

مقدمه ناشر

◀ برداشت یک

ای ریاضی! ای آمار! ای میانگین! ای درد مشترک ما بچه‌های انسانی! کی بی‌خیال ما می‌شی؟ اومدیم انسانی که تو نباشی. باز می‌گن توی کنکور سرنوشتتون رو، درصد تو (یعنی ریاضی) رقم می‌زنه. چرا گیر می‌دی؟ خُب ما اگر ریاضی خون بودیم می‌رفتیم رشته ریاضی یا تجربی. ما اهل دلیم! شعر، ادب، فلسفه، تاریخ و جغرافی ... اگر راست می‌گی «پیا و مسئله‌ها را ز راه دل حل کن» ...

◀ برداشت دو

ما (یعنی خیلی سبز) این‌جا نمی‌خوایم کلیشه‌بازی در بیاریم و اندر فواید علم ریاضی و تأثیر آن در زندگی بشر و مضرات نخواندن ریاضی خطابه بگیم. ما می‌گیم ریاضی سخته؟ قبول! با ریاضی حال نمی‌کنی؟ اینم قبول! ولی حالا که باید بخونیش چرا نخونیش؟! چرا اینقد فاز منفی؟ با یک کتاب خوب، یه نگاه مثبت و یه کم وقت گذاشتن احتمالن می‌شه با ریاضی هم کنار اومد. کتاب خوبش با ما، نگاه مثبت و وقت گذاشتنش با شما.

◀ برداشت سه

علی شهبازی از باحال‌ترین و اهل دل‌ترین مؤلفان ریاضی خیلی سبزه و بچه‌های رشته انسانی رو خوب خوب درک می‌کنه. مطمئنیم با درس‌نامه‌ها و پاسخ‌های این کتاب می‌شه ریاضی رو فهمید و یاد گرفت و حتی حال کرد! علی جان دمت گرم و بابت انتشار این کتاب خوب بهت تبریک می‌گم. هم‌چنین از محمد مازنی عزیز و خانم الهه آرانی که یار و یاور ما در شکل‌گیری این کتاب بودند خیلی ممنونم. اگر بخوام از همه عوامل و دست‌اندرکاران تولید این کتاب تشکر کنم، حالا حالاها باید بنویسم. خلاصه می‌گم دست همه درد نکنه، به ویژه بر و بچه‌های همیشه سرافراز تولید و ویراستارای علمی دقیق و موشکافمون.

سربلند باشید و برقرار

مقدمه مؤلف

سلام به همه دانش آموزان و دبیران

می گن اگه خودتون رو با تغییرات وفق ندید، یه جایی متوجه می شید که از همه چیز عقب افتادین! کنکور در سال های اخیر چند بار همه مون رو سورپرایز کرد. یک بار سخت شد، دوباره برگشت به روال سابق، دوباره سخت شد و باز هم برگشت به روال سابق و ما تصمیم گرفتیم کتابی بنویسیم که شما را برای هر شرایطی آماده کند. این کتاب با تمام کتاب های ریاضی انسانی دنیا فرق دارد! هدفش این بود که کل طیف دانش آموزان انسانی را پوشش دهد.

◀ ساختار کتاب:

۱ این کتاب ۹+۱ فصل دارد. فصل صفر، یادآوری مطالب مهم از عبارات جبری است که در کل کتاب با آن ها سروکار داریم. اتحادها، تجزیه و عبارات گویا را در این فصل آورده ایم. در آخرش هم حدوداً ۶۰ تمرین آورده ایم که حتماً حلشان کنید؛ همان اول کار و قبل از این که درگیر فصل های دیگر کتاب بشین.

۲ برای پیوسته بودن مطالب، کتاب را موضوعی نوشته ایم. سه جا، ترتیب کتاب درسی را خودمان عوض کرده ایم.

• تابع دهم و یازدهم را در یک فصل آورده ایم ولی مشخص کرده ایم که کدام درس ها برای دهم است و کدام درس ها برای یازدهم.

• چرخه آمار که درس سوم از فصل اول کتاب دوازدهم است را در ادامه مطالب فصل سوم کتاب دهم آورده ایم (که با هم می شن فصل سوم این کتاب)، چون ادامه همان مطالب است و اغلب دبیران هم این مطالب را با هم درس می دهند.

• هر سه درس مربوط به دنباله ها را در یک فصل با نام «دنباله ها» آورده ایم. این مطالب در فصل های دوم و سوم (درس ۱) کتاب دوازدهم آمده اند که به خاطر ارتباطشان با هم، در یک فصل آمده اند.

۳ هر فصل از چند درس تشکیل شده است. در هر درس، ابتدا درس نامه و بعد تست هایش آمده است. در آخر فصل، یک آزمون جمع بندی برای آن فصل آورده ایم که در انتخاب تست هایش خیلی سعی کردیم مطالب مهم فصل پوشش داده شوند. در انتهای کتاب هم پاسخ تشریحی تست ها را آورده ایم.

