



IQ



< مجموعه کتاب های آی کیو

• آمار و احتمال یازدهم •

> بیش از ۱۰۰۰ تست با پاسخ کاملا تشریحی + درسنامه های آموزشی

آرش عمید



یه کتاب، ختم کتاب...

< هندسه یازدهم آی کیو >

دکتر آی کیو
DRIQ.com
کلاس آنلاین

گاج مارکت
gajmarket.com
فروشگاه آنلاین

گاجینو
gajino.com
آموزش آنلاین



آرش عمید هستم. این کتاب حاصل تجربه بیش از بیست سال تدریس من در درس آمار و احتمال است.

سؤالات کنکور در این درس استاندارد متفاوتی با آزمون‌های آزمایشی دارد. اگر می‌خواهید به تمام تست‌های کنکور در این درس پاسخ دهید باید با تست‌هایی مشابه خط فکری طراحان کنکور دست و پنجه نرم کنید.

در این کتاب با سؤالات بسیار نزدیک به سؤالات کنکور مواجه می‌شوید. پاسخ‌نامه این کتاب واقعاً تشریحی است و هر جا که می‌شد تیپ تست‌هایی را با روش کوتاه‌تری حل کرد در پاسخ‌نامه ارائه شده است.

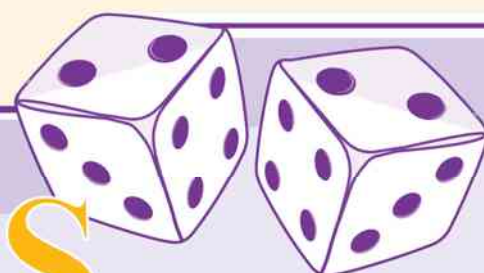
توصیه می‌کنم حتماً درسنامه‌های کتاب را بخوانید، کمک زیادی به یادگیری مفاهیم، شناخت تست‌های رایج و طبقه‌بندی مفاهیم در ذهن‌تان می‌کند. راستی! کتاب هندسه یازدهم آیکو هم خیلی به کارتان می‌آید. امیدوارم این کتاب نقش مؤثری در موفقیت شما عزیزان در کنکور داشته باشد.

با عضویت در کانال تلگرامی @ArashAmid می‌توانید از مطالب مرتبط استفاده کنید.

به امید موفقیت‌های بزرگت ...

آرش عمید

آمار و احتمال



S TATISTICS &
PROBABILITY

- فصل اول: آشنایی با مبانی ریاضیات ۵
- فصل دوم: احتمال ۳۷
- فصل سوم: آمار توصیفی ۸۹
- فصل چهارم: آمار استنباطی ۱۲۳
- فصل پنجم: شمارش بدون شمردن ۱۴۱

پاسخ نامه

A NSWERS



- پاسخ نامه تشریحی ۱۶۳
- کنکورهای ۱۴۰۳ و ۱۴۰۴ ۲۶۹

فصل اول .

آمار و احتمال

آشنایی با مبانی ریاضیات

iq

Chapter One

Logic &
Set



کورت گودل

ریاضی‌دان، منطق‌دان و فیلسوف اتریشی بود. قضایای
ناکتمایت گودل یکی از دستاوردهای برجسته ریاضیات
قرن بیستم است.

Kurt Friedrich گودل

فصل اول

درس اول: آشنایی با منطق ریاضی

آمار و احتمال: فصل ۱

گزاره



به جمله خبری که در حال حاضر یا آینده، درست یا نادرست باشند، گزاره می‌گوییم. بنابراین جمله‌های پرسشی، امری و عاطفی گزاره محسوب نمی‌شوند زیرا هیچ خبری را بیان نمی‌کنند. هم‌چنین حدس‌های ریاضی^۱ گزاره محسوب می‌شوند چون به هر حال حدس‌ها فقط یک ارزش دارند.

ارزش گزاره: درست یا نادرست بودن یک گزاره را ارزش گزاره گفته و ارزش گزاره درست را با حرف «د» یا «T» و ارزش گزاره نادرست را با حرف «ن» یا «F» نمایش می‌دهیم. یک گزاره فقط یک ارزش دارد یعنی نمی‌تواند هم درست و هم نادرست باشد. گزاره‌ها را معمولاً با حروف p, q, r و... نمایش می‌دهیم.

جدول ارزش گزاره‌ها: همان‌طور که دیدیم، هر گزاره دارای ارزش درست یا نادرست است، بنابراین هر گزاره از نظر ارزش دارای ۲ حالت است. حال اگر n گزاره داشته باشیم، ارزش آن‌ها طبق اصل ضرب دارای 2^n حالت مختلف می‌تواند باشد. مثلاً جدول ارزش گزاره p و جدول ارزش گزاره‌های p و q را ببینید:

p	q	p
د	د	د
د	ن	ن
ن	د	د
ن	ن	ن

❓ ارزش‌های ۱-۳n گزاره دارای ۳۲ حالت مختلف است. اگر جدول ارزش n گزاره را رسم کنیم، چند خانه از جدول را با ارزش درست نشان خواهیم داد؟

۲ (۱) ۴ (۲) ۸ (۳) ۱۶ (۴)

✔ گزینه ۲ ابتدا مقدار n را به دست می‌آوریم: $2^{3n-1} = 32 \Rightarrow 2^{3n-1} = 2^5 \Rightarrow 3n-1 = 5 \Rightarrow n = 2$

جدول ارزش ۲ گزاره دارای ۸ خانه است، که نیمی از خانه‌ها، یعنی ۴ خانه، ارزش درست دارد.

گزاره‌نما: هر جمله خبری که شامل یک یا چند متغیر باشد و با جای‌گذاری مقادیری به جای متغیر یا متغیرها به یک گزاره تبدیل شود را گزاره‌نما می‌نامیم. مثلاً جمله «a عددی فرد است»، یک گزاره‌نما است، با قراردادن $a = 3$ در آن، به یک گزاره درست و با قرار دادن $a = 4$ در آن، به یک گزاره نادرست تبدیل می‌شود.

دامنه متغیر گزاره‌نما: در هر گزاره‌نما به مجموعه مقادیری که می‌توان آن‌ها را به جای متغیرهای آن قرار داد تا این‌که گزاره‌نما به گزاره تبدیل شود، دامنه متغیر گزاره‌نما می‌گویند و آن را با حرف «D» نمایش می‌دهند. مثلاً دامنه متغیر گزاره‌نمای «p عددی اول است»، مجموعه اعداد طبیعی، دامنه متغیر گزاره‌نمای «x عددی زوج است»، مجموعه اعداد صحیح می‌توان در نظر گرفت.

مجموعه جواب گزاره‌نما: در هر گزاره‌نما، به مجموعه عضوهایی از دامنه متغیر که به ازای آن‌ها، گزاره‌نما تبدیل به گزاره درست شود، مجموعه جواب گزاره‌نما می‌گوییم و آن را با حرف «S» نشان می‌دهیم. واضح است که همواره $S \subseteq D$ می‌باشد. مثلاً در گزاره‌نمای $4x^2 + x - 5 = 0$ دامنه متغیر گزاره‌نما، مجموعه اعداد حقیقی و مجموعه جواب آن برابر $S = \{1, \frac{-5}{4}\}$ است.

❓ مجموعه جواب گزاره‌نمای $2x^2 - 5x + 3 < 0$ ، با دامنه $\mathbb{R}$ ، شامل چند عدد صحیح است؟

۱ (۱) صفر ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴)

✔ گزینه ۱ از ابتدا عبارت $2x^2 - 5x + 3$ را تعیین علامت می‌کنیم: $2x^2 - 5x + 3 < 0 \Rightarrow (x-1)(2x-3) < 0 \Rightarrow 1 < x < \frac{3}{2}$

واضح است که مجموعه جواب گزاره‌نما شامل عدد صحیح نیست.

۱. حدس‌های ریاضی گزاره‌هایی هستند که هنوز اثبات نشده‌اند از طرفی برای آن‌ها مثال نقضی هم یافت نشده است.

❓ اگر دامنه متغیر گزاره‌نما، مجموعه اعداد طبیعی باشد، مجموعه جواب کدام گزاره‌نما با دامنه متغیر گزاره‌نما برابر است؟ (p مجموعه اعداد اول است).

(۱) $n(n+1) \notin p$ (۲) $2^n + 1 \in p$ (۳) $2^n > n^2$ (۴) $(n+1)^2 = n^2 + 2n + 1$

✔ گزینه ۴: در گزینه (۱) با قرار دادن $n=1$ عبارت $n(n+1)$ برابر ۲ می‌شود که عددی اول است. در گزینه (۲) با قرار دادن $n=3$ عبارت $2^n + 1$ برابر ۹ می‌شود که عددی اول نیست و در گزینه (۳) با قرار دادن $n=2$ عبارت 2^n با n^2 برابر می‌شود. بنابراین در گزینه‌های (۱)، (۲) و (۳) مجموعه جواب برابر با مجموعه اعداد طبیعی نیست، اما گزینه (۴) به ازای هر عدد طبیعی n برقرار است، پس مجموعه جواب با دامنه متغیر گزاره‌نما برابر است.

گزاره‌های مرکب

از ترکیب دو یا چند گزاره به وسیله رابط‌های گزاره‌ای (ادوات ربط) گزاره‌های مرکب به دست می‌آیند. با دانستن ارزش گزاره‌های p، q، r و... و توجه به ادوات ربط، می‌توان ارزش گزاره‌های مرکب را تعیین کرد. ابتدا مفهوم نقیض گزاره و دو گزاره هم‌ارز را ببینید.

p	~p
د	ن
ن	د

■ **نقیض یک گزاره:** نقیض گزاره p به صورت $\sim p$ نوشته می‌شود و آن را «چنین نیست که p» می‌خوانیم. ارزش $\sim p$ همواره عکس ارزش p است. به جدول ارزش گزاره‌های مقابل توجه کنید:

نکته از آن جایی که هر گزاره یک جمله خبری است و حتماً دارای فعل می‌باشد، برای بیان نقیض یک گزاره کافی است فعل جمله را نفی کنیم اما گاهی می‌توان بدون نفی کردن فعل، نمادها و نام‌گذاری‌ها را نقیض کرد. نقیض‌های پرکاربرد را ببینید:

p	=	<	≥	است	فرد	گویا
~p	≠	≥	<	نیست	زوج	گنگ

مثلاً نقیض گزاره «۱۸ عددی گویا است» گزاره «این‌طور نیست که ۱۸ عددی گویا باشد» یا «۱۸ عددی گویا نیست» یا «۱۸ عددی گنگ است» می‌باشد.

❓ کدام دو گزاره نقیض یکدیگر هستند؟

- «عدد a از عدد b کوچک‌تر است.»؛ «عدد a از عدد b بزرگ‌تر است.»
- « $(-3)^5$ عددی مثبت است.»؛ « $(-3)^5$ عددی منفی است.»
- «عدد طبیعی a یک عدد اول است.»؛ «عدد طبیعی a یک عدد مرکب است.»
- «a یک عدد زوج است.»؛ «a یک عدد فرد است.»

✔ گزینه ۴: در گزینه (۱) نقیض گزاره «عدد a از عدد b کوچک‌تر است» گزاره «عدد a از عدد b بزرگ‌تر یا مساوی است» می‌باشد. در گزینه (۲) نقیض « $(-3)^5$ عددی مثبت است» گزاره « $(-3)^5$ عدد صفر یا عددی منفی است» می‌باشد. در گزینه (۳) نقیض گزاره «عدد طبیعی a یک عدد اول است» گزاره «عدد طبیعی a یک عدد مرکب یا عدد طبیعی یک می‌باشد» است. (دقت کن، عدد یک نه اوله نه مرکب). اما در گزینه (۴) نقیض گزاره «a یک عدد زوج است» گزاره «a یک عدد فرد است» می‌باشد.

■ **دو گزاره هم‌ارز:** اگر دو گزاره p و q هم‌ارزش باشند، می‌نویسیم $p \equiv q$ و می‌خوانیم «p هم‌ارز است با q».

p	~p	~(~p)
د	ن	د
ن	د	ن

نکته دو گزاره p و $\sim(\sim p)$ هم‌ارز می‌باشند. به جدول مقابل دقت کنید:

نتیجه اگر گزاره p فعلی منفی داشته باشد، می‌توان به کمک $\sim(\sim p)$ آن را مثبت کرد.

۲۹ عددی اول است. $\equiv$ (۲۹ عددی غیراول است.) $\equiv \sim$ (۲۹ عددی غیراول نیست.) $\equiv \sim(\sim)$

❓ گزاره «چنین نیست که $\sqrt{7}$ عددی گنگ نیست» با کدام گزاره هم‌ارز است؟

(۱) $\sqrt{7}$ عددی گنگ نیست. (۲) چنین نیست که $\sqrt{7}$ عددی گویا نیست.

(۳) $\sqrt{7}$ عددی صحیح است. (۴) $\sqrt{7}$ عددی گنگ است.

✔ گزینه (۴) می‌دانیم ارزش گزاره با ارزش نقیض نقیض همان گزاره یکسان است. پس گزاره داده شده را دوبار نقیض می‌کنیم:
 ($\sqrt{7}$ عددی گنگ است.) $\equiv$ ($\sqrt{7}$ عدد گنگ نیست.) $\equiv$ (چنین نیست که $\sqrt{7}$ عددی گنگ نیست.) $\equiv$ ()

■ **ترکیب فصلی دو گزاره:** گزاره‌ای که از ترکیب دو گزاره ساده p و q با رابط منطقی «یا» تشکیل شده است را ترکیب فصلی دو گزاره می‌گوییم و با « $p \vee q$ » نشان می‌دهیم و آن را به صورت « p یا q » می‌خوانیم. به رابط منطقی « $\vee$ »، فاصل گفته می‌شود.

p	q	$p \vee q$
د	د	د
د	ن	د
ن	د	د
ن	ن	ن

نکته ارزش گزاره مرکب $p \vee q$ به صورت جدول مقابل تعیین می‌شود و همان‌طور که ملاحظه می‌کنید ارزش آن وقتی نادرست است که ارزش هر دو گزاره p و q نادرست باشد و در بقیه حالات ارزش $p \vee q$ درست است. (به مشاورت گفتی امروز «هنرسه می‌فونم» یا «گسسته می‌فونم» در صورتی به قولت عمل نکردی که هر دو تا درس رو نفونی اما آه فقط هتی یکیشون رو بفونی، مشکلی نیست چون از «یا» استفاده کردی.)

ویژگی‌های ترکیب فصلی

۱ ترکیب فصلی هر گزاره با خودش، هم‌ارز خود گزاره است. آله p درست باشه «د» ارزشش درست و آله p نادرست باشه «ن» نادرست می‌شه.

$$p \vee p \equiv p$$

۲ ترکیب فصلی، خاصیت جابه‌جایی دارد. (هله؟)

$$p \vee q \equiv q \vee p$$

۳ ترکیب فصلی، خاصیت شرکت‌پذیری دارد. (پراتر رو می‌تونی فایه‌با کنی. فای p ، q و r رو هم می‌تونی عوض کنی.)

$$p \vee (q \vee r) \equiv (p \vee q) \vee r$$

۴ ترکیب فصلی هر گزاره با نقیضش، همواره درست است. (چون هتماً یکیشون درست.)

$$p \vee \sim p \equiv د$$

۵ ترکیب فصلی یک گزاره با یک گزاره درست، همواره درست است. ترکیب فصلی برای درست شدن فقط به دونه درست نیاز داره. پس دیکه با p هیچ کاری نداره.

$$p \vee د \equiv د$$

۶ ترکیب فصلی یک گزاره با یک گزاره نادرست، هم‌ارز ارزش خود گزاره است. همه‌پیز رو p تعیین می‌کنه. آله درست باشه ترکیب فصلی به دونه درست رو به دست میاره و درست می‌شه اما آله p نادرست باشه، هر دو نادرست می‌شن و ترکیب فصلی هم نادرست می‌شه.

$$p \vee ن \equiv p$$

■ **ترکیب عطفی دو گزاره:** گزاره‌ای که از ترکیب دو گزاره ساده p و q با رابط منطقی «و» تشکیل شده است را ترکیب عطفی دو گزاره می‌گوییم و با « $p \wedge q$ » نشان می‌دهیم. و آن را به صورت « p و q » می‌خوانیم. به رابط منطقی « $\wedge$ »، عاطف گفته می‌شود.

p	q	$p \wedge q$
د	د	د
د	ن	ن
ن	د	ن
ن	ن	ن

ارزش ترکیب عطفی دو گزاره p و q به صورت جدول مقابل تعیین می‌شود و همان‌طور که ملاحظه می‌کنید ارزش آن وقتی درست است که ارزش هر دو گزاره p و q درست باشند و در بقیه حالات ارزش $p \wedge q$ نادرست است. (فرض کن به مشاورت گفتی امروز هنرسه می‌فونم و گسسته می‌فونم. پس آله هتی یکی از اونا رو نفونی به قولت عمل نکردی. فقط آله هر دو رو بفونی به قولت عمل کردی.)

