

فصل

معادله درجه دوم



معادله و مسائل توصیفی

درس
۱

رجوع به آرشيو

اتحاد: اگر یک تساوی به ازای هر عدد دلخواهی که به جای متغیرهایش قرار دهیم، صحیح باشد، به آن تساوی اتحاد می‌گوییم.
مثل اتحادهای آشنای مربع دوجمله‌ای، اتحاد جمله مشترک، اتحاد مزدوج و ...

اتحاد مربع دوجمله‌ای:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2, \quad (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

اتحاد مزدوج:

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

اتحاد جمله مشترک:

$$(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab$$

تساوی $3x+1=-2$ را در نظر بگیرید. اگر به جای x عدد -1 را قرار دهیم چه اتفاقی می‌افتد؟
 $3x+1=-2 \xrightarrow{x=-1} 3(-1)+1=-2 \Rightarrow -3+1=-2 \Rightarrow -2=-2 \checkmark$ **تساوی صحیح است.**

خب حالا اگر به جای x عدد 1 را قرار دهیم چه اتفاقی می‌افتد؟
 $3x+1=-2 \xrightarrow{x=1} 3(1)+1=-2 \Rightarrow 3+1=-2 \Rightarrow 4=-2 \times$ **تساوی صحیح نیست.**

به چنین تساوی‌هایی از اعداد و متغیرها که به ازای برخی از مقادیر صحیح است، **معادله** می‌گوییم.
مانند $3x+3=0$, $2x^2+1=9$, $2a-1=0$ و ...

مطلبی که در معادله برآیمان اهمیت دارد این است که عددهایی را پیدا کنیم که اگر به جای متغیر معادله قرار دهیم، تساوی صحیح باشد. مثلاً می‌خواهیم ببینیم در معادله $3x+3=0$ به جای x چه عددی قرار دهیم که تساوی صحیح باشد. این عدد را وقتی پیدا کردیم به آن، **ریشه معادله** یا **جواب معادله** می‌گوییم. در معادله $3x+3=0$ اگر به جای x عدد -1 را قرار دهیم آنگاه تساوی، صحیح است.

به عدد $x=-1$ که به ازای آن تساوی معادله صحیح شد، جواب یا ریشه معادله گفته می‌شود.
 $3x+3=0 \xrightarrow{x=-1} 3(-1)+3=0 \Rightarrow -3+3=0 \Rightarrow 0=0 \checkmark$

جواب معادله رو بطور به دست بیاریم؟
عجله نکنید، بگذارید اول انواع معادله را بگوئیم سپس جواب هر کدام را بررسی خواهیم کرد.
در این درس با دو نوع معادله، معادله درجه اول و معادله درجه دوم آشنا می‌شویم.

معادله درجه اول

مثال معادله $3x+1=0$ یک معادله درجه اول است، چون توان x در آن یک است.
☆ در حالت کلی معادله درجه اول به شکل $ax+b=0$ است که در آن a و b اعداد حقیقی هستند و a مخالف صفر است.

مثال معادله‌های زیر همگی درجه اول هستند:
 $2x+5=0$, $x+1=3$, $\sqrt{5}x-10=0$, $\frac{1}{3}x+2=7$, $3x=0$

دقت در معادله درجه اول:

☆ a و b هر عددی می‌توانند باشند (اعشاری، کسری، رادیکالی و صحیح)، فقط a نمی‌تواند صفر باشد.

☆ b اشکالی ندارد صفر باشد، مانند $3x=0$

☆ x حتماً یک است.

جواب معادله درجه اول

می‌خواهیم جواب معادله $ax + b = 0$ را به دست آوریم:

$$ax + b = 0 \xrightarrow[\text{طرف دیگر تساوی می‌بریم}]{\text{اعداد ثابت را با تغییر علامت به}} ax = -b \xrightarrow[\text{بر ضریب مجهول می‌کنیم}]{\text{طرف معلوم را تقسیم}} x = \frac{-b}{a}$$

☆ جواب معادله $ax + b = 0$ به شکل $x = \frac{-b}{a}$ است که در آن $a \neq 0$ است.

مثال: جواب معادله $2x - 5 = 9$ به شکل زیر است:

$$2x - 5 = 9 \xrightarrow[\text{یک طرف می‌بریم}]{\text{اعداد معلوم را با تغییر علامت به}} 2x = 9 + 5 \Rightarrow 2x = 14 \xrightarrow[\text{بر ضریب مجهول}]{\text{طرف معلوم تقسیم}} x = \frac{14}{2} = 7$$

$x = 7$ جواب معادله $2x - 5 = 9$ است.



