

مقدمه

تقدیم به همسر عزیزم

به جای آنکه چندین کتاب بخوانید، کتاب‌های گاج را چندین بار بخوانید

اهمیت کتاب ریاضی (۲) در کنکور تجربی چه از نظر تعداد سؤالات و چه از نظر مباحثی که در این کتاب وجود دارد و معمولاً نقطه ضعف داوطلبان رشته تجربی در کنکور است بر کسی پوشیده نیست. از طرفی تغییر رویکرد طراحان کنکور به سمت مفهومی شدن سؤالات نشان می‌دهد که دانش‌آموزان باید رویه جدید و مطمئنی را برای آماده‌سازی در پیش بگیرند.

کتابی که پیش روی شماست با در نظر گرفتن تمامی موارد فوق آماده شده است که ویژگی‌های کلی کتاب به صورت زیر است:

۱ در برنامه‌های جامع، روان و مهندسی شده که خط به خط کتاب درسی را به‌طور کامل مدنظر قرار داده و تمام تمرین‌های کتاب در آن بررسی شده است تا شما خط فکری طراحان و چگونگی استخراج تست‌های کنکور از کتاب درسی را بفهمید و یاد بگیرید که طراحان چگونه، تمرینات و مفاهیم کتاب را عمیق‌تر و پیچیده‌تر در تست‌های کنکور به‌کار می‌گیرند.

۲ تست‌های کتاب با چینش آسان به سخت و توجه به کنکورهای سراسری در نظام جدید که با هر سطح علمی می‌توانید از این کتاب به‌عنوان منبع اول و آخر استفاده کنید و قدم به قدم خود را به سطح ایده‌آل برسانید.

۳ پاسخ‌های واقعاً تشریحی، دقیق و آموزش‌محور که علاوه بر ارائه راه‌حل، مسیر استدلال و تفکر را نیز به شما آموزش می‌دهد.

۴ یک نوآوری بی‌سابقه در ایران که با حل ویدیویی تک‌تک سؤالات سعی کردم آموزش از نوشتار فراتر رفته و به تجربه‌ای دیداری، تعاملی و کامل تبدیل شود. با دیدن ویدیوی حل سؤالات، نحوه پاسخگویی به آن‌ها را در یک فضای واقعی تجربه خواهید کرد و یاد می‌گیرید چگونه و از کجا شروع به حل سؤال کنید و سرعت خود را در حل بالا ببرید. با این ویژگی باید گفت

«به جای آنکه چندین کتاب بخوانید، این کتاب را چندین بار بخوانید و چندین بار ببینید.»

در انتها تشکر ویژه می‌کنم از تمامی همکارانم در انتشارات بین‌المللی گاج که بدون کمک آن‌ها آماده کردن این کتاب امکان‌پذیر نبود. با بنده می‌توانید از طریق آیدی تلگرام [@ar_amid](https://t.me/ar_amid) در ارتباط باشید.

موفق باشید.

آرش عمید

 @ArashAmid

 ar.Amid

فهرست

مثلثات

۲۶۲	درس اول: واحدهای اندازه‌گیری زاویه	۱۰
۲۷۴	درس دوم: روابط تکمیلی بین نسبت‌های مثلثاتی	۱۱
۲۹۳	درس سوم: توابع مثلثاتی	۱۲
۵۸۷	پاسخ‌های تشریحی	✓

توابع نمایی و لگاریتمی

۳۰۶	درس اول: تابع نمایی و ویژگی‌های آن	۱۳
۳۱۶	درس دوم: تابع لگاریتمی و ویژگی‌های آن	۱۴
۳۴۰	درس سوم: نمودارها و کاربردهای توابع نمایی و لگاریتمی	۱۵
۶۱۰	پاسخ‌های تشریحی	✓

حد و پیوستگی

۳۵۰	درس اول: فرایندهای حدی	۱۶
۳۶۰	درس دوم: محاسبه حد توابع	۱۷
۳۹۱	درس سوم: پیوستگی	۱۸
۶۳۹	پاسخ‌های تشریحی	✓

آمار و احتمال

۴۰۴	درس اول: احتمال شرطی و پیشامدهای مستقل	۱۹
۴۲۲	درس دوم: آمار توصیفی	۲۰
۶۶۸	پاسخ‌های تشریحی	✓

هندسه تحلیلی و جبر

۱۰	درس اول: هندسه تحلیلی	۱
۵۱	درس دوم: معادله درجه دوم و تابع درجه ۲	۲
۹۳	درس سوم: معادلات گویا و معادلات رادیکالی	۳
۴۴۴	پاسخ‌های تشریحی	✓

هندسه

۱۱۲	درس اول: ترسیم‌های هندسی	۴
۱۲۳	درس دوم: استدلال و قضیه تالس	۵
۱۵۵	درس سوم: تشابه مثلث‌ها	۶
۵۰۲	پاسخ‌های تشریحی	✓

تابع

۱۸۶	درس اول: آشنایی با برخی از انواع توابع	۷
۲۲۰	درس دوم: وارون یک تابع و تابع یک به یک	۸
۲۴۴	درس سوم: اعمال جبری روی توابع	۹
۵۴۶	پاسخ‌های تشریحی	✓



مدرسہ
اینٹرنی
گاج

گاج لایو



جلسه

۳

درس ۱
تست‌های
۹۰ تا ۶۲



جلسه

۲

درس ۱
تست‌های
۶۱ تا ۴۲



جلسه

۱

درس ۱
تست‌های
۴۱ تا ۱



جلسه

۶

درس ۲
تست‌های
۲۲۲ تا ۱۷۰



جلسه

۵

درس ۱
تست‌های
۱۶۹ تا ۱۳۶



جلسه

۴

درس ۱
تست‌های
۱۲۵ تا ۹۱



جلسه

۹

درس ۲
تست‌های
۳۳۷ تا ۳۰۵



جلسه

۸

درس ۲
تست‌های
۳۰۴ تا ۲۶۳



جلسه

۷

درس ۲
تست‌های
۲۶۲ تا ۲۲۳



جلسه

۱۲

درس ۳
تست‌های
۴۷۳ تا ۴۳۴



جلسه

۱۱

درس ۳
تست‌های
۴۳۳ تا ۳۸۸



جلسه

۱۰

درس ۲
تست‌های
۳۸۷ تا ۳۳۸

فصل



جلسه

۳

درس ۲
تست‌های
۶۳۲ تا ۵۸۵



جلسه

۲

درس ۲
تست‌های
۵۸۴ تا ۵۲۲



جلسه

۱

درس ۱
تست‌های
۵۲۱ تا ۴۷۴



جلسه

۶

درس ۳
تست‌های
۸۰۸ تا ۷۲۴



جلسه

۵

درس ۳
تست‌های
۷۲۳ تا ۶۶۲



جلسه

۴

درس ۲
تست‌های
۶۶۱ تا ۶۳۳

فصل



جلسه
۳
درس ۱
تست‌های
۹۱۸ تا ۸۹۶



جلسه
۲
درس ۱
تست‌های
۸۹۵ تا ۸۵۴



جلسه
۱
درس ۱
تست‌های
۸۵۳ تا ۸۰۹



جلسه
۶
درس ۲
تست‌های
۱۰۲۵ تا ۹۹۰



جلسه
۵
درس ۱
تست‌های
۹۸۹ تا ۹۵۹



جلسه
۱۴
درس ۱
تست‌های
۹۵۸ تا ۹۱۹



جلسه
۹
درس ۲
تست‌های
۱۱۲۳ تا ۱۰۹۱



جلسه
۸
درس ۲
تست‌های
۱۰۹۰ تا ۱۰۶۰



جلسه
۷
درس ۲
تست‌های
۱۰۵۹ تا ۱۰۲۶



جلسه
۱۲
درس ۳
تست‌های
۱۲۰۵ تا ۱۱۸۱



جلسه
۱۱
درس ۳
تست‌های
۱۱۸۰ تا ۱۱۵۹



جلسه
۱۰
درس ۳
تست‌های
۱۱۵۸ تا ۱۱۳۴



جلسه
۳
درس ۲
تست‌های
۱۲۸۸ تا ۱۲۶۱



جلسه
۲
درس ۱
تست‌های
۱۲۶۰ تا ۱۲۴۷



جلسه
۱
درس ۱
تست‌های
۱۲۴۶ تا ۱۲۰۶



جلسه
۶
درس ۳
تست‌های
۱۴۲۴ تا ۱۳۸۳



جلسه
۵
درس ۲
تست‌های
۱۳۸۲ تا ۱۳۴۴



جلسه
۱۴
درس ۲
تست‌های
۱۳۴۳ تا ۱۲۸۹

فصل

 جلسه ۱۴ درس ۲ تست‌های ۱۵۸۸ تا ۱۵۲۹	 جلسه ۳ درس ۲ تست‌های ۱۵۲۸ تا ۱۴۸۹	 جلسه ۲ درس ۱ تست‌های ۱۴۸۸ تا ۱۴۷۶	 جلسه ۱ درس ۱ تست‌های ۱۴۷۵ تا ۱۴۲۵
 جلسه ۸ درس ۳ تست‌های ۱۶۷۵ تا ۱۶۶۶	 جلسه ۷ درس ۳ تست‌های ۱۶۶۵ تا ۱۶۴۸	 جلسه ۶ درس ۲ تست‌های ۱۶۴۷ تا ۱۶۳۳	 جلسه ۵ درس ۲ تست‌های ۱۶۳۲ تا ۱۵۸۹

 جلسه ۱۴ درس ۲ تست‌های ۱۸۲۹ تا ۱۷۷۶	 جلسه ۳ درس ۲ تست‌های ۱۷۷۵ تا ۱۷۴۳	 جلسه ۲ درس ۲ تست‌های ۱۷۴۲ تا ۱۷۰۶	 جلسه ۱ درس ۱ تست‌های ۱۷۰۵ تا ۱۶۷۶
 جلسه ۸ درس ۳ تست‌های ۱۹۸۰ تا ۱۹۵۵	 جلسه ۷ درس ۳ تست‌های ۱۹۵۴ تا ۱۹۲۶	 جلسه ۶ درس ۲ تست‌های ۱۹۲۵ تا ۱۸۸۷	 جلسه ۵ درس ۲ تست‌های ۱۸۸۶ تا ۱۸۳۰

 جلسه ۱۴ درس ۱ تست‌های ۲۱۲۱ تا ۲۰۷۱	 جلسه ۳ درس ۱ تست‌های ۲۰۷۰ تا ۲۰۳۷	 جلسه ۲ درس ۱ تست‌های ۲۰۳۶ تا ۲۰۰۵	 جلسه ۱ درس ۱ تست‌های ۲۰۰۴ تا ۱۹۸۱
 جلسه ۸ درس ۲ تست‌های ۲۲۵۰ تا ۲۲۱۷	 جلسه ۷ درس ۲ تست‌های ۲۲۱۶ تا ۲۱۷۱	 جلسه ۶ درس ۲ تست‌های ۲۱۷۰ تا ۲۱۴۴	 جلسه ۵ درس ۲ تست‌های ۲۱۴۳ تا ۲۱۲۲

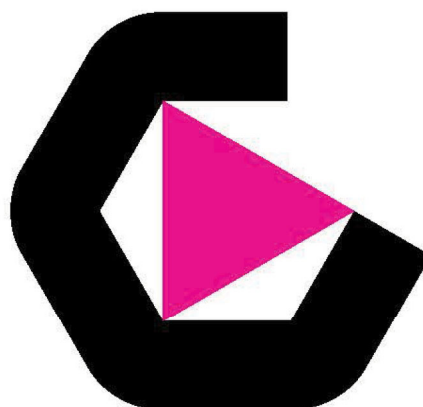
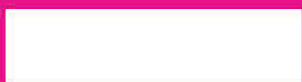
فصل

ریاضی یازدهم تجربی

حل تصویری
تمامی سؤالات



برای مشاهده ویدئوها در سایت gajlive.ir
برجسب را خراش داده و از کد زیر استفاده کنید



پشتیبانی
۰۲۱-۶۴۲۰

www.gajlive.ir

۱ معادله درجه دوم

۲ تابع درجه دوم (سه می)

معادله درجه دوم و تابع درجه ۲



درس

بعد از مطالعه این قسمت به سؤالات زیر مراجعه کنید.

سؤالات: ۱۷۰ تا ۲۶۱

معادله درجه دوم

در سال قبل، با معادله درجه دوم آشنا شدین و روش های مختلفی نظیر تجزیه، فرمول کلی (یا همون روش دلتا)، روش مربع کامل، ضرایب خاص و ... برای حل معادله درجه دوم یاد گرفتین. تو کتاب ریاضی (۲) می فوایم بدون به دست آوردن ریشه های معادله، حاصل عبارت هایی بر حسب ریشه ها رو از روی ضرایب معادله به دست بیاریم. با داشتن ریشه های معادله بتویم خود معادله رو به دست بیاریم و در آخر بعضی معادلاتی که اصلاً درجه ۲ نیستن رو با تبدیل به معادله درجه دوم حل کنیم.

روابط بین ریشه ها و ضرایب معادله

اگر x_1 و x_2 ریشه های معادله $ax^2 + bx + c = 0$ باشند، می توان مجموع ریشه ها ($S = x_1 + x_2$)، حاصل ضرب ریشه ها ($P = x_1 x_2$) و قدر مطلق تفاضل ریشه ها ($D = |x_1 - x_2|$) را بدون نیاز به حل معادله و به دست آوردن ریشه ها و با استفاده از ضرایب معادله به دست آورد که در زیر می بینید:

$$x_1 + x_2 = S = -\frac{b}{a}$$

$$x_1 x_2 = P = \frac{c}{a}$$

$$|x_1 - x_2| = D = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$$

اینجوری هم ببین  برای حل معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ با فرمول کلی یا همون روش Δ ، ریشه ها از روابط $x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ و $x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$

به دست میان که $\Delta = b^2 - 4ac$ هستش. حالا می تونی هر یک از روابط بالا رو خودت اثبات کنی. مثلاً ببین چرا مجموع ریشه ها برابر $-\frac{b}{a}$ میشه:

$$x_1 + x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2b}{2a} = -\frac{b}{a}$$

(کار در کلاس صفحه ۱۳ کتاب درسی)

در معادله $-2x^2 + x + 5 = 0$ بدون حل معادله، مجموع و حاصل ضرب ریشه ها را به دست آورید.

$$S = -\frac{b}{a} \Rightarrow S = -\frac{1}{-2} = \frac{1}{2}$$

$$P = \frac{c}{a} \Rightarrow P = \frac{5}{-2} = -\frac{5}{2}$$

در معادله $-2x^2 + x + 5 = 0$ ضرایب $a = -2$ ، $b = 1$ و $c = 5$ است، پس:

کتاب درسی

صفحه ۱۳

اگر x_1 و x_2 ریشه های معادله $x^2 + 3x - 2 = 0$ باشند، حاصل $\frac{x_1 x_2}{x_1 + x_2}$ کدام است؟ 

$$\frac{3}{4} \quad (۴)$$

$$\frac{4}{3} \quad (۳)$$

$$\frac{3}{2} \quad (۲)$$

$$\frac{2}{3} \quad (۱)$$

۱  ضرایب معادله $a = 1$ ، $b = 3$ و $c = -2$ هستند، $x_1 + x_2$ و $x_1 x_2$ را می توانیم بر حسب ضرایب معادله به دست آوریم، پس:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \Rightarrow x_1 + x_2 = -\frac{3}{1} = -3 \\ x_1 x_2 = \frac{c}{a} \Rightarrow x_1 x_2 = \frac{-2}{1} = -2 \end{cases} \Rightarrow \frac{x_1 x_2}{x_1 + x_2} = \frac{-2}{-3} = \frac{2}{3}$$



گاهی اوقات با ضرب طرفین معادله در یک عبارت مناسب و استفاده از اتحادهایی که در سال‌های قبل خوندین، معادله به یک معادله درجه دوم تبدیل میشه.



اگر x_1 و x_2 ریشه‌های معادله $3\sqrt{x} + \frac{6}{\sqrt{x}} = (x+1)(\sqrt{x}+1)(1-\frac{1}{\sqrt{x}})$ باشند، حاصل $4x_2 + 4x_1 + 3x_1x_2$ کدام است؟

$7(1)$ $-7(2)$ $9(3)$ $-9(4)$

طرفین معادله $3\sqrt{x} + \frac{6}{\sqrt{x}} = (x+1)(\sqrt{x}+1)(1-\frac{1}{\sqrt{x}})$ را در $\sqrt{x}$ ضرب می‌کنیم و داریم:

$$\sqrt{x} \times (1 - \frac{1}{\sqrt{x}})(\sqrt{x} + 1)(x + 1) = \sqrt{x} \times (3\sqrt{x} + \frac{6}{\sqrt{x}}) \Rightarrow \underbrace{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1)}_{\text{اتحاد مزدوج}}(x + 1) = 3x + 6$$

$$\Rightarrow \underbrace{(x - 1)(x + 1)}_{\text{اتحاد مزدوج}} = 3x + 6 \Rightarrow x^2 - 1 = 3x + 6 \Rightarrow x^2 - 3x - 7 = 0$$

$$x_1 + x_2 = -\frac{-3}{1} = 3 \quad ; \quad x_1x_2 = \frac{-7}{1} = -7$$

$$3x_1x_2 + 4(x_1 + x_2) = 3 \times (-7) + 4 \times 3 = -21 + 12 = -9$$

حال در معادله درجه دوم $x^2 - 3x - 7 = 0$ داریم:

بنابراین حاصل $3x_1x_2 + 4x_1 + 4x_2$ برابر است با:

به دست آوردن حاصل یک عبارت برحسب ریشه‌ها

اگر α و β ریشه‌های معادله درجه دوم باشند، از شما می‌خواهند حاصل یک عبارت برحسب α و β را به دست آورید. (معادله‌ها رو طوری میدن که نه میشه ته‌یه کرد و نه جواب رند و درست و حسابی دارن. بنابراین اصلاً به صرفه نیست بری ریشه‌ها رو پیدا کنی و بعد بری حاصل اون عبارت رو به دست بیاری.) عبارت‌هایی که برحسب α و β می‌دهند به دو دسته کلی عبارت‌های متقارن و عبارت‌های نامتقارن تقسیم می‌شوند. **عبارت‌های متقارن و نامتقارن:** به یک عبارت برحسب α و β متقارن می‌گوییم هرگاه α را به β و β را به α تبدیل کنیم، عبارت تغییری نکند، مثلاً عبارات $\alpha^2 + \beta^2$ ، $\alpha^3 + \beta^3$ ، $\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}$ ، $\alpha\beta^2 + \beta\alpha^2$ و... عبارات متقارن هستند. واضح هست که عباراتی که متقارن نیستند، عبارات نامتقارن می‌باشند. مثلاً عبارت‌هایی نظیر $\alpha^3 + \beta^2$ ، $\alpha^2 + 7\beta$ و... عبارت‌های نامتقارن هستند.

به دست آوردن حاصل عبارات متقارن: در این عبارت‌ها با استفاده از اتحادهای جبری، تجزیه کردن، فاکتورگیری، مخرج مشترک‌گیری، به توان رساندن و... می‌توان عبارت را برحسب $S = \alpha + \beta$ ، $P = \alpha\beta$ و $D = |\alpha - \beta|$ نوشت. چند نمونه در جدول زیر ببینید و حتماً به جای حفظ کردن، نحوه به دست آوردن آن‌ها را تمرین کنید. ضمناً بسیاری از عبارات متقارن را می‌توان به صورت فارسی نیز بیان کرد.

عبارت ریاضی	بیان فارسی	نحوه به دست آوردن برحسب P ، D و S
$\alpha^2 + \beta^2$	مجموع مربعات ریشه‌ها	$\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = S^2 - 2P$
$\alpha^3 + \beta^3$	مجموع مکعبات ریشه‌ها	$\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta) = S^3 - 3PS$
$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}$	مجموع معکوس ریشه‌ها	$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \frac{\beta + \alpha}{\alpha\beta} = \frac{S}{P}$
$ \alpha^2 - \beta^2 $	قدر مطلق تفاضل مربعات ریشه‌ها	$ \alpha^2 - \beta^2 = (\alpha - \beta)(\alpha + \beta) = D \times S $
$\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}$	مجموع جذر ریشه‌ها	$(\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta})^2 = \alpha + \beta + 2\sqrt{\alpha\beta} = S + 2\sqrt{P}$ $\Rightarrow \sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} = \sqrt{S + 2\sqrt{P}}$



در بین عبارت‌های متقارن، « $\alpha^2 + \beta^2 = S^2 - 2P$ » و « $\alpha^3 + \beta^3 = S^3 - 3PS$ » رو حفظ کن. خیلی جاها به دردت می‌خورن.

اگر α و β ریشه‌های معادله $x^2 - 5x + 2 = 0$ باشند، حاصل هر یک از عبارات زیر را به دست آورید.

الف) $\alpha^2 + \beta^2$ ب) $\alpha^3 + \beta^3$ پ) $\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}$
ت) $\alpha\sqrt{\beta} + \beta\sqrt{\alpha}$ ث) $\alpha^3\beta + \beta^3\alpha$

در معادله $x^2 - 5x + 2 = 0$ داریم:

$$S = \alpha + \beta = -\frac{b}{a} \Rightarrow S = \alpha + \beta = -\frac{-5}{1} = 5 \text{ و } P = \alpha\beta = \frac{c}{a} \Rightarrow P = \alpha\beta = \frac{2}{1} = 2$$

حال حاصل هر یک از عبارات‌ها که عبارت‌های متقارن بر حسب α و β هستند را به دست می‌آوریم:

الف) $\alpha^2 + \beta^2 = S^2 - 2P \Rightarrow \alpha^2 + \beta^2 = 5^2 - 2(2) = 25 - 4 = 21$
قرار بود منفی کنیم.

ب) $\alpha^3 + \beta^3 = S^3 - 3PS \Rightarrow \alpha^3 + \beta^3 = 5^3 - 3(2)(5) = 125 - 30 = 95$
قرار بود منفی کنیم.

پ) $\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} = A$

$$A^2 = (\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta})^2 \Rightarrow A^2 = \alpha + \beta + 2\sqrt{\alpha}\sqrt{\beta} \Rightarrow A^2 = \alpha + \beta + 2\sqrt{\alpha\beta}$$

$$\Rightarrow A^2 = 5 + 2\sqrt{2} \Rightarrow A = \sqrt{5 + 2\sqrt{2}} \Rightarrow \sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} = \sqrt{5 + 2\sqrt{2}}$$

حتماً حواست هست که $\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}$ منفی نمی‌شود. وگرنه از $A^2 = 5 + 2\sqrt{2}$ مقدار A برابر $\pm\sqrt{5 + 2\sqrt{2}}$ میشه.

