الف) دو گزاره «نقطه C روی عمودمنصف پاره خط AB قرار دارد.» و «فاصله نقطه C از دو سر پاره خط AB یکسان است.» هم‌ارز هستند. ب) اگر a, b و c عددهایی صحیح باشند و $ab c$ ، آن‌گاه $a c$ و $b c$. پ) اگر $\delta(G) = 0$ ، آن‌گاه همواره گراف G ناهمبند است. ت) اگر D یک مجموعه احاطه‌گر گراف G باشد و $D \subseteq D'$ ، آن‌گاه D' نیز یک مجموعه احاطه‌گر گراف G است.	۱				
۲	جاهای خالی را با عبارتهای مناسب پر کنید. الف) در تقسیم عدد $143 - 17$ ، باقی‌مانده و خارج قسمت است. ب) در گراف G از مرتبه p و اندازه q، برای رأس دلخواه $v \in G$ ، حاصل $\deg_G(v) + \deg_{\bar{G}}(v)$ برابر است. پ) مجموع درایه‌های هر مربع لاتین 5×5 برابر است.	۱				
۳	با استفاده از برهان خلف ثابت کنید اگر x یک عدد گنگ باشد، $\frac{1}{x}$ نیز عددی گنگ است.	۱				
۴	ثابت کنید اگر a و b دو عدد حقیقی باشند، آن‌گاه $a^2 + ab + b^2 \geq 0$.	۱				
۵	ثابت کنید اگر $a b$ و $a \neq 0$ ، آن‌گاه $ a \leq b $.	۱				
۶	اگر باقی‌مانده تقسیم عدد a بر ۷ برابر ۶ باشد، باقی‌مانده تقسیم عدد $2a + 3$ بر ۱۴ را به‌دست آورید.	۱				
۷	معادله سیاله خطی $5x + 11y = 36$ را حل کنید و جواب عمومی آن را به‌دست آورید.	۱				
۸	تعداد یال‌های یک گراف ۵-منتظم از مرتبه ۲۰ چقدر از تعداد یال‌های یک گراف کامل مرتبه ۹ بیشتر است؟	۱				
۹	گراف روبه‌رو را در نظر بگیرید و به سؤالات زیر پاسخ دهید. الف) یک دور به طول ۶ در این گراف بنویسید. ب) $N_G(a)$ را مشخص کنید.	۵/۰				
۱۰	با توجه به گراف روبه‌رو، به سؤالات زیر پاسخ دهید. الف) یک مجموعه احاطه‌گر مینیمال ۴ عضوی بنویسید. ب) عدد احاطه‌گری گراف را با راه‌حل کامل مشخص کنید.	۲/۲۵				



ردیف	سؤالات	نمره
۱۱	گراف روبه‌رو را در نظر بگیرید. الف) یک مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمال ۳ عضوی بنویسید. ب) با افزودن کدام بال، عدد احاطه‌گری گراف ۲ خواهد شد.	۱
۱۲	الف) گراف شکل زیر چند γ-مجموعه دارد؟ همهٔ γ-مجموعه‌های آن را بنویسید. ب) برای این گراف، دو مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمال غیرمینیمم با تعداد عضوهای نابرابر مشخص کنید.	۱/۵
۱۳	۹ نفر برای صعود به قلهٔ دنا به چند روش می‌توانند به گروه‌های ۲، ۳ و ۴ نفری تقسیم شوند؟	۰/۷۵
۱۴	تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادلهٔ $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 8$ با شرط $x_2 > 3$ و $x_1 \geq 2$ را به دست آورید؟	۱/۵
۱۵	۳ برادر می‌خواهند با ۳ نوع موتورسیکلت متمایز در ۳ پیست موتورسواری متفاوت در ۳ روز آخر هفته مسابقه دهند به طوری که هر برادر با هر موتورسیکلت در هر پیست یک بار مسابقه داده باشد و نیز هر موتورسیکلت در هر پیست دقیقاً یک بار استفاده شده باشد. به کمک مربع لاتین برای این مسئله برنامه‌ریزی کنید.	۱/۵
۱۶	چند بارکد کالا با شماره‌های پنج‌رقمی می‌توان ساخت که در آن‌ها هریک از رقم‌های ۱، ۳ و ۷ حداقل یک بار ظاهر شوند؟	۱/۷۵
۱۷	۱۰ نقطهٔ داخل مربعی به ضلع واحد مفروض‌اند. ثابت کنید فاصلهٔ حداقل دو نقطه از این ۱۰ نقطه کمتر از $\frac{\sqrt{2}}{3}$ است.	۱/۲۵
	موفق باشید.	جمع نمره ۲۰

پاسخ تشریحی آزمون (۱)

۱ الف) درست. (۰/۷۵) بنابر فرض $k=n(n+1)$ که در آن $n \in \mathbb{N}$ پس

$$4k+1=4n(n+1)+1=4n^2+4n+1=(2n+1)^2$$

که مربع کامل است.

ب) نادرست. (۰/۷۵) قرار دهید $n=4$. در این صورت $2^4-1=15$ عددی اول نیست.

پ) درست. (۰/۷۵) اگر $n=2k+1$ و $m=2k'+1$ که $k, k' \in \mathbb{Z}$ دو عدد فرد باشند، آن گاه

$$m+n=2k+1+2k'+1=2(k+k'+1)=2k''$$

که عددی زوج است.