ویژگی‌های ترکیب عطفی

۱ ترکیب عطفی هر گزاره با خودش، هم‌ارز خود گزاره است. (آله p درست باشه «د» درست میشه و آله p نادرست باشه «ن» نادرست می‌شه دیکه.)

$$p \wedge p \equiv p$$

۲ ترکیب عطفی، خاصیت شرکت‌پذیری دارد. (پراتر رو بردار و هر یایی دوست داشتی بزار. تازه می‌تونی فای p ، q و r رو هر چور که دوست داری عوض کنی.)

$$p \wedge (q \wedge r) \equiv (p \wedge q) \wedge r$$

۳ ترکیب عطفی، خاصیت جابه جایی دارد. (توضیح بر ۴ یا تابلو نه؟)

$$p \wedge q \equiv q \wedge p$$

۴ ترکیب عطفی هر گزاره با نقیضش، همواره نادرست است. (چون متضاد یکیشون درست و یکیشون نادرست.)

$$p \wedge \sim p \equiv \text{ن}$$

۵ ترکیب عطفی یک گزاره با یک گزاره نادرست، همواره نادرست است. (به دونه نادرست، ترکیب عطفی رو نادرست می‌کنه و به ارزش p کاری نداره.)

$$p \wedge \text{ن} \equiv \text{ن}$$

۶ ترکیب عطفی یک گزاره با یک گزاره درست، هم‌ارز ارزش خود گزاره است. (بازی می‌فته درست p . آله p درست باشه ترکیب عطفی درست می‌شه و آله p نادرست باشه، ترکیب عطفی رو نادرست می‌کنه.)

$$p \wedge \text{د} \equiv p$$

۷ گزاره $(p \wedge q) \wedge \sim p$ با کدام گزینه هم‌ارز است؟

۱) همواره درست ۲) همواره نادرست ۳) $\sim p$ ۴) $p \wedge q$

گزینه ۲ چون فقط ترکیب عطفی در گزاره وجود دارد، می‌توانیم پرانتز و کروشه را برداریم و گزاره‌ها را هرطور که می‌خواهیم جابه‌جا کنیم. پس:

$$[(p \wedge q) \wedge \sim p] \wedge p \equiv (p \wedge q) \wedge (\sim p \wedge p) \equiv (p \wedge q) \wedge \text{ن} \equiv p \wedge (\underbrace{q \wedge \text{ن}}_{\text{ن}}) \equiv p \wedge \text{ن} \equiv \text{ن}$$

ویژگی‌های ترکیب فصلی و عطفی

$\sim(p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$ $\sim(p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$	نقیض ترکیب عطفی و فصلی به صورت مقابل است که به قوانین دمورگان معروف هستند. (نقیض ترکیب عطفی، ترکیب فصلی و برعکس.)
$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$ $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	ترکیب عطفی و فصلی روی یکدیگر خاصیت توزیع پذیری دارند. (اونی که بیرون پرانتز فکر کن ضربه و اونی که داخل پرانتز جمع. حالا اینجوری فکر کن.)
$p \wedge (p \vee q) \equiv p$ $p \vee (p \wedge q) \equiv p$	روابط مقابل که به خاصیت جذب معروفند همواره برقرار است. (یک عطفی، یک فصلی و دو گزاره مثل هم نشانه‌های جذب هستند.)
$p \wedge (\sim p \vee q) \equiv p \wedge q$ $p \vee (\sim p \wedge q) \equiv p \vee q$	روابط مقابل هم به خاصیت شبه جذب معروفند. (یک عطفی، یک فصلی و دو تا گزاره نقیض هم می‌شه شبه جذب)

۸ اگر r یک گزاره درست باشد، تحت چه شرایطی گزاره $(p \wedge r) \vee (q \wedge r)$ نادرست است؟

۱) p و q دو گزاره نادرست باشند. ۲) p درست و q نادرست باشد. ۳) p نادرست و q درست باشد. ۴) نشدنی

گزینه ۱ چون r گزاره‌ای درست است، پس $p \wedge r \equiv p$ و $q \wedge r \equiv q$ می‌باشد. از طرفی می‌دانیم گزاره $(p \wedge r) \vee (q \wedge r)$ در صورتی نادرست است که هر دو گزاره $p \wedge r$ و $q \wedge r$ نادرست باشند و این یعنی گزاره مورد نظر در صورتی نادرست است که هر دو گزاره p و q نادرست باشند.

۹ اگر p یک گزاره درست و q یک گزاره نادرست باشد، کدام گزاره درست است؟

۱) $[p \wedge (q \vee p)] \wedge q$ ۲) $(p \wedge q) \vee \sim(p \wedge q)$ ۳) $q \wedge [p \wedge (p \vee q)]$ ۴) $(p \wedge q) \wedge (p \vee p)$

گزینه ۲ تک تک گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

$$۱) [p \wedge (q \vee p)] \wedge q \equiv [p \wedge (\underbrace{q \vee p}_{\text{د}})] \wedge q \equiv \text{د} \wedge \text{د} \equiv \text{د}$$

$$۲) (p \wedge q) \vee \sim(p \wedge q) \equiv (\text{د} \wedge \text{ن}) \vee \sim(\text{د} \wedge \text{ن}) \equiv \text{ن} \vee \sim(\text{ن}) \equiv \text{د} \vee \text{د} \equiv \text{د}$$

بنابراین گزینه ۲ درست است. به عنوان تمرین گزینه‌های (۳) و (۴) را بررسی می‌کنیم:

$$۳) q \wedge [p \wedge (p \vee q)] \equiv \text{ن} \wedge [p \wedge (\underbrace{p \vee q}_{\text{د}})] \equiv \text{ن} \wedge [\text{د} \wedge \text{د}] \equiv \text{ن}$$

$$۴) (p \wedge q) \wedge (p \vee p) \equiv (\text{د} \wedge \text{ن}) \wedge (\text{د} \vee \text{د}) \equiv \text{ن} \wedge \text{د} \equiv \text{ن}$$

۱. اگر گزاره‌ای درست و p و q دو گزاره دلخواه باشند، ارزش گزاره $(r \wedge p) \vee \sim p \wedge q$ چگونه است؟

- (۱) نادرست است. (۲) درست است. (۳) با p هم‌ارز است. (۴) با q هم‌ارز است.

گزینه ۴. چون r گزاره‌ای درست است پس ارزش $r \wedge p$ با ارزش p یکسان است. یعنی $r \wedge p \equiv p$ می‌باشد. از طرفی می‌دانیم $p \vee \sim p$ همواره درست است. لذا ارزش ترکیب عطفی آن با q همواره با ارزش q برابر است. نگاه کنید: $[(r \wedge p) \vee \sim p] \wedge q \equiv [p \vee \sim p] \wedge q \equiv [د] \wedge q \equiv q$

۲. تعداد حالت‌های درست گزاره $(p \wedge \sim q) \vee [(\sim p \vee q)] \vee r$ چه قدر بیشتر از تعداد حالت‌های نادرست آن است؟

- (۱) ۸ (۲) ۶ (۳) ۴ (۴) ۲

گزینه ۱. گزاره داده شده در صورت سؤال را به کمک قوانین منطق ساده می‌کنیم:

$$(p \wedge \sim q) \vee [(\sim p \vee q)] \vee r \stackrel{\text{دور کردن}}{=} [(p \wedge \sim q) \vee (\sim p \vee q)] \vee r \stackrel{\text{شرکت پذیری}}{=} [(p \wedge \sim q) \vee (\sim p \vee q)] \vee r$$

می‌دانیم ترکیب فصلی هر گزاره با نقیضش همواره درست است. بنابراین داریم:

$$[(\sim (\sim p \vee q) \vee (\sim p \vee q))] \vee r \equiv (د) \vee r \equiv د$$

پس تعداد حالت درست $۸ = ۸ - ۰$ واحد بیشتر از تعداد حالت‌های نادرست آن است.

■ **ترکیب شرطی دو گزاره:** اگر p و q دو گزاره باشند، گزاره مرکب « $p \Rightarrow q$ » را که به صورت «اگر p آن‌گاه q » خوانده می‌شود، ترکیب شرطی دو گزاره

می‌گوییم. در ترکیب شرطی « $p \Rightarrow q$ »، گزاره p را، مقدم یا فرض و گزاره q را، تالی یا حکم می‌نامیم.

■ **جدول ارزش گزاره شرطی:** جدول ارزش گزاره شرطی « $p \Rightarrow q$ » به صورت مقابل است. (کافی به p و q قول دادن و

q رو انجام دادن در نظر بگیریم. مثلاً سطر اول جدول می‌شود قول داریم، انجام داریم. معلومه کار خوبه. اما سطر دوم می‌شود قول داریم، انجام نداریم. این بده. سطر سوم می‌شود قول نداریم انجام داریم. معلومه ته مرامی و کارت درسته و سطر چهارم هم می‌شود قول نداریم انجام نداریم که ایرادی نداره.)

p	q	$p \Rightarrow q$
د	د	د
د	ن	ن
ن	د	د
ن	ن	د

با توجه به جدول می‌توان نتایج زیر را گرفت:

۱. هرگاه ارزش مقدم (p) نادرست باشد، آن‌گاه ارزش $p \Rightarrow q$ درست است و این یعنی ارزش $p \Rightarrow q$ در صورتی که p نادرست باشد، به ارزش گزاره q بستگی ندارد. در این حالت به اصطلاح می‌گوییم ارزش گزاره $p \Rightarrow q$ به انتقای مقدم درست است. (پون قول نداریم، بعرض هر اتفاقی بیفته اویکه.)

$$د \Rightarrow q \equiv د$$

۲. هرگاه ارزش تالی (q) درست باشد، آن‌گاه ارزش $p \Rightarrow q$ درست است و به ارزش p بستگی ندارد. (مهم اینه که کارو انجام داری، حالا چه قول داده بودی چه نه.)

$$p \Rightarrow د \equiv د$$

۳. ارزش گزاره $p \Rightarrow q$ فقط وقتی نادرست است که p درست و q نادرست باشد. (قول داری و انجام نداریم.)

۴. ارزش کدامیک از گزاره‌های زیر نادرست است؟

- (۱) اگر $۳^۲ = ۶$ آن‌گاه ۲ اول است. (۲) اگر ۶ فرد باشد، آن‌گاه $۳ > ۵$ است. (۳) اگر ۱۱ اول باشد، آن‌گاه ۱۲ اول است. (۴) اگر $۲^۴ = ۴^۲$ آن‌گاه $۲^۲ > ۳^۲$ است.

گزینه ۳. ارزش یک ترکیب شرطی وقتی نادرست است که ارزش مقدم درست و ارزش تالی نادرست باشد. بنابراین گزینه (۳) نادرست است زیرا مقدم آن درست و تالی آن نادرست است. دقت کنید که گزینه‌های (۱) و (۲) بنا بر انتقای مقدم درست هستند و گزینه (۴) نیز به علت درست بودن تالی، درست است.

۵. اگر ارزش دو گزاره « $p \Rightarrow q$ » و « $\sim p \Rightarrow q$ » درست باشد، کدامیک از گزاره‌های زیر حتماً درست است؟

- (۱) p (۲) q (۳) $\sim p$ (۴) $\sim q$

گزینه ۲. می‌دانیم ترکیب شرطی $p \Rightarrow q$ وقتی درست است که مقدم آن نادرست یا تالی آن درست باشد. چون در گزاره‌های « $p \Rightarrow q$ » و « $\sim p \Rightarrow q$ » ارزش مقدم‌ها مخالف هم است. (حتماً یکی درست و یکی نادرست است). پس در صورتی دو گزاره درست می‌شوند که تالی آن‌ها یعنی q درست باشد.

■ **تبدیل ترکیب شرطی به ترکیب فصلی:** ترکیب شرطی « $p \Rightarrow q$ » هم‌ارز منطقی ترکیب فصلی « $\sim p \vee q$ » است. از آن جایی که ویژگی‌ها و خاصیت‌های ترکیب فصلی از ترکیب شرطی بیشتر است، می‌توانیم به جای « $p \Rightarrow q$ » عبارت « $\sim p \vee q$ » را قرار داده و عبارت مطرح شده را ساده کنیم.

$$p \Rightarrow q \equiv \sim p \vee q$$

❓ گزاره « $p \wedge [(p \Rightarrow \sim q) \wedge q]$ » با کدام گزاره هم‌ارز است؟

(۱) « $\sim (p \Rightarrow q)$ » (۲) « $p \Rightarrow q$ » (۳) همواره درست (۴) همواره نادرست

❖ گزینه ۴: ابتدا، ترکیب شرطی « $p \Rightarrow \sim q$ » را به ترکیب فصلی تبدیل می‌کنیم و داریم:

$$p \wedge [(p \Rightarrow \sim q) \wedge q] \equiv p \wedge [(\sim p \vee \sim q) \wedge q] \equiv p \wedge [(\sim p \wedge q) \vee (\sim q \wedge q)] \equiv p \wedge (\sim p \wedge q) \equiv (p \wedge \sim p) \wedge q \equiv \sim$$

❖ ❖

$\sim p \wedge q$

$$\sim (p \Rightarrow q) \equiv \sim (\sim p \vee q) \equiv p \wedge \sim q$$

نتیجه: نقیض گزاره شرطی به صورت روبه‌رو است:

❓ نقیض گزاره « $q \Rightarrow \sim p$ » برابر کدام گزینه است؟

(۱) ترکیب فصلی « p و « q » (۲) ترکیب فصلی « p و « $\sim q$ » (۳) ترکیب عطفی « p و « q » (۴) ترکیب عطفی « p و « $\sim q$ »

❖ گزینه ۳: ترکیب شرطی را به ترکیب فصلی تبدیل می‌کنیم و داریم:

$$\sim (q \Rightarrow \sim p) \equiv \sim (\sim q \vee p) \equiv q \wedge p$$

بنابراین نقیض گزاره « $q \Rightarrow \sim p$ » برابر ترکیب عطفی دو گزاره « p و « q » است.

■ **عکس ترکیب شرطی:** اگر در یک گزاره شرطی جای مقدم و تالی را عوض کنیم، عکس ترکیب شرطی به دست می‌آید. یعنی گزاره « $q \Rightarrow p$ » عکس ترکیب شرطی « $p \Rightarrow q$ » است.

$$\sim q \Rightarrow \sim p \equiv p \Rightarrow q$$

■ **عکس نقیض ترکیب شرطی:** گزاره « $\sim q \Rightarrow \sim p$ » عکس نقیض ترکیب شرطی « $p \Rightarrow q$ » است و داریم:

❓ عکس نقیض گزاره شرطی «اگر a عددی اول باشد، آن‌گاه فرد است.» کدام است؟

(۱) اگر a عددی اول نباشد، آن‌گاه فرد نیست. (۲) اگر a فرد باشد، آن‌گاه عددی اول است. (۳) اگر a عددی زوج باشد، آن‌گاه مرکب است. (۴) اگر a عددی زوج باشد، آن‌گاه اول نیست.

❖ گزینه ۴: باید جای مقدم و تالی را عوض کرده و آن‌ها را نقیض کنیم. پس به صورت «اگر a عددی زوج باشد، آن‌گاه اول نیست.» می‌شود. توجه کنید «مرکب است» نقیض «اول است» نمی‌باشد، چون عدد یک نه اول است نه مرکب.