ت) $\alpha\sqrt{\beta} + \beta\sqrt{\alpha} = \sqrt{\alpha\beta}(\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}) = \sqrt{2}(\sqrt{5 + 2\sqrt{2}}) = \sqrt{10 + 4\sqrt{2}}$

مقدار $\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}$ رو تو قسمت قبلی پیدا کرده بودیم.

ث) $\alpha^3\beta + \beta^3\alpha = \alpha\beta(\alpha^2 + \beta^2) = P(S^2 - 2P) \Rightarrow \alpha^3\beta + \beta^3\alpha = 2 \times 21 = 42$

مقدار $\alpha^2 + \beta^2$ رو قبلاً حساب کرده بودیم.

اگر x_1 و x_2 ریشه‌های معادله $5x^2 - 8x - 4 = 0$ باشند، مقدار $|x_1^2 - x_2^2|$ کدام است؟

۱) $\frac{84}{25}$ ۲) $\frac{90}{25}$ ۳) $\frac{96}{25}$ ۴) $\frac{102}{25}$

به کمک اتحاد مزدوج می‌توان $x_1^2 - x_2^2$ را به صورت $(x_1 - x_2)(x_1 + x_2)$ نوشت، پس:

$$|(x_1 - x_2)(x_1 + x_2)| = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|} \times \left| -\frac{b}{a} \right| = \frac{\sqrt{64 - 4(5)(-4)}}{5} \times \left| -\frac{-8}{5} \right| = \frac{\sqrt{64 + 80}}{5} \times \frac{8}{5} = \frac{\sqrt{144}}{5} \times \frac{8}{5} = \frac{12}{5} \times \frac{8}{5} = \frac{96}{25}$$

اگر α و β ریشه‌های معادله $2x^2 - 2x - 1 = 0$ باشند، حاصل $\alpha\beta^4 + \beta\alpha^4$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{75}$ ۲) $-\frac{1}{25}$ ۳) $-\frac{1}{5}$ ۴) $\frac{1}{75}$

عبارت $\alpha\beta^4 + \beta\alpha^4$ را می‌توان بر حسب S و P نوشت، بنابراین داریم:

$$\alpha\beta^4 + \beta\alpha^4 = \alpha\beta(\beta^3 + \alpha^3) = P(S^3 - 3PS)$$

در معادله داده شده داریم:

$$S = -\frac{-2}{2} = 1, P = -\frac{1}{2}$$

بنابراین حاصل $\alpha\beta^4 + \beta\alpha^4$ برابر است با:

$$\alpha\beta^4 + \beta\alpha^4 = \left(-\frac{1}{2}\right)(1^3 - 3 \times \left(-\frac{1}{2}\right)(1)) = \left(-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{5}{2}\right) = -\frac{5}{4} = -\frac{1}{25}$$

به دست آوردن حاصل عبارات نامتقارن: اگر عبارت برحسب ریشه‌ها، نامتقارن بود انجام یکی از کارهای زیر راهگشاست.

- ۱ می‌دانیم «ریشهٔ معادله در معادله صدق می‌کند»، احتمالاً قسمتی از ساختار عبارت نامتقارن شبیه ساختار معادله است. با قرار دادن آن ریشه در معادله و جایگزینی معادل آن در عبارت، عبارت متقارن می‌شود و می‌توان آن را برحسب S ، P و D نوشت.

اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ $x^2 + 3x - 1 = 0$ باشند، حاصل $(3\alpha - 1)^2 + \beta^4$ کدام است؟

۱۴۲ (۴)

۱۲۳ (۳)

۱۱۹ (۲)

۹۸ (۱)

۲ عبارت $(3\alpha - 1)^2 + \beta^4$ متقارن نیست، اما $3\alpha - 1$ شبیه قسمتی از معادله است، پس:

$$x^2 + 3x - 1 = 0 \xrightarrow{x=\alpha} \alpha^2 + 3\alpha - 1 = 0 \Rightarrow 3\alpha - 1 = -\alpha^2$$

$$(3\alpha - 1)^2 + \beta^4 = (-\alpha^2)^2 + \beta^4 = \alpha^4 + \beta^4 = (\alpha^2 + \beta^2)^2 - 2\alpha^2\beta^2 = (S^2 - 2P)^2 - 2P^2 \quad \text{بنابراین در عبارت } (3\alpha - 1)^2 + \beta^4 \text{ داریم:}$$

$$S = \alpha + \beta = -\frac{3}{1} = -3, \quad P = \alpha\beta = \frac{-1}{1} = -1 \quad \text{از طرفی در معادلهٔ } x^2 + 3x - 1 = 0 \text{ داریم:}$$

بنابراین حاصل عبارت $(3\alpha - 1)^2 + \beta^4$ برابر است با:

$$(3\alpha - 1)^2 + \beta^4 = (S^2 - 2P)^2 - 2P^2 = (9 - 2(-1))^2 - 2(-1)^2 = 11^2 - 2 = 121 - 2 = 119$$

- ۲ گاهی اوقات می‌توان از یک عبارت نامتقارن، یک عبارت متقارن را استخراج کرد و سپس دنبال به دست آوردن حاصل عبارت باقی‌مانده که نامتقارن است، برویم.

اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ $x^2 - 8x - 3 = 0$ باشند، حاصل $4\beta^2 + 2\alpha^2 - 16\beta$ کدام است؟

۱۴۶ (۴)

۱۴۴ (۳)

۱۳۰ (۲)

۱۲۸ (۱)

۴ می‌توان یک عبارت متقارن از عبارت داده شده خارج کرد، پس:

$$4\beta^2 + 2\alpha^2 - 16\beta = 2\alpha^2 + 2\beta^2 - 16\beta = 2(\alpha^2 + \beta^2) + 2(\beta^2 - 8\beta) = 2(S^2 - 2P) + 2(\beta^2 - 8\beta)$$

$$S = \alpha + \beta = 8, \quad P = \alpha\beta = -3 \quad \text{در معادلهٔ } x^2 - 8x - 3 = 0 \text{ داریم:}$$

$$\beta^2 - 8\beta - 3 = 0 \Rightarrow \beta^2 - 8\beta = 3 \quad \text{هم‌چنین } \beta \text{ در معادله صدق می‌کند، پس:}$$

بنابراین حاصل $4\beta^2 + 2\alpha^2 - 16\beta$ برابر است با:

$$4\beta^2 + 2\alpha^2 - 16\beta = 2(S^2 - 2P) + 2(\beta^2 - 8\beta) = 2(64 - 2(-3)) + 2(3) = 140 + 6 = 146$$

اینجوری هم ببین اگر اطلاعاتی راجع به ریشه‌های معادله نداشته باشیم مثلاً ندانیم α بزرگ‌تره یا β و ... می‌تونیم فرض کنیم عبارت نامتقارن

برحسب α و β برابر A هستش. حالا اگر بیایم α رو به β و β رو به α تبدیل کنیم، حاصل عبارت جدید هم A میشه. کافیه دو تا عبارت رو با هم جمع کنیم یک عبارت متقارن تشکیل میشه که حاصل اون برابر $2A$ هستش. کافیه تقسیم بر ۲ کنی تا A به دست بیاد. مثلاً در تمرین اول α و β ریشه‌های

معادلهٔ $x^2 + 3x - 1 = 0$ بودن و ما حاصل $(3\alpha - 1)^2 + \beta^4$ رو می‌خواستیم، پس:

$$\begin{cases} (3\alpha - 1)^2 + \beta^4 = A \\ (3\beta - 1)^2 + \alpha^4 = A \end{cases} \Rightarrow (3\alpha - 1)^2 + (3\beta - 1)^2 + \alpha^4 + \beta^4 = 2A$$

$$\Rightarrow 9\alpha^2 + 9\beta^2 - 6\alpha - 6\beta + 2 + (\alpha^2 + \beta^2)^2 - 2\alpha^2\beta^2 = 9((-3)^2 - 2(-1)) - 6(-3) + 2 + ((-3)^2 - 2(-1))^2 - 2(-1)^2$$

$$= 9 \times 11 + 18 + 2 + 121 - 2 = 238 \Rightarrow 2A = 238 \Rightarrow A = 119$$

اگر حاصل عبارتی برحسب ریشه‌ها رو بدن و مقدار پارامتری رو در معادله بخوان، قطعاً حاصل ضرب ریشه‌ها و مجموع ریشه‌ها در به دست آوردن پارامتر کارساز هستن. در این جا باید دقت کنی که حتماً دلتای معادله مثبت باشه تا مطمئن بشیم معادله حتماً دو تا ریشه رو داره.



به ازای مقدار مشخص m ، مجموع مربعات ریشه‌های حقیقی معادله $mx^2 - (m+3)x + 5 = 0$ برابر ۶ است. ریشه بزرگ‌تر معادله کدام می‌تواند باشد؟

$$\frac{\sqrt{26}-1}{3} \quad (۴)$$

$$\frac{\sqrt{26}-3}{2} \quad (۳)$$

$$\frac{\sqrt{19}-1}{6} \quad (۲)$$

$$\frac{\sqrt{26}-3}{3} \quad (۱)$$

۴ اگر α و β ریشه‌های معادله باشد، باتوجه به صورت سؤال $\alpha^2 + \beta^2 = 6$ است. از طرفی داریم:

$$\begin{cases} \alpha^2 + \beta^2 = 6 \\ S - \frac{m+3}{m} = \frac{\alpha^2 + \beta^2 - S^2 - 2P}{2} \Rightarrow \left(\frac{m+3}{m}\right)^2 - 2\left(\frac{5}{m}\right) = 6 \Rightarrow (m+3)^2 - 10m = 6m^2 \\ P = \frac{5}{m} \end{cases}$$

$$\Rightarrow m^2 + 6m + 9 - 10m = 6m^2 \Rightarrow 5m^2 + 4m - 9 = 0 \xrightarrow{a+c+b=0} \begin{cases} m=1 \\ m=-\frac{9}{5} \end{cases}$$

حال باید بررسی کنیم که حتماً دلتای معادله مثبت باشد، به ازای $m = -\frac{9}{5}$ چون a و c مختلف‌العلامت می‌شوند حتماً $\Delta > 0$ است. به ازای $m = 1$ داریم:

غ ق ق $\Delta = (-m+3)^2 - 4m(5) \xrightarrow{m=1} \Delta < 0$ غ ق ق
بنابراین معادله به صورت $-\frac{9}{5}x^2 - \frac{6}{5}x + 5 = 0$ است. برای حل معادله، آن را در ۵ ضرب می‌کنیم و داریم:

$$-9x^2 - 6x + 25 = 0 \Rightarrow x_1, x_2 = \frac{6 \pm \sqrt{36 + 900}}{-18} = \frac{6 \pm 6\sqrt{26}}{-18} \xrightarrow{\text{ریشه بزرگ‌تر}} x = \frac{\sqrt{26}-1}{3}$$

تعیین علامت ریشه‌ها از روی ضرایب معادله

در معادله $ax^2 + bx + c = 0$ با فرض آن که معادله دو ریشه دارد، از روی علامت جمع و ضرب ریشه‌ها، یعنی علامت S و P ، می‌توان اطلاعاتی راجع به علامت ریشه‌ها و ... به دست آورد. به جدول زیر توجه کنید:

$ax^2 + bx + c = 0$, $S = \alpha + \beta$, $P = \alpha\beta$			
$P < 0$		$P > 0$	
معادله دو ریشه مختلف‌العلامت دارد.		معادله دو ریشه هم‌علامت دارد.	
$S < 0$	$S > 0$	$S < 0$	$S > 0$
قد مطلق ریشه منفی، بزرگ‌تر است.	ریشه مثبت، از قدر مطلق ریشه منفی بزرگ‌تر است.	دو ریشه منفی دارد.	دو ریشه مثبت دارد.

زنگ باش  در حالتی که دو ریشه هم‌علامت هستند (P بزرگ‌تر از صفره) باید حتماً شرط $\Delta > 0$ بررسی بشه. اما در حالتی که دو ریشه مختلف‌العلامت هستند (P کوچک‌تر از صفره) نیازی به بررسی Δ نیست، چون وقتی $P < 0$ باشه، حتماً $\Delta > 0$ هستش. (پون وقتی $P < 0$ هستش یعنی $\frac{c}{a} < 0$ می‌شه و این یعنی a و c مختلف‌العلامت هستن، پس $\Delta = b^2 - 4ac = b^2$ به صورت «مثبت + نامنفی» می‌شه که حتماً بزرگ‌تر از صفره.)

در هر قسمت شرط یا شرط‌های لازم را برای معادله درجه دوم معلوم کنید.

الف) معادله دو ریشه متمایز داشته باشد. (ب) معادله دو ریشه داشته باشد.
پ) معادله دو ریشه مثبت داشته باشد. (ت) معادله دو ریشه منفی داشته باشد.
ث) اگر α و β ریشه‌های معادله باشند، $\alpha < 0 < \beta$ و $|\alpha| > \beta$ باشد.

الف) $\Delta > 0$ (ب) $\Delta \geq 0$
پ) $P > 0$ و $S > 0$ و $\Delta > 0$ (ت) $P > 0$ و $S < 0$ و $\Delta > 0$
ث) $P < 0$ و $S < 0$ (مثلاً ریشه‌ها ۵- و ۲ باشند.)

فرض کنید α و β ریشه‌های یک معادله درجه دوم و $0 < \beta < \alpha$ است. معادله کدام می‌تواند باشد؟

$x^2 + x + 4 = 0$ (۱) $x^2 + 5x - 10 = 0$ (۲) $x^2 - 7x + 3 = 0$ (۳) $x^2 + 8x + 2 = 0$ (۴)

اولاً باید دلتای معادله مثبت باشد. در گزینه (۱) دلتای معادله منفی است. در ضمن باید ضرب ریشه‌ها مثبت باشد که در گزینه‌های (۳) و (۴) این چنین است. در ضمن باید جمع ریشه‌ها منفی باشد که فقط در معادله $x^2 + 8x + 2 = 0$ مجموع ریشه‌ها منفی می‌باشد.

$$x^2 + 8x + 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \Delta = 8^2 - 4(1)(2) = 56 \\ P = \frac{2}{1} = 2 \\ S = -\frac{8}{1} = -8 \end{cases}$$

به ازای چند مقدار صحیح m ، معادله $x^2 + (m-1)x + m^2 = 9$ دارای ریشه‌های مختلف علامت است؟

4 (۱) 5 (۲) 6 (۳) 7 (۴)

برای آن که معادله ریشه‌های مختلف علامت داشته باشد، باید $P < 0$ باشد، پس:

$$P < 0 \Rightarrow \frac{m^2 - 9}{1} < 0 \Rightarrow m^2 < 9 \Rightarrow -3 < m < 3 \Rightarrow \text{مقدار صحیح } 5$$

زنگ باش



اگر دو ریشه معادله قرینه هم باشند، باید $S = 0$ باشد (پس $S = -\frac{b}{a}$ هستش پس باید $b = 0$ باشد). و همچنین $\Delta > 0$ باشد. (بزرگ‌تر از صفر بودن دلتا در این حالت یعنی در معادله $ax^2 + c = 0$ و c مفتلف علامت باشند).

اگر ریشه‌های معادله $x^2 + (m^2 - 1)x + 4m - 3 = 0$ قرینه هم باشند، مجموع مربعات ریشه‌های معادله $x^2 + (m+2)x + 2m - 3 = 0$ کدام است؟

14 (۴) 11 (۳) 10 (۲) 8 (۱)

چون ریشه‌های معادله $x^2 + (m^2 - 1)x + 4m - 3 = 0$ قرینه یکدیگرند، پس $S = 0$ و در نتیجه $b = 0$ می‌باشد:

$$m^2 - 1 = 0 \Rightarrow m^2 = 1 \Rightarrow m = \pm 1$$

چون باید $\Delta > 0$ باشد (a و c مفتلف علامت باشند). پس $m = 1$ قابل قبول است. حال به ازای $m = 1$ معادله $x^2 + (m+2)x + 2m - 3 = 0$

$$\begin{cases} S = \alpha + \beta = -3 \\ P = \alpha\beta = -1 \end{cases} \Rightarrow \alpha^2 + \beta^2 = S^2 - 2P = (-3)^2 - 2(-1) = 9 + 2 = 11$$

به صورت $x^2 + 3x - 1 = 0$ می‌شود و داریم:

زنگ باش



اگر دو ریشه معادله معکوس هم باشند، باید $P = 1$ باشد (پس $P = \frac{c}{a}$ هستش پس باید $a = c$ باشد). و همچنین $\Delta > 0$ باشد.

ریشه‌های معادله $mx^2 + 3x + m^2 = 2$ معکوس یکدیگرند. مجموع معکوس ریشه‌های معادله $x^2 + (2m-5)x - m = 0$ کدام است؟

12 (۴) 9 (۳) 7 (۲) 5 (۱)

برای آن که ریشه‌های معادله $mx^2 + 3x + m^2 = 2$ معکوس یکدیگر باشند، باید $P = 1$ و در نتیجه $a = c$ باشد، پس:

$$m = m^2 - 2 \Rightarrow m^2 - m - 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} m = -1 \\ m = 2 \end{cases}$$

در ضمن باید $\Delta > 0$ باشد. می‌دانیم $\Delta = 9 - 4m(m^2 - 2)$ است. به جای تعیین علامت Δ ، $m = 2$ و $m = -1$ را چک می‌کنیم. فقط به ازای $m = -1$ ، دلتا بزرگ‌تر از صفر می‌شود پس $m = -1$ قابل قبول است. حال به ازای $m = -1$ معادله $x^2 + (2m-5)x - m = 0$ به صورت

$$\begin{cases} S = \alpha + \beta = 7 \\ P = \alpha\beta = 1 \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta} = \frac{S}{P} = \frac{7}{1} = 7$$

$x^2 - 7x + 1 = 0$ می‌شود و داریم:



اگر دو ریشه معادله، قرینه و معکوس هم باشند، فقط کافی‌ه $P = -1$ باشه. (پون $P = \frac{c}{a}$ هستش پس باید a و c قرینه هم باشن و این یعنی $a + c = 0$ هستش). دقت کن چون $P < 0$ هستش، a و c مختلف‌العلامت هستن و حتماً $\Delta > 0$ میشه و نیازی به چک کردن Δ نیست.

به ازای کدام مقدار m ریشه‌های معادله $-3mx^2 + (2-m)x + m^2 + 2 = 0$ معکوس و قرینه هم بوده ولی قدرمطلق ریشه‌ها با هم برابر نیستند؟
 ۱ و ۲ ۱ و ۴ ۲ و ۳ ۲ و ۴

باید $P = -1$ و در نتیجه $a + c = 0$ باشد؛ پس:
 $-3m + m^2 + 2 = 0 \Rightarrow m^2 - 3m + 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = 2 \end{cases}$
 چون باید قدرمطلق ریشه‌ها با هم برابر نباشند، پس حتماً ریشه‌ها ۱ و ۱ - نیستند، پس m نمی‌تواند ۲ باشد، زیرا اگر $m = 2$ باشد معادله به صورت $-6x^2 + 6 = 0$ می‌شود و ریشه‌های آن ۱ و ۱ - خواهند بود.

تشکیل معادله درجه دوم

در این قسمت می‌خواهیم با داشتن ریشه‌های معادله درجه دوم یا اطلاعاتی راجع به آن‌ها، معادله درجه دوم را به دست آوریم.

$$(x - \alpha)(x - \beta) = 0 \Rightarrow x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta = 0$$

بنابراین با توجه به معادله فوق می‌توان گفت اگر مجموع ریشه‌ها یعنی S و حاصل ضرب آن‌ها یعنی P را داشته باشیم، می‌توانیم معادله درجه دوم را بنویسیم.

$$x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta = 0 \Rightarrow x^2 - Sx + P = 0$$

(کاردرکلاس | صفحه ۱۳ کتاب درسی)

الف) دو عدد حقیقی بیابید که مجموع آن‌ها $1/5 -$ و حاصل ضربشان -7 باشد.

ب) آیا مستطیلی با محیط ۱۱ واحد و مساحت ۶ واحد مربع وجود دارد؟ اگر جواب مثبت است، طول و عرض آن را مشخص کنید.

(کاردرکلاس | صفحه ۲۳ کتاب درسی)

(کاردرکلاس | صفحه ۳ کتاب درسی)

پ) معادله درجه دومی بنویسید که ریشه‌های آن $\frac{3 - \sqrt{5}}{2}$ و $\frac{3 + \sqrt{5}}{2}$ باشند.

الف) فرض می‌کنیم α و β دو عدد حقیقی باشند، از آن جایی که مجموع و حاصل ضرب آن‌ها را داریم، معادله‌ای که ریشه‌هایش α و β است را می‌نویسیم:

$$\begin{cases} S = \alpha + \beta = -1/5 \\ P = \alpha\beta = -7 \end{cases} \Rightarrow x^2 - (-1/5)x + (-7) = 0 \Rightarrow x^2 + 1/5x - 7 = 0$$

حال ریشه‌های معادله را به دست می‌آوریم تا α و β مشخص شوند:

$$\Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow \Delta = (1/5)^2 - 4(1)(-7) = 2/25 + 28 = 30/25$$

$$\alpha = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow x_1 = \frac{-1/5 + \sqrt{30/25}}{2} = \frac{-1/5 + 3/5}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

$$\beta = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow x_2 = \frac{-1/5 - \sqrt{30/25}}{2} = \frac{-1/5 - 3/5}{2} = \frac{-4}{2} = -2$$

بنابراین دو عدد ۲ و $-3/5$ هستند.

ب) فرض می‌کنیم α و β طول و عرض مستطیل باشند، پس:

$$\begin{cases} 2(\alpha + \beta) = 11 \Rightarrow S = \alpha + \beta = 5/2 \\ \alpha\beta = 6 \Rightarrow P = \alpha\beta = 6 \end{cases} \Rightarrow x^2 - 5/2x + 6 = 0$$

حال چون در معادله $x^2 - 5/2x + 6 = 0$ دلتا بزرگ‌تر از صفر است پس معادله جواب دارد و این یعنی مستطیلی با این مشخصات وجود دارد. بنابراین داریم:

$$\Delta = (-5/2)^2 - 4(1)(6) = 25/4 - 24 = 1/4$$

$$\alpha = \frac{5/2 + \sqrt{1/4}}{2} = \frac{5/2 + 1/2}{2} = \frac{3}{2} = 1.5$$

$$\beta = \frac{5/2 - \sqrt{1/4}}{2} = \frac{5/2 - 1/2}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

پس طول و عرض مستطیل ۴ و $1/5$ هستند.