◀ درس نامه، تست، آزمون فصل و پاسخ نامه:

۱. درس نامه:

• پیشنهاد می کنم حتماً قبل از این که سراغ تست ها بروید، درس نامه را یک بار بخوانید و تمام مثال های آموزشی و تست های آن را حل کنید.

• هر موضوعی را به طور کامل توضیح دادیم و هر جا که می شد، روش حل را «مرحله به مرحله» و اغلب در قالب یک مثال بیان کرده ایم.

• بعد از هر توضیحی در درس نامه، معمولاً یک مثال آموزشی آورده ایم که پیچیدگی خاصی ندارد و هدفش کمک به یادگیری بیشتر شما است. بعد از مثال آموزشی، یک (یا چند) تست آورده ایم که هدفش آشنایی شما با مدل سؤالات تستی آن قسمت است. معمولاً سؤالات تستی، از مثال آموزشی جدی تر هستند.

• از آن جایی که هدفمان این بوده که با خواندن درس نامه بتوانید از پس تست های کنکورهای اخیر برآیید، بعضی تست های کنکورهای اخیر را در درس نامه، شبیه سازی کردیم که با آدرس «مثل کنکور» آن ها را می بینید.

• بعضی جاها که لازم بوده، در آخر کار، کل داستان را برایتان «جمع بندی» کرده ایم.

• بعضی جاها مطالبی را برای دانش آموزان علاقه مند تحت عنوان «برای حرفه ای ها» آورده ایم. اگر وقت می کنید حتماً این قسمت ها را بخوانید. در تست های بخش «آموزش و تمرین» از این تیترها سؤال نیاورده ایم.

۲. تست ها:

• برای اولین بار، تست های هر درس را به ۳ بخش تقسیم کردیم:

۱) تست های آموزش و تمرین: هدفش مطالب کلی است که هر دانش آموزی باید آن ها را بلد باشد. در واقع پله اول تست زنی شما باید همین بخش باشد و تا به تست های آن مسلط نشدید، سراغ بخش های دیگر نروید. تست های این بخش مثل درس نامه و با همان ترتیب «تیترا» دارند تا دبیران راحت تر بتوانند به دانش آموزان تمرین بدهند.

۲) تست های تثبیت و تسلط: اگر تست های آموزش و تمرین را حل کردید و نیاز به حل سؤالات جدی تر داشتید، سراغ تست های این بخش بروید. به نظر ما، تست های این بخش، مخصوص دانش آموزانی است که دنبال درصدهای بالاتر در آزمون های آزمایشی و کنکور هستند. در واقع حل تست های این بخش، شما را برای آزمون ها آماده می کند.

۳) **تست‌های فراتر از انتظار:** همان‌طور که در کنار این تست‌ها، داخل کادر گفته‌ایم، تست‌های این بخش را حتماً با مشورت معلم یا مشاور خود حل کنید. این بخش مخصوص دانش‌آموزان سخت‌کوش و علاقه‌مند به ریاضی است. توصیه‌ی جدی ما این است که روی تست‌های دو بخش قبلی تمرکز کنید. ضمناً برای آن که تعداد صفحات کتاب زیاد نشود، پاسخ تست‌های این بخش را در قالب یک فایل در اختیارتان گذاشته‌ایم که با اسکن QR کد مربوط به آن، آن‌ها را مشاهده می‌کنید. پس جمع‌بندی این شد:

آموزش و تمرین (برای همه) ← تثبیت و تسلط (اگر می‌خواهی تو آزمون‌ها بهتر نتیجه بگیری) ← فراتر از انتظار (اگر سرت برای ریاضی درد می‌کند!) روی چیدمان تست‌ها واقعن وقت گذاشتیم. برای چینش تست‌ها شاید ۱۰۰ ساعت جلسه گذاشتیم که احتمالان باورتان نمی‌شود! تست‌های این کتاب، مجموعه‌ای است از:

۱) تست‌های کنکورهای سراسری داخل و خارج از کشور از سال ۹۰ به بعد

۲) شبیه‌ساز سؤالات کنکور با آدرس «مثل کنکور»

۳) تست‌های برگرفته از تمرینات مهم کتاب درسی با آدرس «کتاب درسی»

۴) تست‌های منتخب آزمون‌های آزمایشی خیلی‌سبز

۵) تعداد زیادی تست تألیفی که در بین آن‌ها تست‌های ایده‌دار و ترکیبی زیادی می‌بینید.