ت) نادرست. (۰/۷۵) برای دو عدد گنگ $1-\sqrt{2}$ و $1+\sqrt{2}$ داریم

$$(1-\sqrt{2})+(1+\sqrt{2})=2$$

۲ الف) $a=0$ یا $b=0$ (ب) ناپیوسته (پ) ناصغر (۰/۷۵)

۳ الف) گزینه (۲) (۰/۷۵) - چون هر دو تابع $y=x^3$ و $y=\sqrt[3]{x}$ اکیداً صعودی اند، پس $a < b$ اگر و تنها اگر $a^3 < b^3$. برای گزینه های دیگر مثال نقض می آوریم:

$$a=-2, b=1 \Rightarrow a < b, a^2=4 > 1=b^2$$

گزینه (۱):

$$a=b=1 \Rightarrow (a-b)^2=0, a < b$$

گزینه (۳):

$$a=-2, b=1 \Rightarrow a < b, a^2=4 > 1=b^2$$

گزینه (۴):

ب) گزینه (۳) (۰/۷۵) - ابتدا توجه کنید که $\frac{n^2(n+1)^2}{4} = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$

بنابراین $n \in A$ اگر و تنها اگر $\frac{n(n+1)}{2}$ زوج باشد. اکنون با در نظر گرفتن همه حالت های ممکن برای n ، مجموعه A را مشخص می کنیم:

$$n=1 \Rightarrow \frac{n(n+1)}{2} = \frac{1 \times 2}{2} = 1 \Rightarrow 1 \notin A$$

$$n=2 \Rightarrow \frac{n(n+1)}{2} = \frac{2 \times 3}{2} = 3 \Rightarrow 2 \notin A$$

$$n=3 \Rightarrow \frac{n(n+1)}{2} = \frac{3 \times 4}{2} = 6 \Rightarrow 3 \in A$$

$$n=4 \Rightarrow \frac{n(n+1)}{2} = \frac{4 \times 5}{2} = 10 \Rightarrow 4 \in A$$

$$n=5 \Rightarrow \frac{n(n+1)}{2} = \frac{5 \times 6}{2} = 15 \Rightarrow 5 \notin A$$

$$n=6 \Rightarrow \frac{n(n+1)}{2} = \frac{6 \times 7}{2} = 21 \Rightarrow 6 \notin A$$

$$n=7 \Rightarrow \frac{n(n+1)}{2} = \frac{7 \times 8}{2} = 28 \Rightarrow 7 \in A$$

$$n=8 \Rightarrow \frac{n(n+1)}{2} = \frac{8 \times 9}{2} = 36 \Rightarrow 8 \in A$$

$$n=9 \Rightarrow \frac{n(n+1)}{2} = \frac{9 \times 10}{2} = 45 \Rightarrow 9 \notin A$$

$$n=10 \Rightarrow \frac{n(n+1)}{2} = \frac{10 \times 11}{2} = 55 \Rightarrow 10 \notin A$$

$$n=11 \Rightarrow \frac{n(n+1)}{2} = \frac{11 \times 12}{2} = 66 \Rightarrow 11 \in A$$

بنابراین $A = \{3, 4, 7, 8, 11\}$ ، یعنی A پنج عضوی است.

$$n=2k \text{ (۰/۷۵)} \Rightarrow n^2-5n+7=4k^2-10k+6+1 \text{ (۰/۷۵)}$$

$$=2(2k^2-5k+3)+1 \text{ (۰/۷۵)}=2q+1 \text{ (۰/۷۵)}$$

۵ الف) درست. (۰/۷۵) اگر $n=2k+1$ عددی فرد باشد که $k \in \mathbb{Z}$ آن گاه

$$(2k+1)^2-1=4k^2+4k+1-1=4k(k+1) \text{ (۰/۷۵)}$$

$$=4 \times 2q \text{ (۰/۷۵)}=8q$$

توجه کنید که چون از بین دو عدد صحیح متوالی k و $k+1$ ، یکی زوج و دیگری فرد است، پس حاصل ضرب آن ها عددی زوج خواهد بود.

ب) نادرست. (۰/۷۵) عددهای ۱، ۳، ۴، ۷ و ۱۰ (۰/۷۵) را در نظر بگیرید. در این صورت

$$\bar{x} = \frac{1+3+4+7+10}{5} = 5 \text{ (۰/۷۵)}$$

که همان عدد وسط نیست.

۶ اگر $\alpha+2\beta$ گنگ نباشد (فرض خلف)، پس عددی گویاست. (۰/۷۵)

از طرفی طبق فرض $\alpha+\beta$ نیز عددی گویا است. (۰/۷۵) می دانیم تفاضل دو

عدد گویا عددی گویا است. (۰/۷۵) در نتیجه $\beta=(\alpha+2\beta)-(\alpha+\beta) \in \mathbb{Q}$.

(۰/۷۵) اما با توجه به فرض مسئله، β گنگ است. با توجه به تناقض

ایجاد شده، فرض خلف باطل است و حکم ثابت می شود. (۰/۷۵)

۷ فرض کنید $a, b \geq 0$. در این صورت

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \Leftrightarrow a+b \geq 2\sqrt{ab} \text{ (۰/۷۵)} \Leftrightarrow a+b-2\sqrt{ab} \geq 0 \text{ (۰/۷۵)}$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 \geq 0 \text{ (۰/۷۵)}$$

چون مربع هر عدد حقیقی عددی نامنفی است، پس نامساوی آخر همواره برقرار است. (۰/۷۵)

$$x^2+y^2+1 \geq xy+x+y \text{ (۰/۷۵)}$$

$$\Leftrightarrow 2x^2+2y^2+2 \geq 2xy+2x+2y \text{ (۰/۷۵)}$$

$$\Leftrightarrow (x^2-2x+1)+(y^2-2y+1)+(x^2-2xy+y^2) \geq 0 \text{ (۰/۷۵)}$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2+(y-1)^2+(x-y)^2 \geq 0 \text{ (۰/۷۵)}$$

چون مربع هر عدد حقیقی عددی نامنفی است و مجموع سه عدد نامنفی نیز عددی نامنفی است، پس نامساوی آخر همواره برقرار است. (۰/۷۵)

۹ بله وجود دارند. (۰/۷۵) برای مثال قرار دهید $X=0$ و $Y=-2$. (۰/۷۵)