پ) مجموع و حاصل ضرب ریشه‌ها را به دست می‌آوریم و داریم:

$$\begin{cases} S = \frac{3 + \sqrt{5}}{2} + \frac{3 - \sqrt{5}}{2} = \frac{6}{2} = 3 \\ P = \left(\frac{3 + \sqrt{5}}{2}\right)\left(\frac{3 - \sqrt{5}}{2}\right) = \frac{9 - 5}{4} = \frac{4}{4} = 1 \end{cases} \Rightarrow x^2 - 3x + 1 = 0$$

۲ یک معادله درجه دوم داریم و می‌خواهیم معادله درجه دوم جدیدی بنویسیم که ریشه‌های آن با ریشه‌های معادله اولیه، رابطه مشخصی دارند. در این جا دو کار می‌توانیم انجام دهیم:

الف ریشه‌های معادله اولیه را α و β و یا هر چیزی که سؤال گفته در نظر می‌گیریم و سپس مجموع و حاصل ضرب آن‌ها را از روی ضرایب معادله به دست می‌آوریم. حال با توجه به رابطه معادله جدید با معادله اولیه، مجموع و حاصل ضرب آن‌ها را به دست می‌آوریم (S و P معادله جدید را به دست می‌آوریم). معادله جدید به فرم $x^2 - Sx + P = 0$ یا مضربی از آن می‌باشد.

اگر ریشه‌های معادله $2x^2 + ax + b = 0$ یک واحد از ریشه‌های معادله $3x^2 - 5x - 4 = 0$ بیشتر باشد، مقدار $3a - 6b$ کدام است؟

$$-22 \quad (1) \qquad -28 \quad (2) \qquad -38 \quad (3) \qquad -42 \quad (4)$$

۳ فرض می‌کنیم α و β ریشه‌های معادله $3x^2 - 5x - 4 = 0$ باشند، پس:

$$\alpha + \beta = -\frac{-5}{3} = \frac{5}{3}, \quad \alpha\beta = -\frac{4}{3}$$

با توجه به صورت سوال $\alpha + 1$ و $\beta + 1$ ریشه‌های معادله $2x^2 + ax + b = 0$ هستند، پس:

$$S = \alpha + 1 + \beta + 1 = \alpha + \beta + 2 \xrightarrow{\alpha + \beta = \frac{5}{3}} S = \frac{5}{3} + 2 = \frac{11}{3}$$

$$P = (\alpha + 1)(\beta + 1) = \alpha\beta + \alpha + \beta + 1 \xrightarrow[\alpha\beta = -\frac{4}{3}]{\alpha + \beta = \frac{5}{3}} P = -\frac{4}{3} + \frac{5}{3} + 1 = \frac{4}{3}$$

بنابراین معادله مورد نظر به صورت $x^2 - \frac{11}{3}x + \frac{4}{3} = 0$ است اما چون ضریب x^2 در معادله داده شده ۲ می‌باشد پس:

$$x^2 - \frac{11}{3}x + \frac{4}{3} = 0 \xrightarrow{\times 3} 3x^2 - 11x + 4 = 0$$

با مقایسه معادله به دست آمده و معادله $2x^2 + ax + b = 0$ داریم:

$$\begin{cases} a = -\frac{11}{3} \\ b = \frac{4}{3} \end{cases} \Rightarrow 3a - 6b = -11 - 8 = -19$$

البته می‌توانستیم معادله جدید را تشکیل ندهیم و بگوییم در معادله $2x^2 + ax + b = 0$ مجموع ریشه‌ها $-\frac{a}{2}$ و حاصل ضرب ریشه‌ها $\frac{b}{2}$ است، پس:

$$\begin{cases} -\frac{a}{2} = \frac{11}{3} \Rightarrow a = -\frac{22}{3} \\ \frac{b}{2} = \frac{4}{3} \Rightarrow b = \frac{8}{3} \end{cases} \Rightarrow 3a - 6b = -22 - 16 = -38$$

ب ریشه‌های معادله داده شده را x و ریشه‌های معادله جدید را X در نظر می‌گیریم. با توجه به خواسته سؤال x را برحسب X به دست می‌آوریم و با جای‌گذاری در معادله اول، معادله جدید که برحسب X است، معلوم می‌شود. مثلاً حل تمرین بالا را با این روش ببینید:

$$X = x + 1 \Rightarrow x = X - 1 \Rightarrow 3(X - 1)^2 - 5(X - 1) - 4 = 0 \Rightarrow 3X^2 - 11X + 4 = 0 \xrightarrow{\times \frac{2}{3}} 2X^2 - \frac{11}{3}X + \frac{4}{3} = 0$$

اینجوری هم ببین از روش دوم همیشه در همه مسائل استفاده کرد. مخصوصاً زمانی که ریشه‌های معادله درجه دوم جدید برحسب هر دو ریشه معادله اولیه باشن یا ارتباط بین ریشه‌های معادله جدید و اولیه پیچیده باشه روش دوم اصلاً به صرفه نیست.

در حالات خاص زیر نیازی به هیچ‌کدام از روش‌های فوق نیست و میشه سریع معادله مدنظر رو نوشت.

۱ برای ساختن معادله‌ای که ریشه‌هاش قرینه ریشه‌های معادله $ax^2 + bx + c = 0$ باشن کافیه فقط ضریب x رو قرینه کنیم یعنی به صورت $ax^2 - bx + c = 0$ می‌شه. مثلاً ریشه‌های معادله $7x^2 + 5x - 3 = 0$ قرینه ریشه‌های معادله $7x^2 - 5x - 3 = 0$ هستن.

۲ برای ساختن معادله‌ای که ریشه‌هاش عکس ریشه‌های معادله $ax^2 + bx + c = 0$ باشن، کافیه جای a و c رو عوض کنیم یعنی معادله به صورت $cx^2 + bx + a = 0$ می‌شه. مثلاً ریشه‌های معادله $2x^2 + 7x + 3 = 0$ عکس ریشه‌های معادله $3x^2 + 7x + 2 = 0$ هستن.

۳ برای ساختن معادله‌ای که ریشه‌هاش k برابر ریشه‌های معادله $ax^2 + bx + c = 0$ باشن، کافیه که b رو k برابر و c رو k^2 برابر کنیم. مثلاً ریشه‌های معادله $x^2 + 9x + 9 = 0$ سه برابر ریشه‌های معادله $x^2 + 3x + 1 = 0$ هستن.

معادلات قابل تبدیل به معادله درجه دوم

بعضی از معادلات درجه دوم نیستند اما می توان با یک تغییر متغیر مناسب، آن ها را به یک معادله درجه دوم تبدیل کرد. (مثلاً معادله $x^4 - 2x^2 - 3 = 0$ درجه دوم نیست اما اگر $x^2 = t$ باشد، اونوقت معادله به صورت $t^2 - 2t - 3 = 0$ درمیاد که یک معادله درجه دومه). حال معادله درجه دوم حاصل که بر حسب متغیر جدید مثلاً t هست را حل می کنیم تا به دست آید. سپس عبارتی که مساوی با t قرار داده بودیم را مساوی تهای به دست آمده قرار می دهیم تا x معلوم شود. مثلاً حل معادله $x^4 - 2x^2 - 3 = 0$ را ببینید:

$$x^2 = t \Rightarrow t^2 - 2t - 3 = 0 \xrightarrow[\text{فاصله شری}]{+(-3)=-3} t = -1, t = 3$$

حال x^2 را برابر تهای به دست آمده قرار می دهیم تا مقادیر x یعنی جواب های معادله $x^4 - 2x^2 - 3 = 0$ به دست آید:

$$\begin{cases} t = -1 \Rightarrow x^2 = -1 \Rightarrow \text{جواب ندارد.} \\ t = 3 \Rightarrow x^2 = 3 \Rightarrow x = \pm\sqrt{3} \end{cases}$$

(مشابه کار در کلاس صفحه ۱۱ و تمرین صفحه ۱۳ کتاب درسی)

معادلات زیر را حل کنید.

کتاب

درسی

صفحه ۱۱ و ۱۳

پ) $4x^6 + 1 = 5x^3$

ب) $2x^4 - 7x^2 - 4 = 0$

الف) $x^4 - 10x^2 + 9 = 0$

ث) $x^2 + |x| - 20 = 0$

ت) $x + \sqrt{x} - 12 = 0$

الف) با فرض $x^2 = t$ داریم:

$$x^4 - 10x^2 + 9 = 0 \xrightarrow{x^2=t} t^2 - 10t + 9 = 0 \xrightarrow{a+c+b=-} t = 1, t = 9$$

$$t = 1 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$$

$$t = 9 \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x = \pm 3$$

حال داریم:

ب) با فرض $x^2 = t$ داریم:

$$2x^4 - 7x^2 - 4 = 0 \xrightarrow{x^2=t} 2t^2 - 7t - 4 = 0 \Rightarrow t = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 4(2)(-4)}}{2(2)} \Rightarrow t = \frac{7 \pm \sqrt{81}}{4} = \frac{7 \pm 9}{4} \Rightarrow \begin{cases} t = 4 \\ t = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$t = 4 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$$

$$t = -\frac{1}{2} \Rightarrow x^2 = -\frac{1}{2} \Rightarrow \text{جواب ندارد}$$

حال داریم:

پ) با فرض $x^3 = t$ داریم:

$$4x^6 + 1 = 5x^3 \xrightarrow{x^3=t} 4t^2 + 1 = 5t \Rightarrow 4t^2 - 5t + 1 = 0 \xrightarrow{a+c+b=-} \begin{cases} t = 1 \\ t = \frac{1}{4} \end{cases}$$

$$t = 1 \Rightarrow x^3 = 1 \Rightarrow x = 1$$

$$t = \frac{1}{4} \Rightarrow x^3 = \frac{1}{4} \Rightarrow x = \sqrt[3]{\frac{1}{4}} = \frac{1}{\sqrt[3]{4}}$$

حال داریم:

ت) با فرض $\sqrt{x} = t$ داریم:

$$x + \sqrt{x} - 12 = 0 \xrightarrow{\sqrt{x}=t} t^2 + t - 12 = 0 \Rightarrow (t+4)(t-3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = -4 \\ t = 3 \end{cases}$$

$$t = -4 \Rightarrow \sqrt{x} = -4 \Rightarrow \text{جواب ندارد}$$

$$t = 3 \Rightarrow \sqrt{x} = 3 \Rightarrow x = 9$$

حال داریم:

ث) با فرض $x = t$ ، از آن جایی که $x^2 = |x|$ است، پس:

$$x^2 + |x| - 20 = 0 \Rightarrow |x|^2 + |x| - 20 = 0 \xrightarrow{|x|=t} t^2 + t - 20 = 0 \Rightarrow (t+5)(t-4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = -5 \\ t = 4 \end{cases}$$

$$t = -5 \Rightarrow |x| = -5 \Rightarrow \text{جواب ندارد}$$

$$t = 4 \Rightarrow |x| = 4 \Rightarrow x = \pm 4$$

حال داریم:

می تونی در معادله $x^2 + |x| - 20 = 0$ ، با تعیین علامت x ، قدرمطلق رو برداری و معادله ها رو حل کنی.

اینجوری هم ببین

$$x \geq 0 \Rightarrow x^2 + x - 20 = 0 \Rightarrow (x+5)(x-4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \text{غ ق ق} \\ x = -5 \\ x = 4 \end{cases}$$

$$x < 0 \Rightarrow x^2 - x - 20 = 0 \Rightarrow (x-5)(x+4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \text{غ ق ق} \\ x = 5 \\ x = -4 \end{cases}$$

بنابراین ریشه های معادله ۴ و -۴ هستن.

روش دوم بهت کمک می کنه که مثلاً اگر معادله $x^2 - 2|x - 3| - 24 = 0$ رو دیدی الکی ذهنت سمت تغییر متغیر نره و بدونی که تو این معادله باید قدرمطلق رو برداری.

زنگ باش



مجموع ریشه‌های بزرگ‌تر و کوچک‌تر معادله $(x^2 - 3x)^2 - (x^2 - 3x) - 6 = 0$ کدام است؟

۵ (۴

۴ (۳

۳ (۲

۲ (۱

۲ اگر فرض کنیم $x^2 - 3x = t$ باشد، معادله به صورت $t^2 - t - 6 = 0$ می‌شود. حال ریشه‌های معادله درجه دوم حاصل را به دست می‌آوریم:

$$t^2 - t - 6 = 0 \Rightarrow (t - 3)(t + 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} t - 3 = 0 \Rightarrow t = 3 \\ t + 2 = 0 \Rightarrow t = -2 \end{cases}$$

سپس $x^2 - 3x$ را برابر t های به دست آمده قرار می‌دهیم:

$$t = 3 \Rightarrow x^2 - 3x = 3 \Rightarrow x^2 - 3x - 3 = 0 \xrightarrow{\Delta = 9 - 4(-3) = 21} x = \frac{3 + \sqrt{21}}{2}, x = \frac{3 - \sqrt{21}}{2}$$

$$t = -2 \Rightarrow x^2 - 3x = -2 \Rightarrow x^2 - 3x + 2 = 0 \xrightarrow[\text{فاصله شری}]{\Delta = 9 - 4(2) = 1} x = 1, x = 2$$

واضح است که ریشه بزرگ‌تر معادله $\frac{3 + \sqrt{21}}{2}$ و ریشه کوچک‌تر آن $\frac{3 - \sqrt{21}}{2}$ است، پس مجموع آن‌ها برابر است با:

$$\frac{3 + \sqrt{21}}{2} + \frac{3 - \sqrt{21}}{2} = \frac{3 + \sqrt{21} + 3 - \sqrt{21}}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

برای این که بتوانیم مسائل پارامتری مربوط به معادلات قابل تبدیل به معادلات درجه دوم را حل کنیم، نیازه که حالت‌های معروف رو دقیق‌تر بررسی کنیم.

چند حالت معروف در معادلات قابل تبدیل به معادله درجه دوم:

۱ در معادله‌هایی به فرم $ax + b\sqrt{x} + c = 0$ کافی است فرض کنیم $\sqrt{x} = t$ است. در این صورت معادله به فرم $at^2 + bt + c = 0$ درمی‌آید. در معادله حاصل جواب‌های منفی غیرقابل قبول هستند و به ازای هر t نامنفی، یک مقدار برای x به دست می‌آید.

اگر معادله $x + (m - 2)\sqrt{x} + m + 1 = 0$ دو جواب متمایز داشته باشد، حدود m کدام است؟

-۱ < m < ۰ (۴

-۲ < m < ۰ (۳

m > ۸ (۲

-۱ < m < ۸ (۱

۲ با فرض $\sqrt{x} = t$ معادله به صورت $t^2 + (m - 2)t + m + 1 = 0$ درمی‌آید. برای آن که معادله داده شده دو جواب متمایز داشته باشد

باید معادله درجه دوم $t^2 + (m - 2)t + m + 1 = 0$ دو جواب مثبت و متمایز داشته باشد، پس:

$$P > 0 \Rightarrow m + 1 > 0 \Rightarrow m > -1$$

$$S > 0 \Rightarrow -(m - 2) > 0 \Rightarrow m - 2 < 0 \Rightarrow m < 2$$

$$\Delta > 0 \Rightarrow (m - 2)^2 - 4(1)(m + 1) > 0 \Rightarrow m^2 - 4m + 4 - 4m - 4 > 0 \Rightarrow m^2 - 8m > 0 \Rightarrow m < 0 \text{ یا } m > 8$$

از اشتراک مقادیر به دست آمده، $-1 < m < 0$ می‌باشد.

۲ در معادله‌هایی به فرم $ax^2 + bx^2 + c = 0$ کافی است فرض کنیم $x^2 = t$ می‌باشد. در این صورت معادله به فرم معادله درجه دوم $at^2 + bt + c = 0$ درمی‌آید. در معادله حاصل جواب‌های منفی غیرقابل قبول هستند. برای $t = 0$ فقط یک جواب برای x به دست می‌آید و به ازای هر t مثبت، دو جواب قرینه برای x حاصل می‌شود.

اگر معادله $x^2 + (m + 4)x^2 + 2m = 0$ فاقد جواب باشد، حدود m کدام است؟

m < -۴ یا m > ۰ (۴

m < -۴ (۳

m > ۰ (۲

-۴ < m < ۰ (۱

۲ با تغییر متغیر $x^2 = t$ معادله به $t^2 + (m + 4)t + 2m = 0$ درمی‌آید. برای آن که معادله اولیه فاقد جواب باشد باید معادله

$t^2 + (m + 4)t + 2m = 0$ جواب نداشته باشد یا جواب‌های معادله منفی باشند. واضح است در این صورت Δ هر مقداری می‌تواند داشته

$$P > 0 \Rightarrow 2m > 0 \Rightarrow m > 0$$

باشد، پس در حالتی که جواب دارد باید دو جواب منفی باشند:

$$S < 0 \Rightarrow -(m + 4) < 0 \Rightarrow m + 4 > 0 \Rightarrow m > -4$$

از اشتراک حدود به دست آمده $m > 0$ می‌باشد. توجه کنید در این معادله Δ همواره بزرگ‌تر از صفر است.

زنگ باش

اگر معادله $ax^2 + bx^2 + c = 0$ ریشه داشته باشد، همواره مجموع ریشه‌ها برابر صفر هستند. (چون جواب‌های معادله دپه دو قرینه هستند.)



اگر مجموع و حاصل ضرب ریشه‌های حقیقی معادله $x^2 - 8x^2 - 3 = 0$ به ترتیب S و P باشند، حاصل $PS - 3S^2 + 2P^2$ کدام است؟

۷۰-۱۶√۹ (۱) ۷۶ (۲) ۴+√۹ (۳) ۷۰+۱۶√۹ (۴)

می‌دانیم مجموع ریشه‌های حقیقی معادله $x^2 - 8x^2 - 3 = 0$ برابر صفر است، پس $PS - 3S^2 + 2P^2$ برابر $2P^2$ می‌باشد. حال با فرض $x^2 = t$ معادله به فرم $t^2 - 8t - 3 = 0$ درمی‌آید و داریم:

$$t = \frac{8 \pm \sqrt{64+12}}{2} = 4 \pm \sqrt{19} \Rightarrow \begin{cases} t = 4 + \sqrt{19} \Rightarrow x^2 = 4 + \sqrt{19} \Rightarrow x = \pm \sqrt{4 + \sqrt{19}} \\ t = 4 - \sqrt{19} \Rightarrow x^2 = 4 - \sqrt{19} \Rightarrow \text{غق ق} \end{cases}$$

بنابراین داریم:

$$P = (\sqrt{4 + \sqrt{19}}) \times (-\sqrt{4 + \sqrt{19}}) = -(4 + \sqrt{19}) \Rightarrow 2P^2 = 2(-4 - \sqrt{19})^2 = 2(16 + 19 + 8\sqrt{19}) = 70 + 16\sqrt{19}$$

در معادله‌هایی به فرم $ax^2 + b|x| + c = 0$ ، چون $x^2 = |x|^2$ است، پس معادله در حقیقت به فرم $a|x|^2 + b|x| + c = 0$ بوده و با تغییر متغیر $|x| = t$ به معادله $at^2 + bt + c = 0$ می‌رسیم. واضح است در معادله حاصل جواب‌های منفی قبول نیستند زیرا $|x|$ منفی نمی‌شود. اما اگر $t = 0$ باشد یک جواب برای x و اگر $t > 0$ باشد، دو جواب قرینه برای x به دست می‌آید. واضح است که در این حالت نیز مجموع جواب‌ها در صورت وجود برابر صفر است.

معادله $mx^2 - (2m+1)|x| + m - 1 = 0$ سه جواب متمایز دارد. حاصل ضرب جواب‌های کوچک‌تر و بزرگ‌تر کدام است؟

۴ (۴) ۸ (۳) -۶ (۲) -۹ (۱)

با فرض $|x| = t$ معادله به فرم $mt^2 - (2m+1)t + m - 1 = 0$ می‌شود. چون معادله اولیه سه جواب متمایز دارد، پس معادله $mt^2 - (2m+1)t + m - 1 = 0$ یک جواب صفر و یک جواب مثبت دارد. بنابراین داریم:

$$m - 1 = 0 \Rightarrow m = 1 \Rightarrow t^2 - 3t = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = 0 \Rightarrow |x| = 0 \Rightarrow x = 0 \\ t = 3 \Rightarrow |x| = 3 \Rightarrow x = \pm 3 \end{cases}$$

بنابراین حاصل ضرب جواب‌های کوچک‌تر و بزرگ‌تر معادله برابر -۹ است.

حالت‌های $a\sqrt{x} + b\sqrt[4]{x} + c = 0$ ، $ax^6 + bx^3 + c = 0$ ، $ax^{-1} + bx^{-\frac{1}{2}} + c = 0$... نیز وجود دارند که با تسلط بر مطالب فوق به راحتی قابل تحلیل هستند.

گاهی اوقات در یک معادله درجه دوم، یک عبارت بر حسب x تکرار می‌شود. در این جا هم می‌توانیم اون عبارت تکرار شونده رو t فرض کنیم و ریشه‌های معادله جدید، یعنی t رو به دست بیاریم. در آخر عبارتی که مساوی با t قرار داده بودیم رو مساوی t های به دست آمده می‌زاریم تا x به دست بیاد.

ریشه کوچک‌تر معادله $(3x+1)^2 + 9(3x+1) + 14 = 0$ کدام است؟

۱ (۱) -۱ (۲) -۵/۳ (۳) -۱/۳ (۴)

عبارت $3x+1$ در معادله تکرار می‌شود. با فرض $3x+1=t$ معادله به صورت زیر ساده می‌شود و داریم:

$$t^2 + 9t + 14 = 0 \Rightarrow (t+2)(t+7) = 0 \Rightarrow \begin{cases} t+2=0 \Rightarrow t=-2 \\ t+7=0 \Rightarrow t=-7 \end{cases}$$

حال $3x+1$ را برابر t های به دست آمده قرار می‌دهیم تا x معلوم شود:

$$t = -2 \Rightarrow 3x+1 = -2 \Rightarrow 3x = -2-1 \Rightarrow 3x = -3 \Rightarrow x = -1$$

$$t = -7 \Rightarrow 3x+1 = -7 \Rightarrow 3x = -7-1 \Rightarrow 3x = -8 \Rightarrow x = -\frac{8}{3}$$

بنابراین ریشه کوچک‌تر معادله $x = -\frac{8}{3}$ است.

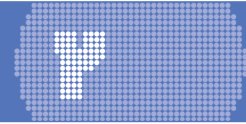
توجه کن معادله داده شده یک معادله درجه دومه، اما چون $3x+1$ تو معادله تکرار می‌شه، رو t گرفتیم و معادله رو حل کردیم. می‌تونستیم معادله رو به فرم $ax^2 + bx + c = 0$ در بیاریم و حل کنیم که کمی وقت گیره.

$$(3x+1)^2 + 9(3x+1) + 14 = 0 \Rightarrow 9x^2 + 6x + 1 + 27x + 9 + 14 = 0 \Rightarrow 9x^2 + 33x + 24 = 0 \xrightarrow{a+c=b} x = -1, x = -\frac{24}{9} = -\frac{8}{3}$$

بعد از مطالعه این قسمت به سؤالات زیر مراجعه کنید.