در کنار تست‌ها ممکن است آیکون‌های زیر را ببینید:

📌 سؤالاتی که نسبت به سایر سؤالات، به زمان بیشتری نیاز دارند. (اصطلاحاً سؤالات **وقت‌گیر**)

MIX سؤالاتی که ترکیب دو یا چند موضوع هستند. در کنکورهای جدید، تعدادی از این سؤالات را می‌بینیم. (اصطلاحاً سؤالات **ترکیبی**)

🚫 سؤالاتی که حلشان را به هیچ وجه توصیه نمی‌کنیم! (سؤالات **ورود ممنوع**)

۳. پاسخ‌ها

در تمام پاسخ‌ها، فارسی‌نویسی به طور کامل انجام شده است تا بفهمید چی کار کردیم.

یک سری آیکون‌ها در پاسخ‌ها می‌بینید که در زیر توضیح داده‌ایم:

نکته: فرمول یا یک رابطه مهم یا گزاره‌ای که لازم است آن را بلد باشید.

تذکر: هر جا لازم بوده چیزی را گوشزد کنیم.

یادآوری: روابطی که قبلاً دیدید ولی شاید یادتان رفته باشند.

استراتژی: مسیر حل مسئله را بیان می‌کند. در واقع از نقطه شروع تا پایان حل را بیان می‌کند.

مشاوره: بعضی وقت‌ها لازم است یک چیزهایی را به عنوان نصیحت به شما بگوییم. 😊

از قیافش نترس: در یک سری سؤالات که ظاهر ترسناکی دارند، با یک حرکت، سؤالمان به سؤالی ساده‌تر تبدیل می‌شود.

منظورش اینه: بعضی جملات بیان ساده‌تری هم دارند که ممکن است با دانستن آن‌ها، خودتان از پس حل سؤال بریاین.

روش ۱ و روش ۲: برای سؤالاتی که دو روش حل دارند، استفاده کردیم.

پارت ۱ و پارت ۲: بعضی سؤالات چند سؤال در دل یک سؤال هستند. حل این تیپ سؤالات را به ۲ پارت تقسیم کرده‌ایم.

تیزبازی: روش حل سریع و خلاقانه‌ای است که در کنار روش اصلی استفاده شده.

تله: بعضی اشتباهات خیلی رایج هستند. در یک سری از سؤالات، جوابی که از این راه حل‌های اشتباه به دست میان را در گزینه‌ها به عنوان تله گذاشتیم.

۴. آزمون‌های فصلی

در آخر هر فصل، یک آزمون ۱۰ یا ۱۵ یا ۲۰ سؤالی از آن فصل آورده‌ایم که تیپ تست‌های مهم فصل را پوشش بدهد. فقط در فصل تابع که اهمیت بیشتری دارد، ۲ آزمون آورده‌ایم. در دوران جمع‌بندی، حل این آزمون‌ها مفید است. ضمناً پاسخ سؤالات آزمون‌ها نیز در قالب QR کد آمده‌اند.

📌 **تیمی که پشت کتاب بوده:** تشکر از دوستانی که در طول مدت تألیف و تولید این کتاب کنارمان بودند:

👨‍⚖️ دکتر کمیل نصری و مهندس سبزمیدانی عزیز؛ مرسی که انقدر همراهین. 👨‍⚖️ مهندس بقایی که زیاد اذیتش کردیم ولی می‌دونم از ما ناراحت نیستن!

👨‍⚖️ تشکر ویژه از مسعود شفیعی که کل درس‌نامه‌ها را یک بار خواند و با کامنت‌دادن‌هاش، کلی کتاب را بهتر کرد. چینش تست‌ها را با دقت بررسی کرد

و در جلسات کلی در موردش بحث کردیم (برای من، تجربه بسیار خوبی بود). ضمناً ایده‌های جدیدی هم که به ذهنش می‌رسید را می‌داد. مسعود جان

خیلی دمت گرم؛ اگر این کتاب خوب شده، به خاطر کمک‌های شما بوده. 👨‍⚖️ کیوان صارمی و کوثر صادقی که اوایل کار خیلی وقتشونو گرفتیم. ایشالا

جبران کنم. 👨‍⚖️ محمد مازنی که لحظه‌به‌لحظه از وضعیت کارهای کتاب خبر داشت و به من استرس می‌داد! 👨‍⚖️ خانم الهه آرانی که به شکل باورنکردنی

پیگیر کارهای کتاب بودند؛ هر لحظه و هر جا! سپاس فراوان از شما. 👨‍⚖️ آقای فرامرز سلطان کریمی که زحمت کلیدزنی کتاب را داشتند و با دقت و حوصله

بسیار این کار را انجام دادند؛ خیلی ممنونم از شما. 👨‍⚖️ خانم‌ها راهبریان، جالینوس، نظری، صابری و آقایان راش، راسخ و قنبری که زحمت ویراستاری

این کتاب را کشیدند. 👨‍⚖️ آقای سمایی، خانم معصومی و سایر دوستانمان در واحد تولید که خیلی اذیتشون کردم؛ دوستتون دارم. 👨‍⚖️ از دوستانم در

خیلی سبز که همراهم بودند: ایمان سلیمان‌زاده، امین امینی، محمدرضا محمدی، مرضیه قاسمی و باز هم محمد مازنی. 👨‍⚖️ تشکر از سعید احمدپور که

نقش مهمی در مدل نوشته‌شدن این کتاب داشت. 👨‍⚖️ در آخر تشکر از یک دوست بسیار خوب و هم‌چنین مادر عزیزم.