در این صورت

$$x^2+y^2=0^2+(-2)^2=4=(0+(-2))^2=(x+y)^2 \text{ (۰/۷۵)}$$

پاسخ تشریحی آزمون (۲)

۱ الف) درست. (۰/۷۵) زیرا

$$(n, n+1) = \begin{cases} d|n \\ d|n+1 \end{cases} \Rightarrow d|(n+1)-n \Rightarrow d|1 \xrightarrow{d>0} d=1$$

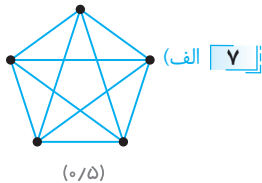
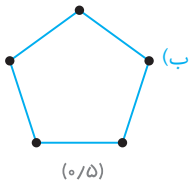
ب) نادرست. (۰/۷۵) برای مثال 3^0 و 3^1

$$\begin{cases} a|b \Rightarrow a^m|b^m \\ m \leq n \Rightarrow b^m|b^n \end{cases} \Rightarrow a^m|b^n \text{ (۰/۷۵)}$$

ت) نادرست. (۰/۷۵) برای مثال $2|3+5=8$ ولی $2 \nmid 3$ و $2 \nmid 5$.

$$\deg_G(v) + \deg_{\bar{G}}(v) = p-1 \quad (o/p5) \Rightarrow 9+12 = p-1 \quad (o/p5)$$

$$p=22 \quad (o/p5)$$



توجه کنید که در گراف k -منتظم از مرتبه δ داریم $\delta k = 2q$. بنابراین k باید عددی زوج باشد. چون گراف غیرتهی است، پس $k=2$ یا $k=4$.

$$(o/p5) \quad b-c-d-g-b \quad (ب) \quad a-b-g-c \quad (الف) \quad (o/p5)$$

(پ)

$$\deg_G(b) + \deg_{\bar{G}}(b) = p-1 \Rightarrow 3 + \deg_{\bar{G}}(b) = 7-1 \quad (o/p5)$$

$$\deg_{\bar{G}}(b) = 6-3=3 \quad (o/p5)$$

(ت) خیر، $(o/p5)$ زیرا دارای رأس ایزوله f است و هیچ مسیری از f به سایر رأسها وجود ندارد. $(o/p5)$ (ث) $N_{\bar{G}}[g] = \{g, e, f, a\}$. توجه کنید که $N_{\bar{G}}[g]$ متشکل از g و رأسهایی از گراف است که در G با g مجاور نیستند.

(الف) $(o/p5)$ گرافی از مرتبه n را که درجه تمام رئوس آن با هم مساوی $(o/p5)$ و برابر با عدد k ، $(o \leq k < n)$ باشد. گراف k -منتظم مرتبه n می نامند.

$$\sum_{i=1}^{\delta} \deg(v_i) = 2q \Rightarrow 5 \times 3 = 2q \quad (o/p5) \quad (ب) \quad \text{خیر، } (o/p5)$$

پاسخ تشریحی آزمون (۵)

(الف) درست $(o/p5)$ (ب) نادرست $(o/p5)$ - شکل درست شرط لازم و کافی برای وجود جواب $(a, m) | b$ است. در حقیقت معادله هم نهشتی

$ax \equiv b \pmod{m}$ دارای جواب است اگر و فقط اگر $(a, m) | b$ نادرست $(o/p5)$.
- برای مثال در گراف a و b یعنی K_2 داریم $\Delta(G) = \delta(G) = 1$ و $p=2$.

بنابراین $\Delta(G) + \delta(G) = p$ نادرست $(o/p5)$ - برای مثال گراف



(الف) $(o/p5)$ k . در گراف k -منتظم، همه رأسها از درجه k هستند.

بنابراین $\Delta = \delta = k$. $(o/p5)$ $|2m|$ توجه کنید که

$$2m | 6m^3 \Rightarrow (2m, 6m^3) = 2m | 2m$$

(پ) همبند $(o/p5)$ (ت) $a = \pm b$ $(o/p5)$

(۳) چون ab فرد است، پس a و b هر دو فردند. بنابراین $(o/p5)$ $a = 2k+1$

و $b = 2k'+1$ که $k, k' \in \mathbb{Z}$ و در نتیجه

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 &= (2k+1)^2 + (2k'+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 + 4k'^2 + 4k' + 1 \quad (o/p5) \\ &= 2(2k^2 + 2k + 2k'^2 + 2k' + 1) \quad (o/p5) = 2q \quad (o/p5) \end{aligned}$$

پس $a^2 + b^2$ زوج است.

(۴) فرض کنید r یک عدد گویا و x عددی گنگ است. نشان می دهیم

$r+x$ عددی گنگ است. به خلف فرض کنید $r+x$ گویا است. $(o/p5)$

می دانیم تفاضل دو عدد گویا عددی گویا است، پس $(r+x) - r \in \mathbb{Q}$ ، $(o/p5)$

یعنی $x \in \mathbb{Q}$. این با فرض گنگ بودن x تناقض دارد. پس فرض خلف

باطل و حکم ثابت می شود. $(o/p5)$

(۹) ابتدا توجه کنید که $(7, 4) = 1$. پس معادله جواب دارد.

$$7x \equiv 1 \Rightarrow 7x \equiv 4 \times 5 + 1 \quad (o/p5) \Rightarrow 7x \equiv 21 \quad (o/p5)$$

$$\frac{(7, 4) = 1}{\div 7} \rightarrow x \equiv 3 \quad (o/p5) \Rightarrow x = 4k + 3 \quad (o/p5)$$