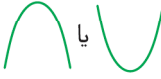
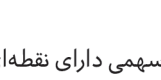
سؤالات: ۲۶۲ تا ۳۸۷

تابع درجه دوم (سهمی)



ضابطه تابع درجه دوم (سهمی)

به تابع با ضابطه $f(x) = ax^2 + bx + c$ که در آن $a \neq 0$ است، تابع درجه دوم می‌گوییم. (این که در ضابطه سهمی، a مخالف صفر، یعنی ضابطه سهمی متمماً جمله‌ای دارد که توان x در آن ۲، هشتش.)

نمودار سهمی: نمودار سهمی به یکی از دو صورت  یا  است. در سهمی $f(x) = ax^2 + bx + c$ با توجه به مثبت یا منفی بودن a یعنی ضرب x^2 داریم:

الف اگر $a > 0$ باشد، دهانه سهمی رو به بالا بوده و سهمی دارای نقطه‌ای است که کم‌ترین مقدار را دارد.



ب اگر $a < 0$ باشد، دهانه سهمی رو به پایین بوده و سهمی دارای نقطه‌ای است که بیش‌ترین مقدار را دارد.



رأس سهمی: به نقطه S رأس سهمی می‌گویند. (همون نقطه‌ای که کم‌ترین مقدار یا بیش‌ترین مقدار رو دارد.) در سهمی $f(x) = ax^2 + bx + c$ طول رأس

سهمی $x_S = -\frac{b}{2a}$ و عرض رأس سهمی $y_S = -\frac{\Delta}{4a}$ می‌باشد.

$$f(x) = ax^2 + bx + c \Rightarrow S\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$$

اینجوری هم ببین برای به دست آوردن عرض رأس سهمی، می‌تونیم x_S رو در ضابطه سهمی جایگذاری کنیم تا عرض رأس سهمی معلوم بشه.

(البته همیشه این کار به صرفه نیست، در ادامه در موردش صحبت فوادم کرد.)

$$f(x) = ax^2 + bx + c \Rightarrow y_S = f(x_S) = f\left(-\frac{b}{2a}\right)$$

رأس سهمی $f(x) = 3x^2 + 6x + 5$ کدام است؟

(۱، ۱۴) (۴) (-۱، ۲) (۳) (۱، -۲) (۲) (-۱، ۱) (۱)

$$x_S = -\frac{b}{2a} \Rightarrow x_S = -\frac{6}{2 \times 3} = -\frac{6}{6} = -1$$

۳ طول رأس سهمی برابر است با:

حال عرض رأس سهمی را به دست می‌آوریم، کافی است $x = -1$ را در معادله سهمی جایگذاری کنیم:

$$y_S = f(-1) = 3(-1)^2 + 6(-1) + 5 = 3 - 6 + 5 = 2$$

بنابراین نقطه $S(-1, 2)$ رأس سهمی است. (لطفاً y_S رو از فرمول $-\frac{\Delta}{4a}$ هم به دست بیار.)

زنگ باش اگر معادله سهمی به صورت $f(x) = a(x-h)^2 + k$ داده شده باشه، نقطه (h, k) رأس سهمی هستش.

$$f(x) = a(x-h)^2 + k \Rightarrow S(h, k)$$



رأس سهمی $y = 2(x+2)^2 + m$ باشد، مقدار $m + x_0$ کدام است؟

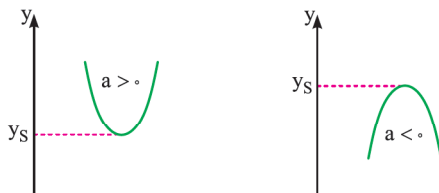
صفر (۴) ۱ (۳) ۲ (۲) ۳ (۱)

۱ در سهمی $y = 2(x+2)^2 + m$ مختصات رأس $(-2, m)$ است، پس:

$$(-2, m) = (x_0, \Delta) \Rightarrow \begin{cases} x_0 = -2 \\ m = \Delta \end{cases} \Rightarrow m + x_0 = \Delta + (-2) = 3$$

کمترین یا بیشترین مقدار سهمی

کمترین یا بیشترین مقدار سهمی $y = ax^2 + bx + c$ همان عرض رأس سهمی است. اگر ضریب x^2 مثبت باشد، عرض رأس آن، کمترین مقدار و اگر ضریب x^2 منفی باشد، عرض رأس سهمی بیشترین مقدار می باشد.



در تابع $y = ax^2 + bx + c$ ، اگر ضریب x^2 مثبت باشد برد اون $[y_s, +\infty)$ و اگر ضریب x^2 منفی باشد، برد اون $(-\infty, y_s]$ هستش.

کتاب
درسی
صفحه ۱۴

(مثال صفحه ۱۴ کتاب درسی)

کدام نتیجه گیری در مورد تابع با ضابطه $f(x) = -x^2 + 2x + 3$ درست است؟

- (۱) بیشترین مقدار تابع برابر ۱ است. (۲) کمترین مقدار تابع برابر ۴ است.
(۳) کمترین مقدار تابع برابر ۱ است. (۴) بیشترین مقدار تابع برابر ۴ است.

۴ تابع $f(x) = -x^2 + 2x + 3$ یک سهمی است که چون ضریب x^2 منفی است، پس دهانه سهمی رو به پایین بوده و دارای بیشترین مقدار است. حال عرض رأس سهمی را به دست می آوریم:

$$x_S = -\frac{2}{2(-1)} = -\frac{2}{-2} = 1 \Rightarrow y_S = -(1)^2 + 2(1) + 3 = -1 + 2 + 3 = 4$$

اگر بیشترین مقدار تابع درجه دوم با ضابطه $f(x) = (k+3)x^2 - 4x + k$ برابر صفر باشد، مقدار k کدام است؟

- ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵ (۵)

چون بیشترین مقدار تابع درجه دوم صفر است، دو نتیجه می توان گرفت. اولاً چون سهمی بیشترین مقدار را دارد یعنی دهانه سهمی رو به پایین است. (ضریب x^2 باید منفی باشد). ثانیاً عرض رأس سهمی صفر می باشد. (بنابراین داریم: $y_S = 0$)

$$y_S = 0 \Rightarrow -\frac{\Delta}{4a} = 0 \Rightarrow \Delta = 0 \Rightarrow (-4)^2 - 4(k+3)k = 0 \Rightarrow 16 - 4(k^2 + 3k) = 0$$

$$\Rightarrow 4 - (k^2 + 3k) = 0 \Rightarrow k^2 + 3k - 4 = 0 \Rightarrow \begin{cases} k = 1 \\ k = -4 \end{cases}$$

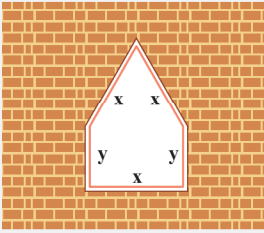
چون ضریب x^2 ، یعنی $(k+3)$ باید منفی باشد، پس $k = -4$ قابل قبول است.

زنگ باش



چرا در سؤال بالا برای به دست آوردن y_S ، اول x_S رو پیدا نکردیم و در ضابطه تابع جای گذاری نکردیم؟ چون x_S بر حسب k هستش و بعد از جای گذاری، محاسبات سخت می شد. زمانی اون کارو می کنیم که x_S یک عدد بشه تا بعد از جای گذاری، دچار مشکل نشیم. کی x_S عدد میشه؟ زمانی که ضریب x^2 و ضریب x پارامتری نباشن.

کمترین یا بیشترین مقدار یک عبارت: گاهی اوقات در مسائل توصیفی یا هندسی که بیشترین یا کمترین مقدار یک عبارت را می خواهند، اگر مسئله را به زبان ریاضی بنویسیم و یک تابع درجه دوم (سهمی) ایجاد شود، آن گاه به راحتی می توان بیشترین یا کمترین مقدار عبارت را پیدا کرد. چون بیشترین و کمترین مقدار عبارت، همان عرض رأس سهمی می باشد.

کتاب درسی
صفحه ۱۴


یک پنجره به شکل مقابل از یک مستطیل که در بالای آن یک مثلث متساوی الاضلاع قرار گرفته تشکیل شده است. اگر محیط پنجره ۴ متر باشد، اختلاف طول و عرض قسمت مستطیلی تقریباً چند سانتی متر باشد تا پنجره حداکثر نوردهی را داشته باشد؟
(مثال صفحه ۱۴ کتاب درسی)

$$\begin{array}{ll} 29(1) & 32(2) \\ 35(3) & 38(4) \end{array}$$

۳ برای آن که پنجره حداکثر نوردهی را داشته باشد، باید مساحت آن بیشترین مقدار ممکن باشد، پس:

حال مساحت پنجره را به دست می آوریم:

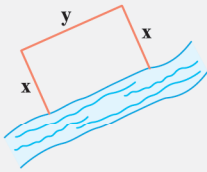
$$S = xy + \frac{\sqrt{3}}{4} x^2 \xrightarrow{y=2-\frac{3x}{4}} S = x(2-\frac{3x}{4}) + \frac{\sqrt{3}}{4} x^2 \Rightarrow S = 2x - \frac{3x^2}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4} x^2 \Rightarrow S = \frac{\sqrt{3}-6}{4} x^2 + 2x$$

همان طور که می بینید تابع مساحت، تابع درجه دوم (سه می) است و ضریب x^2 نیز منفی می باشد. بنابراین این تابع دارای ماکزیمم بوده و بیشترین

$$x = -\frac{b}{2a} \Rightarrow x = -\frac{2}{\frac{\sqrt{3}-6}{4}} = \frac{4}{6-\sqrt{3}} \approx 0.94(m)$$

$$y = 2 - \frac{3}{4}x \approx 2 - \frac{3}{4}(0.94) \approx 0.59(m)$$

بنابراین اختلاف طول و عرض قسمت مستطیلی پنجره برابر $0.94 - 0.59 = 0.35$ متر و در نتیجه ۳۵ سانتی متر است.

کتاب درسی
صفحه ۱۵


قرار است در کنار یک رودخانه، محوطه ای مستطیل شکل ایجاد کنیم. برای این کار لازم است سه ضلع محوطه، نرده کشی شود. اگر تنها هزینه نصب ۱۰۰ متر نرده را در اختیار داشته باشیم، بیشترین مقدار مساحت محوطه کدام است؟
(کار در کلاس ۲ صفحه ۱۵ کتاب درسی)

$$\begin{array}{ll} 750(1) & 1050(2) \\ 1250(3) & 1500(4) \end{array}$$

۳ با توجه به این که هزینه نصب ۱۰۰ متر نرده را در اختیار داریم، پس:

$$y + 2x = 100 \Rightarrow y = 100 - 2x$$

حال مساحت محوطه برابر است با:

$$S = xy \xrightarrow{y=100-2x} S = x(100-2x) = -2x^2 + 100x$$

تابع مساحت یک سهمی رو به پایین است پس بیشترین مقدار آن همان عرض رأس سهمی می باشد:

$$x_S = -\frac{100}{2(-2)} = -\frac{100}{-4} = 25 \Rightarrow y_S = -2(25)^2 + 100(25) = -1250 + 2500 = 1250$$



اگر مجموع دو متغیر، مقداری ثابت باشد، حاصل ضرب اونا زمانی بیشترین مقدار رو داره که دو متغیر با هم برابر باشن. مثلاً حل تمرین بالا رو با این روش ببینین:

$$y + 2x = 100 \Rightarrow y = 100 - 2x \Rightarrow \begin{cases} y = 50 \\ x = 25 \end{cases} \Rightarrow S = xy = 25 \times 50 = 1250$$

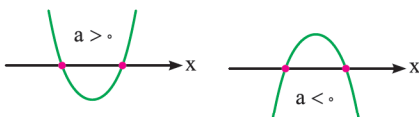
صفرهای سهمی

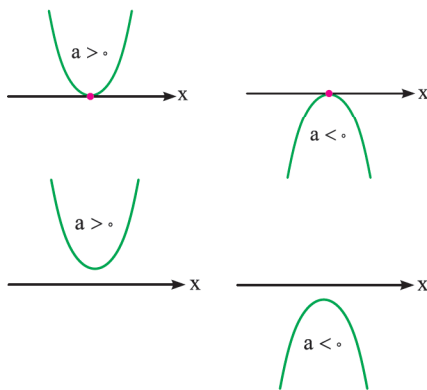
به طور کلی طول نقاط برخورد یک تابع با محور x ها را صفرهای تابع می نامیم. (در واقع در صفرهای تابع، مقدار تابع صفر میشه). بنابراین صفرهای سهمی $f(x) = ax^2 + bx + c$ ، طول نقاط تلاقی سهمی با محور x ها (در صورت وجود) هستند.

به دست آوردن تلاقی سهمی با محورهای مختصات: می خواهیم تلاقی سهمی $f(x) = ax^2 + bx + c$ با محورهای مختصات را به دست آوریم:

۱ تلاقی با محور x ها: برای به دست آوردن نقطه یا نقاط تلاقی سهمی $f(x) = ax^2 + bx + c$ با محور x ها (که همان صفرهای سهمی می باشند). در صورت وجود، باید معادله $ax^2 + bx + c = 0$ را حل کنیم. با توجه به علامت Δ می توان گفت:

الف) اگر $\Delta > 0$ باشد، معادله دارای ۲ ریشه متمایز است، پس سهمی محور x ها را در ۲ نقطه قطع می کند.

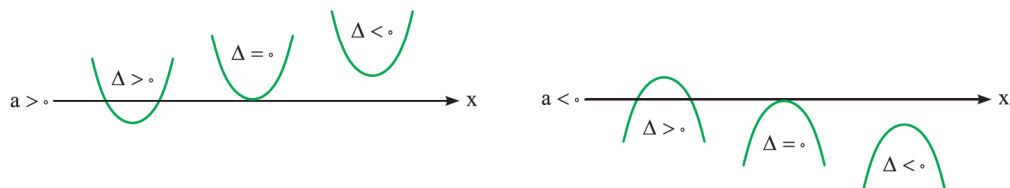




ب اگر $\Delta = 0$ باشد، معادله دارای ریشه مضاعف است، پس سهمی در یک نقطه بر محور x ها مماس می‌شود. طول نقطه تماس، همان طول نقطه رأس سهمی یعنی $x = -\frac{b}{2a}$ است.

پ اگر $\Delta < 0$ باشد، معادله ریشه حقیقی ندارد، پس سهمی محور x ها را قطع نمی‌کند.

وضعیت سهمی و محور x ها با توجه به علامت Δ و علامت ضریب x^2 به صورت‌های زیر است:



صفرهای هر سهمی را در صورت وجود به دست آورید.

ب) $y = x^2 - x - 12$
ت) $y = x^2 + x + 5$

الف) $y = x^2 - 6x + 8$
پ) $y = x^2 - 6x + 9$

برای به دست آوردن صفرهای سهمی $f(x) = ax^2 + bx + c$ ، باید معادله $ax^2 + bx + c = 0$ را به دست آوریم، پس:

الف) $x^2 - 6x + 8 = 0 \Rightarrow (x - 2)(x - 4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = 4 \end{cases}$

ب) $x^2 - x - 12 = 0 \Rightarrow (x - 4)(x + 3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 4 \\ x = -3 \end{cases}$

پ) $x^2 - 6x + 9 = 0 \Rightarrow (x - 3)^2 = 0 \Rightarrow x = 3$

ت) $x^2 + x + 5 = 0 \xrightarrow{\Delta < 0}$ صفر ندارد

سهمی $y = x^2 - 4x + 3m - 1$ یک صفر دارد. مقدار m کدام است؟

$\frac{3}{4}$ (۴) $\frac{4}{3}$ (۳) $\frac{5}{3}$ (۲) $\frac{3}{5}$ (۱)

چون سهمی یک صفر دارد، پس باید در معادله $x^2 - 4x + 3m - 1 = 0$ ، دلتا برابر صفر باشد، پس:

$\Delta = 0 \Rightarrow (-4)^2 - 4(1)(3m - 1) = 0 \Rightarrow 16 - 12m + 4 = 0 \Rightarrow 12m = 20 \Rightarrow m = \frac{20}{12} = \frac{5}{3}$

سهمی $y = mx^2 - 6x + 2$ دو صفر دارد. بیش‌ترین مقدار صحیح m کدام است؟

۶ (۴) ۳ (۳) ۴ (۲) ۲ (۱)

باید دلتای معادله $mx^2 - 6x + 2 = 0$ بزرگ‌تر از صفر باشد، پس:

$\Delta > 0 \Rightarrow (-6)^2 - 4(m)(2) > 0 \Rightarrow 36 - 8m > 0 \Rightarrow 8m < 36 \Rightarrow m < \frac{36}{8} \Rightarrow m < \frac{9}{2}$
بنابراین بیش‌ترین مقدار صحیح m برابر ۴ است.

کتاب درسی
صفحه ۱۵

فوتبالیستی توپی را با زاویه 45° نسبت به سطح زمین و با سرعت اولیه 20 m/s شوت می‌کند. معادله مسیر حرکت توپ تابع درجه دو با

(مثال صفحه ۱۵ کتاب درسی)

$$y = -\frac{1}{4}x^2 + x \quad \text{است که } x \text{ مسافت افقی طی شده و } y \text{ ارتفاع توپ از سطح زمین می‌باشد.}$$

(الف) حداکثر ارتفاع توپ را به دست آورید.

(ب) حداکثر مسافت افقی طی شده توسط توپ چقدر است؟

(پ) صفرهای تابع مسیر حرکت توپ از نظر فیزیکی چه معنایی دارند؟

◀ (الف) مسیر حرکت توپ یک سهمی رو به پایین است پس حداکثر ارتفاع توپ همان عرض رأس سهمی می‌باشد:

$$x_S = -\frac{1}{2(-\frac{1}{4})} = -\frac{1}{-\frac{1}{2}} = 2 \Rightarrow y_S = -\frac{1}{4}(2)^2 + 2 = -\frac{1}{4} \times 4 + 2 = -1 + 2 = 1.$$

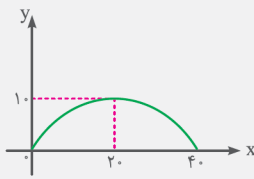
بنابراین حداکثر ارتفاع توپ 10 متر است.

(ب) صفرهای سهمی را به دست می‌آوریم:

$$-\frac{1}{4}x^2 + x = 0 \Rightarrow x(-\frac{1}{4}x + 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 4 \end{cases}$$

بنابراین حداکثر مسافت افقی طی شده توسط توپ 40 متر است.

(پ) $x = 0$ نقطه‌ای است که فوتبالیست توپ را شوت می‌کند و $x = 40$ نقطه فرود دوباره توپ به زمین است.



تمامی مطالبی که در مورد ریشه‌های معادله درجه دوم خواندیم، در مورد صفرهای سهمی نیز برقرارند. مثلاً اگر x_1 و x_2 صفرهای سهمی

$f(x) = ax^2 + bx + c$ باشند، داریم:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$$

$$x_1 x_2 = \frac{c}{a}$$

$$|x_1 - x_2| = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$$

محاسبه عبارت‌های متقارن و نامتقارن برحسب صفرها و تعیین علامت صفرها توسط ضرایب سهمی دقیقاً مانند مطالبی است که در مورد ریشه‌های معادله درجه دوم آموختیم.

کتاب درسی
صفحه ۱۶

(کار در کلاس صفحه ۱۶ کتاب درسی)

در هر مورد بدون محاسبه صفرها، تعداد صفرها و علامت آن‌ها را تعیین کنید.

(ب) $y = x^2 + 4x - 5$

(الف) $y = x^2 + 6x + 5$

(ت) $y = -x^2 + 2x - 1$

(پ) $y = 3x^2 - 7x + 1$

◀ (الف) علامت Δ در معادله $x^2 + 6x + 5 = 0$ تعداد صفرها را معلوم می‌کند:

$$\Delta = 6^2 - 4(1)(5) = 36 - 20 = 16 \xrightarrow{\Delta > 0} \text{ سهمی دو صفر دارد.}$$

علامت حاصل ضرب صفرها و هم‌چنین علامت مجموع صفرها، علامت صفرها را معلوم می‌کند:

$$P = \frac{c}{a} \Rightarrow P = \frac{5}{1} = 5 \xrightarrow{P > 0} \text{ صفرهای سهمی هم‌علامت هستند.}$$

$$S = -\frac{b}{a} \Rightarrow S = -\frac{6}{1} = -6 \xrightarrow{S < 0} \text{ هر دو صفر سهمی منفی هستند.}$$

(ب) ابتدا علامت Δ را برای معادله $x^2 + 4x - 5 = 0$ تعیین می‌کنیم:

$$\Delta = 4^2 - 4(1)(-5) = 16 + 20 = 36 \xrightarrow{\Delta > 0} \text{ سهمی دو صفر دارد.}$$

البته در معادله $x^2 + 4x - 5 = 0$ چون a و c مختلف‌العلامت هستند پس حتماً Δ بزرگ‌تر از صفر و سهمی دو تا صفر دارد.

$$P = \frac{c}{a} \Rightarrow P = \frac{-5}{1} = -5 \xrightarrow{P < 0} \text{ صفرها مختلف‌العلامت هستند.}$$

$$S = -\frac{b}{a} \Rightarrow S = -\frac{4}{1} = -4 \xrightarrow{S < 0} \text{ قدرمطلق صفر منفی از صفر مثبت بزرگ‌تر است.}$$

حال علامت P و S را معلوم می‌کنیم:

(پ) علامت Δ را برای معادله $3x^2 - 7x + 1 = 0$ تعیین می‌کنیم:

$$\Delta = (-7)^2 - 4(3)(1) = 49 - 12 = 37 \xrightarrow{\Delta > 0} \text{ سهمی دو صفر دارد.}$$

حال علامت P و S را معلوم می‌کنیم:

$$P = \frac{c}{a} \Rightarrow P = \frac{1}{3} \xrightarrow{P>0} \text{ صفرها هم علامت هستند.}$$

$$S = -\frac{b}{a} \Rightarrow S = -\frac{-7}{3} = \frac{7}{3} \xrightarrow{S>0} \text{ هر دو صفر مثبت هستند.}$$

$$\Delta = 2^2 - 4(-1)(-1) = 4 - 4 = 0 \xrightarrow{\Delta=0} \text{ سهمی یک صفر دارد.}$$

ت) علامت Δ را در معادله $-x^2 + 2x - 1 = 0$ تعیین می‌کنیم:

$$\text{صفر سهمی برابر } 1 = -\frac{b}{2a} = -\frac{2}{2(-1)} \text{ می‌باشد پس مثبت است.}$$

سهمی $y = x^2 + x - 6$ ، محور xها را در نقاط A و B قطع می‌کند. طول پاره خط AB کدام است؟

۶ (۴)

۵ (۳)

۴ (۲)

۳ (۱)

۳ باید معادله $x^2 + x - 6 = 0$ را حل کنیم تا طول نقاط تلاقی سهمی با محور xها معلوم شود:

$$x^2 + x - 6 = 0 \Rightarrow (x+3)(x-2) = 0 \Rightarrow x = -3, x = 2$$

بنابراین سهمی $y = x^2 + x - 6$ محور xها را در نقاطی به طول‌های ۲ و -۳ قطع می‌کند، پس طول پاره خط AB برابر ۵ است.