📌 **حرف آخر:** به نظرم هر آن‌چه از ریاضی انسانی برای کنکورتان نیاز داشتید را در این کتاب آورده‌ایم ولی اگر جایی نقصی می‌بینید آن را از

طریق سایت خیلی‌سبز یا آیدی @alishmath با ما در میان بگذارید. ممنون از شما.

شهرابی - ۱۸ تیر ۱۴۰۳

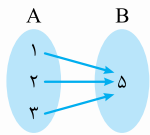
فهرست

درس نامه	تست
فصل پنجم: آمار	
فصل ۳ یازدهم	
درس ۱: شاخص های آماری	۲۳۳ ۲۳۹
درس ۲: سری های زمانی	۲۴۵ ۲۵۱
فصل ششم: آشنایی با منطق و استدلال ریاضی	
فصل ۱ یازدهم	
درس ۱: گزاره ها و ترکیب گزاره ها	۲۵۸ ۲۷۲
درس ۲: استدلال ریاضی	۲۷۹ ۲۸۵
فصل هفتم: شمارش و احتمال	
فصل ۱ دوازدهم (درس ۱ و ۲)	
درس ۱: شمارش	۲۹۲ ۳۰۷
درس ۲: احتمال	۳۱۸ ۳۳۵
فصل هشتم: دنباله ها	
فصل ۲ دوازدهم و فصل ۳ (درس ۱) دوازدهم	
درس ۱: مدل سازی و دنباله ها	۳۵۰ ۳۵۸
درس ۲: دنباله حسابی	۳۶۴ ۳۷۴
درس ۳: دنباله هندسی	۳۸۲ ۳۹۳
فصل نهم: توان های گویا و تابع نمایی	
فصل ۳ دوازدهم (درس ۲ و ۳)	
درس ۱: ریشه n ام و توان گویا	۴۰۴ ۴۱۳
درس ۲: تابع نمایی	۴۲۱ ۴۲۸
پاسخ نامه تشریحی	۴۳۵
پاسخ نامه کلیدی	۴۸۰

درس نامه	تست
فصل صفر: یادآوری	۷
فصل اول: معادله درجه دوم	
فصل ۱ دهم	
درس ۱: معادله درجه اول و مسائل توصیفی	۱۶ ۲۲
درس ۲: معادله درجه دو و کاربردها	۲۴ ۴۲
درس ۳: معادله های شامل عبارت های گویا	۵۱ ۶۰
فصل دوم: تابع	
فصل ۲ دهم - فصل ۲ یازدهم	
درس ۱: مفهوم تابع	۶۷ ۷۱
درس ۲: ضابطه جبری تابع	۷۳ ۷۸
درس ۳: تابع خطی	۸۲ ۹۰
درس ۴: تابع درجه ۲	۹۵ ۱۱۰
درس ۵: توابع ثابت، چندضابطه ای و همانی	۱۲۰ ۱۲۵
درس ۶: توابع پلکانی، علامت، جزء صحیح و قدر مطلق	۱۳۱ ۱۴۵
درس ۷: اعمال بر روی توابع	۱۵۵ ۱۵۹
فصل سوم: کار با داده های آماری / چرخه آمار در حل مسائل	
فصل ۳ دهم - فصل ۱ (درس ۳) دوازدهم	
درس ۱: گردآوری داده ها - انواع متغیرها	۱۶۸ ۱۷۳
درس ۲: معیارهای گرایش به مرکز	۱۷۵ ۱۸۲
درس ۳: معیارهای پراکندگی	۱۸۷ ۱۹۶
درس ۴: چرخه آمار در حل مسائل	۲۰۲ ۲۰۵
فصل چهارم: نمایش داده ها	
فصل ۴ دهم	
درس ۱: نمودارهای یک متغیره	۲۱۱ ۲۱۶
درس ۲: نمودارهای چندمتغیره	۲۲۱ ۲۲۶

درس ۵: توابع ثابت، چندضابطه‌ای و همانی

تابع ثابت



تابع روبه‌رو را ببینید:

این تابع به ازای تمام ورودی‌هایش، فقط یک خروجی (یعنی ۵) می‌دهد.