(الف) چون $1 | 185$ ، $(6, 7)$ ، پس معادله جواب دارد. $(o/p5)$

(ب)

$$6x \equiv 185 \quad (o/p5) = 23 \times 7 + 24 \quad (o/p5) \Rightarrow 6x \equiv 24 \quad (o/p5) \xrightarrow{\div 6} (6, 7) = 1$$

$$x \equiv 4 \quad (o/p5) \Rightarrow x = 7k + 4 \quad (o/p5) \xrightarrow[\text{در معادله}]{\text{جایگذاری}}$$

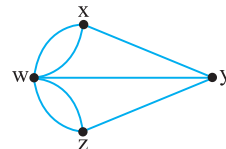
$$6(7k+4) + 7y = 185 \quad (o/p5) \Rightarrow 42k + 24 + 7y = 185$$

$$7y = -42k + 161 \Rightarrow y = -6k + 23 \quad (o/p5)$$

پاسخ تشریحی آزمون (۴)

(الف) نادرست. $(o/p5)$ گراف حاصل از مدل سازی پل کونیگسبرگ در

شکل زیر رسم شده است. چون بین دو رأس X و W و نیز بین دو رأس Z و Y دو یال وجود دارد، پس این گراف ساده نیست.



(ب) نادرست. $(o/p5)$ برای مثال گراف K_4 رأس زوج دارد. (پ) درست $(o/p5)$

(ت) نادرست. $(o/p5)$ به جای «همسایگی بسته» باید گفته شود «همسایگی باز» تا گزاره درست شود. در حقیقت، در هر گراف ساده، تعداد عضوهای مجموعه همسایگی باز یک رأس برابر درجه آن رأس است.

$$(الف) طوقه \quad (o/p5) \quad (ب) \quad \frac{7 \times 6}{2} = 21 \quad (o/p5) \quad (پ) \quad \text{همبند} \quad (o/p5)$$

(ت) مجاور $(o/p5)$

$$(الف) \quad \frac{n(n-1)}{2} \quad (o/p5) \quad (ب) \quad \text{دور} \quad (o/p5)$$

(۴) گراف ساده ای را در نظر بگیرید که رأسهای آن افراد حاضر در اتاق

باشند و این رأسها را با $v_1, \dots, v_p$ نشان دهید. فرض کنید دور رأس در این گراف مجاورند اگر و تنها اگر افراد متناظر به آن با یکدیگر دست داده باشند. $(o/p5)$ در این صورت

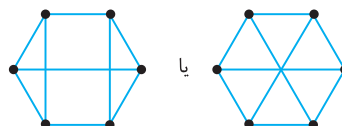
$$\sum_{i=1}^p \deg(v_i) = 2q \quad (o/p5) \Rightarrow 6 \times 2 + \deg(v_p) = 2q \quad (o/p5)$$

$$\deg(v_p) = 2q - 12 = 2k \quad (o/p5)$$

در نتیجه درجه رأس هفتم عددی زوج است، یعنی نفر هفتم نمی تواند دقیقاً با ۵ نفر دست داده باشد. $(o/p5)$

$$(۵) \quad q = 2p - 3 \quad (o/p5) \Rightarrow \frac{3p}{2} = 2p - 3 \quad (o/p5) \Rightarrow p = 6 \quad (o/p5)$$

به یکی از دو گراف زیر $(o/5)$ نمره داده شود.



۱۴ الف) $b-c-e-d-b$ (ب) $b-c-e-d$ (ج) $b-d-e-c$ (د) $N_G[d]=\{b, c, e, d\}$ (ه) خیر (و) چون رأس a در آن ایزوله است.

۱۵ فرض کنید G یک گراف، A مجموعه همه رئوس فرد گراف G و B مجموعه همه رئوس زوج گراف G باشد. در این صورت داریم

$$\sum_{v \in V(G)} \deg(v) = \sum_{v \in A} \deg(v) + \sum_{v \in B} \deg(v)$$

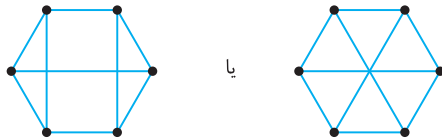
از طرفی می‌دانیم مجموع درجات رئوس گراف G عددی زوج است، یعنی

$$\sum_{v \in V(G)} \deg(v) = 2k$$

همچنین $\sum_{v \in B} \deg(v) = 2q$ نیز عددی زوج است. پس تفاضل آن‌ها، یعنی $\sum_{v \in A} \deg(v) = 2q - 2k$ عددی زوج است. می‌دانیم تعدادی زوج عدد فرد حاصل زوج و تعدادی فرد عدد حاصل فرد تولید می‌کنند. بنابراین تعداد اعضای A باید زوج باشد.

$$3 \times 6 = 2q \Rightarrow q = 9 \quad (o/p5)$$

۱۶ الف) (ب) رسم یکی از گراف‌های زیر کافی است. (و) (پ)



۱۷

$$q(K_p) = \frac{p(p-1)}{2} \quad (o/p5) \Rightarrow \frac{p(p-1)}{2} = 36 \quad (o/p5)$$

$$p(p-1) = 72 = 9 \times 8 \Rightarrow p = 9 \quad (o/p5)$$

$$\Delta(G) = p-1 = 8 \quad (o/p5)$$

پاسخ تشریحی آزمون (۶)

۱ الف) نادرست (و) برای مثال $-3 < 2, (-3)^2 = 9 < 4 = 2^2$ (ب) نادرست (و) برای مثال قرار دهید $x=9$ و $y=16$ ، در این صورت $\sqrt{x+y} = \sqrt{9+16} = 5 \neq \sqrt{9} + \sqrt{16} = 3+4=7$ (پ) درست (و) گراف فرد منتظم مرتبه فرد قابل رسم نیست. (ت) نادرست (و) برای مثال، اگر گراف G رأس ایزوله داشته باشد، آن‌گاه $\delta(G)=0$.