پایخته

جواب معادله‌های زیر را به دست آورید.

$$1) 3x - 9 = 6 \Rightarrow 3x = 6 + 9 = 15 \Rightarrow x = \frac{15}{3} = 5$$

$$2) 10x - 3 = 4 \Rightarrow 10x = 4 + 3 = 7 \Rightarrow x = \frac{7}{10}$$

$$3) 7x - 2 = 6x - 3 \xrightarrow[\text{اعداد ثابت یک طرف}]{\text{جملات شامل } x \text{ یک طرف}} 7x - 6x = -3 + 2 \Rightarrow x = -1$$

$$4) \frac{3}{4}x = 9 \Rightarrow x = \frac{9}{\frac{3}{4}} = \frac{9}{\frac{3}{4}} \xrightarrow[\text{نزدیک در نزدیک}]{\text{دور در دور}} \frac{9 \times 4}{1 \times 3} = \frac{36}{3} = 12$$

$$5) \frac{3x+1}{9} = \frac{2x-1}{3} \xrightarrow[\text{وسطین}]{\text{طرفین}} 3(3x+1) = 9(2x-1) \Rightarrow 9x+3 = 18x-9$$

$$\Rightarrow 9x - 18x = -9 - 3 \Rightarrow -9x = -12 \Rightarrow x = \frac{-12}{-9} = \frac{4}{3}$$

$$6) \frac{4}{3}x - \frac{1}{2}x + \frac{x}{6} = 2$$

ک.م.م ۳، ۲ و ۶ برابر ۶ است، پس تمام عبارت‌ها را در ۶ ضرب می‌کنیم.

$$6 \times \frac{4}{3}x - 6 \times \frac{1}{2}x + 6 \times \frac{x}{6} = 6 \times 2 \Rightarrow 8x - 3x + x = 12 \Rightarrow 6x = 12 \Rightarrow x = \frac{12}{6} = 2$$

معادله $ax + b = 0$ در صورتی که $a = 0$ و $b \neq 0$ باشد، فاقد جواب است؛ زیرا سمت چپ تساوی عددی غیر صفر و سمت راست آن صفر خواهد شد.

مثال: اگر معادله $(2b-3)x + 8 = 0$ فاقد جواب باشد، مقدار b را به دست آورید.

پاسخ: برای اینکه معادله فاقد جواب باشد، باید ضریب x یعنی $(2b-3)$ برابر صفر باشد.

$$2b - 3 = 0 \Rightarrow 2b = 3 \Rightarrow b = \frac{3}{2}$$

معادله درجه دوم

حالت کلی معادله درجه دوم به شکل $ax^2 + bx + c = 0$ است که در آن $a \neq 0$ است و a ، b و c اعداد حقیقی هستند.

$$3x^2 + 9x + 2 = 0, 2x^2 = 0, x^2 - x = 3, 4x^2 - 5x - 9 = 11$$

مثال: معادله‌های زیر همگی معادله درجه دوم هستند.

نکته: a و b و c اشکالی ندارد که صفر باشند، فقط a نباید صفر باشد.

$$5x^2 + 9x = 0, 3x^2 + 2 = 0, 2x^2 = 0$$

۲. توان دوم x (x^2) حتماً وجود دارد، زیرا a (ضریب x^2) مخالف صفر است.

۳. معادله‌هایی به شکل $4x^2 - 5x - 9 = 11 - 2x$ هم معادله درجه دوم هستند. کافی است همه جملات را به یک سمت تساوی انتقال

دهیم تا به شکل استاندارد $ax^2 + bx + c = 0$ در بیایند.

$$4x^2 - 5x - 9 = 11 - 2x \xrightarrow{\text{شکل استاندارد}} 4x^2 - 5x - 9 - 11 + 2x = 0 \Rightarrow 4x^2 - 3x - 20 = 0$$

$$x^2 - x = 3 \xrightarrow{\text{شکل استاندارد}} x^2 - x - 3 = 0$$

سوال: جواب معادله درجه دوم رو بطور به دست بیاریم؟

در درس بعد، روش‌های به دست آوردن جواب معادله درجه دوم را بررسی می‌کنیم.