به توابعی که همیشه یک خروجی یکسان دارند، تابع ثابت می‌گوییم.

در واقع تابع ثابت، تابعی است که برد آن، دقیقاً یک عضو دارد. همین تعریف برای تابع ثابت کافی است.

مثال آموزشی: اگر برد تابع ثابت f برابر با مجموعه $\{5, a+1\}$ و $R_f = \{(3, 2b-1)\}$ زوج مرتب f عضو باشد، مقدار a و b را به دست آورید.

پاسخ: چون تابع f ثابت است، برد آن فقط یک عضو دارد. سؤال گفته برد f ، مجموعه $\{5, a+1\}$ است. برای این که این مجموعه تک‌عضوی باشد، باید $a+1$ و ۵ برابر باشند:

$$a+1=5 \Rightarrow a=4$$

پس تابع f فقط عدد ۵ را به عنوان خروجی به ما می‌دهد. زوج مرتب $(3, 2b-1)$ عضو تابع است؛ یعنی به ازای ورودی ۳، خروجی $2b-1$ است که این خروجی باید برابر با ۵ باشد:

$$2b-1=5 \Rightarrow 2b=6 \Rightarrow b=3$$

چهره تابع ثابت در نمایش‌های مختلف یک تابع

۱) نمایش زوج مرتبی: نمایش زوج مرتبی یک تابع، زمانی نشان‌دهنده یک تابع ثابت است که مؤلفه‌های دوم همه زوج مرتب‌ها با هم برابر باشند.

مثلاً تابع $f = \{(1, 2), (-3, 2), (0, 2), (7, 2)\}$ تابعی ثابت است، زیرا مؤلفه دوم تمام زوج مرتب‌های آن ۲ است.

(مثل کنگور)

تست: اگر تابع $f = \{(a, a^2 + 2a), (-4, 8), (b, b^2 - 6b + 17)\}$ یک تابع ثابت دوعضوی باشد، مقدار $b-a$ کدام است؟

۴ (۴)

۵ (۳)

۱ (۲)

۷ (۱)

پاسخ: چون f ثابت است، باید مؤلفه دوم همه زوج مرتب‌ها یکسان باشد:

$$a^2 + 2a = 8 = b^2 - 6b + 17$$

$$a^2 + 2a = 8 \Rightarrow a^2 + 2a - 8 = 0 \Rightarrow (a+4)(a-2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = -4 \\ a = 2 \end{cases}$$

اول $a^2 + 2a = 8$ را مساوی ۸ می‌گذاریم:

$$b^2 - 6b + 17 = 8 \Rightarrow b^2 - 6b + 9 = 0 \Rightarrow (b-3)^2 = 0 \Rightarrow b = 3$$

بعد $b^2 - 6b + 17 = 8$ و ۸ را:

حالا رسیدیم به جای حساس سؤال! چون سؤال گفته f دوعضوی است، پس از این سه زوج مرتبی که در ظاهر می‌بینیم، یکی به خاطر تکراری بودن باید حذف شود.

به ازای $a = -4$ ، زوج مرتب $(a, a^2 + 2a)$ و $(-4, 8)$ مثل هم‌اند که باعث دوعضوی شدن f می‌شود؛ پس باید $a = -4$ را قبول کنیم. در نتیجه:

$$b-a = 3 - (-4) = 7$$

اما به ازای $a = 2$ و $b = 3$ ، تابع به صورت زیر می‌شود:

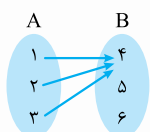
$$f = \{(a, a^2 + 2a), (-4, 8), (b, b^2 - 6b + 17)\} = \{(2, 2^2 + 2(2)), (-4, 8), (3, 3^2 - 6(3) + 17)\} = \{(2, 8), (-4, 8), (3, 8)\}$$

این تابع یک تابع ۳‌عضوی است؛ پس در شرط سؤال صدق نمی‌کند و رد می‌شود.

X	۱	۳	-۲	۵
Y	۴	۴	۴	۴

۲) نمایش جدولی: نمایش جدولی یک تابع، زمانی نشان‌دهنده یک تابع ثابت است که مؤلفه‌های سطر دوم

(مربوط به خروجی‌ها) همه با هم برابر باشند. مثلاً نمایش جدولی مقابل، مربوط به یک تابع ثابت است.



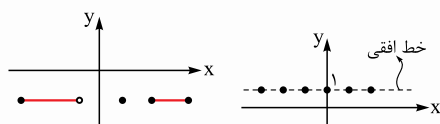
۳) نمایش پیکانی: نمایش پیکانی یک تابع، زمانی نشان‌دهنده یک تابع ثابت است که همه پیکان‌ها به یک عدد وارد شده باشند.