■ **ترکیب دو شرطی:** هرگاه « p و « q » دو گزاره باشند، گزاره مرکب « $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$ » را به صورت « $p \Leftrightarrow q$ » می‌نویسیم و آن را ترکیب دو شرطی « p و « q » می‌نامیم. گزاره « $p \Leftrightarrow q$ » را به صورت‌های زیر می‌خوانیم:

❶ اگر « p و « q » برعکس. ❷ شرط لازم و کافی برای « q » است. ❸ اگر « p و تنها اگر « q »

p	q	$p \Leftrightarrow q$
د	د	د
د	ن	ن
ن	د	ن
ن	ن	د

■ **ارزش ترکیب دو شرطی:** ارزش گزاره « $p \Leftrightarrow q$ » به صورت جدول مقابل تعیین می‌شود، همان‌طور که ملاحظه می‌کنید گزاره « $p \Leftrightarrow q$ » زمانی درست است که « p و « q » ارزش‌های یکسان داشته باشند، یعنی یا هر دو درست و یا هر دو نادرست باشند. (پس هم باید « $p \Rightarrow q$ » درست باشد و هم « $q \Rightarrow p$ ». اگر « p و « q » هم‌ارز نباشند، تنها یکی از شرطی‌ها قول داری و انجام ندراری و این نادرست است.)

■ **ویژگی‌های ترکیب دو شرطی:**

$p \Leftrightarrow q \equiv q \Leftrightarrow p$	ترکیب دو شرطی خاصیت جابه‌جایی دارد.
$p \Leftrightarrow q \equiv \sim p \Leftrightarrow \sim q$	ترکیب دو شرطی دو گزاره با ترکیب دو شرطی نقیض‌های دو گزاره هم‌ارز است.
$p \Leftrightarrow q \equiv (p \vee q) \Rightarrow (p \wedge q)$	ترکیب دو شرطی دو گزاره با ترکیب شرطی، ترکیب فصلی و عطفی دو گزاره هم‌ارز است.
$\sim (p \Leftrightarrow q) \equiv (\sim p \Leftrightarrow q) \equiv (p \Leftrightarrow \sim q)$	برای نقض کردن گزاره دو شرطی کافی است فقط یکی از گزاره‌ها را نقض کنیم.

❓ اگر گزاره‌ای درست و q گزاره‌ای نادرست و r گزاره‌ای دلخواه باشد، ارزش کدام گزاره نادرست است؟

(۱) $(q \wedge r) \Rightarrow r$ (۲) $(\sim q \Rightarrow p) \Leftrightarrow (p \Leftrightarrow q)$ (۳) $(q \vee r) \Rightarrow (r \Rightarrow p)$ (۴) $(\sim p \Rightarrow r) \Rightarrow \sim q$

✔ گزینه ۲: تک تک گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

۱) $(q \wedge r) \Rightarrow r \equiv (\sim (q \wedge r) \Rightarrow r) \equiv \sim (q \wedge r) \vee r \equiv (\sim q \vee \sim r) \vee r \equiv \sim q \vee (\sim r \vee r) \equiv \sim q \vee 1 \equiv 1$ الگوی مقدم

۲) $(\sim q \Rightarrow p) \Leftrightarrow (p \Leftrightarrow q) \equiv (\sim q \Rightarrow p) \Leftrightarrow (p \Rightarrow q) \equiv (\sim q \Rightarrow p) \wedge (p \Rightarrow q) \equiv (\sim q \vee p) \wedge (p \vee \sim q) \equiv (\sim q \vee p) \wedge (\sim q \vee p) \equiv (\sim q \vee p) \equiv \sim q \vee p$

بنابراین گزینه ۲ پاسخ تست است. اما به عنوان تمرین گزینه‌های (۳) و (۴) را نیز بررسی می‌کنیم:

۳) $(q \vee r) \Rightarrow (r \Rightarrow p) \equiv (\sim (q \vee r) \Rightarrow (r \Rightarrow p)) \equiv (\sim q \wedge \sim r) \Rightarrow (r \Rightarrow p) \equiv (\sim q \wedge \sim r) \vee (r \vee \sim p) \equiv (\sim q \wedge \sim r) \vee (r \vee \sim p)$

۴) $(\sim p \Rightarrow r) \Rightarrow \sim q \equiv (\sim (\sim p \Rightarrow r) \Rightarrow \sim q) \equiv (\sim (\sim p \vee r) \Rightarrow \sim q) \equiv (p \wedge \sim r) \Rightarrow \sim q \equiv (p \wedge \sim r) \vee \sim \sim q \equiv (p \wedge \sim r) \vee q$

❓ در رابطه با گزاره $(p \Leftrightarrow q) \wedge r \Rightarrow [(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)]$ کدام گزینه صحیح است؟

(۱) اگر p و r گزاره‌هایی درست و q گزاره‌ای دلخواه باشد، ارزش آن نادرست است.

(۲) ارزش آن فقط زمانی درست است که p, q و r نادرست باشند.

(۳) ارزش آن در ۸ حالت نادرست است.

(۴) یک گزاره همواره درست است.

✔ گزینه ۴: می‌دانیم گزاره $p \Leftrightarrow q$ یا گزاره $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$ هم‌ارز است. بنابراین:

$(p \Leftrightarrow q) \wedge r \Rightarrow [(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)] \equiv (p \Leftrightarrow q) \wedge r \Rightarrow (p \Leftrightarrow q)$

هم چنین می‌دانیم $p \wedge q \Rightarrow p$ یک گزاره همواره درست است، پس داریم: $(p \Leftrightarrow q) \wedge r \Rightarrow (p \Leftrightarrow q) \equiv x \wedge r \Rightarrow x \equiv x$ همواره درست

سور

سورها عبارتهایی هستند که قبل از گزاره‌نماها قرار می‌گیرند و گزاره‌هایی با ارزش درست یا نادرست ایجاد می‌کنند.

■ **سور عمومی:** به عبارت‌های «به ازای هر» یا «به ازای جميع مقادیر» یا ... سور عمومی می‌گوییم و با علامت $\forall$ نشان می‌دهیم.

نکته گزاره‌نمای شامل متغیر x که با سور عمومی همراه می‌شود، وقتی به یک گزاره درست تبدیل می‌شود که هیچ مثال نقضی نداشته باشد، یعنی هر عضو از دامنه متغیر در گزاره‌نما صدق کند.

■ **سور وجودی:** به عبارت‌های «وجود دارد» یا «به ازای بعضی مقادیر» یا ... سور وجودی می‌گوییم و با علامت $\exists$ نشان می‌دهیم.

نکته گزاره‌نمای شامل متغیر x که با سور وجودی همراه می‌شود، وقتی درست است که مجموعه جواب آن تهی نباشد.

❓ ارزش کدام گزاره درست است؟

(۱) $(\exists x \in \mathbb{R}; x + 2 = 2) \Rightarrow (\forall x \in (0, +\infty); x - \frac{1}{x} \geq 2)$ (۲) $(\exists x \in \mathbb{N}; \sqrt{3-x} \in \mathbb{N}) \Leftrightarrow (\forall x \in \mathbb{R}; x^2 = 1)$

(۳) $(\exists x \in \mathbb{R}; \frac{x+1}{x-1} \in \mathbb{Z}) \Rightarrow (\exists x \in \mathbb{N}; 2x < x)$ (۴) $(\exists x \in \mathbb{R}; (x+1)^2 = x^2 + 2x - 1) \Leftrightarrow (\forall x \in \mathbb{R}; x^2 > x)$

✔ گزینه ۴: در گزینه (۱) مقدم ترکیب شرطی درست است، زیرا به ازای $x = 0$ دارای ارزش درست می‌شود اما تالی آن نادرست است زیرا $x = 1$

گزاره‌نما را به گزاره‌ای با ارزش نادرست تبدیل می‌کند. پس ارزش این ترکیب شرطی نادرست است. در گزینه (۲) عبارت $\exists x \in \mathbb{N}; \sqrt{3-x} \in \mathbb{N}$

به ازای $x = 2$ به گزاره‌ای با ارزش درست تبدیل می‌شود، پس ارزش آن درست است. اما عبارت $(\forall x \in \mathbb{R}; x^2 = 1)$ درست نیست، چون مثلاً

$x = 2$ این گزاره‌نما را به گزاره‌ای با ارزش نادرست تبدیل می‌کند. بنابراین ارزش این ترکیب دو شرطی نادرست است. در گزینه (۳) مقدم درست

است، زیرا حداقل یک عضو $x = 0$ وجود دارد که به ازای آن گزاره‌نما به گزاره‌ای با ارزش درست تبدیل می‌شود اما تالی نادرست است زیرا به ازای

هیچ مقدار x از دامنه، ارزش گزاره‌نما درست نمی‌شود پس این ترکیب شرطی نیز نادرست است. در گزینه (۴) هر دو عبارت نادرست هستند. چون

در طرف چپ به ازای هیچ مقدار از دامنه، ارزش گزاره‌نما درست نمی‌شود و در عبارت سمت راست $x = \frac{1}{4}$ یک مثال نقض محسوب می‌شود.

پس ارزش این ترکیب دو شرطی درست است.

نقیض سورها: برای ساختن نقیض یک گزاره سور، کافی است سور عمومی را به سور وجودی و سور وجودی را به سور عمومی تبدیل کرده و گزاره نما را نقیض کنیم.

$$\sim (\forall x; P(x)) \equiv \exists x; \sim P(x)$$

$$\sim (\exists x; P(x)) \equiv \forall x; \sim P(x)$$

❓ **نقیض گزاره $(\exists x \in \mathbb{R}; x > 1) \vee (\forall x \in \mathbb{R}; x^2 > 0)$ کدام است؟**

(۱) $(\exists x \in \mathbb{R}; x \leq 1) \wedge (\forall x \in \mathbb{R}; x^2 \leq 0)$ (۲) $(\forall x \in \mathbb{R}; x \leq 1) \vee (\exists x \in \mathbb{R}; x^2 \leq 0)$

(۳) $(\forall x \in \mathbb{R}; x \leq 1) \vee (\forall x \in \mathbb{R}; x^2 > 0)$ (۴) $(\forall x \in \mathbb{R}; x \leq 1) \wedge (\exists x \in \mathbb{R}; x^2 \leq 0)$

🔍 **گزینه ۴:** نقیض ترکیب فصلی $p \vee q$ با گزاره $\sim p \wedge \sim q$ هم‌ارز است. بنابراین داریم:

$$\sim [(\exists x \in \mathbb{R}; x > 1) \vee (\forall x \in \mathbb{R}; x^2 > 0)] \equiv \sim (\exists x \in \mathbb{R}; x > 1) \wedge \sim (\forall x \in \mathbb{R}; x^2 > 0)$$

هم‌چنین می‌دانیم نقیض گزاره $\forall x; P(x)$ به صورت $\exists x; \sim P(x)$ و نقیض گزاره $\exists x; P(x)$ به صورت $\forall x; \sim P(x)$ است. پس:

$$\sim (\exists x \in \mathbb{R}; x > 1) \wedge \sim (\forall x \in \mathbb{R}; x^2 > 0) \equiv (\forall x \in \mathbb{R}; x \leq 1) \wedge (\exists x \in \mathbb{R}; x^2 \leq 0)$$

پرسش‌های چهارگزینه‌ای

درس
۱

آشنایی با مبانی ریاضیات

- کدام گزاره نادرست است؟
 - (۱) $\sqrt{2}$ عددی گنگ است.
 - (۲) 7 عددی اول است.
 - (۳) معادله $x^2 + x + 2 = 0$ دو ریشه متمایز دارد.
 - (۴) مجموع دو عدد گویا عددی گویا است.
- جدول ارزش‌های $3n - 1$ گزاره دارای ۳۲ حالت مختلف است. جدول ارزش‌های n گزاره دارای چند حالت مختلف می‌باشد؟
 - (۱) ۲
 - (۲) ۴
 - (۳) ۸
 - (۴) ۱۶
- تعداد ردیف‌های جدول وضعیت ارزشی ۷ گزاره چند برابر تعداد ردیف‌های جدول ارزش‌گذاری ۵ گزاره است؟
 - (۱) ۲
 - (۲) ۴
 - (۳) ۸
 - (۴) ۱۶
- جدول وضعیت ارزشی تعدادی گزاره دارای ۶۴ ردیف است. با حذف سه گزاره، وضعیت ارزشی گزاره‌های باقی‌مانده دارای چند حالت مختلف است؟
 - (۱) ۴
 - (۲) ۸
 - (۳) ۱۶
 - (۴) ۳۲
- در جدول ارزشی ۵ گزاره چند بار از نماد «د» استفاده شده است؟
 - (۱) ۱۶
 - (۲) ۳۲
 - (۳) ۸۰
 - (۴) ۱۶۰
- در گزاره‌نمای «احتمال آن‌که در پرتاب یک تاس پیشامد A رخ دهد، برابر $\frac{1}{4}$ است»، مجموعه جواب گزاره‌نما دارای چند عضو است؟
 - (۱) ۱۰
 - (۲) ۱۵
 - (۳) ۲۰
 - (۴) ۲۴
- کدام گزاره با گزاره «عدد ۱۰ کوچک‌ترین عدد طبیعی دورقمی است.» هم‌ارزش نیست؟
 - (۱) دانشگاه صنعتی شریف در تهران است.
 - (۲) عدد ۱ کوچک‌ترین عدد اول است.
 - (۳) $x^3 - 1 = (x - 1)(x^2 + x + 1)$
 - (۴) $3 \times 4 + 5 \leq 17$
- نقیض گزاره « $12 + 5 = 17$ » کدام است؟
 - (۱) $12 - 5 = 7$
 - (۲) $12 + 5 \neq 17$
 - (۳) $17 \equiv 12 + 5$
 - (۴) $17 \neq 12 - 5$
- گزاره p به صورت « $\sqrt{25}$ مربع کامل است» مفروض است. اگر ارزش گزاره فصلی p با q درست باشد، گزاره q کدام می‌تواند باشد؟
 - (۱) $\sqrt{5} - 2 > 0$
 - (۲) اعداد اول، فرد هستند.
 - (۳) مجموع زوایای خارجی مثلث 180° است.
 - (۴) ۶ مقسوم‌علیه ۳ است.
- اگر p گزاره «۵۳ عددی زوج نیست.» و q گزاره «۵۳ عددی اول است.» باشد، بیان توصیفی گزاره مرکب $p \wedge q$ کدام است؟
 - (۱) ۵۳ عددی زوج و اول است.
 - (۲) ۵۳ عددی فرد و اول است.
 - (۳) ۵۳ عددی زوج است و اول نیست.
 - (۴) ۵۳ عددی زوج یا اول است.
- اگر r یک گزاره درست باشد، تحت چه شرایطی گزاره $(p \wedge r) \vee (q \vee r)$ نادرست است؟
 - (۱) p و q دو گزاره درست باشند.
 - (۲) p درست و q نادرست باشد.
 - (۳) p نادرست و q درست باشد.
 - (۴) نشدنی