پاتخته

اگر طول مستطیلی دو برابر عرض آن باشد و محیط مستطیل ۶۰ سانتی متر باشد، مساحت آن چند سانتی متر مربع است؟
پاسخ: ۱. مجهول اصلی مسئله، مساحت مستطیل است که برای به دست آوردن آن به اندازه طول و عرض مستطیل نیاز داریم. پس باید طول یا عرض را به عنوان x در نظر بگیریم که گفتیم مقدار کوچک تر (عرض) را به عنوان x بگیریم بهتر است.

$$x = \text{عرض مستطیل}$$

۲. تبدیل جملات توصیفی به زبان ریاضی:

$$\text{طول مستطیل} = 2x$$

طول مستطیل دو برابر عرض آن است.

$$\text{محیط مستطیل} = 2(\text{عرض} + \text{طول}) = 2(2x + x) = 2(3x) = 6x$$

$$6x = 60$$

محیط مستطیل ۶۰ سانتی متر است.

۳. حل معادله به دست آمده:

$$6x = 60 \Rightarrow x = \frac{60}{6} = 10$$

$$\text{سانتی متر مربع} = 2 \times 10 = 20 \quad \xrightarrow{x=10} \quad 2(10)^2 = 2 \times 100 = 200$$

چک کردن درستی جواب: طول و عرض مستطیل اعداد مثبتی به دست آمدند، پس جواب منطقی است.

در کنکورهای دهه ۹۰ و سال ۱۴۰۰ از این درس سؤالی به طور مستقیم نیامده است ولی در کنکور سال ۱۴۰۱ مستقیم از آن سؤال مطرح شده است.



پرسش های چهارگزینه ای فصل اول - درس ۱

۱. جواب معادله $-4 = \frac{1}{y}(2x+4) - \frac{1}{y}(2x-3)$ کدام است؟
 ۱ ۴ ۲ ۳ ۳ ۲ ۴ ۱
۲. با توجه به معادله $2x - \frac{-4x+7}{3} = \frac{x+1}{4}$ ، مقدار x کدام است؟
 ۱ ۱۷ ۲ -۱۱ ۳ -۶ ۴ $\frac{2}{3}$
۳. اگر جواب معادلات $12 - x = 2(3x - 1)$ و $3(3x - 7) - 2(4 - 2x) = 10$ را به ترتیب m و n بنامیم، $n - m$ کدام است؟
 ۱ ۵ ۲ ۱ ۳ -۱ ۴ -۵
۴. اگر x ریشه معادله $\frac{3x-1}{x-3} = \frac{3x+6}{x}$ باشد، حاصل $-2x + 1$ کدام است؟
 ۱ ۱۹ ۲ ۱۷ ۳ -۱۷ ۴ -۱۹
۵. با توجه به معادله $7a + 10 = 4(3a + 5)$ ، مقدار b از معادله $\frac{a}{y} = \frac{6b+1}{2} - \frac{2}{3}(2b+3)$ کدام است؟
 ۱ -۲ ۲ ۳ ۳ $\frac{1}{5}$ ۴ $-\frac{2}{5}$
۶. اگر $n - 6 = \frac{n}{4} - \frac{n}{2}$ و $-\frac{m+1}{2} - \frac{2(m-1)}{3} = -2$ باشد، ریشه معادله $mx + n = 3x + mn$ کدام است؟
 ۱ ۶ ۲ $\frac{10}{3}$ ۳ ۵ ۴ $\frac{9}{2}$
۷. به ازای کدام مقدار k ، ریشه معادله $4 = 2(1-x) + k(x+2)$ برابر با -4 است؟
 ۱ ۴ ۲ ۳ ۳ ۲ ۴ ۱
۸. اگر جواب معادله $4 = \frac{3x-1}{y} - \frac{a-x}{3}$ برابر با ۵ باشد، a بر کدام عدد زیر بخش پذیر است؟
 ۱ ۳ ۲ ۴ ۳ ۵ ۴ ۷
۹. اگر $-2b \neq a$ باشد، پاسخ معادله $\frac{a}{y}(2x-4) + 2bx + 4a + 4b = 0$ کدام است؟
 ۱ ۱ ۲ ۲ ۳ -۱ ۴ -۲
۱۰. اگر جواب معادله $x - 1 = \frac{x+5}{6} + \frac{2x-2}{3}$ دو واحد بیشتر از ریشه معادله $x = 2x - a$ باشد، a کدام است؟
 ۱ ۳ ۲ ۴ ۳ ۶ ۴ ۹