$$\binom{8}{2} = 28 \quad (o/p5) \quad \text{الف) ۲}$$

(ب) دو برابر (و) (پ) $-9 - (o/p5) - 8 \Rightarrow q = -9, r = 8$ (و) (و) $-127 = 15 \times (-9) + 8 \Rightarrow q = -9, r = 8$

۳ برای a دو حالت ممکن است رخ دهد:

حالت اول: اگر $a=0$ ، آن‌گاه حکم برقرار است. (و) (پ) $a \neq 0$ ، آن‌گاه a^{-1} (وارون a) یک عدد حقیقی است. (و) (پ) با ضرب دو طرف رابطه $ab=0$ در a^{-1} داریم

$$ab=0 \Rightarrow a^{-1}(ab) = a^{-1} \times 0 \quad (o/p5) \Rightarrow (a^{-1}a)b = 0 \Rightarrow 1 \times b = 0$$

$$b=0 \quad (o/p5)$$

در نتیجه در هر دو حالت حکم برقرار است. (و) (پ)

۵

$$a + \frac{1}{a} \geq 2 \xrightarrow{a>0} a^2 + 1 \geq 2a \quad (o/p5)$$

$$\Leftrightarrow a^2 - 2a + 1 \geq 0 \quad (o/p5) \Leftrightarrow (a-1)^2 \geq 0 \quad (o/p5)$$

رابطه اخیر همواره برقرار است، پس با برگشت پذیری روابط حکم ثابت می‌شود. (و) (پ)

$$\begin{cases} n|9k+7 \xrightarrow{\times(-7)} n|-63k-49 \\ n|7k+6 \xrightarrow{\times 9} n|63k+54 \end{cases} \quad (o/p5) \quad \text{۶}$$

$$\xrightarrow{+} n|-63k-49+63k+54 \quad (o/p5)$$

$$n|5 \quad (o/p5) \xrightarrow{n \in \mathbb{N}} n=1 \text{ یا } n=5 \quad (o/p5)$$

۷ a عددی فرد است، بنابراین $a+2$ عددی فرد است و چون $b|a+2$ ، پس b نیز عددی فرد خواهد بود. (و) می‌دانیم مربع هر عدد فرد، مضربی از ۸ به علاوه ۱ است. (و) بنابراین می‌توانیم فرض کنیم $a^2 = 8m+1$ و $b^2 = 8n+1$ که در آن‌ها $m, n \in \mathbb{N}$.

$$a^2 + b^2 + 3 = (8m+1) + (8n+1) + 3 = 8(m+n) + 5 \quad (o/p5)$$

چون $0 \leq 5 < 8$ ، پس باقی‌مانده تقسیم $a^2 + b^2 + 3$ بر ۸ برابر ۵ است. (و) (پ)

$$[c, 1] = |c| \quad (o/p5), \quad a|[a, b] \Rightarrow (a, [a, b]) = |a| \quad (o/p5) \quad \text{۸}$$

از طرف دیگر، چون $a|c$ ، پس $|a| \mid |c|$. (و) (پ)

$$([c, 1], (a, [a, b])) = (|c|, |a|) = |a| \quad (o/p5)$$

۹ فرض کنید $d = (vn+9, 3n+4)$. در این صورت

$$\begin{cases} d|vn+9 \\ d|3n+4 \end{cases} \quad (o/p5) \Rightarrow d|(3n+4) - 3(vn+9) \quad (o/p5)$$

$$d|2vn+28-2vn-27 \Rightarrow d|1 \quad (o/p5) \xrightarrow{d>0} d=1 \quad (o/p5) \quad \text{۱۰}$$

$$\begin{cases} m=17q+5 \quad (q \in \mathbb{Z}) \\ n=17q'+3 \quad (q' \in \mathbb{Z}) \end{cases} \quad (o/p5) \Rightarrow 2m-5n=17(2q-5q')-5 \quad (o/p5)$$

$$2m-5n=17(2q-5q'-1)+12 \quad (o/p5) \Rightarrow r=12 \quad (o/p5) \quad \text{۱۱}$$

$$27^{13} \equiv 1 \quad (o/p5) \Rightarrow 27^{17} \equiv 17 \quad (o/p5) \Rightarrow 27^{17} + 19 \equiv 17 + 19 = 36 \equiv 1 \quad (o/p5) \quad \text{۱۲}$$

$$27^{17} + 19 \equiv 7 \quad (o/p5)$$

چون $0 \leq 7 < 13$ ، پس باقی‌مانده تقسیم $27^{17} + 9$ بر ۱۳ برابر ۷ است. (و) (پ)

$$2^{11} \equiv 35 \quad (o/p5) \Rightarrow 5x \equiv 35 \quad (o/p5) \xrightarrow{(5,1)=1} x \equiv 7 \quad (o/p5) \quad \text{۱۳}$$

$$x=11k+7, \quad k \in \mathbb{Z} \quad (o/p5)$$

فرض کنید این دانش‌آموز به x سؤال ۵ امتیازی و y سؤال ۳ امتیازی پاسخ داده است که در آن $x, y \in \mathbb{W}$. در این صورت

$$5x+3y=42 \Rightarrow 5x \equiv 42 \quad (o/p5) \Rightarrow x \equiv 0 \Rightarrow x=3k, k \in \mathbb{Z} \quad (o/p5)$$

$$5(3k)+3y=42 \quad (o/p5) \Rightarrow 15k+3y=42 \Rightarrow 3y=-15k+42$$

$$y=-5k+14, k \in \mathbb{Z} \quad (o/p5)$$

$$\begin{cases} x=0 \\ y=14 \end{cases} \quad (o/p5), \quad \begin{cases} x=3 \\ y=9 \end{cases} \quad (o/p5), \quad \begin{cases} x=6 \\ y=4 \end{cases} \quad (o/p5),$$