۱۲. نقیض کدام یک از گزاره‌های زیر با گزاره $(p \wedge \sim q) \vee (p \wedge q)$ هم‌ارزش است؟
 (۱) $(p \vee q) \wedge \sim p$ (۲) $q \wedge \sim (p \vee q)$ (۳) $\sim p \wedge (\sim p \vee q)$ (۴) $\sim (\sim p \vee q)$
 (نوبت اول ۱۴۰۲)
۱۳. کدام گزاره زیر هم‌ارز منطقی گزاره $(p \wedge r) \vee (q \wedge r) \vee [\sim p \wedge (\sim q \wedge r)]$ است؟
 (۱) q (۲) r (۳) $r \vee p$ (۴) $p \vee q$
۱۴. تعداد حالت‌های درست گزاره $\sim p \vee [q \vee (p \vee \sim q)]$ با تعداد حالت‌های نادرست کدام یک از گزاره‌های زیر برابر است؟
 (۱) $p \wedge (\sim p \vee q)$ (۲) $p \wedge (\sim p \wedge q)$ (۳) $p \vee (\sim p \wedge q)$ (۴) $p \vee (\sim p \vee q)$
۱۵. برای این‌که ارزش گزاره $p \vee [(\sim q \vee X) \wedge \sim (\sim q \wedge \sim X)]$ همواره درست باشد، به جای X کدام یک از گزاره‌های زیر را می‌توان قرار داد؟
 (۱) $p \wedge q$ (۲) $\sim p$ (۳) q (۴) $\sim q$
۱۶. ارزش گزاره $\sim [(p \wedge \sim q) \vee (p \wedge q)] \wedge [r \vee (p \wedge \sim r)]$ در کدام حالت درست است؟
 (۱) ارزش گزاره p نادرست، q دلخواه و r درست باشد. (۲) ارزش گزاره p درست، q نادرست و r گزاره‌ای دلخواه باشد.
 (۳) ارزش گزاره p نادرست، q درست و r گزاره‌ای دلخواه باشد. (۴) ارزش گزاره p درست، q دلخواه و r گزاره‌ای درست باشد.
۱۷. تعداد حالت‌های درست گزاره $(p \vee q) \wedge (\sim p \wedge q)$ چه قدر کم‌تر از تعداد حالت‌های نادرست گزاره $(p \wedge q) \vee \sim (p \wedge q)$ است؟
 (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳
۱۸. تفاضل تعداد حالت‌های درست و نادرست گزاره $(p \wedge \sim r) \wedge (\sim p \vee q)$ کدام است؟
 (۱) ۸ (۲) ۶ (۳) ۴ (۴) ۲
۱۹. کدام یک از هم‌ارزی‌های زیر نادرست است؟
 (۱) $p \wedge (p \vee q) \equiv p$ (۲) $p \vee (p \wedge q) \equiv p$ (۳) $(\sim p \vee q) \equiv (q \Rightarrow p)$ (۴) $(\sim p \vee q) \equiv (p \Rightarrow q)$
۲۰. گزاره «اگر $x > 2$ باشد، آن‌گاه $x^2 > 4$ ، معادل کدام گزینه است؟
 (۱) اگر $x^2 > 4$ ، آن‌گاه $x > 2$ (۲) اگر $x^2 \geq 4$ ، آن‌گاه $x \geq 2$
 (۳) اگر $x^2 \leq 4$ ، آن‌گاه $x \leq 2$ (۴) اگر $x^2 > 4$ ، آن‌گاه $x < 2$
۲۱. گزاره‌های $p: m = 0$ ، $q: m + n = 0$ و $r: mn = 0$ مفروض‌اند. ارزش کدام گزاره درست است؟
 (۱) $q \Rightarrow r$ (۲) $p \Rightarrow q$ (۳) $p \Rightarrow r$ (۴) $q \Rightarrow p$
۲۲. اعداد حقیقی و مخالف صفر a ، b و c مفروض‌اند. اگر $a = -b$ ، $p: a > -b$ و $q: -c > a$ و $r: c < 0$ و ارزش گزاره $(p \wedge q) \Rightarrow r$ نادرست باشد، کدام نتیجه‌گیری در مورد علامت a ، b و c درست است؟
 (۱) $c > 0$ و $b < 0$ و $a > 0$ (۲) $c > 0$ و $b > 0$ و $a < 0$ (۳) $c < 0$ و $b < 0$ و $a < 0$ (۴) $c < 0$ و $b > 0$ و $a < 0$
۲۳. گزاره $p \Rightarrow \sim q$ با کدام یک از گزاره‌های زیر هم‌ارزش است؟
 (۱) $p \vee q$ (۲) $p \vee \sim q$ (۳) $\sim p \vee q$ (۴) $\sim p \vee \sim q$
 (داخل ۹۸)
۲۴. گزاره $(p \Rightarrow q) \sim$ با کدام گزاره زیر هم‌ارزش است؟
 (۱) $\sim p \vee q$ (۲) $p \vee \sim q$ (۳) $\sim p \wedge q$ (۴) $p \wedge \sim q$
۲۵. گزاره $(\sim p \Rightarrow q) \sim$ با کدام گزاره هم‌ارز است؟
 (۱) $p \wedge \sim q$ (۲) $\sim p \wedge \sim q$ (۳) $\sim p \vee \sim q$ (۴) $p \vee \sim q$
۲۶. کدام مورد در خصوص ارزش گزاره $(p \wedge \sim q) \Rightarrow$ درست است؟
 (۱) هم‌ارز $p \Rightarrow q$ است. (۲) همواره نادرست است. (۳) همواره درست است. (۴) هم‌ارز $p \Rightarrow \sim q$ است.
۲۷. نقیض گزاره $p \Rightarrow q$ کدام است؟
 (۱) $\sim p \wedge q$ (۲) $p \wedge \sim q$ (۳) $\sim p \Rightarrow q$ (۴) $\sim p \Rightarrow \sim q$
۲۸. نقیض هر گزاره شرطی کدام است؟
 (۱) ترکیب فصلی نقیض مقدم و تالی آن (۲) ترکیب عطفی مقدم و نقیض تالی آن
 (۳) ترکیب فصلی مقدم و نقیض تالی آن (۴) ترکیب عطفی مقدم و تالی آن
۲۹. گزاره « $\sim p \Rightarrow p \wedge q$ » هم‌ارز کدام گزاره است؟
 (۱) p (۲) q (۳) $\sim p$ (۴) $\sim q$

۳۰. ارزش گزاره $(p \Rightarrow q) \vee p$ در چند حالت نادرست است؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

(داخل ۱۴۰۰)

۳۱. ارزش گزاره $p \Rightarrow (q \vee r)$ درست است. احتمال این که ارزش گزاره r نادرست باشد، کدام است؟

- (۱) $\frac{3}{4}$ (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) $\frac{4}{5}$ (۴) $\frac{2}{3}$

(خارج ۱۴۰۰)

۳۲. ارزش گزاره $(p \vee q) \Rightarrow r$ نادرست است. احتمال این که q نادرست باشد، کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{4}$ (۲) $\frac{1}{3}$ (۳) $\frac{3}{8}$ (۴) $\frac{1}{2}$

(خارج ۹۸)

۳۳. گزاره $(\sim p \vee \sim q) \Rightarrow (p \wedge r)$ با کدام گزاره زیر هم ارزش است؟

- (۱) $p \vee (q \wedge r)$ (۲) $p \wedge (q \vee r)$ (۳) $r \Rightarrow (p \wedge q)$ (۴) $r \Rightarrow (p \vee q)$

۳۴. هم ارزش گزاره $(p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow \sim q)$ کدام است؟

- (۱) $\sim p$ (۲) p (۳) q (۴) $\sim q$

۳۵. اگر گزاره های $p \Rightarrow q$ و $\sim p \Rightarrow q$ هر دو درست باشند، آنگاه کدام گزاره زیر همواره درست است؟

- (۱) $q \vee p \Rightarrow q$ (۲) $q \vee p \Rightarrow p$ (۳) $p \wedge \sim q$ (۴) $q \vee p \Rightarrow p \wedge q$

۳۶. ارزش گزاره $[(p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r)] \wedge r$ در چند حالت درست است؟

- (۱) صفر (۲) ۲ (۳) ۴ (۴) ۸

۳۷. جدول ارزشی کدام یک از گزاره های زیر با جدول ارزشی گزاره $(p \vee q) \Rightarrow (q \vee r)$ یکسان نیست؟

- (۱) $p \Rightarrow (q \vee r)$ (۲) $(p \wedge q) \vee r$ (۳) $\sim p \vee q \vee r$ (۴) $(p \Rightarrow q) \vee r$

(خارج ۹۹)

۳۸. کدام یک از گزاره های زیر هم ارزش منطقی گزاره $(\sim p \Rightarrow \sim q) \wedge (p \vee q)$ است؟

- (۱) p (۲) q (۳) $p \wedge q$ (۴) $p \Rightarrow q$

۳۹. اگر p گزاره درست و q گزاره دلخواه باشد، کدام یک از گزاره های زیر همواره درست است؟

- (۱) $\sim p \Rightarrow q$ (۲) $p \Rightarrow q$ (۳) $q \Rightarrow p$ (۴) $\sim q \Rightarrow \sim p$

۴۰. اگر p گزاره درست و q و r گزاره های دلخواه باشند، ارزش کدام یک از گزاره های زیر همواره درست است؟

- (۱) $\sim p \wedge q \Rightarrow r$ (۲) $p \wedge q \Rightarrow r$ (۳) $\sim p \vee q \Rightarrow r$ (۴) $p \vee q \Rightarrow r$

۴۱. اگر p گزاره ای درست، q گزاره ای نادرست و r گزاره ای دلخواه باشد، ارزش کدام یک از گزاره های زیر، هم ارزش منطقی r است؟

- (۱) $(\sim q \Rightarrow \sim p) \wedge r$ (۲) $(p \Rightarrow (p \wedge q)) \wedge r$ (۳) $(q \Rightarrow (p \wedge q)) \wedge r$ (۴) $(p \Rightarrow q) \wedge r$

(نویس اول ۱۴۰۳)

۴۲. اگر p گزاره درست، q گزاره نادرست و r گزاره دلخواه باشد، گزاره $(p \Rightarrow r) \Rightarrow (r \Rightarrow q)$ هم ارزش منطقی کدام گزاره است؟

- (۱) r (۲) T (۳) $\sim r$ (۴) $\sim T$

۴۳. کدام مورد در خصوص ارزش گزاره $(p \wedge \sim q) \Rightarrow q$ درست است؟

- (۱) هم ارزش $p \Rightarrow q$ است. (۲) همواره نادرست است. (۳) همواره درست است. (۴) هم ارزش $p \Rightarrow \sim q$ است.

۴۴. عکس نقیض ترکیب شرطی $(p \wedge q) \Rightarrow \sim p$ کدام است؟

- (۱) $p \Rightarrow p \vee q$ (۲) $p \Rightarrow p \wedge q$ (۳) $\sim p \Rightarrow p \wedge q$ (۴) $p \Rightarrow (\sim p \vee \sim q)$

۴۵. اگر گزاره « $p \Rightarrow q$ » نادرست و r گزاره دلخواه باشد، ارزش کدام یک از گزاره های زیر درست است؟

- (۱) $(p \wedge \sim q) \vee r$ (۲) $r \Rightarrow (\sim q \Rightarrow p)$

- (۳) $(p \vee \sim q) \wedge r$ (۴) $p \Rightarrow (q \wedge r)$

۴۶. ارزش کدام یک از گزاره های زیر همواره درست نیست؟

- (۱) $[(p \vee q) \wedge (\sim p)] \Rightarrow q$ (۲) $[(p \vee q) \wedge \sim p] \Rightarrow p$ (۳) $[p \wedge (q \vee r)] \Rightarrow p \vee r$ (۴) $(p \wedge q) \Rightarrow p \vee q$

(آزمون مجدد ۱۴۰۵)

۴۷. کدام مورد در خصوص ارزش گزاره $[p \wedge (\sim q \Rightarrow \sim p)] \Rightarrow q$ صحیح است؟

- (۱) با ارزش گزاره $\sim p$ برابر است. (۲) همواره درست است. (۳) با ارزش گزاره $\sim q$ برابر است. (۴) با ارزش گزاره $(p \vee q)$ برابر است.

۴۸. اگر گزاره $r \Rightarrow (q \vee \sim p)$ نادرست باشد، آنگاه کدام گزاره زیر با آن هم‌ارزش است؟

- (۱) $r \Rightarrow p$ (۲) $p \Rightarrow r$ (۳) $q \Rightarrow p$ (۴) $p \Rightarrow q$

۴۹. در مورد گزاره $[(p \wedge \sim q) \wedge (r \wedge \sim r)] \Rightarrow (p \Rightarrow q)$ کدام گزینه درست است؟

- (۱) با گزاره $p \vee q$ هم‌ارزش است. (۲) ارزش آن همواره درست است.
(۳) نقیض گزاره $p \vee q$ است. (۴) ارزش آن در ۵ حالت درست است.

۵۰. در رابطه با گزاره $p \wedge [(p \Rightarrow \sim q) \wedge p]$ کدام گزینه صحیح است؟

- (۱) هم‌ارز گزاره $\sim (p \Rightarrow q)$ است. (۲) هم‌ارز گزاره $(p \Rightarrow q)$ است.
(۳) در دو حالت درست است. (۴) همواره نادرست است.

۵۱. کدام گزاره هم‌ارز منطقی گزاره $r \Rightarrow [(p \vee \sim q) \Rightarrow (p \wedge \sim q)]$ است؟

- (۱) $[(p \wedge \sim q) \vee (\sim p \wedge q)] \wedge r$ (۲) $[(p \wedge \sim q) \vee (\sim p \wedge q)] \vee r$
(۳) $(p \vee \sim q \vee \sim r) \wedge (\sim p \vee q \vee \sim r)$ (۴) $(p \wedge \sim q \wedge \sim r) \vee (\sim p \wedge q \wedge \sim r)$

۵۲. کدام گزاره هم‌ارز منطقی گزاره $p \Rightarrow [(q \vee r) \Rightarrow (q \wedge r)]$ است؟

- (۱) $p \wedge ((q \wedge r) \vee (\sim q \wedge \sim r))$ (۲) $\sim p \vee ((q \wedge r) \vee (\sim q \wedge \sim r))$
(۳) $(\sim p \wedge q \wedge r) \vee (\sim p \wedge \sim q \wedge \sim r)$ (۴) $(p \wedge q \wedge r) \vee (\sim p \wedge \sim q \wedge \sim r)$

۵۳. مطابق با جدول ارزش درستی گزاره‌های زیر، کدام گزاره مرکب می‌تواند هم‌ارز منطقی گزاره x باشد؟
(نوبت دوم ۱۴۰۲)

p	q	r	x
د	د	د	ن
د	د	ن	ن
د	ن	د	د
د	ن	ن	ن
ن	د	د	ن
ن	د	ن	د
ن	ن	د	د
ن	ن	ن	ن

$$(1) (q \Rightarrow (p \vee r)) \Rightarrow ((p \vee \sim p) \wedge (\sim q \wedge r))$$

$$(2) (r \Rightarrow (p \vee q)) \Rightarrow ((p \vee \sim p) \wedge (q \wedge \sim r))$$

$$(3) [p \Rightarrow ((q \vee r) \Rightarrow (q \wedge r))] \Rightarrow (\sim (p \vee r) \wedge q)$$

$$(4) (r \Rightarrow (p \vee q)) \Rightarrow [((p \Rightarrow r) \Rightarrow (\sim p \wedge r)) \wedge q]$$

۵۴. با توجه به جدول ارزش درستی گزاره‌های زیر، کدام گزاره مرکب زیر می‌تواند هم‌ارز منطقی گزاره x باشد؟

p	q	r	x
د	د	د	ن
د	د	ن	د
د	ن	د	ن
د	ن	ن	ن
ن	د	د	ن
ن	د	ن	د
ن	ن	د	د
ن	ن	ن	ن

(خارج ۱۴۰۲)

$$(1) (r \Rightarrow (p \vee q)) \Rightarrow ((p \Rightarrow p) \wedge (q \wedge \sim r))$$

$$(2) (\sim r \Rightarrow (p \vee \sim q)) \Rightarrow ((p \Rightarrow p) \wedge (\sim q \wedge \sim r))$$

$$(3) (r \Rightarrow (p \vee q)) \Rightarrow [((p \Rightarrow r) \Rightarrow (\sim p \wedge r)) \wedge q]$$

$$(4) ((p \wedge q) \Rightarrow r) \Rightarrow [(q \Rightarrow (p \vee r)) \Rightarrow ((p \wedge r) \Rightarrow q)]$$

۵۵. اگر p گزاره درست و q گزاره نادرست و r گزاره دلخواه باشد، ارزش گزاره $(p \wedge q) \Rightarrow (p \Leftrightarrow r)$ برابر ارزش کدام است؟

- (۱) r (۲) همیشه درست (۳) $\sim r$ (۴) همیشه نادرست

۵۶. اگر ارزش دو گزاره p و r درست و ارزش گزاره q نادرست باشد، کدام یک از گزاره‌های زیر نادرست است؟

- (۱) $p \Rightarrow (q \Rightarrow r)$ (۲) $(p \vee q) \Rightarrow \sim r$ (۳) $(p \wedge q) \Rightarrow r$ (۴) $p \wedge (q \Rightarrow r)$

۵۷. در چه صورت ارزش گزاره $(p \wedge \sim q) \Rightarrow r$ نادرست است؟

- (۱) اگر p گزاره درست و q و r گزاره‌های دلخواه باشند. (۲) اگر p گزاره دلخواه و q و r گزاره‌های نادرست باشند.
(۳) اگر p گزاره درست و q و r گزاره‌های نادرست باشند. (۴) اگر p گزاره نادرست و q و r گزاره‌های درست باشند.