۹. گزینه ۴

$$\frac{a}{y}(2x-4)+2bx+4a+4b=0 \Rightarrow ax-2a+2bx+4a+4b=0$$

$$\Rightarrow ax+2bx=-2a-4b \Rightarrow x(a+2b)=-2a-4b$$

$$\xrightarrow{\text{طرفین تساوی را بر } a+2b \neq 0 \text{ تقسیم می‌کنیم}} x = \frac{-2a-4b}{a+2b} = \frac{-2(a+2b)}{a+2b} = -2$$

۱۰. گزینه ۲ ابتدا ریشه معادله $x-1 = \frac{2x-2}{3} + \frac{x+5}{6}$ را به دست می‌آوریم:

$$\frac{2x-2}{3} + \frac{x+5}{6} = x-1$$

$$\xrightarrow{\text{طرفین تساوی را در ۶ ضرب می‌کنیم}} 2(2x-2) + x+5 = 6x-6$$

$$\Rightarrow 4x-4+x+5 = 6x-6 \Rightarrow 7 = x$$

ریشه این معادله، از ریشه معادله $\frac{x-3}{2} + x = 2x - a$ ، دو واحد بیشتر است. پس ریشه معادله $\frac{x-3}{2} + x = 2x - a$ برابر ۵ است.

$$x=5 \Rightarrow \frac{5-3}{2} + 5 = 2 \times 5 - a \Rightarrow 1+5 = 10-a \Rightarrow a=4$$

۱۱. گزینه ۱ هر معادله به صورت $ax+b=0$ را که در آن a و b اعداد حقیقی و $a \neq 0$ است، یک معادله درجه اول می‌نامند.

از آنجا که طبق صورت سؤال، معادله $(2a+1)x^2+3x-4a=0$ یک معادله درجه اول است، باید ضریب x^2 در آن صفر باشد یعنی:

$$2a+1=0 \Rightarrow a=-\frac{1}{2}$$

$$\xrightarrow{a=-\frac{1}{2}} 3x-4a=0 \Rightarrow 3x-4(-\frac{1}{2})=0 \Rightarrow 3x=-2 \Rightarrow x=-\frac{2}{3}$$

۱۲. گزینه ۴ طبق سؤال قبل، در معادله درجه اول، ضریب x^2 باید صفر باشد:

$$1-3a=0 \Rightarrow 3a=1 \Rightarrow a=\frac{1}{3}$$

$$-2x+6a=2b-2 \xrightarrow{a=\frac{1}{3}} -2x+6(\frac{1}{3})=2b-2$$

$$\xrightarrow{x=-1 \text{ جواب معادله است}} -2(-1)+2=2b-2 \Rightarrow 6=2b \Rightarrow b=3$$

خواسته سؤال: $\frac{b}{a} = \frac{3}{\frac{1}{3}} = 9$

۱۳. گزینه ۱ معادله $ax+b=0$ در صورتی که $a=0$ و $b \neq 0$ باشد، فاقد جواب است (زیرا سمت چپ تساوی عددی غیر صفر و سمت راست آن صفر خواهد شد).

$$2m+7=0 \Rightarrow 2m=-7 \Rightarrow m=-\frac{7}{2}$$

۱۴. گزینه ۳ ابتدا معادله داده شده را به صورت $ax+b=0$ تبدیل می‌کنیم:

$$3m(2x+5)+4x=6-x \Rightarrow 6mx+15m+4x=6-x$$

$$\Rightarrow 6mx+5x+15m-6=0 \Rightarrow (6m+5)x+15m-6=0$$

برای آنکه معادله فاقد جواب باشد، باید ضریب x برابر با صفر و عدد ثابت، مخالف صفر باشد:

$$6m+5=0 \Rightarrow m=-\frac{5}{6}$$

دقت شود که به ازای $m=-\frac{5}{6}$ ، $15m-6$ مخالف صفر خواهد شد. حال جواب

$$\text{معادله } 12(-\frac{5}{6})x + \frac{x}{2} = 3 \Rightarrow \frac{-10x}{5} + \frac{x}{2} = 3 \Rightarrow -2x + \frac{x}{2} = 3$$

$$\xrightarrow{\text{ضرب در ۲}} -4x+x=6 \Rightarrow -3x=6 \Rightarrow x=-2$$

۱. گزینه ۱ $2(x-3)-\frac{1}{2}(2x+4)=-4 \Rightarrow 2x-6-x-2=-4$

$$\Rightarrow x-8=-4 \Rightarrow x=8-4 \Rightarrow x=4$$

$$\frac{-4x+7}{3} = \frac{x+1}{2} - 2x$$

۲. گزینه ۲

در معادلاتی که چند کسر با مخارج متفاوت داریم، برای حذف کسرها، طرفین تساوی را در ک.م.م مخارج ضرب می‌کنیم. ک.م.م ۲ و ۳ برابر ۶ است.