۱۳) تعریف کنید

$$A = \{n \in S | n = \delta k, k \in \mathbb{Z}\} \Rightarrow |A| = \left[\frac{400}{\delta} \right] = 80 \quad (0/75)$$

$$B = \{n \in S | n = \gamma k, k \in \mathbb{Z}\} \Rightarrow |B| = \left[\frac{400}{\gamma} \right] = 57 \quad (0/75)$$

در این صورت مجموعه اعدادی که نه بر ۵ و نه بر ۷ بخش پذیرند، برابر است با $A' \cap B'$. اکنون می توان نوشت

$$A \cap B = \{n \in S | n = 35k, k \in \mathbb{Z}\} \Rightarrow |A \cap B| = \left[\frac{400}{35} \right] = 11 \quad (0/75)$$

$$|A' \cap B'| = |(A \cup B)'| = |S| - |A \cup B| \quad (0/75)$$

$$= 400 - (80 + 57 - 11) \quad (0/75) = 274 \quad (0/75)$$

۱۴) تعریف کنید

$$A = \{1 \leq n \leq 200 | n = 4k, k \in \mathbb{Z}\} \quad (0/75) \Rightarrow |A| = \left[\frac{200}{4} \right] = 50 \quad (0/75)$$

$$B = \{1 \leq n \leq 200 | n = 7k, k \in \mathbb{Z}\} \quad (0/75)$$

در این صورت مجموعه اعدادی که بر ۴ بخش پذیرند ولی بر ۷ بخش پذیر نیستند، برابر است با $A \cap B'$ یا $A - B$. اکنون می توان نوشت

$$A \cap B = \{1 \leq n \leq 200 | n = 28k, k \in \mathbb{Z}\} \Rightarrow |A \cap B| = \left[\frac{200}{28} \right] = 7 \quad (0/75)$$

$$|A \cap B'| = |A - B| = |A| - |A \cap B| \quad (0/75) = 50 - 7 = 43 \quad (0/75)$$

۱۵)

$$\text{تعداد لانه ها} = n = 32 \times 31 = 992 \quad (0/75), \quad k+1=3 \Rightarrow k=2 \quad (0/75)$$

حال بنابر تعمیم اصل لانه کبوتری (۰/۷۵) داریم

$$\text{تعداد کبوترها} = 2 \times 992 + 1 = 1985 \quad (0/75)$$

۱۶) ثابت شده است که در هر گراف ساده، حداقل ۲ رأس درجه یکسان دارند. (۰/۷۵) حال گرافی تعریف کنید که رأس های آن دانش آموزان این کلاس باشند و دو رأس به یکدیگر وصل باشند اگر و تنها اگر دو دانش آموز نظیر آن رأس ها با هم دوست باشند. (۰/۵) حال بنابر ویژگی گفته شده از گراف ها، در این گراف حداقل دو رأس با درجه یکسان وجود دارد، یعنی حداقل دو دانش آموز تعداد دوست های یکسان دارند. (۰/۷۵)

پاسخ تشریحی آزمون (۱۵)

۱ الف) درست (۰/۷۵) - طبق ویژگی عمودمنصف، یک نقطه روی عمودمنصف یک پاره خط قرار دارد اگر و فقط اگر از دو سر آن پاره خط به یک فاصله باشد. ب) درست (۰/۷۵)

$$ab|c \Rightarrow c = abq \Rightarrow \begin{cases} c = a(bq) \Rightarrow a|c \\ c = b(aq) \Rightarrow b|c \end{cases}$$

ب) نادرست (۰/۷۵) - برای مثال گراف K_1 گرافی همبند است و در آن $\delta(G) = 0$. درست (۰/۷۵)

۲ الف) ۹ - (۰/۷۵) ۱۰ - (۰/۷۵) چون $10 = 17 \times (-9) + 10$ و $-143 = 17 \times 8 + 7$

$10 < 17$ پس $r=10$ و $q=-9$. ب) $p-1$ (۰/۷۵) پ) ۷۵ (۰/۷۵) - در هر سطر هر مربع لاتین 5×5 ، اعداد ۱، ۲، ۳، ۴ و ۵ یک بار ظاهر می شوند. پس مجموع درایه های هر سطر برابر است با $1+2+3+4+5=15$. بنابراین مجموع درایه های هر مربع لاتین 5×5 برابر است با $5 \times 15 = 75$.

۳) به خلف فرض کنید $\frac{1}{x}$ گنگ نباشد. در این صورت $\frac{1}{x}$ عددی

گویاست. (۰/۷۵) به روشنی $x \neq 0$. می دانیم حاصل ضرب یک عدد گویای ناصفر در یک عدد گنگ عددی گنگ است. (۰/۷۵) بنابراین باید حاصل

$$\frac{1}{x} \times x = 1 \in \mathbb{Q} \quad \text{که} \quad \frac{1}{x} \times x = 1 \in \mathbb{Q} \quad \text{که} \quad \text{تناقض}$$

است، یعنی فرض خلف باطل است و در نتیجه $\frac{1}{x}$ عددی گنگ است. (۰/۷۵)

$$a^2 + ab + b^2 \geq 0 \Leftrightarrow 2a^2 + 2ab + 2b^2 \geq 0 \quad (0/75)$$

$$\Leftrightarrow (a^2 + 2ab + b^2) + a^2 + b^2 \geq 0 \quad (0/75)$$

$$\Leftrightarrow (a+b)^2 + a^2 + b^2 \geq 0 \quad (0/75)$$

چون مربع هر عدد حقیقی، عددی نامنفی است و همه روابط برگشت پذیر هستند، پس حکم برقرار است. (۰/۷۵)

۵) چون $a|b$ ، پس $q \in \mathbb{Z}$ وجود دارد به طوری که $b = aq$ و چون $b \neq 0$ ،