۵۸. گزاره $(\sim q \Rightarrow \sim p) \wedge (\sim r \Rightarrow \sim p)$ در چند حالت نادرست است؟

- ۱ (۴) ۲ (۳) ۳ (۲) ۴ (۱)

(خارج ۱۴)

۵۹. ارزش گزاره $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)$ در کدام حالت زیر درست است؟

- ۱ (۱) p درست، q نادرست، r درست
۲ (۲) p نادرست، q نادرست، r نادرست
۳ (۳) p درست، q درست، r نادرست
۴ (۴) p نادرست، q درست، r نادرست

۶۰. گزاره $(p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow \sim q)$ در چند حالت نادرست است؟

- ۱ (۴) ۲ (۳) ۳ (۲) ۴ (۱)

۶۱. گزاره $((\sim p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow \sim q)) \Rightarrow p$ در کدام حالت نادرست است؟

- ۱ (۱) p و q درست
۲ (۲) $\sim p$ و $\sim q$ نادرست
۳ (۳) p و $\sim q$ درست
۴ (۴) p و q نادرست

۶۲. باتوجه به گزاره «اگر خانم بنیادی با تاکسی به اداره برود، دیر خواهد رسید» کدام گزینه درست است؟

- ۱ (۱) اگر خانم بنیادی تاکسی نگیرد، دیر نخواهد رسید.
۲ (۲) اگر خانم بنیادی دیر نکند، او نباید تاکسی گرفته باشد.
۳ (۳) اگر خانم بنیادی دیر کند، او باید تاکسی گرفته باشد.
۴ (۴) اگر خانم بنیادی دیر نکند، او باید تاکسی گرفته باشد.

۶۳. نقیض گزاره «اگر a زوج باشد، a+۱ فرد خواهد بود.» کدام است؟

- ۱ (۱) نه a زوج است و نه a+۱ فرد است.
۲ (۲) هم a زوج است و هم a+۱ فرد است.
۳ (۳) a زوج است و a+۱ فرد نیست.
۴ (۴) a زوج نیست و a+۱ فرد است.

۶۴. با توجه به گزاره «اگر ورزش کنید، بدن سالمی خواهید داشت.» کدام گزینه صحیح است؟

- ۱ (۱) ورزش نمی کنید یا بدن سالمی خواهید داشت.
۲ (۲) اگر ورزش نکنید، بدن سالمی نخواهید داشت.
۳ (۳) اگر بدن سالمی داشته باشید، ورزش کرده اید.
۴ (۴) ورزش می کنید و بدن سالمی خواهید داشت.

۶۵. اگر گزاره ای درست و q گزاره ای نادرست و r گزاره ای دلخواه باشد، ارزش کدام یک از گزاره های زیر نادرست است؟

- ۱ (۱) $(p \wedge q) \Leftrightarrow (\sim p \wedge r)$
۲ (۲) $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\sim q \Rightarrow \sim p)$
۳ (۳) $(\sim q \Rightarrow \sim p) \wedge r$
۴ (۴) $(r \Rightarrow p) \wedge p$

۶۶. اگر p، q، r و S چهار گزاره و $p \Rightarrow [q \Rightarrow r]$ نادرست باشد، ارزش نقیض کدام یک از گزاره های زیر درست است؟

- ۱ (۱) $(p \Rightarrow r) \Rightarrow s$
۲ (۲) $[(\sim p \vee s) \wedge r] \Rightarrow q$
۳ (۳) $[(q \wedge \sim r) \vee s] \Rightarrow r$
۴ (۴) $[(q \Rightarrow \sim s) \Leftrightarrow r] \Rightarrow p$

۶۷. اگر گزاره ای دلخواه و « $q \Leftrightarrow r$ » نادرست باشد، ارزش گزاره $[p \Rightarrow (q \vee r)] \Rightarrow [(p \wedge r) \Rightarrow \sim q]$ در چند حالت نادرست است؟

- ۱ (۱) صفر
۲ (۲) ۲
۳ (۳) ۴
۴ (۴) ۸

(داخل ۹۹)

۶۸. کدام یک از گزاره های زیر هم ارز منطقی گزاره $p \Leftrightarrow q$ است؟

- ۱ (۱) $(p \wedge q) \vee \sim (p \vee q)$
۲ (۲) $(p \vee q) \vee \sim (p \wedge q)$
۳ (۳) $(p \wedge q) \wedge \sim (p \vee q)$
۴ (۴) $(p \vee q) \wedge \sim (p \wedge q)$

۶۹. گزاره $((p \Leftrightarrow q) \wedge p) \Rightarrow \sim p$ در کدام حالت نادرست است؟

- ۱ (۱) p و $\sim q$ درست
۲ (۲) p و q درست
۳ (۳) $\sim p$ و $\sim q$ درست
۴ (۴) $\sim p$ و q درست

۷۰. اگر p گزاره درست، q گزاره نادرست و r گزاره دلخواه باشد، ارزش کدام گزاره درست است؟

- ۱ (۱) $(p \Leftrightarrow \sim q) \vee r$
۲ (۲) $\sim (p \wedge \sim q) \wedge r$
۳ (۳) $(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow (p \Rightarrow \sim q)$
۴ (۴) $(\sim p \vee \sim q) \Leftrightarrow \sim (p \vee q)$

(داخل ۱۴)

۷۱. کدام گزاره زیر هم ارز منطقی گزاره $q \Leftrightarrow (\sim p \vee q)$ است؟

- ۱ (۱) p
۲ (۲) $p \vee q$
۳ (۳) q
۴ (۴) $\sim p \Leftrightarrow q$

۷۲. ارزش گزاره $(\sim (p \Leftrightarrow q) \wedge p) \Rightarrow \sim q$ کدام است؟

- ۱ (۱) همواره درست است.
۲ (۲) همواره نادرست است.
۳ (۳) به ارزش q بستگی دارد.
۴ (۴) به ارزش p بستگی دارد.

۷۳. اگر گزاره $p \Rightarrow r \vee p$ ، همواره درست و q گزاره ای دلخواه باشد، ارزش گزاره $(p \wedge q) \vee (q \Leftrightarrow r)$ در کدام حالت درست است؟

- ۱ (۱) ارزش گزاره های p و r درست و ارزش q نادرست باشد.
۲ (۲) ارزش گزاره های p و r نادرست و ارزش q درست باشد.
۳ (۳) ارزش گزاره های p و q نادرست و ارزش r درست باشد.
۴ (۴) ارزش گزاره های p و q درست و ارزش r نادرست باشد.

۷۴. اگر گزاره $p \Rightarrow r$ نادرست و q گزاره‌ای دلخواه باشد، ارزش گزاره $[(r \Leftrightarrow q) \Rightarrow (p \Rightarrow (q \vee r))]$ در چند حالت نادرست است؟

- (۱) ۴ (۲) ۶ (۳) ۱ (۴) ۲

۷۵. گزاره $(p \Leftrightarrow q) \vee (\sim p)$ با کدام یک از گزاره‌های زیر هم‌ارزش است؟

- (۱) $p \Rightarrow \sim q$ (۲) $\sim q \Rightarrow \sim p$ (۳) $\sim q \Rightarrow p$ (۴) $\sim p \Rightarrow q$

۷۶. ارزش گزاره $((p \wedge r) \Rightarrow r) \Leftrightarrow (r \Rightarrow q \vee r)$ در چند حالت درست است؟

- (۱) صفر (۲) ۲ (۳) ۴ (۴) ۸

۷۷. نقیض گزاره $(p \wedge q) \vee \sim (p \vee q)$ کدام است؟

- (۱) $p \Leftrightarrow q$ (۲) $p \Leftrightarrow \sim q$ (۳) $p \Rightarrow q$ (۴) $\sim q \Rightarrow p$

۷۸. ارزش گزاره « $\sim p \Leftrightarrow q$ »، در چند حالت درست است؟

- (۱) ۴ (۲) ۳ (۳) ۲ (۴) ۱

۷۹. گزاره سوری $\exists x \in P; x = 2k + 1$ که در آن P مجموعه اعداد اول است، به کدام یک از صورت‌های زیر بیان می‌شود؟

- (۱) همه اعداد اول، فرد هستند. (۲) همه اعداد اول، اول هستند. (۳) عدد فردی وجود دارد که اول باشد. (۴) عدد اولی وجود دارد که فرد باشد.

۸۰. نقیض گزاره سوری «همه کسانی که از موسیقی کلاسیک لذت می‌برند، از تماشای فیلم هم لذت می‌برند.» کدام است؟

- (۱) همه کسانی که از موسیقی کلاسیک لذت می‌برند، از تماشای فیلم لذت نمی‌برند. (۲) برخی از افرادی که از موسیقی کلاسیک لذت می‌برند، از تماشای فیلم لذت نمی‌برند. (۳) هیچ فرد علاقه‌مند به موسیقی کلاسیک، از موسیقی کلاسیک لذت نمی‌برند. (۴) برخی از افرادی که از تماشای فیلم لذت می‌برند، از موسیقی کلاسیک لذت نمی‌برند.

۸۱. نقیض گزاره سوری $\forall x \in (-\infty, 0); x - \frac{1}{x} \leq -2$ کدام است؟

- (۱) $\forall x \in [0, +\infty); x - \frac{1}{x} \leq -2$ (۲) $\forall x \in (-\infty, 0); x + \frac{1}{x} \leq -2$ (۳) $\exists x \in (-\infty, 0); x - \frac{1}{x} > -2$ (۴) $\exists x \in (0, +\infty); x + \frac{1}{x} \geq 2$

۸۲. اگر P مجموعه اعداد اول باشد، نقیض کدام گزاره سوری زیر، به درستی در مقابل آن نوشته نشده است؟

- (۱) $\sim [\forall x \in \mathbb{N}; (2^{2^x} + 1) \in P] \equiv \exists x \in \mathbb{N}; (2^{2^x} + 1) \notin P$ (۲) $\sim [\exists x \in \mathbb{R}; x < 0 \wedge x^2 \leq 1] \equiv \forall x \in \mathbb{R}; x \geq 0 \vee x^2 > 1$ (۳) $\sim [\exists x \in \mathbb{R}; \frac{x-3}{\Delta} = 0] \equiv \exists x \notin \mathbb{R}; \frac{x-3}{\Delta} \neq 0$ (۴) $\sim [\forall x \in \mathbb{R}; \frac{x^2-1}{x-1} = x+1] \equiv \exists x \in \mathbb{R}; \frac{x^2-1}{x-1} \neq x+1$

۸۳. نقیض گزاره $\forall x \in \mathbb{R}; (x^2 - 4 = 0) \Rightarrow (x^3 - 8 = 0)$ کدام است؟

- (۱) $\forall x \in \mathbb{R}; (x^2 - 4 \neq 0) \wedge (x^3 - 8 \neq 0)$ (۲) $\exists x \in \mathbb{R}; (x^2 - 4 \neq 0) \wedge (x^3 - 8 = 0)$ (۳) $\forall x \in \mathbb{R}; (x^2 - 4 \neq 0) \wedge (x^3 - 8 = 0)$ (۴) $\exists x \in \mathbb{R}; (x^2 - 4 = 0) \wedge (x^3 - 8 \neq 0)$

۸۴. کدام گزاره سوری زیر دارای ارزش درست است؟

- (۱) $\forall x \in \mathbb{R}; x^2 + 2 > 2x$ (۲) $\exists x \in \mathbb{R}; \frac{x-1}{x} = x$ (۳) $\exists x \in \mathbb{R}; |x + \frac{1}{x}| < 2$ (۴) $\forall x \in \mathbb{R}; \frac{x^2-4}{x-2} = x+2$

۸۵. اگر P مجموعه اعداد اول و O مجموعه اعداد فرد باشند، ارزش کدام یک از گزاره‌های سوری زیر نادرست است؟

- (۱) $\forall x \in O; x^2 \in O$ (۲) $\exists x \in \mathbb{N}; \frac{1}{\sqrt{x}} \in \mathbb{Z}$ (۳) $\forall x \in P; x \in O$ (۴) $\exists x \in W; 2^{2^{x-1}} \in P$

۸۶. نقیض گزاره $\forall a, b \in \mathbb{Z}; (a < b) \Rightarrow (a^2 \leq b^2 \vee a^2 > b^2)$ برابر کدام است؟

- (۱) $\exists a, b \in \mathbb{Z}; (a < b) \wedge (a^2 \leq b^2 \wedge a^2 > b^2)$ (۲) $\exists a, b \in \mathbb{Z}; (a \geq b) \vee (a^2 > b^2 \vee a^2 \leq b^2)$ (۳) $\exists a, b \in \mathbb{Z}; (a < b) \wedge (a^2 > b^2 \wedge a^2 \leq b^2)$ (۴) $\exists a, b \in \mathbb{Z}; (a^2 < b^2 \vee a^2 \leq b^2) \Rightarrow (b < a)$

۸۷. اگر $A = \{x \in \mathbb{Z} | 0 < x \leq 5\}$ دامنه متغیر باشد، ارزش چه تعداد از گزاره‌های زیر درست است؟

- (الف) $\exists x \in A; x + 7 = 20$ (ب) $\forall x \in A; x + 2 \leq 9$ (پ) $\exists x \in A; x + 2 \leq 6$ (ت) $\forall x \in A; x + 3 \geq 8$
(۱) ۴ (۲) ۳ (۳) ۲ (۴) ۱

۸۸. اگر دامنه متغیر مجموعه اعداد صحیح باشد، مجموعه جواب کدام یک از گزینه‌های زیر تعداد اعضای بیشتری دارد؟

- (۱) $\{k(k-1) | |k-1| < 2\}$ (۲) $\{x | \frac{x-1}{2} < 1, x \in W\}$ (۳) $\{\Delta x - 1 | 0 < x < 3\}$ (۴) $\{x | x^2 - x = 0\}$

۸۹. گزاره سوری $\forall x \in \mathbb{N}, \exists y \in \mathbb{N}; P(x, y)$ با کدام گزاره‌نمای $P(x, y)$ دارای ارزش درست است؟

- (۱) $y - x = 6$ (۲) $x - y = 6$ (۳) $x + y = 6$ (۴) $xy = 6$

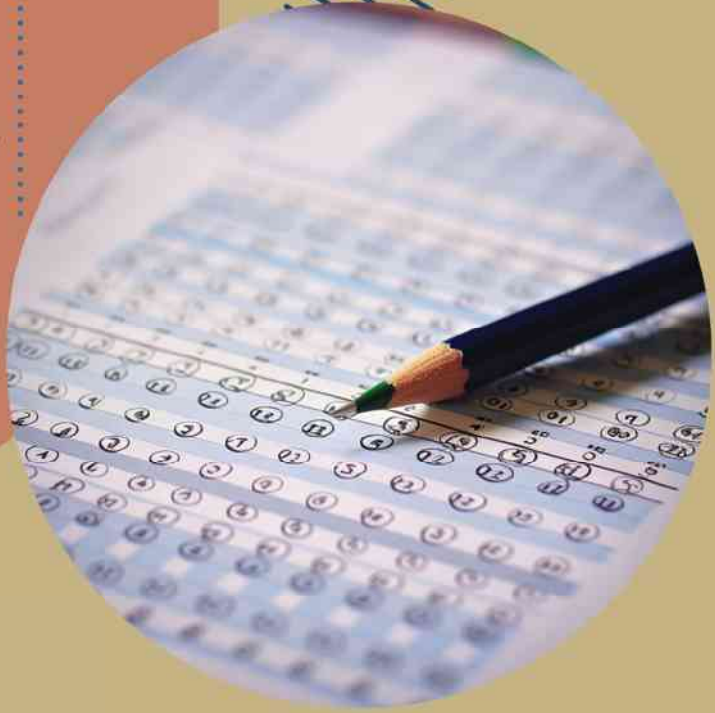
(داخل ۹۸)

. فصل آخر .