$$6 \times \frac{-4x+7}{3} = 6 \times \frac{x+1}{2} - 6 \times 2x \Rightarrow 2(-4x+7) = 3(x+1) - 12x$$

$$\Rightarrow -8x+14 = 3x+3-12x \Rightarrow x=-11$$

$$-2(3x-1) = 12-x \Rightarrow -6x+2 = 12-x$$

۳. گزینه ۱

$$\Rightarrow -5x = 10 \Rightarrow x = -2 \Rightarrow m = -2$$

$$3(3x-7) - 2(4-2x) = 10 \Rightarrow 9x-21-8+4x = 10$$

$$\Rightarrow 13x = 39 \Rightarrow x = 3 \Rightarrow n = 3$$

$$n-m = 3 - (-2) = 3+2 = 5$$

۴. گزینه ۱ در تساوی $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ می‌توان نوشت: $ad = bc$ که این کار طرفین وسطین نام دارد.

$$\frac{3x-1}{x-3} = \frac{3x+6}{x} \xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} (3x-1)x = (x-3)(3x+6)$$

$$\Rightarrow 3x^2 - x = 3x^2 + 6x - 9x - 18 \Rightarrow 2x = -18$$

$$\Rightarrow x = -9 \xrightarrow{\text{خواسته سؤال}} -2x+1 = -2(-9)+1 = 18+1 = 19$$

۵. گزینه ۳ ابتدا معادله $4(3a+5) = 7a+10$ را حل کرده و سپس مقدار a را در معادله دیگر جایگذاری می‌کنیم:

$$4(3a+5) = 7a+10 \Rightarrow 12a+20 = 7a+10 \Rightarrow 5a = -10 \Rightarrow a = -2$$

$$\frac{2}{3}(2b+3) - \frac{6b+1}{2} = \frac{a}{2} \xrightarrow{a=-2} \frac{4b}{3} + 2 - \frac{6b+1}{2} = -1$$

$$\xrightarrow{\text{طرفین تساوی را در ۶ ضرب می‌کنیم}} 8b+12-2(6b+1) = -6$$

$$\Rightarrow 8b+12-12b-2 = -6 \Rightarrow -4b = -10 \Rightarrow b = \frac{-10}{-4} = \frac{5}{2}$$

۶. گزینه ۱ $\frac{n}{2} - \frac{n}{4} = n-6 \xrightarrow{\text{ضرب در ۴}} 2n-n = 4n-24$

$$\Rightarrow 24 = 3n \Rightarrow n = 8$$

$$\frac{2(m-1)}{3} - \frac{m+1}{2} = -2 \Rightarrow \frac{2m-2}{3} - \frac{m+1}{2} = -2$$

$$\xrightarrow{\text{ضرب در ۶}} 2(2m-2) - 3(m+1) = -12$$

$$\Rightarrow 4m-4-3m-3 = -12 \Rightarrow m = -5$$

حال معادله داده شده را حل می‌کنیم:

$$mx+n = 3x+mn \xrightarrow{\substack{n=8 \\ m=-5}} -5x+8 = 3x-4$$

$$-8x = -48 \Rightarrow x = 6$$

۷. گزینه ۲ ریشه معادله در خود معادله صدق می‌کند. (تساوی را برقرار می‌کند).

$$k(x+2)+2(1-x) = 4 \xrightarrow{x=-4} k(-4+2)+2(1+4) = 4$$

$$\Rightarrow -2k+10 = 4 \Rightarrow -2k = -6 \Rightarrow k = 3$$

۸. گزینه ۴

$$\frac{3x-1}{2} - \frac{a-x}{3} = 4 \xrightarrow{x=5 \text{ ریشه است}} \frac{3 \times 5 - 1}{2} - \frac{a-5}{3} = 4$$

$$7 - \frac{a-5}{3} = 4 \Rightarrow \frac{a-5}{3} = 3 \Rightarrow a-5 = 9 \Rightarrow a = 14$$

a بر ۲ و ۷ بخش پذیر است که ۷ در گزینه‌ها وجود دارد.