پس $q \neq 0$ و در نتیجه $|q| \geq 1$. (۰/۷۵) بنابراین

$$|q| \geq 1 \Rightarrow |a||q| \geq |a| \quad (0/75) \Rightarrow |aq| \geq |a| \Rightarrow |b| \geq |a| \quad (0/75)$$

$$a = 7q + 6 \Rightarrow 2a = 14q + 12 \quad (0/75) \Rightarrow 2a + 3 = 14q + 15 \quad (0/75)$$

$$2a + 3 = 14(q+1) + 1 \Rightarrow 2a + 3 = 14q' + 1 \quad (0/75)$$

چون $14 < 15$ ، پس باقی مانده تقسیم $2a+3$ بر ۱۴ برابر ۱ است. (۰/۷۵)

$$\delta x + 11y \equiv 36 \pmod{5} \Rightarrow y \equiv \delta k + 1, k \in \mathbb{Z} \quad (0/75)$$

$$\delta x + 11(\delta k + 1) \equiv 36 \pmod{5} \Rightarrow \delta x \equiv -5\delta k + 25 \pmod{5}$$

$$x \equiv -11k + 5, k \in \mathbb{Z} \quad (0/75)$$

$$rp = 2q \Rightarrow \delta \times 20 = 2q \quad (0/75) \Rightarrow q = 50 \quad (0/75)$$

$$q(k_9) = \binom{9}{2} = 36 \quad (0/75) \Rightarrow \text{اختلاف تعداد یال ها} = 50 - 36 = 14 \quad (0/75)$$

$$\text{الف) } a - b - c - d - e - f - a \quad (0/75)$$

$$\text{ب) } N_G(a) = \{b, f, e, d\} \quad (0/75)$$

۱۰ الف) $\{a, b, f, g\}$. (۰/۷۵) توجه کنید که با حذف هر عضو این

مجموعه، خود آن رأس احاطه نمی شود. ب) چون $n=9$ و $\Delta=5$ ، پس

$$\gamma(G) \geq \left\lceil \frac{9}{5+1} \right\rceil = \left\lceil \frac{3}{2} \right\rceil = 2 \quad (0/5)$$

از سوی دیگر هر مجموعه احاطه گر باید دست کم یک عضو از هر یک از مجموعه های $\{a, b, c\}$ ، $\{f, e\}$ و $\{g, h\}$ داشته باشد. پس این گراف

مجموعه احاطه گر دو عضوی ندارد. (۰/۵) همچنین $\{c, f, g\}$ یک مجموعه احاطه گر این گراف است. پس $\gamma(G) = 3$. (۰/۵)

۱۱ الف) $\{a, d, f\}$ یا $\{a, d, i\}$ یا $\{g, d, i\}$ یا $\{h, d, i\}$

(یک مورد کافی است). (۰/۵) توجه کنید که در سه مجموعه اول، با حذف هر عضو مجموعه، خود آن رأس احاطه نمی شود. اما در مجموعه $\{h, d, i\}$ ، با

حذف عضو h رأس a ، با حذف عضو d خود این رأس و با حذف عضو i رأس f احاطه نمی شود. ب) یال ad یا di یا dg یا dh (یک مورد کافی است). (۰/۵)

توجه کنید که با افزودن یال ad یا di مجموعه $\{a, i\}$ ، با افزودن یال dg

مجموعه $\{g, i\}$ و با افزودن یال dh مجموعه $\{h, i\}$ احاطه گر خواهند بود. پس

$\gamma(G) \leq 2$. چون با افزودن هر یک از این یال ها، رأسی در گراف ایجاد نمی شود که با

همه رئوس دیگر مجاور باشد، پس $\gamma(G) \neq 1$. در نتیجه $\gamma(G) = 2$.

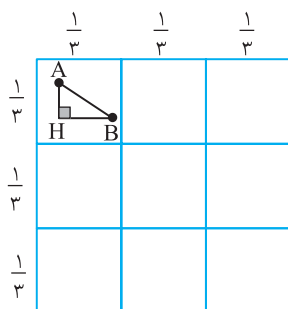
۱۷ ابتدا مانند شکل مربع را به ۹ مربع کوچک تر $\frac{1}{3} \times \frac{1}{3}$ افراز می کنیم. اگر

مربع های کوچک را لانه ها (۰/۷۵) و نقطه ها را کبوترها (۰/۷۵) فرض کنیم، آن گاه $10 = \text{تعداد کبوترها}$ ، $9 = \text{تعداد لانه ها}$

پس بنابر اصل لانه کبوتری، لانه ای وجود دارد که دست کم دو کبوتر درون آن قرار دارند، (۰/۷۵) یعنی دست کم دو نقطه درون یکی از مربع ها هستند (نقاط A و B در شکل). بنابراین

$$AH < \frac{1}{3} \Rightarrow AH^2 < \frac{1}{9}, \quad BH < \frac{1}{3} \Rightarrow BH^2 < \frac{1}{9} \quad (0/75)$$

$$AH^2 + BH^2 < \frac{2}{9} \Rightarrow AB^2 < \frac{2}{9} \Rightarrow AB < \frac{\sqrt{2}}{3} \quad (0/75)$$



پاسخ تشریحی آزمون (۱۶)

۱ الف نادرست (۰/۷۵) - بنابر متن کتاب درسی $17 \times 670041 \times 64 + 1 = 2^{25}$ که عددی اول نیست.

ب نادرست (۰/۷۵) - به عنوان مثال نقض $3 \not\equiv 8 \pmod{5}$ ، $5 \mid 10$ ، $3 \equiv 8 \pmod{5}$

پ نادرست (۰/۷۵) - تعداد رأس های زوج هر گراف می تواند عددی زوج یا فرد باشد.