مثلاً نمایش پیکانی روبه‌رو نشان‌دهنده یک تابع ثابت است، زیرا تمام پیکان‌ها به عدد ۴ وارد شده‌اند:

۴) نمایش نموداری: نمایش مختصاتی یک تابع، زمانی نشان‌دهنده یک تابع ثابت است که همه نقاط آن تابع روی یک خط افقی قرار

داشته باشند.

مثلاً دو نمودار مقابل توابعی ثابت هستند، چون تمام نقاط نمودار، روی یک خط افقی قرار دارند:



۵) نمایش ضابطه‌ای: از آن جایی که خروجی تابع ثابت همیشه یک عدد (مثل c) است، پس ضابطه آن به صورت $f(x) = c$ یا $y = c$ است که در آن c

یک عدد است.

مثلاً توابع $f(x) = 2$ ، $f(x) = -1$ و $f(x) = \sqrt{6}$ ، همگی توابع ثابت هستند.

حالا که در سؤالی ضابطه تابع ثابت را نداشتیم، جای تمام $f(\text{cloud})$ ‌ها، عدد c قرار می‌دهیم.



مثال آموزشی: اگر f تابعی ثابت و $12 - \Delta f(3) = f(1) + f(2)$ باشد، مقدار $f(0)$ را به دست آورید.

پاسخ: چون f تابع ثابت است، پس جای $f(1)$ ، $f(2)$ و $f(3)$ ، c را قرار می‌دهیم:

$$\underbrace{f(1)}_c + \underbrace{f(2)}_c = \Delta \underbrace{f(3)}_c - 12 \Rightarrow c + c = \Delta c - 12 \Rightarrow 2c = \Delta c - 12 \Rightarrow -3c = -12 \Rightarrow c = 4$$

پس ضابطه تابع f به صورت $f(x) = 4$ است و $f(0) = 4$ نیز همان ۴ می‌شود: $f(0) = 4$

حالا که یک ضابطه شلوغ پلوغ به ما دادند و گفتند این ضابطه مربوط به یک تابع ثابت است، باید آن را تا حد امکان ساده کنیم، بعد ضریب هر عبارت درجه یک یا دو یا ... را مساوی صفر قرار دهیم تا فقط یک عدد تنها باقی بماند، چون ضابطه تابع ثابت، x یا x^2 یا $\frac{1}{x}$ یا ... ندارد و فقط یک عدد خشک و خالی است! مثلاً اگر $f(x) = (a-2)x^2 + (b+3)x + ab$ یک تابع ثابت باشد، باید ضریب x و x^2 صفر باشند؛ یعنی $3+b$ و $2-a$ را مساوی صفر قرار می‌دهیم که از حلشان به $a=2$ و $b=-3$ می‌رسیم. در آخر فقط ab در ضابطه می‌ماند که با جای‌گذاری مقادیرشان به $-6 = (-3) \times 2$ می‌رسیم؛ یعنی ضابطه f به شکل $f(x) = -6$ می‌شود.

تست: اگر $f(x) = (x+2)^2 + ax^2 + bx + c$ تابعی ثابت با برد $\{a\}$ باشد، مقدار $a+b+c$ کدام است؟

۸- (۴)

۹- (۳)

۱۰- (۲)

۷- (۱)

پاسخ: ضابطه f را به کمک اتحاد مربع باز می‌کنیم:

$$f(x) = x^2 + 4x + 4 + ax^2 + bx + c$$

$$f(x) = x^2 + ax^2 + 4x + bx + 4 + c$$

$$f(x) = x^2(1+a) + x(4+b) + 4+c$$

x^2 و ax^2 را کنار هم، $4x$ و bx را کنار هم و 4 و c را نیز کنار هم می‌نویسیم:

بین دوتای اول از x^2 و بین دوتای بعدی از x فاکتور می‌گیریم:

باید ضریب x و x^2 صفر باشند:

$$x^2 \text{ ضریب } = 0 \Rightarrow 1+a=0 \Rightarrow a=-1 \quad \text{و} \quad x \text{ ضریب } = 0 \Rightarrow 4+b=0 \Rightarrow b=-4$$

با جای‌گذاری آن‌ها، فقط $4+c$ در ضابطه باقی می‌ماند: $f(x) = 4+c$

$$4+c=a \xrightarrow{a=-1} 4+c=-1 \Rightarrow c=-5$$

برد f ، عدد a است؛ پس $4+c$ باید برابر با a باشد:

$$a+b+c = -1+(-4)+(-5) = -10$$

پس:

مشاوره طراح می‌توانست در صورت سؤال، قید نکند f تابع ثابت است. باید خودتان از تک‌عضوی بودن برد، این موضوع را می‌فهمیدید.

تابع چندضابطه‌ای

تا الان تمام توابعی که خواندیم، فقط از یک ضابطه پیروی می‌کردند، مثلاً تابعی که به ازای هر عددی که وارد شود، ۳ برابر آن را بیرون می‌دهد، تک‌ضابطه‌ای و به صورت $f(x) = 3x$ است.