البته می‌توانستیم از تفاضل ریشه‌ها یعنی $\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$ هم طول پاره خط AB رو به دست بیاوریم:

$$\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|} = \frac{\sqrt{1^2 - 4(1)(-6)}}{1} = \sqrt{1+24} = \sqrt{25} = 5$$

حدود m برای آن‌که سهمی $f(x) = mx^2 + (2m+1)x + m+3$ بالای محور xها بوده و محور xها را قطع نکند، کدام است؟

$$m > \frac{1}{4} \quad (۴)$$

$$m > \frac{1}{8} \quad (۳)$$

$$0 < m < \frac{1}{8} \quad (۲)$$

$$m > 0 \quad (۱)$$

۳ برای آن‌که سهمی بالای محور xها بوده و آن را قطع نکند باید ضریب x^2 مثبت و هم‌چنین $\Delta < 0$ باشد:

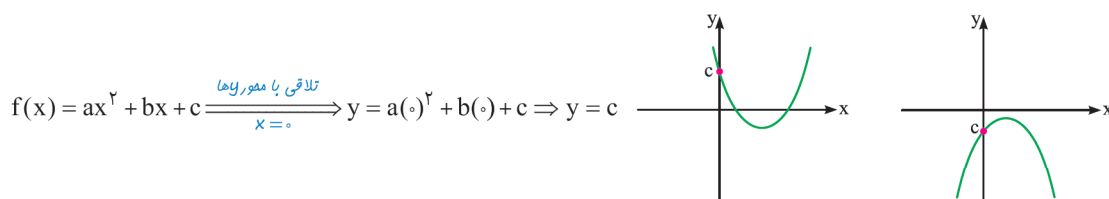


$$\begin{cases} x^2 \text{ ضریب } > 0 \Rightarrow m > 0 \\ \Delta < 0 \Rightarrow (2m+1)^2 - 4(m)(m+3) < 0 \Rightarrow 4m^2 + 4m + 1 - 4m^2 - 12m < 0 \\ \Rightarrow -8m + 1 < 0 \Rightarrow 8m > 1 \Rightarrow m > \frac{1}{8} \end{cases}$$

$$\begin{cases} m > 0 \\ m > \frac{1}{8} \end{cases} \xrightarrow{\text{اشتراک}} m > \frac{1}{8}$$

از اشتراک حدود به دست آمده برای m داریم:

۲ تلاقی با محور yها: سهمی $f(x) = ax^2 + bx + c$ محور yها را با عرض c قطع می‌کند؛ زیرا:



$$f(x) = ax^2 + bx + c \xrightarrow[x=0]{\text{تلاقی با محور yها}} y = a(0)^2 + b(0) + c \Rightarrow y = c$$

اگر ضابطه سهمی به فرم $f(x) = a(x-h)^2 + k$ باشد حتماً یا باید ضابطه‌اش رو به فرم $f(x) = ax^2 + bx + c$ در بیاری و بگی c عرض نقطه

تلاقی سهمی با محور yهاست یا بری در ضابطه $f(x) = a(x-h)^2 + k$ به x مقدار صفر بدی و مقدار y رو به دست بیاوری.



سهمی $f(x) = 2(x+1)^2 - 3$ محور y ها را با کدام عرض قطع می‌کند؟

-۴ (۴)

-۳ (۳)

-۲ (۲)

-۱ (۱)

۱ روش اول: کافی است در معادله سهمی به جای x مقدار صفر را قرار دهیم: $f(0) = 2(0+1)^2 - 3 = 2 - 3 = -1$

روش دوم: ضابطه سهمی را به صورت $f(x) = 2x^2 + 4x - 1$ می‌نویسیم، پس سهمی محور y ها را با عرض -۱ قطع می‌کند.

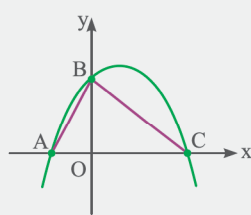
صفرهای سهمی $y = -x^2 + 2x + 15$ و نقطه تلاقی آن با محور y ها رأس‌های مثلث ABC هستند. مساحت مثلث ABC کدام است؟

۶۴ (۴)

۶۰ (۳)

۵۲ (۲)

۴۸ (۱)



۳ به شکل مقابل دقت کنید. AC قاعده مثلث و OB ارتفاع آن است. بنابراین ابتدا صفرهای سهمی را به دست می‌آوریم:

$$-x^2 + 2x + 15 = 0 \Rightarrow x^2 - 2x - 15 = 0 \Rightarrow (x - 5)(x + 3) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 5 \\ x = -3 \end{cases} \Rightarrow AC = 5 - (-3) = 8$$

حال نقطه تلاقی سهمی با محور y ها را به دست می‌آوریم که می‌دانیم برابر ۱۵ است، پس $OB = 15$ می‌باشد. حال داریم:

$$S = \frac{1}{2} \times AC \times OB = \frac{1}{2} \times 8 \times 15 = 60$$

رسم سهمی $f(x) = ax^2 + bx + c$

برای رسم سهمی، ابتدا مختصات رأس سهمی را پیدا می‌کنیم. سپس با مشخص کردن نقطه تلاقی سهمی با محور y ها، می‌توانیم سهمی را تقریبی رسم کنیم. حال اگر صفر یا صفرهای سهمی در صورت وجود، در سؤال خواسته شده باشد، باید آن‌ها را هم معلوم کنیم. توجه کنید علامت a جهت دهانه سهمی را معلوم می‌کند اما با معلوم شدن رأس و نقطه تلاقی سهمی با محور y ها، خودبه‌خود جهت دهانه سهمی معلوم می‌شود.

نمودار سهمی‌های زیر را رسم کنید.

ت) $y = x^2 - 2x + 5$

پ) $y = x^2 - 4x + 4$

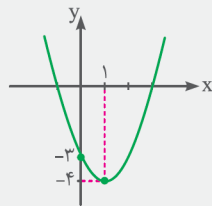
ب) $y = -x^2 + 3x + 4$

الف) $y = x^2 - 2x - 3$

الف ابتدا مختصات رأس سهمی $y = x^2 - 2x - 3$ را به دست می‌آوریم:

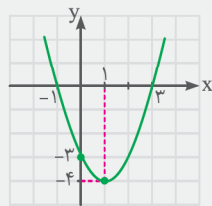
$$x_S = -\frac{b}{2a} \Rightarrow x_S = -\frac{-2}{2(1)} = 1 \Rightarrow y_S = 1^2 - 2(1) - 3 = 1 - 2 - 3 = -4 \Rightarrow S(1, -4)$$

از طرفی سهمی محور y ها را با عرض -۳ قطع می‌کند. بنابراین نمودار سهمی به صورت زیر است:



حال اگر می‌خواستیم سهمی را دقیق‌تر رسم کنیم باید صفرهای سهمی را نیز معلوم کنیم:

$$x^2 - 2x - 3 = 0 \xrightarrow{a+c=b} \begin{cases} x = -1 \\ x = 3 \end{cases}$$



بنابراین نمودار دقیق‌تر سهمی به صورت مقابل است:

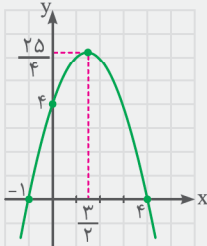
ب) مختصات رأس سهمی $y = -x^2 + 3x + 4$ ، عرض نقطه تلاقی آن با محور y ها و صفرهای سهمی را در صورت وجود به دست می آوریم:

$$x_S = -\frac{b}{2a} \Rightarrow x_S = -\frac{3}{2(-1)} = \frac{3}{2} \Rightarrow y_S = -\left(\frac{3}{2}\right)^2 + 3\left(\frac{3}{2}\right) + 4 = -\frac{9}{4} + \frac{9}{2} + 4 = \frac{25}{4} \Rightarrow S\left(\frac{3}{2}, \frac{25}{4}\right)$$

عرض نقطه تلاقی با محور y ها برابر ۴ است و صفرهای سهمی برابرند با:

$$-x^2 + 3x + 4 = 0 \xrightarrow{a+c=b} \begin{cases} x = -1 \\ x = 4 \end{cases}$$

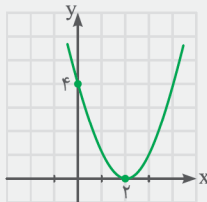
حال نمودار سهمی را رسم می کنیم:



$$x_S = -\frac{b}{2a} \Rightarrow x_S = -\frac{-4}{2(1)} = 2 \Rightarrow y_S = 2^2 - 4(2) + 4 = 4 - 8 + 4 = 0 \Rightarrow S(2, 0)$$

پ) برای رسم سهمی $y = x^2 - 4x + 4$ داریم:

عرض نقطه تلاقی با محور y ها برابر ۴ است و داریم:



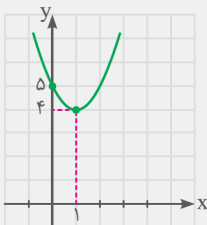
$$x^2 - 4x + 4 = 0 \Rightarrow (x - 2)^2 = 0 \Rightarrow x = 2$$

$$x_S = -\frac{b}{2a} \Rightarrow x_S = -\frac{-2}{2(1)} = 1 \Rightarrow y_S = 1^2 - 2(1) + 5 = 4 \Rightarrow S(1, 4)$$

ت) برای رسم سهمی $y = x^2 - 2x + 5$ داریم:

عرض نقطه تلاقی با محور y ها برابر ۵ است و داریم: سهمی صفر ندارد. $\Delta < 0 \Rightarrow x^2 - 2x + 5 = 0 \Rightarrow \Delta = (-2)^2 - 4(1)(5) = 4 - 20 = -16$

بنابراین نمودار سهمی به صورت زیر است:



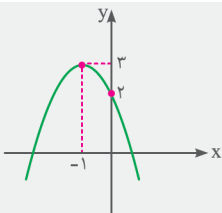
نمودار سهمی $y = -(x+1)^2 + 3$ از کدام ناحیه دستگاه مختصات نمی گذرد؟

۴) از هر ۴ ناحیه می گذرد.

۳) سوم

۲) چهارم

۱) اول



رأس سهمی $(-1, 3)$ است و سهمی محور y ها را با عرض $y = -(-1+1)^2 + 3 = -1 + 3 = 2$ قطع می کند. نمودار سهمی به صورت مقابل است. همان طور که ملاحظه می کنید نمودار سهمی از هر ۴ ناحیه می گذرد.

تلاقی یک سهمی با خط یا سهمی دیگر

برای به دست آوردن نقطه یا نقاط تلاقی سهمی با خط یا سهمی دیگر، ابتدا در هر دو ضابطه، y را تنها می کنیم. سپس y ها را با هم مساوی قرار می دهیم و ریشه یا ریشه های معادله حاصل را در صورت وجود به دست می آوریم. (به این معادله می گوییم، معادله تلاقی). با جای گذاری x یا x های به دست آمده در هر یک از ضابطه ها، عرض نقطه یا نقاط تلاقی به دست می آید.

مجموع طول و عرض نقطه تلاقی سهمی $f(x) = x^2 - 2x - 8$ و خط $y - x - 2 = 0$ کدام می‌تواند باشد؟

۶ (۲) ۴ (۳) -۲ (۴) -۶ (۱)

۴ ابتدا y را در هر دو ضابطه تنها می‌کنیم و داریم:

$$\begin{cases} y = x^2 - 2x - 8 \\ y = x + 2 \end{cases} \Rightarrow x^2 - 2x - 8 = x + 2 \Rightarrow x^2 - 3x - 10 = 0 \Rightarrow (x - 5)(x + 2) = 0 \Rightarrow x = 5, x = -2$$

حال x های به دست آمده را در یکی از ضابطه‌ها قرار می‌دهیم تا عرض نقاط تلاقی به دست آید.

(آله تو ضابطه خط پای‌گذاری کنیم، y سریع‌تر به دست می‌آید.)

$$y = x + 2 \xrightarrow{x=5} y = 5 + 2 \Rightarrow y = 7 \Rightarrow \text{نقطه تلاقی} = (5, 7) \Rightarrow \text{مجموع طول و عرض} = 5 + 7 = 12$$

$$y = x + 2 \xrightarrow{x=-2} y = -2 + 2 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow \text{نقطه تلاقی} = (-2, 0) \Rightarrow \text{مجموع طول و عرض} = (-2) + 0 = -2$$

همان‌طور که ملاحظه می‌کنید -۲ در گزینه‌ها وجود دارد.

مجموع طول و عرض یکی از نقاط تلاقی سهمی‌های $f(x) = x^2 - 3x + 4$ و $g(x) = -x^2 + x + 10$ کدام است؟

۷ (۱) ۶ (۲) ۵ (۳) ۴ (۴)

۱ معادله تلاقی دو سهمی را حل می‌کنیم:

$$\begin{cases} y = x^2 - 3x + 4 \\ y = -x^2 + x + 10 \end{cases} \Rightarrow x^2 - 3x + 4 = -x^2 + x + 10 \Rightarrow 2x^2 - 4x - 6 = 0 \xrightarrow{\div 2} x^2 - 2x - 3 = 0 \xrightarrow{1+(-3)=-2} x = -1, x = 3$$

حال عرض نقاط را به دست می‌آوریم:

$$y = x^2 - 3x + 4 \xrightarrow{x=-1} y = (-1)^2 - 3(-1) + 4 = 1 + 3 + 4 = 8 \Rightarrow \text{نقطه تلاقی} = (-1, 8) \Rightarrow \text{مجموع طول و عرض} = -1 + 8 = 7$$

$$y = x^2 - 3x + 4 \xrightarrow{x=3} y = (3)^2 - 3(3) + 4 = 9 - 9 + 4 = 4 \Rightarrow \text{نقطه تلاقی} = (3, 4) \Rightarrow \text{مجموع طول و عرض} = 3 + 4 = 7$$

همان‌طور که ملاحظه می‌کنید مجموع طول و عرض هر دو نقطه تلاقی برابر ۷ است. (همیشه اینطوری نیست، شانس هر دو برابر شدن.)

خط $y + x = m$ سهمی $y = x^2 + 4x + 6$ را در دو نقطه قطع می‌کند. حدود m کدام است؟

$m > -\frac{1}{4}$ (۱) $m < -\frac{1}{4}$ (۲) $m < \frac{1}{4}$ (۳) $m > \frac{1}{4}$ (۴)

۱ ابتدا معادله تلاقی سهمی و خط را به دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} y = x^2 + 4x + 6 \\ y = -x + m \end{cases} \Rightarrow x^2 + 4x + 6 = -x + m \Rightarrow x^2 + 5x + 6 - m = 0$$

حال برای آن‌که این معادله دو ریشه داشته باشد باید دلتای آن بزرگ‌تر از صفر باشد، پس:

$$\Delta > 0 \Rightarrow 5^2 - 4(1)(6 - m) > 0 \Rightarrow 25 - 24 + 4m > 0 \Rightarrow 4m > -1 \Rightarrow m > -\frac{1}{4}$$

تعیین علامت ضرایب تابع درجه دوم از روی نمودار آن

در سهمی $f(x) = ax^2 + bx + c$ علامت a ، b و c از روی نمودار آن به صورت زیر تعیین می‌شود:

۱ جهت دهانه سهمی، علامت a را مشخص می‌کند. اگر دهانه سهمی، رو به بالا باشد، $a > 0$ و اگر رو به پایین باشد، $a < 0$ است.

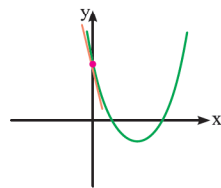
۲ نقطه برخورد نمودار تابع با محور y ها، همان c است. اگر سهمی محور y ها را در قسمت مثبت ها قطع کند، $c > 0$ و اگر در قسمت منفی ها قطع کند،

$c < 0$ و اگر از مبدأ مختصات بگذرد، $c = 0$ است.

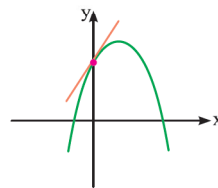
۳ طول رأس سهمی یعنی $x_S = -\frac{b}{2a}$ به تعیین علامت b کمک می‌کند. علامت a که به کمک جهت دهانه سهمی مشخص شده، حال به کمک مثبت یا منفی بودن طول رأس سهمی، علامت b هم معلوم می‌شود.



علامت b رو همیشه با شیب خط مماس بر سهمی، در نقطه برخورد اون با محور y ها هم تعیین کرد. اگه شیب خط مماس در این نقطه، مثبت باشه، $b > 0$ و اگه شیب خط مماس، منفی باشه، $b < 0$ است.



$b < 0 \Rightarrow$ شیب خط مماس منفی است.



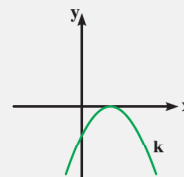
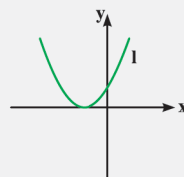
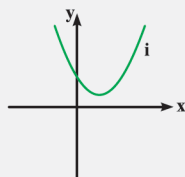
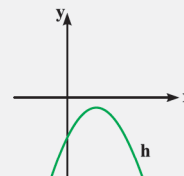
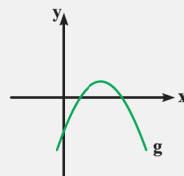
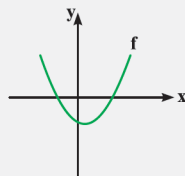
$b > 0 \Rightarrow$ شیب خط مماس مثبت است.

۴ علامت Δ هم توسط تعداد ریشه‌های سهمی معلوم می‌شود. اگر دو ریشه داشته باشد، $\Delta > 0$ ، اگر ریشه مضاعف داشته باشد، $\Delta = 0$ و اگر محور x ها را قطع نکند، $\Delta < 0$ می‌باشد.

(کاردرکلاس ۳ صفحه ۱۷ کتاب درسی)

در هر یک از سهمی‌ها با فرض این‌که ضابطه آن‌ها $y = ax^2 + bx + c$ باشد، جدول داده‌شده را کامل کنید.

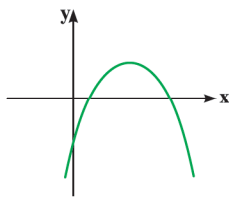
کتاب
درسی
صفحه ۱۷



ویژگی \ تابع	f	g	h	i	l	k
علامت a						
علامت b						
علامت c						
تعداد ریشه‌های متمایز						
علامت ریشه یا ریشه‌ها (در صورت وجود)						

در مورد سطر اول چون دهانه سهمی‌های f, i, l رو به بالا است پس علامت a در آن‌ها مثبت و در بقیه موارد چون دهانه سهمی‌ها رو به پایین است علامت a منفی می‌باشد. در مورد سهمی‌های f و i چون شیب خط مماس بر سهمی در نقطه تلاقی آن‌ها با محور y ها منفی است پس علامت b منفی و در بقیه موارد مثبت است. در مورد سطر سوم چون سهمی‌های i و l محور y ها را با عرض مثبت قطع می‌کنند پس علامت c مثبت و در بقیه موارد چون محور y ها را با عرض منفی قطع می‌کنند علامت c منفی می‌باشد. تعداد ریشه‌ها و علامت آن‌ها هم از روی نمودار مشخص است، پس جدول به صورت زیر است:

ویژگی \ تابع	f	g	h	i	l	k
علامت a	+	-	-	+	+	-
علامت b	-	+	+	-	+	+
علامت c	-	-	-	+	+	-
تعداد ریشه‌های متمایز	۲	۲	صفر	صفر	۱	۱
علامت ریشه یا ریشه‌ها (در صورت وجود)	یکی مثبت یکی منفی	هر دو مثبت	—	—	منفی	مثبت



اگر نمودار تابع $f(x) = ax^2 + bx + c$ به صورت مقابل باشد، کدام نتیجه‌گیری درست است؟

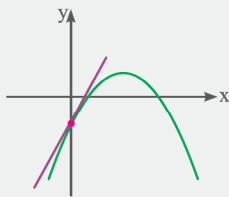
(۱) $c < 0$, $b > 0$, $a > 0$

(۲) $c > 0$, $b < 0$, $a > 0$

(۳) $c < 0$, $b > 0$, $a < 0$

(۴) $c < 0$, $b < 0$, $a < 0$

$x_S > 0 \Rightarrow -\frac{b}{2a} > 0 \xrightarrow{a < 0} b > 0$

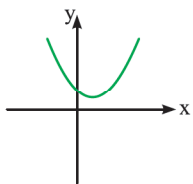


چون دهانه سهمی رو به پایین است، پس $a < 0$ می‌باشد. طول رأس سهمی مثبت است، پس:

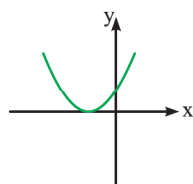
البته از روی شیب خط مماس در نقطه تلاقی آن با محور y ها هم می‌توان فهمید که $b > 0$ است. هم چنین چون سهمی محور y ها را در قسمت منفی قطع می‌کند، $c < 0$ می‌باشد.

گذشتن سهمی از نواحی مختصات

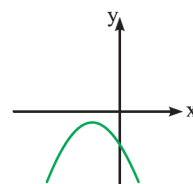
هر سهمی حداقل از دو ناحیه مختصات می‌گذرد. به نمودارهای زیر توجه کنید:



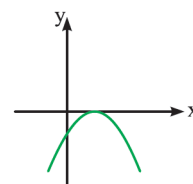
از دو ناحیه می‌گذرد.



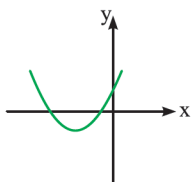
از دو ناحیه می‌گذرد.



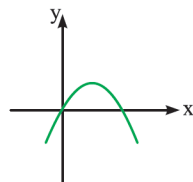
از دو ناحیه می‌گذرد.



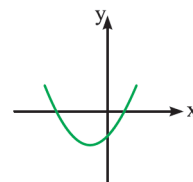
از دو ناحیه می‌گذرد.



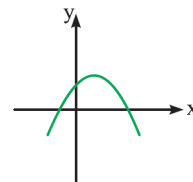
از سه ناحیه می‌گذرد.



از سه ناحیه می‌گذرد.