۲ الف گنگ (۰/۷۵) - توجه کنید که

$$2\beta - \alpha = 2\beta + 2\alpha - 3\alpha = 2(\beta + \alpha) - 3\alpha$$

چون $2(\beta + \alpha)$ عددی گویا و -3α عددی گنگ است، پس مجموع آن ها، یعنی $2\beta - \alpha$ عددی گنگ خواهد بود. (ب جهت دار (۰/۷۵))

۳ گزینه (۲) - (۰/۷۵) می دانیم $77 - (2) = 79 \pmod{5}$ ، $\{x \in \mathbb{Z} \mid x = 12k + 5, k \in \mathbb{Z}\}$

پس عددی عضو این مجموعه است که باقی مانده تقسیم آن بر ۱۲ برابر ۵ باشد. در میان گزینه ها، فقط عدد ۷۷ این ویژگی را دارد.

۴

$$\frac{a^2}{1+a^4} \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{a^2(1+a^4)}{1+a^4} \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2a^2 \leq 1+a^4 \Leftrightarrow 1-2a^2+a^4 \geq 0 \quad (0/75)$$

$$\Leftrightarrow (1-a^2)^2 \geq 0 \quad (0/75)$$

چون مربع هر عدد حقیقی نامنفی است و همه روابط برگشت پذیر هستند، پس حکم ثابت می شود. (۰/۷۵)

۵

$$m \equiv 3 \pmod{17} \Rightarrow m^3 \equiv 27 \pmod{17} \Rightarrow m^3 \equiv 10 \pmod{17} \Rightarrow -m^3 \equiv -10 \pmod{17} \Rightarrow -m^3 \equiv 7 \pmod{17}$$

$$n \equiv 11 \pmod{17} \Rightarrow mn \equiv 33 \pmod{17} \Rightarrow mn \equiv -1 \pmod{17} \Rightarrow 2mn \equiv -2 \pmod{17}$$

$$2mn - m^3 \equiv -2 - 7 \pmod{17} \equiv -9 \pmod{17} \equiv 8 \pmod{17}$$

بنابراین

چون $0 \leq r < 17$ ، پس باقی مانده تقسیم $2mn - m^3$ بر ۱۷ برابر ۵ است.

پس $r = 5$ باقی مانده تقسیم است.

۱۲ الف این گراف چهار ۷-مجموعه دارد که عبارت اند از

$$\{b, g\} \quad (0/75), \quad \{d, g\} \quad (0/75), \quad \{e, b\} \quad (0/75), \quad \{e, d\} \quad (0/75)$$

توجه کنید که چون این گراف رأسی ندارد که با همه رئوس دیگر مجاور باشد، پس عدد احاطه گیری آن حداقل برابر ۲ است. بنابراین مجموعه های دو عضوی بیان شده ۷-مجموعه هستند و $\gamma(G) = 2$.

ب $\{d, f, h\}$ (۰/۷۵) و $\{a, c, f, h\}$ (۰/۷۵) توجه کنید که این دو مجموعه، احاطه گر غیرمینیم هستند چون تعداد عضوهای آن ها از ۲ بیشتر است. همچنین، با حذف هر عضو از این مجموعه ها، خود آن رأس احاطه نمی شود، یعنی این دو مجموعه، احاطه گر مینیمال هستند.

۱۳

$$\binom{9}{2} \binom{7}{3} \binom{4}{4} \quad (0/75) = 36 \times 35 \times 1 = 1260$$

۱۴

$$x_1 \geq 2 \Rightarrow y_1 = x_1 - 2 \geq 0 \quad (0/75)$$

$$x_2 > 3 \Rightarrow x_2 \geq 4 \Rightarrow y_2 = x_2 - 4 \geq 0 \quad (0/75)$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 8 \Rightarrow y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + x_3 + x_4 = 8 \quad (0/75)$$

$$y_1 + y_2 + x_3 + x_4 = 2 \quad (0/75)$$

$$\begin{aligned} \text{تعداد جواب های صحیح و نامنفی} &= \binom{n+k-1}{n} \quad (0/75) \\ &= \binom{2+4-1}{2} = \binom{5}{2} = 10 \quad (0/75) \end{aligned}$$

۱۵ با توجه به خواسته پرسش می توان نتیجه گرفت هدف یافتن دو مربع لاتین متعامد است، یکی برای موتورسیکلت ها و دیگری برای پیست، بنابراین

	برادر ۱	برادر ۲	برادر ۳
شنبه ۴	۱	۲	۳
شنبه ۵	۳	۱	۲
جمعه	۲	۳	۱

موتورسیکلت ها
(۰/۵)

	برادر ۱	برادر ۲	برادر ۳
شنبه ۴	۱	۳	۲
شنبه ۵	۳	۲	۱
جمعه	۲	۱	۳

پیست ها
(۰/۵)

۱۱	۲۳	۳۲
۳۳	۱۲	۲۱
۲۲	۳۱	۱۳

(۰/۵)

۱۶

مجموعه بار کدهایی که رقم ۱ ندارند $A =$

مجموعه بار کدهایی که رقم ۳ ندارند $B =$

مجموعه بار کدهایی که رقم ۷ ندارند $C =$

در این صورت مجموعه بار کدهایی که در آن ها ارقام ۱، ۳ و ۷ حداقل یک بار ظاهر می شوند، برابر $A' \cap B' \cap C'$ است. اکنون می توان نوشت

$$|S| = 10^5 \quad (0/75), \quad |A| = |B| = |C| = 9^5 \quad (0/75)$$

$$|A \cap B| = |A \cap C| = |B \cap C| = 8^5 \quad (0/75), \quad |A \cap B \cap C| = 7^5 \quad (0/75)$$

$$|A' \cap B' \cap C'| = |(A \cup B \cup C)'| = |S| - |A \cup B \cup C| \quad (0/75)$$

$$= 10^5 - (9^5 + 9^5 + 9^5 - 8^5 - 8^5 - 8^5 + 7^5) \quad (0/75) = 4350 \quad (0/75)$$