پاسخنامه

iq

Final Chapter
Answers



۱۸ ۴

گزاره $(p \wedge \sim r) \wedge (\sim p \vee q)$ را ساده می‌کنیم:

$$\sim (p \wedge \sim r) \wedge (\sim p \vee q) \equiv (\sim p \vee r) \wedge (\sim p \vee q) \\ \equiv \sim p \vee (r \wedge q)$$

جدول ارزش گزاره‌ها را برای $\sim p \vee (r \wedge q)$ رسم می‌کنیم و داریم:

p	q	r	$\sim p$	$r \wedge q$	$\sim p \vee (r \wedge q)$
د	د	د	ن	د	د
د	د	ن	ن	ن	ن
د	ن	د	ن	ن	ن
د	ن	ن	ن	ن	ن
ن	د	د	د	د	د
ن	د	ن	د	ن	د
ن	ن	د	د	ن	د
ن	ن	ن	د	ن	د

با توجه به جدول بالا، ارزش گزاره $(p \wedge \sim r) \wedge (\sim p \vee q)$ در ۵ حالت درست و در ۳ حالت نادرست است، بنابراین تفاضل تعداد حالت‌های درست و نادرست این گزاره برابر $۵ - ۳ = ۲$ است.

۱۹ ۳

با توجه به ویژگی‌های گفته‌شده گزینه ۳ نادرست است.

۲۰ ۳

می‌دانیم ترکیب شرطی $p \Rightarrow q$ با عکس نقیض آن یعنی $\sim q \Rightarrow \sim p$ هم‌ارزش است. بنابراین داریم:

$$(x > ۲) \Rightarrow (x^۲ > ۴) \equiv \sim (x^۲ > ۴) \Rightarrow \sim (x > ۲) \equiv (x^۲ \leq ۴)$$

$$\Rightarrow (x \leq ۲)$$

پس می‌توان گفت: «اگر $x^۲ \leq ۴$ ، آن‌گاه $x \leq ۲$ ».

۲۱ ۳

تک‌تک گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

۱ $q \Rightarrow r$ ، یعنی «اگر $m + n = ۰$ باشد، آن‌گاه $mn = ۰$ است». واضح است که اگر جمع دو عدد صفر باشد، لزوماً حاصل‌ضرب آن‌ها صفر نیست. مثلاً اگر $m = ۲$ و $n = -۲$ باشند، مجموع آن‌ها صفر است، ولی حاصل‌ضرب آن‌ها صفر نیست.

۲ $p \Rightarrow q$ ، یعنی «اگر $m = ۰$ باشد، آن‌گاه $m + n = ۰$ است». واضح است که اگر n عددی غیرصفر باشد، این گزاره نادرست است.

۳ $p \Rightarrow r$ ، یعنی «اگر $m = ۰$ باشد، آن‌گاه $mn = ۰$ است». که ارزش این گزاره درست می‌باشد. بنابراین گزینه ۳ پاسخ صحیح این سوال است. برای تمرین بیشتر گزینه ۴ را ببینید:

۴ $q \Rightarrow p$ ، یعنی «اگر $m + n = ۰$ باشد، آن‌گاه $m = ۰$ است». واضح است که اگر مجموع دو عدد صفر باشد، لزومی ندارد که یکی از آن‌ها صفر باشد.

۱۵ ۲

ابتدا گزاره داده‌شده در صورت سؤال را ساده می‌کنیم:

$$p \vee [(\sim q \vee X) \wedge \sim (\sim q \wedge \sim X)] \equiv p \vee [(\sim q \vee X) \wedge (q \vee X)]$$

$$\equiv p \vee [(\sim q \wedge q) \vee X] \equiv p \vee [(ن) \vee X] \equiv p \vee X$$

می‌دانیم ترکیب فصلی هر گزاره با نقیضش همواره درست است. بنابراین $X = \sim p$ می‌باشد.

۱۶ ۱

گزاره داده‌شده در صورت سؤال را ساده می‌کنیم:

$$\sim [(p \wedge \sim q) \vee (p \wedge q)] \wedge [r \vee (p \wedge \sim r)]$$

$$\equiv \sim [p \wedge (\sim q \vee q)] \wedge [(r \vee p) \wedge (r \vee \sim r)]$$

$$\equiv \sim [p \wedge (د)] \wedge [(r \vee p) \wedge (د)] \equiv \sim p \wedge (r \vee p)$$

$$\equiv (\sim p \wedge r) \vee (\sim p \wedge p) \equiv (\sim p \wedge r) \vee (ن) \equiv \sim p \wedge r$$

می‌دانیم ترکیب عطفی $p \wedge r$ فقط زمانی درست است که هر دو گزاره p و r درست باشند، بنابراین ارزش گزاره p نادرست، ارزش گزاره r درست و q می‌تواند درست یا نادرست باشد.

۱۷ ۲

ابتدا گزاره $(p \vee q) \wedge (\sim p \wedge q)$ را ساده می‌کنیم:

$$(p \vee q) \wedge (\sim p \wedge q) \stackrel{\text{شرکت پذیری}}{\equiv} [(p \vee q) \wedge q] \wedge \sim p \\ \stackrel{\text{وژب}}{\equiv} q \wedge \sim p$$

ترکیب منطقی $p \wedge q$ زمانی درست است که هر دو گزاره p و q درست باشند، بنابراین ارزش p نادرست و ارزش q درست است. پس این گزاره فقط در یک حالت درست است. حال گزاره $(p \wedge q) \vee \sim (p \vee q)$ را ساده می‌کنیم:

$$(p \wedge q) \vee \sim (p \vee q) \equiv (p \wedge q) \vee (\sim p \wedge \sim q)$$

چون ارزش گزاره $(p \wedge q) \vee (\sim p \wedge \sim q)$ به راحتی قابل بررسی نیست، از جدول ارزش گزاره‌ها کمک می‌گیریم:

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$p \wedge q$	$\sim p \wedge \sim q$	$(p \wedge q) \vee (\sim p \wedge \sim q)$
د	د	ن	ن	د	ن	د
د	ن	ن	د	ن	ن	ن
ن	د	د	ن	ن	ن	ن
ن	ن	د	د	ن	د	د

با توجه به جدول بالا واضح است ارزش گزاره $(p \wedge q) \vee \sim (p \vee q)$ در ۲ حالت نادرست است.

بنابراین تعداد حالت‌های درست گزاره $(p \vee q) \wedge (\sim p \wedge q)$ یک واحد کم‌تر از تعداد حالت‌های نادرست گزاره $(p \wedge q) \vee \sim (p \vee q)$ است.

۲۲ ۲

چون ارزش گزاره $(p \wedge q) \Rightarrow r$ نادرست است، پس $p \wedge q$ درست و r نادرست می‌باشد. برای آن‌که $p \wedge q$ درست باشد، باید گزاره‌های p و q هر دو درست باشند، یعنی $a = -b$ و $a > -c$ است ولی چون r نادرست است پس $c < 0$ نادرست می‌باشد، بنابراین $c > 0$ است (توجه کنید که در صورت سؤال گفته شده a, b و c مخالف صفر هستند). از طرفی چون $a > -c$ است، پس a کوچک‌تر از یک عدد منفی بوده و واضح است که $a < 0$ می‌باشد و چون b قرینه a است، پس $b > 0$ خواهد بود.

۲۳ ۴

با تبدیل ترکیب شرطی به ترکیب فصلی داریم:

$$p \Rightarrow \sim q \equiv p \vee \sim q$$

۲۴ ۴

می‌دانیم $p \Rightarrow q$ با $\sim p \vee q$ هم‌ارز است، پس:

$$\sim (p \Rightarrow q) \equiv \sim (\sim p \vee q) \equiv (p \wedge \sim q)$$

۲۵ ۲

می‌دانیم گزاره $p \Rightarrow q$ با گزاره $\sim p \vee q$ هم‌ارز است، بنابراین:

$$\sim (\sim p \Rightarrow q) \equiv \sim (p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$$

۲۶ ۱

ابتدا گزاره شرطی را به گزاره فصلی تبدیل می‌کنیم و داریم:

$$(p \wedge \sim q) \Rightarrow q \equiv (p \wedge \sim q) \vee q \equiv (\sim p \vee q) \vee q \equiv \sim p \vee q \equiv p \Rightarrow q$$

۲۷ ۲

می‌دانیم ترکیب شرطی $p \Rightarrow q$ با ترکیب فصلی $\sim p \vee q$ هم‌ارز است، بنابراین داریم:

$$\sim (p \Rightarrow q) \equiv \sim (\sim p \vee q) \equiv p \wedge \sim q$$

۲۸ ۲

می‌دانیم گزاره $p \Rightarrow q$ با $\sim p \vee q$ هم‌ارز است. بنابراین برای به دست آوردن نقیض گزاره شرطی $p \Rightarrow q$ داریم:

$$\sim (p \Rightarrow q) \equiv \sim (\sim p \vee q) \equiv p \wedge \sim q$$

پس نقیض هر گزاره شرطی با ترکیب عطفی مقدم و نقیض تالی آن برابر است.

۲۹ ۱

ترکیب شرطی را به ترکیب فصلی تبدیل می‌کنیم و داریم:

$$\sim p \Rightarrow p \wedge q \equiv p \vee (p \wedge q) \equiv p$$

۳۰ ۱

با تبدیل ترکیب شرطی $p \Rightarrow q$ به ترکیب فصلی $\sim p \vee q$ داریم:

$$(p \Rightarrow q) \vee p \equiv (\sim p \vee q) \vee p$$

شرکت پذیری

$$\equiv (\sim p \vee p) \vee q \equiv (د) \vee q \equiv د$$

پس ارزش این گزاره همواره درست است.

۳۱ ۱

زمانی $p \Rightarrow (q \vee r)$ نادرست است که p درست و $q \vee r$ نادرست باشند. اگر $q \vee r$ نادرست باشد یعنی هم q و هم r نادرست هستند. پس در حالت ارزش گزاره $p \Rightarrow (q \vee r)$ درست است. به‌طور کلی در جدول ارزشی سه گزاره p, q و r ارزش r در ۴ حالت نادرست است که در یکی از حالات همان‌طور که دیدید ارزش $p \Rightarrow (q \vee r)$ نادرست می‌باشد. پس اگر $p \Rightarrow (q \vee r)$ درست باشد در ۳ حالت ارزش r نادرست است، بنابراین احتمال مورد نظر برابر $\frac{3}{4}$ می‌باشد.

۳۲ ۲

زمانی ارزش گزاره $(p \vee q) \Rightarrow r$ نادرست است که $p \vee q$ درست و r نادرست باشند. برای آن‌که $p \vee q$ درست باشد، کافی است که p و q نادرست نباشند، پس در سه حالت گزاره $(p \vee q) \Rightarrow r$ نادرست می‌باشد. حال می‌خواهیم ببینیم در چند حالت از این سه حالت ارزش q نادرست است که به وضوح در یک حالت این اتفاق می‌افتد پس احتمال مورد نظر برابر $\frac{1}{3}$ است.

۳۳ ۲

می‌دانیم گزاره $\Rightarrow$ با گزاره $\vee$ هم‌ارز است.

پس:

$$(\sim p \vee \sim q) \Rightarrow (p \wedge r) \Rightarrow \sim (\sim p \vee \sim q) \vee (p \wedge r)$$

$$\xrightarrow{\text{دومرگان}} (p \wedge q) \vee (p \wedge r) \xrightarrow{\text{عکس توزیع پذیری}} p \wedge (q \vee r)$$

۳۴ ۱

زمانی $p \Rightarrow q$ و $p \Rightarrow \sim q$ هر دو درست‌اند که p نادرست باشد. بنابراین هم‌ارز گزاره $\sim p$ است.

۳۵ ۱

می‌دانیم ترکیب شرطی $p \Rightarrow q$ وقتی درست است که مقدم آن نادرست یا تالی آن درست باشد. چون در گزاره‌های $p \Rightarrow q$ و $p \Rightarrow \sim q$ ارزش مقدم‌ها مخالف هم است (حتماً یکی درست و یکی نادرست است)، پس در صورتی دو گزاره درست می‌شوند که تالی آن‌ها یعنی q درست باشد. چون q درست است، پس $q \vee p$ و در نتیجه $q \vee p \Rightarrow q$ درست خواهد بود.

بنابراین گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

دقت کنید گزینه‌های ۲ و ۴ هم‌ارز p و گزینه ۳ همواره نادرست است.

۳ ۴۱

تمام گزینه‌ها به فرم $r \wedge r$ هستند، پس زمانی هم‌ارز منطقی r هستند که ارزش $\bigcirc$ درست باشد. با توجه به این که گزاره p گزاره درست و q گزاره نادرست است داریم:

۱ $\sim q \Rightarrow \sim p \equiv d \Rightarrow n \equiv n$ ✗

۲ $p \Rightarrow (p \wedge q) \equiv d \Rightarrow n \equiv n$ ✗

۳ $q \Rightarrow (p \wedge q) \equiv n \Rightarrow n \equiv n$ ✓

۴ $p \Rightarrow q \equiv n$ ✗

۳ ۴۲

به کمک هم‌ارزی $p \Rightarrow q \equiv \sim p \vee q$ داریم:

$(p \Rightarrow r) \Rightarrow (r \Rightarrow q) = (\sim p \vee r) \Rightarrow (\sim r \vee q)$

$\equiv \sim (\sim p \vee r) \vee (\sim r \vee q) \equiv \underbrace{(\sim p \wedge \sim r)}_{\sim r} \vee \underbrace{(\sim r \vee q)}_{\sim r} \equiv \sim r$

روش دوم: چون گزاره درست است، پس $p \Rightarrow r$ هم‌ارز r است. (یعنی قول داده، حالا همه چیز به اتمام دارند یا ندارند بستگی دارد) از طرفی چون q گزاره نادرست است، پس $r \Rightarrow q$ با $\sim r$ هم‌ارز می‌باشد. (اگر رو اتمام نداره، پس همه چیز به قول دارند یا ندارند بستگی دارد). حال ارزش r با ارزش $\sim r$ یکسان است.

۱ ۴۳

ترکیب شرطی را به ترکیب فصلی تبدیل می‌کنیم و داریم:

$(p \wedge \sim q) \Rightarrow q \equiv \sim (p \wedge \sim q) \vee q$

$\equiv \sim p \vee q \vee q \equiv \sim p \vee q \equiv p \Rightarrow q$

بنابراین گزاره داده شده هم‌ارز $p \Rightarrow q$ می‌باشد.

۴ ۴۴

برای به دست آوردن عکس نقیض یک ترکیب شرطی، جای مقدم و تالی را با هم عوض و آن‌ها را هم‌زمان نقیض می‌کنیم، بنابراین عکس نقیض گزاره $(p \wedge q) \Rightarrow \sim p$ برابر است با:

$p \Rightarrow \sim (p \wedge q) \xrightarrow{\text{دوگانه}} p \Rightarrow (\sim p \vee \sim q)$

۱ ۴۵

گزاره $p \Rightarrow q$ زمانی نادرست است که p درست و q نادرست باشد. حال تک‌تک گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

۱ $(p \wedge \sim q) \vee r \equiv (d \wedge n) \vee r \equiv (d \wedge d) \vee r \equiv d \vee r \equiv d$

بنابراین پاسخ، گزینه ۱ است. حال به عنوان تمرین سایر گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

۲ $r \Rightarrow (\sim q \Rightarrow \sim p) \equiv r \Rightarrow (\sim n \Rightarrow \sim d)$

$\equiv r \Rightarrow (d \Rightarrow n) \equiv r \Rightarrow n$

بنابراین اگر گزارش r درست باشد، ارزش این گزاره نادرست می‌شود.