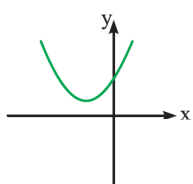
از چهار ناحیه می‌گذرد.



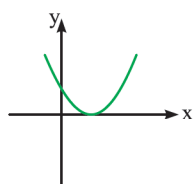
از چهار ناحیه می‌گذرد.

حال می‌خواهیم بررسی کنیم که سهمی‌هایی که از دو ناحیه، سه ناحیه یا چهار ناحیه می‌گذرند، چه ویژگی یا ویژگی‌هایی دارند.

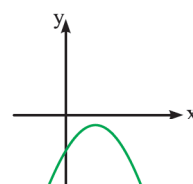
الف سهمی‌هایی که فقط از دو ناحیه می‌گذرند: سهمی‌هایی که فقط از دو ناحیه می‌گذرند یا از ناحیه‌های اول و دوم می‌گذرند یا از ناحیه‌های سوم و چهارم. در این حالت $\Delta \leq 0$ می‌باشد و اگر $a > 0$ باشد سهمی از ناحیه‌های اول و دوم و اگر $a < 0$ سهمی از ناحیه‌های سوم و چهارم می‌گذرد.



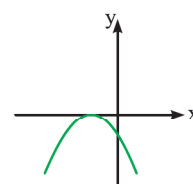
$\Delta < 0$, $a > 0$



$\Delta = 0$, $a > 0$



$\Delta < 0$, $a < 0$



$\Delta = 0$, $a < 0$

هیچ حالتی را حفظ نکنین. برای حل مسئله یک شکل فرضی بکشید و بعد شرایط لازم رو ایجاد کنین.

اینجوری هم ببین

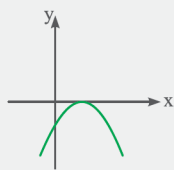
کدام سهمی زیر فقط از نواحی سوم و چهارم دستگاه مختصات می‌گذرد؟

$$y = -x^2 + 5x - 1 \quad (۴)$$

$$y = x^2 - 5x - 2 \quad (۳)$$

$$y = -2x^2 + 3x - 5 \quad (۲)$$

$$y = 2x^2 - x + 4 \quad (۱)$$



به شکل مقابل دقت کنید. باید $\Delta \leq 0$ و $a < 0$ باشد. فقط درگزینه (۲)، این شرایط برقرار است.

درگزینه (۱)، $\Delta < 0$ و $a > 0$ است پس سهمی از نواحی اول و دوم می‌گذرد. درگزینه‌های (۳) و (۴)، $\Delta > 0$ است.

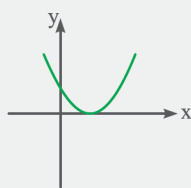
سهمی $y = (m-2)x^2 - 6x + 3m$ فقط از نواحی اول و دوم دستگاه مختصات می‌گذرد. مجموعه مقادیر m به کدام صورت است؟

$$-3 \leq m < 1 \quad (۴)$$

$$m \geq 3 \quad (۳)$$

$$2 < m \leq 3 \quad (۲)$$

$$-1 \leq m \leq 3 \quad (۱)$$



با توجه به شکل مقابل برای این‌که سهمی فقط از ناحیه‌های اول و دوم بگذرد، باید $\Delta \leq 0$ و $a > 0$ باشد، پس:

$$m - 2 > 0 \Rightarrow m > 2$$

$$\Delta \leq 0 \Rightarrow (-6)^2 - 4(m-2)(3m) \leq 0 \Rightarrow 36 - 12m^2 + 24m \leq 0 \Rightarrow m^2 - 2m - 3 \geq 0 \Rightarrow \frac{-1}{-1} \quad \frac{3}{3} \Rightarrow m \leq -1 \text{ یا } m \geq 3$$

از اشتراک حدود به دست آمده $m \geq 3$ می‌باشد.

سهمی‌هایی که دقیقاً از سه ناحیه می‌گذرند؛ در این حالت سهمی فقط از یک ناحیه نمی‌گذرد، با رسم یک شکل فرضی، باید علامت a ، Δ ، S و P را تعیین کنیم. حالت‌های زیر را ببینید:

وضعیت	شکل	علامت a	علامت Δ	علامت S	علامت P
فقط از ناحیه اول نمی‌گذرد.		$a < 0$	$\Delta > 0$	$S < 0$	$P \geq 0$
فقط از ناحیه دوم نمی‌گذرد.		$a < 0$	$\Delta > 0$	$S > 0$	$P \geq 0$
فقط از ناحیه سوم نمی‌گذرد.		$a > 0$	$\Delta > 0$	$S > 0$	$P \geq 0$
فقط از ناحیه چهارم نمی‌گذرد.		$a > 0$	$\Delta > 0$	$S < 0$	$P \geq 0$

اگر $\Delta \leq 0$ باشد که سهمی فقط از دو ناحیه می‌گذرد، پس اگر سهمی دقیقاً از سه ناحیه بگذرد حتماً باید $\Delta > 0$ باشد. در این‌جا P هم حتماً بزرگتر و یا مساوی صفر، این جوری یادت باشد که اگر $P < 0$ باشد که نیازی به چک کردن Δ نیست، پس این‌جا که باید مثبت بودن Δ چک بشه حتماً P منفی نیست. علامت a و S هم که با یک شکل فرضی مشخص میشه.



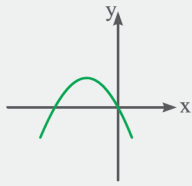
کدام سهمی زیر فقط از ناحیه اول دستگاه مختصات نمی‌گذرد؟

$$y = -x^2 + 3x + 2 \quad (۴)$$

$$y = -x^2 + x - 7 \quad (۳)$$

$$y = -2x^2 - 5x - 1 \quad (۲)$$

$$y = x^2 + 4x - 1 \quad (۱)$$



با توجه به شکل مقابل، باید $a < 0$ ، $\Delta > 0$ ، $S < 0$ و $P \geq 0$ باشد، این شرایط فقط در سهمی $y = -2x^2 - 5x - 1$ برقرار است.

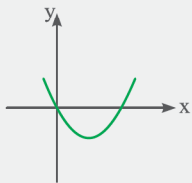
سهمی $y = x^2 - (m+4)x + m$ فقط از ناحیه سوم دستگاه مختصات نمی‌گذرد. مجموعه مقادیر m کدام است؟

$$[0, 4) \quad (۴)$$

$$[0, +\infty) \quad (۳)$$

$$(-4, 0] \quad (۲)$$

$$(-\infty, -4) \quad (۱)$$



با توجه به شکل مقابل باید $a > 0$ ، $\Delta > 0$ ، $S > 0$ و $P \geq 0$ باشد. در سهمی داده شده ضریب x^2 که مثبت است، پس:

$$\Delta > 0 \Rightarrow (-(m+4))^2 - 4(1)(m) > 0 \Rightarrow m^2 + 8m + 16 - 4m > 0 \Rightarrow m^2 + 4m + 16 > 0 \xrightarrow[\Delta > 0]{a > 0} \text{همواره برقرار است.}$$

$$S > 0 \Rightarrow -\frac{-(m+4)}{1} > 0 \Rightarrow m+4 > 0 \Rightarrow m > -4$$

$$P \geq 0 \Rightarrow \frac{m}{1} \geq 0 \Rightarrow m \geq 0$$

از اشتراک حدود به دست آمده $m \geq 0$ می‌باشد.

اگر در سؤالی لفظ «فقط» نباشد، مثلاً بگه «سهمی از ناحیه سوم نمی‌گذرد»، باید دو حالت رو در نظر گرفت. ۱ سهمی فقط از ناحیه سوم نگذرد. ۲ سهمی از نواحی سوم و چهارم نگذرد. سپس اجتماع حدود به دست آمده برای پارامتر، محدوده پارامتر رو مشخص می‌کنه.



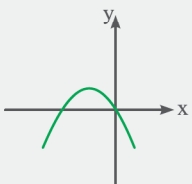
سهمی $y = -4x^2 - (m+3)x - m$ از ناحیه اول دستگاه مختصات نمی‌گذرد. مجموعه مقادیر m کدام است؟

$$1 \leq m \leq 9 \quad (۴)$$

$$0 \leq m \leq 1 \quad (۳)$$

$$m \geq 0 \quad (۲)$$

$$m > 9 \quad (۱)$$



ابتدا حالتی را در نظر می‌گیریم که سهمی فقط از ناحیه اول نگذرد، پس $a < 0$ ، $\Delta > 0$ ، $S < 0$ و $P \geq 0$ است. در سهمی داده شده ضریب x^2 که منفی هست، پس:

$$\Delta > 0 \Rightarrow (-(m+3))^2 - 4(-4)(-m) > 0 \Rightarrow m^2 + 6m + 9 - 16m > 0 \Rightarrow m^2 - 10m + 9 > 0 \Rightarrow \frac{m-9}{m-1} > 0 \Rightarrow m < 1 \text{ یا } m > 9$$

$$S < 0 \Rightarrow -\frac{-(m+3)}{(-4)} < 0 \Rightarrow m+3 > 0 \Rightarrow m > -3$$

$$P \geq 0 \Rightarrow \frac{-m}{-4} \geq 0 \Rightarrow \frac{m}{4} \geq 0 \Rightarrow m \geq 0$$

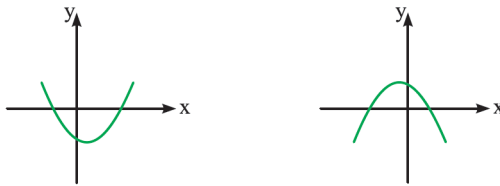
از اشتراک حدود به دست آمده، $0 \leq m < 1$ یا $m > 9$ می‌باشد. حال حالتی را در نظر می‌گیریم که سهمی از نواحی اول و دوم نگذرد، پس باید

$$\Delta \leq 0 \Rightarrow 1 \leq m \leq 9$$

$\Delta \leq 0$ و $a < 0$ باشد حال داریم:

از اجتماع حدود به دست آمده $m \geq 0$ می‌باشد.

پ سهمی از چهار ناحیه مختصات می‌گذرد: در این حالت کافی است سهمی یک صفر مثبت و یک صفر منفی داشته باشد، پس باید $P < 0$ باشد. واضح است که نیازی به چک کردن Δ نیست، چون وقتی $\frac{C}{a} < 0$ است، حتماً $\Delta = b^2 - 4ac$ مثبت می‌باشد.



سهمی $y = (m-1)x^2 + 2mx + (m+3)$ از هر چهار ناحیه دستگاه مختصات می‌گذرد. چند مقدار صحیح برای m وجود دارد؟

۵ (۴)

۴ (۳)

۳ (۲)

۲ (۱)

باید $P < 0$ باشد، پس:

$$\frac{m+3}{m-1} < 0 \xrightarrow{\text{اگر}} (m+3)(m-1) < 0 \Rightarrow -3 < m < 1$$

بنابراین m می‌تواند سه مقدار صحیح بپذیرد.

نوشتن معادله سهمی

۱ با داشتن مختصات رأس سهمی: اگر $S(h, k)$ مختصات رأس سهمی باشد، معادله آن به صورت زیر است که در آن a با اطلاعات دیگری که از

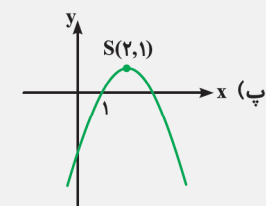
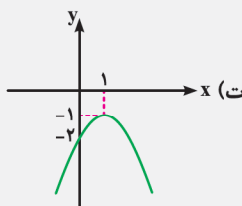
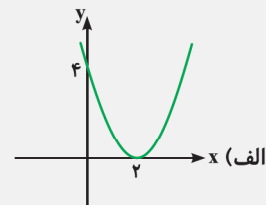
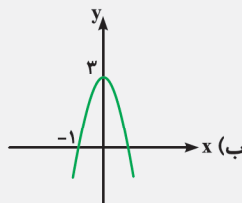
سهمی داریم معلوم می‌شود:

$$y = a(x-h)^2 + k \Rightarrow y = a(x - \text{طول رأس})^2 + \text{عرض رأس}$$

(تمرین ۶ صفحه ۱۸ کتاب درسی)

معادله سهمی‌های زیر را بنویسید.

کتاب
درسی
صفحه ۱۸



الف) رأس سهمی $S(2, 0)$ است و سهمی از نقطه $(0, 4)$ می‌گذرد، پس:

$$y = a(x-2)^2 + 0 \Rightarrow 4 = a(0-2)^2 \Rightarrow 4 = 4a \Rightarrow a = 1$$

بنابراین معادله سهمی به صورت $y = (x-2)^2$ یا $y = x^2 - 4x + 4$ می‌باشد.

ب) رأس سهمی $S(0, 3)$ است و سهمی از نقطه $(-1, 0)$ می‌گذرد، پس:

$$y = a(x-0)^2 + 3 \Rightarrow 0 = a(-1)^2 + 3 \Rightarrow 0 = a + 3 \Rightarrow a = -3$$

بنابراین معادله سهمی به صورت $y = -3x^2 + 3$ می‌باشد.

پ) رأس سهمی $S(2, 1)$ است و سهمی از نقطه $(1, 0)$ می‌گذرد، پس:

$$y = a(x-2)^2 + 1 \Rightarrow 0 = a(1-2)^2 + 1 \Rightarrow 0 = a + 1 \Rightarrow a = -1$$

بنابراین معادله سهمی به صورت $y = -(x-2)^2 + 1$ یا $y = -x^2 + 4x - 3$ می‌باشد.

ت) رأس سهمی $S(1, -1)$ است و سهمی از نقطه $(0, -2)$ می‌گذرد، پس:

$$y = a(x-1)^2 - 1 \Rightarrow -2 = a(0-1)^2 - 1 \Rightarrow -2 = a - 1 \Rightarrow a = -1$$

بنابراین معادله سهمی به صورت $y = -(x-1)^2 - 1$ یا $y = -x^2 + 2x - 2$ می‌باشد.

اگر نقطه $(-2, 1)$ رأس تابع درجه دوم $f(x) = ax^2 + bx + c$ باشد که از نقطه $(3, 4)$ می‌گذرد، مقدار $f(-7)$ کدام است؟

۴ (۱) ۳ (۲) ۲ (۳) ۵ (۴)

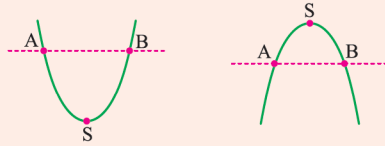
1 معادله سهمی به صورت زیر است:

$$f(x) = a(x - (-2))^2 + 1 \xrightarrow{(3, 4)} 4 = a(3 + 2)^2 + 1 \Rightarrow 25a = 3 \Rightarrow a = \frac{3}{25}$$

بنابراین $f(x) = \frac{3}{25}(x + 2)^2 + 1$ بوده و داریم:

$$f(-7) = \frac{3}{25}(-7 + 2)^2 + 1 \Rightarrow f(-7) = \frac{3}{25} \times 25 + 1 = 4$$

اگر دو نقطه هم‌عرض سهمی را داشته باشیم، طول رأس سهمی برابر است با:



$$x_S = \frac{x_A + x_B}{2}$$

یعنی طول رأس سهمی برابر با میانگین طول هر دو نقطه هم‌عرض از سهمی است.

(هتماً از ریاضی (۱) یادت هست که محور تقارن سهمی همون خط $x = x_S$ هستش. پس آله یک صفر سهمی و معادله محور تقارن اونو داشته باشیم. می‌تونیم صفر دیگه سهمی رو هم پیدا کنیم. صفرهای سهمی نقاط هم‌عرض از سهمی هستن.)

نکته

سهمی $f(x) = ax^2 + bx + c$ از نقاط $(1, -5)$ ، $(3, 19)$ و $(-3, -5)$ می‌گذرد. عرض رأس سهمی کدام است؟

-۱۰ (۱) -۱۲ (۲) -۱۳ (۳) -۱۸ (۴)

3 چون نقاط $(1, -5)$ و $(-3, -5)$ هم‌عرض هستند، پس طول رأس سهمی برابر است با:

$$x_S = \frac{1 + (-3)}{2} = \frac{-2}{2} = -1$$

با فرض این‌که عرض رأس سهمی k باشد، معادله آن به صورت $f(x) = a(x + 1)^2 + k$ است. حال داریم:

$$\begin{cases} f(x) = a(x + 1)^2 + k \xrightarrow{(3, 19)} 19 = a(3 + 1)^2 + k \Rightarrow 19 = 16a + k \\ f(x) = a(x + 1)^2 + k \xrightarrow{(1, -5)} -5 = a(1 + 1)^2 + k \Rightarrow -5 = 4a + k \end{cases} \Rightarrow 19 - (-5) = 16a - 4a \Rightarrow 24 = 12a \Rightarrow a = 2$$

با قرار دادن $a = 2$ در هر یک از معادلات، مقدار k برابر -13 می‌شود. پس عرض رأس سهمی -13 است.

(وقتی ضابطه سهمی رو نوشتیم، یه بار نقطه‌ای که استفاده نکرده بودیم و بار دیگه یکی از نقاطی که باهاشون، طول رأس سهمی رو پیدا کرده بودیم رو تو ضابطه جای‌گذاری کردیم تا a و k معلوم بشن!)

ممکنه هیچ دو نقطه از سه نقطه‌ای که سهمی از آن‌ها می‌گذره هم‌عرض نباشن، در این صورت باید سه نقطه رو در ضابطه $y = ax^2 + bx + c$ جای‌گذاری کنین و از معادلات حاصل مقادیر a ، b و c رو به‌دست بیارین.



یک سهمی از نقاط $A(1, 2)$ ، $B(0, -3)$ و $C(3, 18)$ می‌گذرد. عرض رأس سهمی کدام است؟

-۲ (۱) -۱ (۲) ۱ (۳) ۲ (۴)

2 فرض می‌کنیم سهمی به صورت $y = ax^2 + bx + c$ باشد. چون سهمی از نقطه $B(0, -3)$ می‌گذرد پس $c = -3$ است. حال داریم:

$$y = ax^2 + bx - 3 \xrightarrow{A(1, 2)} 2 = a(1)^2 + b(1) - 3 \Rightarrow 2 = a + b - 3 \Rightarrow a + b = 5$$

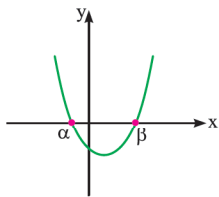
$$y = ax^2 + bx - 3 \xrightarrow{C(3, 18)} 18 = a(3)^2 + b(3) - 3 \Rightarrow 18 = 9a + 3b - 3 \Rightarrow 9a + 3b = 21 \Rightarrow 3a + b = 7$$

$$\begin{cases} a + b = 5 \\ 3a + b = 7 \end{cases} \Rightarrow 2a = 2 \Rightarrow a = 1 \Rightarrow b = 4 \Rightarrow y = x^2 + 4x - 3$$

حال داریم:

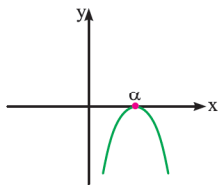
$$x_S = -\frac{b}{2a} \Rightarrow x_S = -\frac{4}{2(1)} = -2 \Rightarrow y_S = (-2)^2 + 4(-2) - 3 = 4 - 8 - 3 = -7$$

بنابراین عرض رأس سهمی برابر است با:



۲ با داشتن صفرهای سهمی: اگر α و β صفرهای سهمی $y = f(x)$ باشند، آن گاه معادله سهمی به صورت زیر است که a با اطلاعات دیگری از سهمی به دست می آید:

$$f(x) = a(x - \alpha)(x - \beta)$$



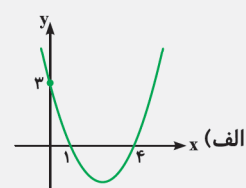
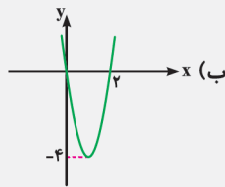
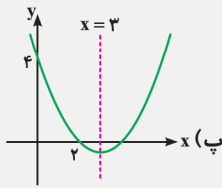
اینجوری هم ببین اگر سهمی بر محور x ها در نقطه $x = \alpha$ مماس باشد، اونوقت معادله اون به صورت زیر همیشه که a با اطلاعات دیگری از سهمی به دست میاد:

$$f(x) = a(x - \alpha)^2$$

(تمرین ۶ صفحه ۱۸ کتاب درسی)

ضابطه سهمی های زیر را بنویسید.

کتاب
درسی
صفحه ۱۸



الف) صفرهای سهمی ۱ و ۴ هستند و سهمی از نقطه $(2, -3)$ می گذرد، پس:

$$y = a(x - 1)(x - 4) \xrightarrow{(2, -3)} -3 = a(2 - 1)(2 - 4) \Rightarrow -3 = a(1)(-2) \Rightarrow -3 = -2a \Rightarrow a = \frac{3}{2}$$

بنابراین ضابطه سهمی به صورت $y = \frac{3}{2}(x - 1)(x - 4)$ یا $y = \frac{3}{2}x^2 - \frac{15}{2}x + 6$ می باشد.

ب) صفرهای سهمی ۱ و ۴ هستند. بنابراین طول رأس سهمی $x_S = \frac{1+4}{2} = 2.5$ می باشد. حال به دو روش می توانیم ضابطه سهمی را بنویسیم:

روش اول: رأس سهمی $S(2.5, -4)$ است و از نقطه $(0, 0)$ می گذرد، پس:

$$y = a(x - 1)(x - 4) \xrightarrow{(0, 0)} 0 = a(0 - 1)(0 - 4) \Rightarrow 0 = a(-1)(-4) \Rightarrow 0 = 4a \Rightarrow a = 0$$

روش دوم: صفرهای سهمی ۱ و ۴ هستند و از نقطه $(2.5, -4)$ می گذرد، پس:

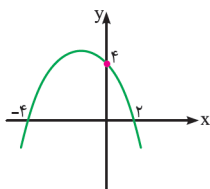
$$y = a(x - 1)(x - 4) \xrightarrow{(2.5, -4)} -4 = a(2.5 - 1)(2.5 - 4) \Rightarrow -4 = a(1.5)(-1.5) \Rightarrow -4 = -2.25a \Rightarrow a = \frac{16}{9}$$

پ) خط $x = 3$ محور تقارن سهمی است و یک صفر آن ۲ می باشد، پس صفر دیگر سهمی برابر است با:

$$x_S = \frac{\alpha + \beta}{2} \Rightarrow 3 = \frac{2 + \beta}{2} \Rightarrow 6 = 2 + \beta \Rightarrow \beta = 4$$

بنابراین صفرهای سهمی ۲ و ۴ بوده و از نقطه $(0, 4)$ می گذرد، پس:

$$y = a(x - 2)(x - 4) \xrightarrow{(0, 4)} 4 = a(0 - 2)(0 - 4) \Rightarrow 4 = a(-2)(-4) \Rightarrow 4 = 8a \Rightarrow a = \frac{1}{2} \Rightarrow y = \frac{1}{2}(x - 2)(x - 4) \Rightarrow y = \frac{1}{2}x^2 - 3x + 4$$



سهمی شکل مقابل از کدام نقطه زیر عبور می کند؟

(۲, -۸) (۴, -۸)

(۴, ۱) (-۲, ۱)

(۱, -۴) (۳, -۲)

(۳, -۲) (۱, -۴)

۲ ریشه های سهمی ۲ و -۴ هستند، پس معادله آن به صورت $f(x) = a(x + 4)(x - 2)$ است.