حالا می‌خواهیم با توابعی آشنا شویم که چند ضابطه دارند.

فرض کنید تابع f ، به ازای اعداد مثبتی که واردش می‌شوند، ۲ برابر آن اعداد را بیرون می‌دهد و به ازای اعداد منفی که واردش می‌شوند، مربع آن اعداد را بیرون می‌دهد. یعنی اگر $x > 0$ باشد، خروجی $2x$ و اگر $x < 0$ باشد، خروجی x^2 می‌شود.

$$f(x) = \begin{cases} 2x & x > 0 \\ x^2 & x < 0 \end{cases} \rightarrow \begin{matrix} \text{ضابطه و دامنه اول} \\ \text{ضابطه و دامنه دوم} \end{matrix}$$

این تابع به زبان ریاضی، این‌جوری می‌شود:

که به آن، تابع دوضابطه‌ای می‌گوییم (چون دو تا ضابطه دارد!)

مثال آموزشی: تابع f به ازای هر عدد بزرگ‌تر از یک، قرینه آن عدد و به ازای هر عدد کوچک‌تر یا مساوی -2 ، یک واحد بیشتر از ۳ برابر آن را بیرون می‌دهد. ضابطه f را بنویسید.

پاسخ: دو ضابطه را جدا می‌نویسیم:

$$x > 1, \quad -x \quad \text{ضابطه اول}$$

به ازای اعداد بزرگ‌تر از ۱ ($x > 1$)، قرینه آن عدد (یعنی $-x$) را بیرون می‌دهد.

$$x \leq -2, \quad 3x+1 \quad \text{ضابطه دوم}$$

به ازای اعداد کوچک‌تر یا مساوی -2 ($x \leq -2$)، یک واحد بیشتر از ۳ برابر آن (یعنی $3x+1$) را بیرون می‌دهد.

$$f(x) = \begin{cases} -x & x > 1 \\ 3x+1 & x \leq -2 \end{cases}$$

پس ضابطه f به صورت مقابل است:

حالا که یک تابع دوضابطه‌ای (یا سه‌ضابطه‌ای یا بیشتر) به ما بدهند و مقدار آن تابع را در $x=a$ بخواهند، باید ببینیم a در محدوده دامنه کدام ضابطه قرار می‌گیرد. در هر محدوده‌ای که بود، برای محاسبه $f(a)$ از ضابطه همان محدوده استفاده می‌کنیم.



مثال آموزشی: اگر $-1 < x \leq 2$ باشد، $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x & x > 2 \\ \frac{x+4}{x+2} & -1 < x \leq 2 \\ 5 & x \leq -1 \end{cases}$ باشد، مقادیر $f(2)$ ، $f(-\pi)$ و $f(1+\sqrt{3})$ را به دست آورید.

پاسخ:

$x = 2$ در محدوده $-1 < x \leq 2$ قرار دارد؛ پس برای محاسبه $f(2)$ از ضابطه وسط کمک می‌گیریم و جای x هایش ۲ قرار می‌دهیم: $f(2) = \frac{2+4}{2+2} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$

$x = -\pi$ در محدوده $x \leq -1$ قرار دارد؛ پس برای محاسبه $f(-\pi)$ از ضابطه پایینی که یک تابع ثابت است کمک می‌گیریم. خروجی اش هم ۵ است؛ پس: $f(-\pi) = 5$

$\sqrt{3}$ تقریباً $1/7$ است، پس $1+\sqrt{3}$ تقریباً $2/7$ می‌شود و در محدوده $x > 2$ قرار می‌گیرد؛ پس برای محاسبه $f(1+\sqrt{3})$ از ضابطه بالایی کمک می‌گیریم و جای x هایش $1+\sqrt{3}$ قرار می‌دهیم:

$$f(1+\sqrt{3}) = \frac{(1+\sqrt{3})^2 - 2(1+\sqrt{3})}{(1+\sqrt{3})^2 + 2(1+\sqrt{3})} = \frac{1+3+2\sqrt{3}-2-2\sqrt{3}}{1+3+2\sqrt{3}+2+2\sqrt{3}} = \frac{2}{6+4\sqrt{3}}$$

اتحاد مربع

حالا که عددی در دوتا از دامنه‌ها بود، باید مقدار هر دو ضابطه به ازای آن عدد، یکسان باشد، چون در غیر این صورت به ازای یک ورودی، دوتا خروجی

داریم و آن رابطه تابع نیست. مثلاً اگر $f(x) = \begin{cases} \bigcirc & x \geq a \\ \square & x \leq a \end{cases}$ باشد، چون $x = a$ در هر دو دامنه وجود دارد، پس مقدار $\bigcirc$ و $\square$ به ازای $x = a$ باید یکسان شود.