۳ $(p \vee \sim q) \wedge r \equiv (d \vee n) \wedge r \equiv (d \vee d) \wedge r \equiv d \wedge r \equiv r$

بنابراین اگر ارزش r نادرست باشد، ارزش این گزاره نادرست می‌شود.

۴ $p \Rightarrow (q \wedge r) \equiv d \Rightarrow (n \wedge r) \equiv d \Rightarrow n \equiv n$

۳ ۳۶

همه ترکیب‌های شرطی را به ترکیب فصلی تبدیل می‌کنیم و داریم:

$[(p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r)] \wedge r \equiv [(\sim p \vee r) \wedge (\sim q \vee r)] \wedge r$

$\xrightarrow{\text{عکس توزیع پذیری}} \xrightarrow{\text{فونک}} [(\sim p \wedge \sim q) \vee r] \wedge r \equiv r$

بنابراین ارزش این گزاره در ۴ حالت درست است.

۲ ۳۷

گزاره شرطی را به ترکیب فصلی تبدیل می‌کنیم و داریم:

$(p \vee q) \Rightarrow (q \vee r) \equiv \sim (p \vee q) \vee (q \vee r) \equiv (\sim p \wedge \sim q) \vee (q \vee r)$

$\equiv (\sim p \vee (q \vee r)) \wedge (\sim q \vee (q \vee r)) \equiv \underbrace{\sim p \vee (q \vee r)}_{\text{گزینه (۳)}} \wedge \underbrace{(\sim q \vee (q \vee r))}_{\text{د}}$

گزاره $\sim p \vee (q \vee r)$ هم‌ارز $p \Rightarrow (q \vee r)$ است و اگر $\sim p \vee (q \vee r)$ را به صورت $(\sim p \vee q) \vee r$ در نظر بگیریم، هم‌ارز آن $(p \Rightarrow q) \vee r$ می‌باشد.

گزینه (۳)

۱ ۳۸

می‌دانیم $\sim p \Rightarrow \sim q$ هم‌ارز $\sim (\sim p) \vee \sim q$ است. پس:

$(\sim (\sim p) \vee \sim q) \wedge (p \vee q) \equiv (p \vee \sim q) \wedge (p \vee q)$

$\equiv p \vee (q \wedge \sim q) \equiv p \vee n \equiv p$

۱ ۳۹

چون ارزش گزاره p درست است، پس $\sim p$ نادرست می‌باشد. بنابراین در گزینه ۱ ترکیب شرطی $p \Rightarrow q$ بنا بر انتقای مقدم درست است. بنابراین پاسخ، گزینه ۱ است. حال به عنوان تمرین سایر گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم. در گزینه ۲ اگر q نادرست باشد، چون p درست است پس گزاره $p \Rightarrow q$ نادرست می‌شود. در گزینه ۳ اگر q درست باشد، چون $\sim p$ نادرست است پس گزاره $p \Rightarrow \sim p$ نادرست می‌شود. در گزینه ۴ نیز اگر q نادرست باشد، $\sim q$ درست و چون $\sim p$ نادرست است، گزاره $p \Rightarrow \sim q$ نادرست می‌شود.

۱ ۴۰

چون p درست است، پس $\sim p$ نادرست می‌باشد. بنابراین در گزینه ۱ ترکیب عطفی $p \wedge q \Rightarrow r$ نادرست و $\sim p \wedge q \Rightarrow r$ بنا بر انتقای مقدم درست است. بنابراین پاسخ، گزینه ۱ است. حال به عنوان تمرین سایر گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم: در گزینه ۲ چون p درست است، پس $p \wedge q \equiv q$ می‌باشد و در صورتی که ارزش q درست و ارزش r نادرست باشد، ارزش گزاره $p \wedge q \Rightarrow r$ نادرست است. در گزینه ۳ $\sim p \vee q \equiv q$ است و زمانی که ارزش q درست و ارزش r نادرست باشد، ارزش گزاره $\sim p \vee q \Rightarrow r$ نادرست است. در گزینه ۴ نیز چون ارزش p درست است، پس ارزش $p \vee q$ درست می‌باشد و اگر ارزش r نادرست باشد، ارزش گزاره $p \vee q \Rightarrow r$ نادرست می‌شود.

۴۶ ۲

می‌دانیم گزاره شرطی $p \Rightarrow q$ زمانی نادرست است که ارزش p درست و ارزش q نادرست باشد. بنابراین گزینه‌ای پاسخ است که ارزش مقدم آن بتواند درست و ارزش تالی آن بتواند نادرست باشد. گزینه ۲ را ساده می‌کنیم:

$$[(p \vee q) \wedge \sim p] \Rightarrow p \equiv [(p \wedge \sim p) \vee (q \wedge \sim p)]$$

$$\Rightarrow p \equiv q \wedge \sim p \Rightarrow p$$

در گزاره $q \wedge \sim p \Rightarrow p$ اگر ارزش p نادرست و ارزش q درست باشد، ارزش مقدم یعنی $q \wedge \sim p$ درست و ارزش تالی نادرست می‌شود، پس در این حالت ارزش گزاره نادرست می‌شود. گزاره‌های موجود در سایر گزینه‌ها همواره درست هستند.

۴۷ ۲

می‌دانیم $p \Rightarrow q$ با $p \vee q$ و همچنین $\sim q \Rightarrow \sim p$ هم‌ارزش است، پس:

$$[p \wedge (\sim q \Rightarrow \sim p)] \Rightarrow q \equiv [p \wedge (p \Rightarrow q)] \Rightarrow q$$

$$\equiv \sim [p \wedge (\sim p \vee q)] \vee q$$

$$\equiv [\sim p \vee \sim (\sim p \vee q)] \vee q \equiv [\sim p \vee p \wedge \sim q] \vee q$$

می‌دانیم $p \vee p$ همواره درست است، پس:

$$[\sim p \vee p \wedge \sim q] \vee q \equiv [\sim p \vee q] \vee q \equiv \sim p \vee q$$

۴۸ ۴

چون گزاره $(q \vee \sim p) \Rightarrow r$ نادرست است پس r درست و $q \vee \sim p$ نادرست می‌باشد. نادرست بودن $q \vee \sim p$ یعنی q و $\sim p$ نادرست هستند پس p درست است. با توجه به ارزش‌های p ، q و r ، ارزش گزاره $p \Rightarrow q$ مانند گزاره صورت سؤال نادرست است.

۴۹ ۲

می‌دانیم ترکیب عطفی هر گزاره با نقیضش همواره نادرست است، پس $(r \wedge \sim r)$ یک گزاره همواره نادرست است، بنابراین:

$$[(p \wedge \sim q) \wedge (r \wedge \sim r)] \Rightarrow (p \Rightarrow q) \equiv [(p \wedge \sim q) \wedge \text{ن}]$$

$$\Rightarrow (p \Rightarrow q)$$

همچنین می‌دانیم ترکیب عطفی هر گزاره با یک گزاره نادرست، همواره نادرست است، پس داریم:

$$[(p \wedge \sim q) \wedge \text{ن}] \Rightarrow (p \Rightarrow q) \equiv \text{ن} \Rightarrow (p \Rightarrow q)$$

حال چون در گزاره به دست آمده مقدم نادرست است، پس ترکیب شرطی « $(p \Rightarrow q) \Rightarrow \text{ن}$ » بنا بر انتقای مقدم همواره درست است.

۵۰ ۴

می‌دانیم $p \Rightarrow \sim q$ با $p \vee \sim q$ هم‌ارز است، پس:

$$p \wedge [(\sim p \vee \sim q) \wedge q] \equiv p \wedge [(\sim p \wedge q) \vee (\sim q \wedge q)]$$

$$\equiv p \wedge (\sim p \wedge q) \equiv (p \wedge \sim p) \wedge q \equiv \text{ن}$$

با کمک جدول زیر، ارزش گزاره $p \wedge [(p \Rightarrow \sim q) \wedge q]$ را در

روش دوم

حالت‌های مختلف بررسی می‌کنیم:

p	q	$\sim q$	$p \Rightarrow \sim q$
د	د	ن	ن
د	ن	د	د
ن	د	ن	د
ن	ن	د	د

$(p \Rightarrow \sim q) \wedge q$	$p \wedge [(p \Rightarrow \sim q) \wedge q]$
ن	ن
ن	ن
د	ن
ن	ن

بنابراین ارزش این گزاره همواره نادرست است.

۵۱ ۴

ابتدا گزاره‌های شرطی را به فصلی تبدیل می‌کنیم و داریم:

$$\sim [((p \vee \sim q) \Rightarrow (p \wedge \sim q)) \Rightarrow r] \equiv \sim [(\sim (p \vee \sim q) \vee (p \wedge \sim q)) \Rightarrow r]$$

$$\equiv \sim [\sim (\sim (p \vee \sim q) \vee (p \wedge \sim q)) \vee r]$$

$$\equiv \sim [((p \vee \sim q) \wedge \sim (p \wedge \sim q)) \vee r]$$

$$\equiv \sim [((p \vee \sim q) \wedge (\sim p \vee q)) \vee r]$$

حال به کمک خاصیت توزیع پذیری داریم:

$$\equiv \sim [(p \vee \sim q \vee r) \wedge (\sim p \vee q \vee r)]$$

$$\equiv \sim (p \vee \sim q \vee r) \vee \sim (\sim p \vee q \vee r)$$

$$\equiv (\sim p \wedge q \wedge \sim r) \vee (p \wedge \sim q \wedge \sim r)$$

$$\equiv (p \wedge \sim q \wedge \sim r) \vee (\sim p \wedge q \wedge \sim r)$$

۵۲ ۳

ابتدا گزاره‌های شرطی را به فصلی تبدیل می‌کنیم و داریم:

$$\sim [((q \vee r) \Rightarrow (q \wedge r)) \Rightarrow p] \equiv \sim [(\sim (q \vee r) \vee (q \wedge r)) \Rightarrow p]$$

$$\equiv \sim [\sim (\sim (q \vee r) \vee (q \wedge r)) \vee p]$$

$$\equiv \sim [(q \vee r) \wedge \sim (q \wedge r)] \vee p]$$

$$\equiv \sim [(q \vee r) \wedge (\sim q \vee \sim r)] \vee p]$$

حال به کمک خاصیت توزیع پذیری داریم:

$$\equiv \sim [(q \vee r \vee p) \wedge (\sim q \vee \sim r \vee p)]$$

$$\equiv \sim (q \vee r \vee p) \vee \sim (\sim q \vee \sim r \vee p)$$

$$\equiv (\sim q \wedge \sim r \wedge \sim p) \vee (q \wedge r \wedge \sim p)$$

$$\equiv (\sim p \wedge \sim q \wedge \sim r) \vee (\sim p \wedge q \wedge r)$$

$$\equiv (\sim p \wedge q \wedge r) \vee (\sim p \wedge \sim q \wedge \sim r)$$

۶۱ ۴

گزاره $((\sim p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow \sim q)) \Rightarrow p$ در حالتی نادرست است که $((\sim p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow \sim q))$ درست و p نادرست باشد. تنها گزینه‌ای که p نادرست است گزینه ۴ می‌باشد. توجه کنید گزاره $((\sim p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow \sim q))$ در حالتی درست است که هر یک از گزاره‌های $p \Rightarrow q$ و $\sim p \Rightarrow \sim q$ درست باشند. p که نادرست است پس $p \Rightarrow \sim q$ بنا بر انتقای مقدم درست است و برای آن که $p \Rightarrow q$ نیز درست باشد باید q درست باشد که این یعنی $\sim q$ باید نادرست باشد.

۶۲ ۲

می‌دانیم ترکیب شرطی $p \Rightarrow q$ با عکس نقیضش یعنی $\sim q \Rightarrow \sim p$ هم‌ارزش است، بنابراین داریم:

دیرخواهد رسید $\Rightarrow$ خانم بنیادی با تاکسی به اداره برود.
(خانم بنیادی با تاکسی به اداره برود) $\Rightarrow$ (دیرخواهد رسید) $\equiv \sim$

خانم بنیادی با تاکسی به اداره نرفته $\Rightarrow$ دیر نکند. ■
بنابراین می‌توان گفت: «اگر خانم بنیادی دیر نکند، او نباید تاکسی گرفته باشد».

۶۳ ۳

می‌دانیم گزاره $p \Rightarrow q$ با گزاره $\sim p \vee q$ هم‌ارزش است، بنابراین:

$a+1$ فرد است. $\Rightarrow$ a زوج باشد. $\sim$
 $\equiv \sim ((a+1) \text{ فرد است.}) \vee (a \text{ زوج است.}) \sim$
■ $a+1$ فرد است. $\sim$ (a زوج است.)
 $\equiv (a+1) \text{ فرد نیست.} \wedge (a \text{ زوج است.})$
 $\Rightarrow$ « a زوج است و $a+1$ فرد نیست.»

۶۴ ۱

گزاره $p \Rightarrow q$ با گزاره $\sim p \vee q$ هم‌ارزش است، بنابراین:
بدن سالمی خواهید داشت. $\Rightarrow$ ورزش کنید.
(بدن سالمی خواهید داشت) $\vee$ (ورزش کنید) $\equiv \sim$
بدن سالمی خواهید داشت $\vee$ ورزش نمی‌کنید. ■
بنابراین می‌توان گفت: «ورزش نمی‌کنید یا بدن سالمی خواهید داشت».

۶۵ ۳

تک‌تک گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

۱ $(p \wedge q) \Leftrightarrow (\sim p \wedge r) \equiv (d \wedge n) \Leftrightarrow (\sim d \wedge r)$
 $\equiv d \Leftrightarrow n \equiv (n \wedge r) \Leftrightarrow n$
۲ $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\sim q \Rightarrow \sim p) \equiv (d \Rightarrow n) \Leftrightarrow (\sim n \Rightarrow \sim d)$
 $\equiv d \Leftrightarrow n \equiv (n \Rightarrow d) \Leftrightarrow n$
۳ $(\sim q \Rightarrow \sim p) \wedge r \equiv (\sim n \Rightarrow \sim d) \wedge r \equiv (d \Rightarrow n) \wedge r$
 $\equiv n \wedge r \equiv n$

پاسخ تست، گزینه ۳ است. اما به عنوان تمرین گزینه ۴ را نیز بررسی می‌کنیم:

۴ $(r \Rightarrow p) \wedge p \equiv (r \Rightarrow d) \wedge d \equiv d \wedge d \equiv d$

۶۶ ۳

چون $p \Rightarrow [q \Rightarrow r]$ نادرست است، پس p درست و $q \Rightarrow r$ نادرست می‌باشد و این یعنی q درست و r نادرست است، حال چون می‌خواهیم گزاره‌ای را پیدا کنیم که ارزش نقیضش درست باشد، پس باید گزینه‌ای را انتخاب کنیم که ارزش گزاره‌اش نادرست باشد، بنابراین تک‌تک گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

انتقای مقدم

۱ $(p \Rightarrow r) \Rightarrow s \equiv (d \Rightarrow n) \Rightarrow s \equiv n \Rightarrow s$

۲ $[(\sim p \vee s) \wedge r] \Rightarrow q \equiv [(\sim d \vee s) \wedge n] \Rightarrow d$

انتقای معکوس

د $d \Rightarrow n$

۳ $[(q \wedge \sim r) \vee s] \Rightarrow r \equiv [(d \wedge \sim n) \vee s] \Rightarrow n$

$n \Rightarrow d \Rightarrow n \equiv d \Rightarrow n \equiv (d \vee s) \Rightarrow n \equiv [(d \wedge d) \vee s] \Rightarrow n$

بنابراین گزینه ۳ درست است. اما به عنوان تمرین، گزینه ۴ را بررسی می‌کنیم:

۴ $[(q \Rightarrow \sim s) \Leftrightarrow r] \Rightarrow p \equiv [(d \Rightarrow \sim s) \Leftrightarrow n]$

تالی درست

د $\Rightarrow$

۶۷ ۱

می‌دانیم گزاره $q \Leftrightarrow r$ وقتی نادرست است که q و r ارزش‌های یکسان نداشته باشند. بنابراین مسئله را در دو حالت بررسی می‌کنیم. در حالت اول فرض می‌کنیم ارزش p درست و ارزش r نادرست باشد، بنابراین:

$[p \Rightarrow (q \vee r)] \Rightarrow [(p \wedge r) \Rightarrow \sim q] \equiv [p \Rightarrow (d \vee n)]$
 $\Rightarrow [(p \wedge n) \Rightarrow \sim d] = [p \Rightarrow d] \Rightarrow [n \Rightarrow n] = [d] \Rightarrow [d] = d$

در حالت دوم فرض می‌کنیم ارزش q نادرست و ارزش r درست است، پس داریم:

$[p \Rightarrow (q \vee r)] \Rightarrow [(p \wedge r) \Rightarrow \sim q] \equiv [p \Rightarrow (n \vee d)]$
 $\Rightarrow [(p \wedge d) \Rightarrow \sim n] \equiv [p \Rightarrow d] \Rightarrow [p \Rightarrow d] = [d] \Rightarrow [d] = d$

بنابراین ارزش گزاره $[p \Rightarrow (q \vee r)] \Rightarrow [(p \wedge r) \Rightarrow \sim q]$ همواره درست است.