همان طور که ملاحظه می کنید سهمی از نقطه $(0, 4)$ می گذرد، پس:

$$f(0) = 4 \Rightarrow a(0 + 4)(0 - 2) = 4 \Rightarrow -8a = 4 \Rightarrow a = -\frac{1}{2}$$

بنابراین ضابطه سهمی $f(x) = -\frac{1}{2}(x + 4)(x - 2)$ می باشد. با توجه به گزینه ها، این سهمی از نقطه $(4, -8)$ می گذرد، چون $(4, -8)$ در معادله سهمی صدق می کند.

معادله درجه دوم

۱. روابط بین ریشه‌ها و ...
 ۲. به دست آوردن حاصل
 یک عبارت
 ۳. رابطه بین ریشه‌ها
۴. علامت ریشه‌ها
 ۵. تشکیل معادله درجه دوم
 ۶. معادلات قابل تبدیل به
 معادله درجه دوم

روابط بین ریشه‌ها و ضرایب معادله

در تست‌های این قسمت باید به فکر استفاده از مجموع، حاصل ضرب و تفاضل ریشه‌های معادله درجه دوم به کمک ضرایب باشی نه خود ریشه‌ها...

۱۷۰. اگر x_1 و x_2 ریشه‌های معادله $x^2 - 4x - 12 = 0$ باشد، حاصل $x_1 x_2 (x_1 + x_2)$ کدام است؟

- (۱) -۶۰ (۲) -۵۶ (۳) -۴۸ (۴) ۵۶

(نهایی ۱۴۰۳ - حسابان)

۱۷۱. اختلاف مجموع و حاصل ضرب ریشه‌های معادله $x^2 - 3x - 7 = 0$ کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) ۲/۵ (۳) ۳ (۴) ۳/۵

۱۷۲. اگر x_1 و x_2 ریشه‌های معادله $x^2 - 5 = 0$ باشند، حاصل $\frac{x_1 x_2}{x_1 + x_2}$ کدام است؟

- (۱) -۴ (۲) ۲ (۳) -۵/۲ (۴) ۵/۲

۱۷۳. اگر x_1 و x_2 ریشه‌های معادله $x^2 + 4x - 1 = 0$ و $x_2 > x_1$ باشد، مقدار $x_2 - x_1$ کدام است؟

- (۱) $\sqrt{6}$ (۲) $2\sqrt{3}$ (۳) $-\sqrt{6}$ (۴) $-\sqrt{3}$

۱۷۴. اگر α و β ریشه‌های معادله $x^2 + x - 3 = 0$ باشند، حاصل $(\alpha + 1)(\beta + 1)$ کدام است؟

- (۱) -۴ (۲) -۳ (۳) -۲ (۴) -۱

۱۷۵. اگر x_1 و x_2 ریشه‌های معادله $x^2 + 3x + 1 = 0$ باشند، حاصل $x_1(3x_2 - 4) + x_2(5x_1 - 4)$ کدام است؟

- (۱) -۱۰ (۲) -۸ (۳) ۶ (۴) ۱۲

۱۷۶. اگر x_1 و x_2 ریشه‌های معادله $x^2 + 3x - 4 = 0$ باشند، حاصل $|x_1^2 - x_2^2|$ کدام است؟

- (۱) ۱۰ (۲) ۱۲ (۳) ۱۵ (۴) ۲۰

۱۷۷. اگر x_1 و x_2 ریشه‌های معادله $x^2 - 4 = (\sqrt[3]{x^2} + 1)(\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{x^2} + 1)$ باشند، مقدار $x_1 x_2 (x_1 + x_2)$ کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) -۳ (۳) ۳ (۴) ۴

(تجربی داخل ۱۴۰۰)

۱۷۸. فرض کنید x_1 و x_2 جواب‌های معادله $2\sqrt[3]{x} = (\sqrt[3]{x^2} - 1)(\sqrt[3]{x^2} + \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} + 1)$ باشند، مقدار $x_1 + x_2$ کدام است؟

- (۱) -۱ (۲) صفر (۳) ۱ (۴) ۲

۱۷۹. اگر مجموع ریشه‌های معادله $x^2 - (m-1)x + m + 1 = 0$ برابر ۴ باشد، حاصل ضرب ریشه‌های معادله کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۶

(ریاضی نوبت اول ۱۴۰۳ - با تغییر)

۱۸۰. اختلاف ریشه‌های معادله $x^2 + 2kx + 5 = 0$ برابر $\frac{4}{3}k$ است. اختلاف مقادیر k کدام است؟

- (۱) ۹ (۲) ۴ (۳) ۶ (۴) ۸

۱۸۱. مجموع ریشه‌های معادله $x^2 - (m-3)x + 4 = 0$ با حاصل ضرب ریشه‌های معادله $x^2 - 4x + m - 2 = 0$ برابر است. مقدار m کدام است؟

- (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۶ (۴) ۸

۱۸۲. اگر a و $3a$ ریشه‌های طبیعی معادله $x^2 - mx + 12 = 0$ و b و $b+1$ ریشه‌های طبیعی معادله $x^2 - nx + 12 = 0$ باشند، مقدار $m+n$ کدام است؟

- (۱) ۲۱ (۲) ۱۹ (۳) ۱۵ (۴) ۱۲

۱۸۳. ریشه‌های معادله $x^2 - (a+1)x + a = 0$ دو عدد فرد متوالی طبیعی و ریشه‌های معادله $x^2 - (3a+1)x + b = 0$ دو عدد زوج متوالی است. اختلاف

(تجربی خارج ۱۴۰۲)

حاصل ضرب ریشه‌های دو معادله کدام است؟

- (۱) ۳۳ (۲) ۲۱ (۳) ۱۳ (۴) ۹

۱۸۴. اگر x_1 و x_2 ریشه‌های معادله $x^2 - (a-1)x + a + 1 = 0$ هستند. اگر $x_1^2 x_2 + x_1 x_2^2 = 15$ باشد، مقدار a کدام است؟

- (۱) ۴ (۲) ۳ (۳) -۴ (۴) -۳

۱۸۵. اگر x_1 و x_2 ریشه‌های معادله $x^2 + 2ax - a + 2 = 0$ و $(a-3)x^2 + 2ax - a + 2 = 0$ باشد، مقدار a کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) -۳ (۳) ۳ (۴) -۲

۱۸۶. اگر x_1 و x_2 ریشه‌های معادله $x^2 + (m+2)x + 2 = 0$ و $x_1 + \frac{4}{x_2} = 8$ باشد، مقدار m کدام است؟

- (۱) ۱۰- (۲) ۸- (۳) ۶- (۴) ۴-

۱۸۷. اگر x_1 و x_2 ریشه‌های معادله $x^2 - mx + 16 = 0$ و $\frac{1}{\sqrt{x_1}} + \sqrt{x_2} = 5$ باشد، مقدار m کدام است؟

- (۱) ۱۲ (۲) ۱۷ (۳) ۱۹ (۴) ۲۱

۱۸۸. تفاضل مربعات ریشه‌های معادله $x^2 - 12x + m + 2 = 0$ برابر ۴۸ است. مقدار m کدام است؟

- (۱) ۳۰ (۲) ۲۴ (۳) ۱۸ (۴) ۱۲

۱۸۹. اگر α و β ریشه‌های معادله $x^2 + 2(a+1)x + 2a - 1 = 0$ باشند، به ازای کدام مقدار a ، به ترتیب سه عدد α ، a و β تشکیل دنباله هندسی می‌دهند؟

(ریاضی خارج ۱۴۰۱)

- (۱) ۲- (۲) ۲ (۳) ۱- (۴) ۱

۱۹۰. به ازای کدام مقدار m عدد $\frac{1}{8}$ واسطه حسابی بین دو ریشه حقیقی معادله $x^2 - 3x + m = 0$ است؟

- (۱) ۳ (۲) ۳- (۳) ۴ (۴) ۴-

۱۹۱. اگر α و β ریشه‌های معادله $x^2 + (3-a)x + 4 = 0$ و به ترتیب سه عدد α ، a و β سه جمله متوالی یک دنباله هندسی باشند، ریشه بزرگ تر معادله کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۴ (۳) ۴- (۴) ۱-

۱۹۲. α و β ریشه‌های معادله $ax^2 - 8x + 4 = 0$ هستند. اگر مجموع و حاصل ضرب ریشه‌های معادله‌ای که ریشه‌های آن $\alpha\beta^2$ و $\alpha^2\beta$ است برابر باشند، مقدار مثبت a کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۱۹۳. معادله درجه دوم $m = 0$ دارای دو ریشه حقیقی است. اگر مجموع ریشه‌ها با معکوس حاصل ضرب آن دو ریشه برابر باشد، مقدار m کدام است؟

(تجربی داخل ۹۹)

- (۱) $\frac{7}{2}$ (۲) ۳ (۳) ۱- (۴) $-\frac{5}{2}$

(ریاضی خارج ۱۴۰۳)

۱۹۴. برای چند مقدار صحیح m ، هر دو ریشه معادله $x^2 + 5x + m = 0$ کوچک‌تر از $\frac{9}{4}$ است؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۴ (۴) ۵

(ریاضی داخل ۱۴۰۳)

۱۹۵. برای چند مقدار صحیح m ، هر دو ریشه معادله $x^2 + 7x + m = 0$ بزرگ‌تر از ۳- است؟

- (۱) ۴ (۲) ۳ (۳) ۱ (۴) صفر

به دست آوردن حاصل یک عبارت برحسب ریشه‌ها

می‌خواهیم حاصل عبارت‌های متقارن و نامتقارن برحسب ریشه‌ها در معادله درجه دوم به دست بیاوریم...

۱۹۶. اگر α و β ریشه‌های معادله $x^2 - 6x + 2 = 0$ باشند، حاصل $\alpha^2 + \beta^2$ کدام است؟

- (۱) ۲۴ (۲) ۲۸ (۳) ۳۰ (۴) ۳۲

۱۹۷. مجموع مربعات ریشه‌های معادله $x^2 - (m+1)x - 5m = 0$ برابر ۲۹ است. مقدار m کدام است؟

- (۱) ۲- (۲) ۱۴ (۳) ۱۴- (۴) ۲

۱۹۸. a و b ریشه‌های معادله $x^2 - (m-2)x + 2 = 0$ هستند. اگر $2a^2 + 2b^2 + a + b = 2$ باشد، مقدار m کدام است؟

- (۱) ۶ (۲) ۸ (۳) ۱۰ (۴) ۱۲

۱۹۹. در معادله $x^2 - 4x - 3 = 0$ مجموع مکعبات ریشه‌ها کدام است؟

- (۱) ۸۱ (۲) ۹۰ (۳) ۷۲ (۴) ۱۰۰

۲۰۰. مجموع معکوس مکعبات ریشه‌های معادله $x^2 - 6x + 2 = 0$ کدام است؟

- (۱) $\frac{12}{5}$ (۲) $\frac{22}{5}$ (۳) $\frac{37}{5}$ (۴) $\frac{32}{5}$

۲۰۱. اگر α و β ریشه‌های معادله $x^2 + 3x - 5 = 0$ باشند، حاصل $\frac{\alpha\beta^2 + \beta\alpha^2}{\beta\alpha^3 + \alpha\beta^3}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{62}{17}$ (۲) $-\frac{72}{19}$ (۳) $\frac{32}{13}$ (۴) $-\frac{37}{17}$

۲۰۲. اگر x_1 و x_2 ریشه‌های معادله $x^2 - 7x + 3 = 0$ و $x_1 > x_2$ باشد، حاصل $x_1^3 - x_2^3$ کدام است؟

- (۱) $23\sqrt{23}$ (۲) $37\sqrt{37}$ (۳) $46\sqrt{37}$ (۴) $46\sqrt{23}$

۲۰۳. مجموع معکوس ریشه‌های معادله $x^2 - 6x - 1 = 0$ کدام است؟

- (۱) -۶ (۲) ۶ (۳) ۳ (۴) -۳

(ریاضی داخل ۹۶)

۲۰۴. به ازای کدام مقدار m ، مجموع جذر هر دو ریشه معادله درجه دوم $x^2 - (m+1)x + \frac{1}{\lambda} = 0$ ، برابر ۲ می‌باشد؟

- (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴) ۶

(تجربی خارج ۱۴۰۴)

۲۰۵. اختلاف جذر دو ریشه معادله $x^2 - 3mx + m = 0$ برابر ۱ است. حاصل ضرب ریشه‌های معادله $2x^2 + mx - m = 0$ کدام است؟

- (۱) $-\frac{1}{18}$ (۲) $-\frac{1}{2}$ (۳) $\frac{3}{4}$ (۴) $\frac{2}{3}$

۲۰۶. اگر α و β ریشه‌های معادله $x^2 - 12x + 1 = 0$ باشند، مقدار $\frac{1}{\sqrt{\alpha}} + \frac{1}{\sqrt{\beta}}$ چقدر است؟

- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۶

۲۰۷. مجموع جذر معکوس ریشه‌های معادله $x^2 - (m+14)x + 1 = 0$ برابر ۵ است. حاصل ضرب ریشه‌های معادله $mx^2 + 3x + 2 = 0$ کدام است؟

(تجربی داخل ۱۴۰۴)

- (۱) -۲ (۲) -۳ (۳) ۲ (۴) ۳

۲۰۸. اگر x_1 و x_2 ریشه‌های معادله $x^2 - 6x + 4 = 0$ باشند، حاصل $\sqrt{\frac{x_1}{x_2}} + \sqrt{\frac{x_2}{x_1}}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{3}{2}$ (۲) ۳ (۳) ۲ (۴) ۱

۲۰۹. اگر x_1 و x_2 ریشه‌های معادله $x^2 - 16x + 9 = 0$ باشند، حاصل $x_1\sqrt{x_2} + x_2\sqrt{x_1}$ کدام است؟

- (۱) $4\sqrt{17}$ (۲) $3\sqrt{22}$ (۳) $\sqrt{22}$ (۴) ۱۰

۲۱۰. اگر x_1 و x_2 ریشه‌های معادله $x^2 - 7x - 2 = 0$ باشند، حاصل $\frac{1}{x_1+1} + \frac{1}{x_2+1}$ کدام است؟

- (۱) $2/4$ (۲) $1/5$ (۳) $1/8$ (۴) $3/2$

۲۱۱. اگر α و β ریشه‌های معادله $x^2 - 4x + 1 = 0$ باشند، حاصل $(\alpha + \frac{3}{\beta})^3 + (\beta + \frac{3}{\alpha})^3$ کدام است؟

- (۱) 3204 (۲) 3328 (۳) 3412 (۴) 3600

۲۱۲. اگر x_1 و x_2 ریشه‌های معادله $x^2 - 4 = 0$ باشند، حاصل $\frac{1}{(x_1+1)^3} + \frac{1}{(x_2+1)^3}$ کدام است؟

- (۱) $-\frac{7}{64}$ (۲) $-\frac{11}{8}$ (۳) $-\frac{13}{64}$ (۴) $-\frac{7}{27}$

۲۱۳. اگر α و β ریشه‌های معادله $x^2 - 7x - 2 = 0$ باشند، حاصل $\alpha^2 + 7\beta + 2$ کدام است؟

- (۱) ۴۹ (۲) ۵۳ (۳) ۵۶ (۴) ۶۴

۲۱۴. اگر x_1 و x_2 ریشه‌های معادله $2x^2 + 3x - 7 = 0$ باشند، حاصل $2x_1^2 + 3x_2 + \sqrt{2x_1^2 + 3x_2 + 18}$ کدام است؟

- (۱) ۱۸ (۲) ۱۹ (۳) ۲۰ (۴) $16/5$

۲۱۵. اگر α و β ریشه‌های معادله $x^2 - 3x - 2 = 0$ باشد، حاصل $2\alpha^3 + 22\beta$ کدام است؟

- (۱) ۹۸ (۲) ۸۸ (۳) ۷۸ (۴) ۶۸

(ریاضی اردیبهشت ۱۴۰۴)

۲۱۶. اگر α و β ریشه‌های معادله $x^2 - 5x + 2 = 0$ باشند، مقدار $\frac{4\alpha + \beta^5}{5\beta^2}$ کدام است؟

- (۱) ۲۱ (۲) ۲۰ (۳) ۱۹ (۴) ۱۸

۲۱۷. اگر x_1 و x_2 ریشه‌های معادله درجه دوم $x^2 + x - 1 = 0$ باشند و $x_2 > x_1$ ، مقدار عبارت $5x_1^2 + 3x_2^2$ کدام است؟

- (۱) $12 + \sqrt{5}$ (۲) $12 - \sqrt{5}$ (۳) $24 + \sqrt{5}$ (۴) $24 - \sqrt{5}$

(ریاضی خارج ۱۴۰۲)

۲۱۸. اگر α و β ریشه‌های معادله $x^2 - 12x - a = 0$ و $3x^2 - 4\alpha = 7 + \beta^2$ باشد، مقدار a چند برابر ریشه بزرگ تر معادله است؟

- (۱) ۳ (۲) -۳ (۳) ۹ (۴) -۹

(ریاضی داخل ۱۴۰۲)

۲۱۹. اگر α و β ریشه‌های متمایز معادله $ax^2 - ax - b = 0$ و $2\beta = 17 - 2\alpha^2 + 4\beta^2$ باشد، اختلاف ریشه‌های این معادله کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{5}$ (۲) $\frac{2}{5}$ (۳) $\frac{1}{\sqrt{5}}$ (۴) $\frac{2}{\sqrt{5}}$

۲۲۰. a و b ریشه‌های معادله $2x^2 + 4x + m = 0$ هستند. اگر $a < b$ و $a^3 + b^3 + 4a^2 = -7 + 12\sqrt{2}$ باشد، مقدار m کدام است؟

- (۱) -۱ (۲) -۴ (۳) -۷ (۴) -۸

۲۲۱. α و β ریشه‌های معادله $x^2 + 6x + a = 0$ هستند. اگر $\alpha < \beta < 0$ و $3\alpha^2 + 2\beta^2 = 12\sqrt{2} + 85$ باشد، مقدار a چقدر است؟ (ریاضی داخل ۱۴۰۱)

- (۱) ۱ (۲) $\frac{13}{4}$ (۳) $\frac{21}{5}$ (۴) ۲

۲۲۲. α و β ریشه‌های معادله $2x^2 + 6x + a = 0$ هستند. اگر $\beta < \alpha < 0$ و $\alpha^3 + \beta^3 + \beta^2 = -\frac{21}{4} + \frac{3}{4}\sqrt{3}$ باشد، مقدار a چقدر است؟

- (۱) $\frac{33}{4}$ (۲) $\frac{11}{3}$ (۳) ۳ (۴) ۵ (ریاضی آزمون مجدد ۱۴۰۱)

رابطه بین ریشه‌ها

یک رابطه بین ریشه‌های معادله درجه دوم میدان و می‌خوان پارامتری رو در معادله تعیین کنیم. مجموع و حاصل ضرب ریشه‌ها به کمک ما میان...

۲۲۳. به ازای کدام مقدار k در معادله درجه دوم $2x^2 - x + k = 0$ بین ریشه‌ها رابطه $3 = x_1 + 2x_2$ برقرار است؟

- (۱) -۱۲ (۲) -۱۰ (۳) ۸ (۴) ۶

۲۲۴. در معادله $x^2 - 8x + m = 0$ یک ریشه از نصف ریشه دیگر ۵ واحد بیش تر است. مقدار m کدام است؟

- (۱) ۱۰ (۲) ۱۲ (۳) ۱۴ (۴) ۱۵

۲۲۵. در معادله $3x^2 - 15x + m = 0$ اگر یکی از ریشه‌ها ۲ واحد از ریشه دیگر بیش تر باشد، مقدار m کدام است؟

- (۱) $\frac{59}{5}$ (۲) $\frac{63}{5}$ (۳) $\frac{59}{4}$ (۴) $\frac{63}{4}$

۲۲۶. به ازای دو مقدار a ، یک ریشه معادله $3x^2 - ax + 4 = 0$ ، سه برابر ریشه دیگر است. اختلاف این دو مقدار a کدام است؟ (تجربی داخل ۱۴۰۱)

- (۱) ۸ (۲) ۹ (۳) ۱۶ (۴) ۱۸

۲۲۷. اگر یکی از ریشه‌های معادله $-x^2 + (2m+1)x - 8m^3 = 0$ مجذور ریشه دیگر باشد، مقدار منفی m کدام است؟

- (۱) -۲ (۲) $-\frac{1}{2}$ (۳) -۴ (۴) -۱

۲۲۸. در معادله $2x^2 - (2m+1)x + m^2 - 9m + 39 = 0$ یکی از ریشه‌ها دو برابر ریشه دیگر است. بیش‌ترین مقدار برای مجموع ریشه‌ها کدام است؟

- (۱) $8/5$ (۲) $9/5$ (۳) $10/5$ (۴) $11/5$

علامت ریشه‌ها

علامت ریشه‌ها و ارتباط اون با ضرایب معادله ...

۲۲۹. به ازای کدام مقادیر m ، معادله درجه دوم $3 - 2mx - (m-6)x^2 = 0$ ، دارای دو ریشه حقیقی منفی است؟

- (۱) $m < -6$ (۲) $m > 3$ (۳) $0 < m < 3$ (۴) $3 < m < 6$

۲۳۰. معادله درجه دوم $2x^2 + mx + m + 6 = 0$ دارای دو ریشه مثبت است. بازه مقادیر m کدام است؟ (تجربی خارج ۹۹)

- (۱) $(-4, 0)$ (۲) $(-4, -2)$ (۳) $(-6, 0)$ (۴) $(-6, -4)$

۲۳۱. اگر x_1 و x_2 ریشه‌های معادله $x^2 + 2(m-1)x + m - 7 = 0$ ، $x_1 < 0 < x_2$ و $|x_1| > x_2$ باشند، مجموعه مقادیر m کدام است؟

- (۱) $(-3, 1)$ (۲) $(-3, 7)$ (۳) $(1, 7)$ (۴) $(-1, 3)$

۲۳۲. به ازای یک مقدار m ، ریشه‌های معادله $2x^2 + 3mx + 2m + 6 = 0$ معکوس یکدیگرند. مجموع این دو ریشه کدام است؟

- (۱) $-1/5$ (۲) $1/5$ (۳) ۲ (۴) ۳

تشکیل معادله درجه دوم

در این قسمت می‌خواهیم معادله بسازیم...

۲۳۳. یک ریشه کدام معادله $2 - \sqrt{3}$ است؟

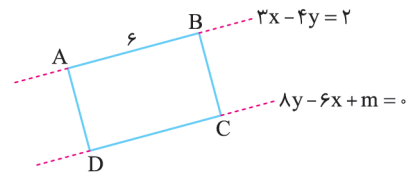
- (۱) $x^2 + 4x - 7 = 0$ (۲) $x^2 - 4x + 1 = 0$ (۳) $x^2 - x - 4 = 0$ (۴) $x^2 - 4x + 2 = 0$

۲۳۴. اگر a و b اعداد صحیح و $3 - \sqrt{a}$ یکی از ریشه‌های معادله $6x^2 - ax + ab = 0$ باشد، مقدار $4b + a$ کدام است؟

- (۱) ۲۴ (۲) ۳۶ (۳) ۱۸ (۴) ۱۲

۲ ۱۶۸

با توجه به شکل زیر و هم‌چنین مساحت مستطیل که برابر ۱۲ است، داریم:



$$12 = 6 \times |BC| \Rightarrow |BC| = 2$$

بنابراین فاصله دو خط موازی $3x - 4y = 2$ و $4y - 6x + m = 0$ برابر ۲ است. حال داریم:

$$3x - 4y = 2 \xrightarrow{\times (-2)} 4y - 6x = -4 \Rightarrow 4y - 6x + 4 = 0$$

$$2 = \frac{|m - 4|}{\sqrt{6^2 + 4^2}} \Rightarrow 2 = \frac{|m - 4|}{10} \Rightarrow |m - 4| = 20$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m - 4 = 20 \Rightarrow m = 24 \\ m - 4 = -20 \Rightarrow m = -16 \end{cases} \Rightarrow \text{میانگین} = \frac{24 + (-16)}{2} = 4$$

۴ ۱۶۹

خطوط مماس $2x + y = 3$ و $y = -2x + 5$ موازی‌اند پس مرکز دایره روی خط میانگین آن‌ها قرار دارد. پس:

$$y = -2x + \frac{5+3}{2} \Rightarrow y = -2x + 4$$

از طرفی خط $y - 4x - 6 = 0$ قطر دایره است پس مرکز دایره روی این خط نیز قرار دارد. بنابراین مرکز دایره نقطه تلاقی خط $y = -2x + 4$ و قطر دایره است:

$$\begin{cases} y - 4x - 6 = 0 \\ y = -2x + 4 \end{cases} \Rightarrow -2x + 4 - 4x - 6 = 0$$

$$\Rightarrow -6x = 2 \Rightarrow x = -\frac{2}{6} = -\frac{1}{3}$$

۳ ۱۷۰

می‌دانیم در معادله $ax^2 + bx + c = 0$ مجموع ریشه‌ها برابر $-\frac{b}{a}$ و حاصل ضرب ریشه‌ها برابر $\frac{c}{a}$ است. پس در معادله $x^2 - 4x - 12 = 0$ داریم:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{-4}{1} = 4 \\ x_1 x_2 = \frac{-12}{1} = -12 \end{cases} \Rightarrow x_1 x_2 (x_1 + x_2) = -48$$

۲ ۱۷۱

می‌دانیم در معادله $ax^2 + bx + c = 0$ ، مجموع ریشه‌ها برابر $-\frac{b}{a}$ و حاصل ضرب ریشه‌ها برابر $\frac{c}{a}$ است. پس در معادله $4x^2 - 3x - 7 = 0$ داریم:

$$\begin{cases} S = \alpha + \beta = -\frac{-3}{4} = \frac{3}{4} \\ P = \alpha\beta = \frac{-7}{4} \end{cases} \Rightarrow S - P = \frac{3}{4} - \left(-\frac{7}{4}\right) = \frac{10}{4} = \frac{5}{2}$$

۱ ۱۷۲

ابتدا معادله را مرتب می‌کنیم:

$$(x-1)^2 = 5 - x \Rightarrow x^2 - 2x + 1 = 5 - x \Rightarrow x^2 - x - 4 = 0$$

حال داریم:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{-1}{1} = 1 \\ x_1 x_2 = \frac{-4}{1} = -4 \end{cases} \Rightarrow \frac{x_1 x_2}{x_1 + x_2} = \frac{-4}{1} = -4$$

۳ ۱۷۳

می‌دانیم اگر x_1 و x_2 ریشه‌های معادله $ax^2 + bx + c = 0$ باشند، آن‌گاه $|x_1 - x_2| = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$ است. چون در معادله $2x^2 + 4x - 1 = 0$ با ریشه‌های x_1 و x_2 می‌باشد، پس:

$$|x_1 - x_2| = -(x_1 - x_2) = \frac{\sqrt{16 - 4(2)(-1)}}{2}$$

$$\Rightarrow x_1 - x_2 = -\frac{\sqrt{24}}{2} = -\frac{2\sqrt{6}}{2} = -\sqrt{6}$$

۲ ۱۷۴

عبارت $(\alpha+1)(\beta+1)$ برابر $\alpha\beta + \alpha + \beta + 1$ است. پس در معادله $x^2 + x - 3 = 0$ داریم:

$$\begin{cases} \alpha + \beta = -\frac{1}{1} = -1 \\ \alpha\beta = \frac{-3}{1} = -3 \end{cases} \Rightarrow \alpha\beta + \alpha + \beta + 1 = (-3) + (-1) + 1 = -3$$

۱ ۱۷۵

ابتدا عبارت $x_1(3x_2 - 4) + x_2(5x_1 - 4)$ را بر حسب مجموع و حاصل ضرب ریشه‌های نوپسیم:

$$3x_1x_2 - 4x_1 + 5x_1x_2 - 4x_2 = 8x_1x_2 - 4(x_1 + x_2)$$

حال در معادله $-2x^2 + 3x + 1 = 0$ داریم:

$$x_1 + x_2 = -\frac{3}{-2} = \frac{3}{2}$$

$$x_1 x_2 = \frac{1}{-2} = -\frac{1}{2}$$

بنابراین حاصل عبارت خواسته شده برابر است با:

$$8\left(-\frac{1}{2}\right) - 4\left(\frac{3}{2}\right) = -4 - 6 = -10$$

۳ ۱۷۶

عبارت $|x_1^2 - x_2^2|$ برابر $|(x_1 - x_2)(x_1 + x_2)|$ و با توجه به ویژگی قدرمطلق برابر $|x_1 - x_2| \times |x_1 + x_2|$ است، پس:

$$|x_1 - x_2| = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|} \Rightarrow |x_1 - x_2| = \frac{\sqrt{9+16}}{1} = \frac{\sqrt{25}}{1} = 5$$

$$x_1 + x_2 = -\frac{3}{1} = -3 \Rightarrow |x_1 + x_2| = 3$$

حال داریم:

$$|x_1^2 - x_2^2| = |x_1 - x_2| \times |x_1 + x_2| = 5 \times 3 = 15$$

۴ ۱۷۷

با کمی دقت متوجه می‌شویم در سمت چپ معادله می‌توان از اتحاد چاق و لاغر استفاده کرد، پس:

$$(\sqrt[3]{x^2} + 1)(\sqrt[3]{x^4} - \sqrt[3]{x^2} + 1) = 4x \Rightarrow x^2 + 1 = 4x \Rightarrow x^2 - 4x + 1 = 0$$

حال در معادله $x^2 - 4x + 1 = 0$ داریم:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{-4}{1} = 4 \\ x_1 x_2 = \frac{1}{1} = 1 \end{cases} \Rightarrow x_1 x_2 (x_1 + x_2) = 1 \times 4 = 4$$

۱۸۳ ۲

با توجه به ضرایب معادله $x^2 - (a+1)x + a = 0$ که در آن مجموع ضرایب صفر است، یک ریشه معادله او دیگری a است. چون گفته شده ریشه‌ها دو عدد فرد متوالی هستند پس $a = 3$ می‌باشد و معادله $x^2 - (3a+1)x + b = 0$ به صورت $x^2 - 10x + b = 0$ می‌شود. حال اگر فرض کنیم x_1 و x_2 ریشه‌های این معادله هستند، داریم:

$$x_1 + x_2 = 10 \xrightarrow{x_1 \text{ و } x_2 \text{ دو عدد زوج متوالی}} x_1 = 4, x_2 = 6$$

بنابراین اختلاف حاصل ضرب ریشه‌های دو معادله برابر است:

$$4 \times 6 - 1 \times 3 = 24 - 3 = 21$$

۱۸۴ ۳

در تساوی $x_1^2 x_2 + x_2^2 x_1 = 15$ داریم:

$$x_1 x_2 (x_1 + x_2) = 15 \Rightarrow PS = 15$$

در معادله $x^2 - (a-1)x + a+1 = 0$ داریم:

$$S = x_1 + x_2 = -\frac{-(a-1)}{1} = a-1$$

$$P = x_1 x_2 = \frac{a+1}{1} = a+1$$

با توجه به مقادیر به دست آمده، داریم:

$$PS = 15 \Rightarrow (a+1)(a-1) = 15 \Rightarrow a^2 - 1 = 15$$

$$\Rightarrow a^2 = 16 \Rightarrow a = \pm 4$$

به ازای $a = 4$ دلتای معادله منفی می‌شود پس $a = -4$ قابل قبول است.

۱۸۵ ۴

ابتدا عبارت $\frac{x_2}{x_2 - 1} = x_1$ را ساده می‌کنیم:

$$\frac{x_2}{x_2 - 1} = x_1 \Rightarrow x_2 = x_1 x_2 - x_1 \Rightarrow x_1 + x_2 = x_1 x_2$$

بنابراین $-\frac{b}{a} = \frac{c}{a}$ است و داریم:

$$-b = c \Rightarrow -2a = -a + 2 \Rightarrow -a = 2 \Rightarrow a = -2$$

۱۸۶ ۱

با توجه به تساوی $x_1 + \frac{4}{x_2} = 8$ داریم:

$$x_1 x_2 = \frac{-20}{1} = -20 \quad \text{حال در معادله } x^2 + (m+2)x - 20 = 0 \text{ داریم:}$$

بنابراین داریم:

$$\frac{x_1 x_2 + 4}{x_2} = 8 \Rightarrow \frac{-20 + 4}{x_2} = 8 \Rightarrow 8x_2 = -16 \Rightarrow x_2 = -2$$

می‌دانیم ریشه معادله در معادله صدق می‌کند، پس:

$$(-2)^2 + (m+2)(-2) - 20 = 0 \Rightarrow 4 - 2m - 4 - 20 = 0$$

$$\Rightarrow -2m = 20 \Rightarrow m = -10$$

۱۸۷ ۲

با توجه به تساوی $\frac{1}{\sqrt{x_1}} + \sqrt{x_2} = 5$ داریم:

$$\frac{1 + \sqrt{x_1 x_2}}{\sqrt{x_1}} = 5$$

در معادله $x^2 - mx + 16 = 0$ داریم:

$$x_1 x_2 = 16 \Rightarrow \frac{1 + \sqrt{16}}{\sqrt{x_1}} = 5 \Rightarrow \frac{5}{\sqrt{x_1}} = 5 \Rightarrow \sqrt{x_1} = 1 \Rightarrow x_1 = 1$$

چون یک ریشه معادله ۱ است، پس مجموع ضرایب معادله صفر می‌باشد:

$$1 - m + 16 = 0 \Rightarrow m = 17$$

۱۸۸ ۴

ابتدا طرفین معادله را در $\sqrt[3]{x^2}$ ضرب می‌کنیم، سپس در سمت چپ معادله به کمک اتحاد چاق و لاغر داریم:

$$(\sqrt[3]{x^2} + \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} + 1)(\sqrt[3]{x^2} - 1) = 2\sqrt[3]{x} \xrightarrow{\times \sqrt[3]{x^2}} (\sqrt[3]{x^2})^2 + 1 + \sqrt[3]{x^2} (\sqrt[3]{x^2} - 1) = 2\sqrt[3]{x^3} \Rightarrow x^2 - 1 = 2x \Rightarrow x^2 - 2x - 1 = 0$$

حال مجموع ریشه‌های معادله را به دست می‌آوریم:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = -\frac{-2}{1} = 2$$

۱۸۹ ۱

مجموع ریشه‌های معادله $(m-1)x^2 - (m^2-1)x + m+1 = 0$ برابر ۴ است، پس:

$$-\frac{-(m^2-1)}{m-1} = 4 \Rightarrow \frac{m^2-1}{m-1} = 4 \Rightarrow \frac{(m-1)(m+1)}{m-1} = 4$$

$$\Rightarrow m+1 = 4 \Rightarrow m = 3$$

به ازای $m = 3$ معادله به صورت $2x^2 - 8x + 4 = 0$ می‌شود که حاصل ضرب ریشه‌های معادله برابر $\frac{4}{2} = 2$ می‌باشد.

۱۹۰ ۳

فرض می‌کنیم x_1 و x_2 ریشه‌های معادله $x^2 + 2kx + 5 = 0$ باشند، پس $|x_1 - x_2| = \frac{4}{3}k$ است و داریم:

$$\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|} = \frac{4}{3}k \Rightarrow \frac{\sqrt{(2k)^2 - 4(1)(5)}}{1} = \frac{4}{3}k$$

$$\Rightarrow \sqrt{4k^2 - 20} = \frac{4}{3}k \Rightarrow 4k^2 - 20 = \frac{16}{9}k^2 \Rightarrow \frac{2}{9}k^2 = 20$$

$$\Rightarrow k^2 = 9 \Rightarrow k = \pm 3$$

بنابراین اختلاف مقادیر k برابر ۶ است.

۱۹۱ ۲

مجموع ریشه‌های معادله $x^2 - (m-3)x + 4 = 0$ برابر $m-3$ و حاصل ضرب ریشه‌های معادله $2x^2 - 4x + m-2 = 0$ برابر $\frac{m-2}{2}$ می‌باشد، پس:

$$m-3 = \frac{m-2}{2} \Rightarrow 2m-6 = m-2 \Rightarrow m = 4$$

۱۹۲ ۱

در معادله $x^2 - mx + 12 = 0$ داریم:

$$a \times 3a = 12 \Rightarrow 3a^2 = 12 \Rightarrow a^2 = 4 \Rightarrow a = \pm 2$$

چون گفته شده ریشه‌ها، طبیعی هستند پس $a = 2$ قابل قبول است و داریم:

$$a + 3a = m \xrightarrow{a=2} 2+6 = m \Rightarrow m = 8$$

در معادله $x^2 - nx + 12 = 0$ داریم:

$$b \times (b+1) = 12 \Rightarrow b^2 + 1b - 12 = 0 \Rightarrow b = 3, b = -4$$

چون گفته شده ریشه‌ها، طبیعی هستند پس $b = 3$ قابل قبول است و داریم:

$$b + b + 1 = n \xrightarrow{b=3} n = 13$$

بنابراین $m + n$ برابر $8 + 13 = 21$ است.

حال در معادله $3x^2 + (2m-1)x + 2 - m = 0$ داریم:

$$a^2 = -bc \Rightarrow 3^2 = -(2m-1)(2-m) \Rightarrow 9 = 2m^2 - 5m + 2 \\ \Rightarrow 2m^2 - 5m - 7 = 0$$

$$\xrightarrow{a+c=b} \begin{cases} m = -1 \\ m = \frac{7}{2} \end{cases}$$

حال چون معادله دارای دو ریشه حقیقی است، پس باید $\Delta > 0$ باشد. واضح است اگر $m = \frac{7}{2}$ باشد، ضریب x^2 و عدد ثابت معادله مختلف‌العلامت می‌شوند، پس حتماً $\Delta > 0$ است.

۱۹۴ ۳

فرض می‌کنیم α و β ریشه‌های معادله $-x^2 + 5x + m = 0$ باشند، پس:

$$\begin{cases} \alpha < \frac{9}{4} \Rightarrow \alpha - \frac{9}{4} < 0 \Rightarrow 2\alpha - 9 < 0 \\ \beta < \frac{9}{4} \Rightarrow \beta - \frac{9}{4} < 0 \Rightarrow 2\beta - 9 < 0 \end{cases}$$

$$(2\alpha - 9)(2\beta - 9) > 0 \Rightarrow 4\alpha\beta - 18(\alpha + \beta) + 81 > 0$$

در معادله $-x^2 + 5x + m = 0$ داریم:

$$\alpha + \beta = -\frac{5}{-1} = 5 \text{ و } \alpha\beta = \frac{m}{-1} = -m$$

بنابراین داریم:

$$4\alpha\beta - 18(\alpha + \beta) + 81 > 0 \Rightarrow 4(-m) - 18(5) + 81 > 0$$

$$\Rightarrow -4m - 9 > 0 \Rightarrow 4m < -9 \Rightarrow m < -\frac{9}{4}$$

از طرفی دلتای معادله باید مثبت باشد، پس:

$$\Delta > 0 \Rightarrow 5^2 - 4(-1)(m) > 0 \Rightarrow 25 + 4m > 0 \Rightarrow 4m > -25$$

$$\Rightarrow m > -\frac{25}{4}$$

از اشتراک حدود به دست آمده، $-\frac{25}{4} < m < -\frac{9}{4}$ می‌باشد که شامل ۴ مقدار صحیح -۵ ، -۴ ، -۳ و -۲ است.

۱۹۵ ۲

فرض می‌کنیم α و β ریشه‌های معادله $2x^2 + 7x + m = 0$ باشند، پس:

$$\begin{cases} \alpha > -3 \Rightarrow \alpha + 3 > 0 \\ \beta > -3 \Rightarrow \beta + 3 > 0 \end{cases} \Rightarrow (\alpha + 3)(\beta + 3) > 0$$

$$\Rightarrow \alpha\beta + 3(\alpha + \beta) + 9 > 0$$

از طرفی در معادله $2x^2 + 7x + m = 0$ داریم:

$$\alpha + \beta = -\frac{7}{2} \text{ و } \alpha\beta = \frac{m}{2}$$

بنابراین داریم:

$$\frac{m}{2} + 3(-\frac{7}{2}) + 9 > 0 \Rightarrow \frac{m}{2} - \frac{3}{2} > 0 \Rightarrow \frac{m}{2} > \frac{3}{2} \Rightarrow m > 3$$

از طرفی دلتای معادله باید مثبت باشد، پس:

$$\Delta > 0 \Rightarrow 7^2 - 4(2)(m) > 0 \Rightarrow 49 - 8m > 0$$

$$\Rightarrow 8m < 49 \Rightarrow m < \frac{49}{8}$$

از اشتراک حدود به دست آمده، $3 < m < \frac{49}{8}$ است که شامل سه عدد صحیح ۴ ، ۵ و ۶ می‌باشد.

۱۸۸ ۴

فرض می‌کنیم x_1 و x_2 ریشه‌های معادله $x^2 - 12x + m + 2 = 0$ هستند،

$$x_1^2 - x_2^2 = 48 \Rightarrow (x_1 - x_2)(x_1 + x_2) = 48$$

پس:

$$\text{در معادله } x^2 - 12x + m + 2 = 0 \text{ داریم:} \\ x_1 + x_2 = 12$$

$$x_1 - x_2 = \frac{\sqrt{144 - 4(m+2)}}{1}$$

حال با توجه به مقادیر به دست آمده داریم:

$$\sqrt{64 - 4m} \times 12 = 48 \Rightarrow \sqrt{64 - 4m} = 4$$

$$\Rightarrow 64 - 4m = 16 \Rightarrow 4m = 48 \Rightarrow m = 12$$

۱۸۹ ۴

برای آن‌که سه عدد a ، α و β تشکیل دنباله هندسی دهند باید $a^2 = \alpha\beta$ باشد،

باشد، از طرفی در معادله $x^2 + 2(a+1)x + 2a-1 = 0$ داریم:

بنابراین داریم:

$$a^2 = \alpha\beta \xrightarrow{\alpha\beta=2a-1} a^2 = 2a-1 \Rightarrow a^2 - 2a + 1 = 0 \Rightarrow (a-1)^2 = 0 \Rightarrow a = 1$$

۱۹۰ ۴

فرض می‌کنیم α و β ریشه‌های معادله $x^2 - 3x + m = 0$ باشند،

پس:

$$\frac{1}{\alpha} = \frac{\alpha + \beta}{2} \Rightarrow \alpha + \beta = \frac{1}{\alpha}$$

بنابراین داریم:

$$\frac{1}{\alpha} = -\frac{-3}{m^2 - 4} \Rightarrow m^2 - 4 = 12 \Rightarrow m^2 = 16 \Rightarrow m = \pm 4$$

به ازای $m = -4$ ضریب x^2 و عدد ثابت معادله، مختلف‌العلامت می‌شوند، پس حتماً $\Delta > 0$ خواهد بود و معادله دو ریشه حقیقی دارد.

۱۹۱ ۴

باید $a^2 = \alpha\beta$ باشد، پس:

به ازای $a = 2$ معادله $x^2 + (3-a)x + 4 = 0$ ریشه ندارد چون دلتای

معادله منفی می‌شود. به ازای $a = -2$ داریم:

$$x^2 + 5x + 4 = 0 \xrightarrow{a+c=b} \begin{cases} x = -1 \\ x = -4 \end{cases} \Rightarrow \text{ریشه بزرگتر} = -1$$

۱۹۲ ۲

مجموع و حاصل ضرب ریشه‌های $\alpha\beta^2$ و $\alpha^2\beta$ برابر است، پس:

$$\alpha\beta^2 + \alpha^2\beta = \alpha\beta^2 \times \alpha^2\beta \Rightarrow \alpha\beta(\beta + \alpha) = \alpha^3\beta^3$$

در معادله $ax^2 - 8x + 4 = 0$ داریم:

$$\alpha + \beta = \frac{8}{a}, \alpha\beta = \frac{4}{a}$$

بنابراین داریم:

$$\alpha\beta(\alpha + \beta) = (\alpha\beta)^3 \Rightarrow \frac{4}{a} \times \frac{8}{a} = \frac{64}{a^3} \Rightarrow \frac{1}{a^2} = \frac{2}{a^3}$$

$$\Rightarrow a^3 = 2a^2 \xrightarrow{a>0} a = 2$$

۱۹۳ ۱

چون مجموع ریشه‌های معادله با معکوس حاصل ضرب آن دو ریشه برابر

است، داریم:

$$S = \frac{1}{P} \Rightarrow -\frac{b}{a} = \frac{1}{\frac{b}{a}} \Rightarrow -\frac{b}{a} = \frac{a}{c} \Rightarrow a^2 = -bc$$