۶۸ ۱

می‌دانیم $p \Leftrightarrow q$ زمانی درست است که گزاره‌های p و q هم‌ارزش باشند. در حالتی که هر دو درست باشند، هم‌ارز $p \wedge q$ و در حالتی که هر دو نادرست باشند، هم‌ارز $(p \vee q) \sim$ می‌شود. پس $p \Leftrightarrow q$ هم‌ارز منطقی $(p \wedge q) \vee \sim (p \vee q)$ است.

۶۹ ۲

گزاره $(p \Leftrightarrow q) \wedge p \Rightarrow \sim p$ زمانی نادرست است که $(p \Leftrightarrow q)$ زمانی درست و $\sim p$ نادرست باشد. بنابراین چون $\sim p$ نادرست است، پس حتماً p درست بوده و چون p درست است پس q نیز باید درست باشد تا $p \Leftrightarrow q$ درست و در نتیجه $(p \Leftrightarrow q) \wedge p$ دارای ارزش درست باشد.

۷۳ ۴

می‌دانیم گزاره $p \Rightarrow r \vee p$ همواره درست است. بنابراین p و r نیز گزاره‌هایی دلخواه هستند. حال تک‌تک گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

$$1 \quad (p \wedge q) \vee (q \Leftrightarrow r) \equiv (d \wedge n) \vee (n \Leftrightarrow d) \equiv n \vee n \equiv n$$

$$2 \quad (p \wedge q) \vee (q \Leftrightarrow r) \equiv (n \wedge d) \vee (d \Leftrightarrow n) \equiv n \vee n \equiv n$$

$$3 \quad (p \wedge q) \vee (q \Leftrightarrow r) \equiv (n \wedge n) \vee (n \Leftrightarrow d) \equiv n \vee n \equiv n$$

$$4 \quad (p \wedge q) \vee (q \Leftrightarrow r) \equiv (d \wedge d) \vee (d \Leftrightarrow n) \equiv d \vee n \equiv d$$

۷۴ ۳

می‌دانیم گزاره شرطی $p \Rightarrow r$ وقتی نادرست است که p درست و r نادرست باشد. بنابراین داریم:

$$\sim q \Rightarrow [(r \Leftrightarrow q) \Rightarrow (p \Rightarrow (q \vee r))]$$

$$\equiv \sim q \Rightarrow [(n \Leftrightarrow q) \Rightarrow (d \Rightarrow (q \vee n))]$$

حال مسئله را در دو حالت بررسی می‌کنیم. در حالت اول فرض می‌کنیم q گزاره‌ای درست باشد:

$$\sim d \Rightarrow [(n \Leftrightarrow d) \Rightarrow (d \Rightarrow (d \vee n))]$$

$$\equiv n \Rightarrow [(n \Rightarrow (d \Rightarrow d)) \Rightarrow n] \equiv n \Rightarrow [d \Rightarrow n] \equiv n$$

در حالت دوم فرض می‌کنیم ارزش گزاره q نادرست است، پس:

$$\sim n \Rightarrow [(n \Leftrightarrow n) \Rightarrow (d \Rightarrow (n \vee n))]$$

$$\equiv n \Rightarrow n \equiv d \Rightarrow d \equiv n \Rightarrow d \equiv d \Rightarrow [(d \Rightarrow d) \Rightarrow n] \equiv d \Rightarrow n$$

بنابراین ارزش گزاره $\sim q \Rightarrow [(r \Leftrightarrow q) \Rightarrow (p \Rightarrow (q \vee r))]$ با ارزش q یکسان است، پس در یک حالت درست و در یک حالت نادرست است.

۷۵ ۲

می‌دانیم گزاره $p \Leftrightarrow q$ هم‌ارز با گزاره $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$ است. بنابراین:

$$(p \Leftrightarrow q) \vee (\sim p) \equiv [(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)] \vee (\sim p)$$

$$\equiv [(\sim p \vee q) \wedge (\sim q \vee p)] \vee (\sim p)$$

حال با کمک قانون توزیع‌پذیری داریم:

$$[(\sim p \vee q) \wedge (\sim q \vee p)] \vee (\sim p)$$

$$\equiv [(\sim p \vee q) \vee (\sim p)] \wedge [(\sim q \vee p) \vee (\sim p)]$$

$$\equiv (\sim p \vee q) \wedge [(\sim q \vee (p \vee \sim p))] \equiv (\sim p \vee q) \wedge [(\sim q \vee d)]$$

$$\equiv (\sim p \vee q)$$

می‌دانیم سه گزاره $p \Rightarrow q$ ، $\sim p \vee q$ و $\sim q \Rightarrow \sim p$ با یکدیگر هم‌ارز اند، بنابراین با توجه به گزینه‌ها $\sim q \Rightarrow \sim p \equiv \sim p \vee q$ است.

۷۶ ۴

می‌دانیم ارزش دو گزاره $p \wedge q \Rightarrow q$ و $p \Rightarrow p \vee q$ همواره درست است، بنابراین داریم:

$$(p \wedge r \Rightarrow r) \Leftrightarrow (r \Rightarrow q \vee r) \equiv d \Leftrightarrow d \equiv d$$

پس گزاره $(p \wedge r \Rightarrow r) \Leftrightarrow (r \Rightarrow q \vee r)$ همواره درست است.

۷۰ ۱

تک‌تک گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم. در گزینه ۱ چون ارزش p و q هر دو درست است، پس ارزش $\sim q \Leftrightarrow p$ درست بوده و می‌دانیم ترکیب فصلی یک گزاره درست با هر گزاره‌ای (در این جا r) حتماً درست است. بنابراین نیازی به بررسی گزینه‌های دیگر نیست. شما نادرستی سه گزینه دیگر را بررسی کنید.

۷۱ ۲

می‌دانیم $\sim p \vee q$ هم‌ارز $p \Rightarrow q$ است. حال تمامی حالات p و q را بررسی می‌کنیم:

p	q	$p \Rightarrow q$	$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow q$
d	d	d	d
d	n	n	d
n	d	d	d
n	n	d	n

با توجه به گزینه‌ها همان‌طور که ملاحظه می‌کنید ارزش گزاره با ارزش گزاره $\sim p \vee q$ یکسان است.

دوم

می‌دانیم $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow q$ با گزاره زیر هم‌ارز است:

$$((p \Rightarrow q) \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow (p \Rightarrow q))$$

$$(\sim(\sim p \vee q) \vee q) \wedge (\sim q \vee (\sim p \vee q))$$

پس:

$$\equiv ((p \wedge \sim q) \vee q) \wedge ((\sim q \vee q) \vee \sim p)$$

$$\equiv ((q \vee p) \wedge d) \equiv q \vee p$$

۷۲ ۱

چون استفاده از ویژگی‌ها گزاره را بزرگ‌تر می‌کند، تمام حالات ارزشی دو گزاره p و q را بررسی می‌کنیم:

p	q	$p \Leftrightarrow q$	$\sim(p \Leftrightarrow q)$
d	d	d	n
d	n	n	d
n	d	n	d
n	n	d	n

$\sim(p \Leftrightarrow q) \wedge p$	$\sim q$	$(\sim(p \Leftrightarrow q) \wedge p) \Rightarrow \sim q$
n	n	d
d	d	d
n	n	d
n	d	d

همان‌طور که می‌بینید ارزش گزاره همواره درست است.

۲ ۷۷

ابتدا گزاره را ساده می‌کنیم:

$$\sim [(p \wedge q) \vee \sim (p \vee q)] \equiv \sim (p \wedge q) \wedge (p \vee q) \\ \equiv (\sim p \vee \sim q) \wedge (p \vee q)$$

 می‌دانیم دو گزاره $p \Rightarrow q$ و $p \vee q$ با یکدیگر هم‌ارز هستند، بنابراین داریم:

$$(\sim p \vee \sim q) \wedge (p \vee q) \equiv (p \Rightarrow \sim q) \wedge (\sim q \Rightarrow p)$$

 حال با توجه به هم‌ارز بودن دو گزاره $p \Leftrightarrow q$ و $p \Rightarrow q$ و $q \Rightarrow p$ داریم:

$$(p \Rightarrow \sim q) \wedge (\sim q \Rightarrow p) \equiv p \Leftrightarrow \sim q$$

۳ ۷۸

 گزاره $p \Leftrightarrow \sim q$ زمانی درست است که $\sim p$ و $\sim q$ ارزش‌های یکسان داشته باشند، یعنی هر دو درست یا هر دو نادرست باشند. بنابراین ارزش این گزاره در ۲ حالت درست است.

۴ ۷۹

 معنی $\exists x$ عبارت « x ای وجود دارد» است، پس معنی کل گزاره $\exists x \in P; x = 2k + 1$ به صورت «عدد اولی وجود دارد که فرد باشد» می‌باشد.

۲ ۸۰

 می‌دانیم نقیض گزاره $\forall x; p(x)$ به صورت $\exists x; \sim p(x)$ است، بنابراین نقیض گزاره «همه کسانی که از موسیقی لذت می‌برند، از تماشای فیلم هم لذت می‌برند» به صورت «برخی از افرادی که از موسیقی کلاسیک لذت می‌برند، از تماشای فیلم لذت نمی‌برند» است. به صورت «برخی از افرادی که از موسیقی کلاسیک لذت می‌برند، از تماشای فیلم لذت نمی‌برند» بیان می‌شود.

۳ ۸۱

 نقیض گزاره $\forall x; p(x)$ به صورت $\exists x; \sim p(x)$ است. بنابراین داریم:

$$\sim (\forall x \in (-\infty, 0); x - \frac{1}{x} \leq -2) \equiv \exists x \in (-\infty, 0); x - \frac{1}{x} > -2$$

۴ ۸۲

 نقیض گزاره $\forall x; p(x)$ به صورت $\exists x; \sim p(x)$ و نقیض گزاره $\exists x; p(x)$ به صورت $\forall x; \sim p(x)$ می‌باشد. حال تک‌تک گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم تا گزینه نادرست مشخص شود:

$$1 \sim [\exists x \in \mathbb{R}; x < 0 \wedge x^2 \leq 1] \equiv \forall x \in \mathbb{R}; \sim (x < 0 \wedge x^2 \leq 1)$$

$$\equiv \forall x \in \mathbb{R}; x \geq 0 \vee x^2 > 1$$

$$2 \sim [\forall x \in \mathbb{N}; (2^{2^x} + 1) \in P] \equiv \exists x \in \mathbb{N}; 2^{2^x} + 1 \notin P$$

$$3 \sim [\forall x \in \mathbb{R}; \frac{x^2 - 1}{x - 1} = x + 1] \equiv \exists x \in \mathbb{R}; \frac{x^2 - 1}{x - 1} \neq x + 1$$

$$4 \sim [\exists x \in \mathbb{R}; \frac{x - 3}{5} = 0] \equiv \forall x \in \mathbb{R}; \frac{x - 3}{5} \neq 0$$

 نقیض گزاره $\exists x \in \mathbb{R}; \frac{x - 3}{5} \neq 0$ به صورت $\forall x \in \mathbb{R}; \frac{x - 3}{5} = 0$ است که در گزینه ۴ به درستی در مقابل آن نوشته نشده است.

۴ ۸۳

 نقیض گزاره $\forall x; p(x)$ برابر $\exists x; \sim p(x)$ است. در این گزاره $P(x)$ برابر

$$(x^2 - 4 = 0) \Rightarrow (x^2 - 8 = 0)$$

 شرطی $(x^2 - 4 = 0) \Rightarrow (x^2 - 8 = 0)$ را به دست آوریم، می‌دانیم نقیض

 ترکیب شرطی $p \Rightarrow q$ به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\sim (p \Rightarrow q) \equiv \sim (\sim p \vee q) \equiv p \wedge \sim q$$

حال نقیض گزاره داده شده در صورت سؤال را به دست می‌آوریم:

$$\sim [\forall x \in \mathbb{R}; (x^2 - 4 = 0) \Rightarrow (x^2 - 8 = 0)]$$

$$\equiv \exists x \in \mathbb{R}; (x^2 - 4 = 0) \wedge (x^2 - 8 \neq 0)$$

۱ ۸۴

 در گزینه ۲ اگر $x \neq 0$ باشد، معادله به صورت $x^2 - 1 = x^2$ و در نتیجه $x^2 - x + 1 = 0$ می‌شود. چون دلتای معادله منفی است پس هیچ جواب حقیقی ندارد. در گزینه ۳ همواره $|x + \frac{1}{x}| \geq 2$ می‌باشد، پس

 هیچ x حقیقی در این نامعادله صدق نمی‌کند. در گزینه ۴ هم $x = 2$ در تساوی صدق نمی‌کند.

۳ ۸۵

 گزینه ۱ درست است. زیرا برای هر عضو از دامنه متغیر (O) ، گزاره‌ها به گزاره‌ای با ارزش درست تبدیل می‌شود. گزینه ۲ نیز درست است، زیرا حداقل یک عضو $x = 1$ وجود دارد که به ازای آن، گزاره‌ها به گزاره‌ای با ارزش درست تبدیل شود. اما گزینه ۳ نادرست است، زیرا $x = 2$ این گزاره‌ها را به گزاره‌ای با ارزش نادرست تبدیل می‌کند. بنابراین گزینه ۴ پاسخ است اما به عنوان تمرین گزینه ۴ را نیز بررسی می‌کنیم. در گزینه ۴ به ازای $x = 1$ گزاره‌ها به گزاره‌ای با ارزش درست تبدیل می‌شود.

۳ ۸۶

 نقیض گزاره $\forall x; p(x)$ به صورت $\exists x; \sim p(x)$ است. در این گزاره $P(x)$ برابر ترکیب شرطی $(a < b \Rightarrow (a^2 \leq b^2 \vee a^2 > b^2))$ می‌باشد. بنابراین

 باید نقیض $P(x)$ را مشخص کنیم. می‌دانیم نقیض ترکیب شرطی $p \Rightarrow q$ برابر $p \wedge \sim q$ است. بنابراین داریم:

$$\sim [(\forall a, b \in \mathbb{Z}; a < b \Rightarrow (a^2 \leq b^2 \vee a^2 > b^2))]$$

$$\equiv \exists a, b \in \mathbb{Z}; (a < b) \wedge \sim (a^2 \leq b^2 \vee a^2 > b^2)$$

$$\equiv \exists a, b \in \mathbb{Z}; (a < b) \wedge (a^2 > b^2 \wedge a^2 \leq b^2)$$

۳ ۸۷

عبارت الف نادرست است، زیرا مجموعه جواب گزاره‌ها تهی است. عبارت

 ب درست است، چون به ازای هر عضو از دامنه A ، گزاره‌ها به گزاره‌ای

درست تبدیل می‌شود. عبارت ج نیز درست است، چون حداقل یک عضو

 $x = 1$ وجود دارد که به ازای آن گزاره‌ها به گزاره‌ای با ارزش درست تبدیل

 می‌شود. اما عبارت د نادرست است، زیرا $x = 1$ ، گزاره‌ها را به گزاره‌ای

نادرست تبدیل می‌کند. بنابراین ارزش گزاره‌های ب و د درست است.