تست: در تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 - ax & x \geq 2 \\ a - x^3 & x \leq 2 \end{cases}$ مقدار $f(a-1)$ کدام است؟

(۱) -۱ (۲) -۲ (۳) -۳ (۴) -۴

پاسخ: ۳ $x = 2$ در هر دو دامنه بالایی و پایینی وجود دارد؛ پس مقدار هر دو ضابطه به ازای آن، باید یکسان شود:

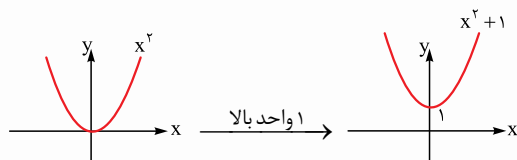
$$\left. \begin{array}{l} x = 2 \text{ به ازای } x^2 - ax = 2^2 - a(2) = 4 - 2a \\ x = 2 \text{ به ازای } a - x^3 = a - (2)^3 = a - 8 \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{برابری}} 4 - 2a = a - 8 \Rightarrow -3a = -12 \Rightarrow a = \frac{-12}{-3} = 4$$

با جای‌گذاری $a = 4$ ، ضابطه به شکل $f(x) = \begin{cases} x^2 - 4x & x \geq 2 \\ 4 - x^3 & x \leq 2 \end{cases}$ می‌شود.

سؤال مقدار $f(a-1)$ که $f(3)$ می‌شود را می‌خواهد. $x = 3$ در محدوده ضابطه بالایی قرار دارد؛ پس در ضابطه بالا، جای x ، ۳ قرار می‌دهیم:

$$x \geq 2: f(x) = x^2 - 4x \xrightarrow{x=3} f(3) = 3^2 - 4(3) = 9 - 12 = -3$$

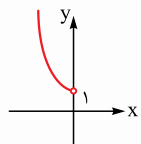
رسم نمودار توابع چندضابطه‌ای تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & x < 0 \\ 2x - 4 & 1 \leq x < 3 \end{cases}$ را در نظر بگیرید. می‌خواهیم نمودار این تابع دوضابطه‌ای را رسم کنیم. برای



این کار باید نمودار هر ضابطه را در دامنه‌اش رسم کنیم:

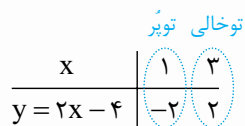
ضابطه اول به صورت $y = x^2 + 1$ با دامنه $x < 0$ است.

برای رسم سهمی $y = x^2 + 1$ کفیت سهمی $y = x^2$ را یک واحد به بالا ببریم:

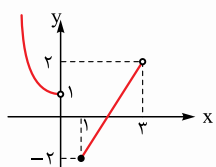


با توجه به دامنه این قسمت که $x < 0$ است، فقط قسمت سمت چپ محور y ها را نگه می‌داریم و بقیه نمودار را پاک می‌کنیم:

ضابطه دوم به صورت $y = 2x - 4$ با دامنه $1 \leq x < 3$ است.



برای رسم خط کفیت دو نقطه از آن را داشته باشیم. در این‌جا از نقاط **ابتدا** و **انتهای** دامنه استفاده می‌کنیم:

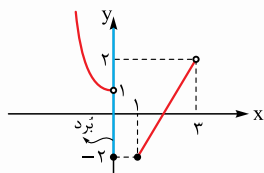


این دو نقطه را روی نموداری که ضابطه اول در آن رسم شده به هم وصل می‌کنیم تا به نمودار نهایی برسیم:



حالا که سؤال از ما برد یک تابع چندضابطه‌ای را می‌خواست، بعد از رسم نمودارش، آن را روی محور y ها می‌کوبیم.

مثلاً برد تابع مثال بالا به صورت $y \geq -2$ است:



تست: کدام خط، نمودار تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x & x \geq 0 \\ x + 3 & x < 0 \end{cases}$ را در نقاط بیشتری قطع می‌کند؟

$y = 1$ (۴)

$y = -5/2$ (۳)

$y = -1$ (۲)

$y = -1/5$ (۱)

پاسخ ۳: ضابطه اول یک سهمی است که C ندارد. بهتر است این سهمی‌ها را به کمک ریشه‌هایش رسم کنیم. ضابطه را مساوی صفر قرار می‌دهیم:

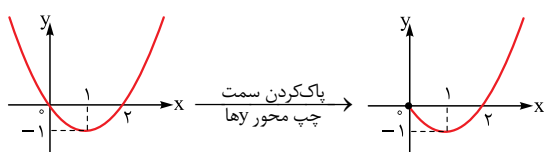
$$x^2 - 2x = 0 \xrightarrow{\text{فاکتور از } x} x(x - 2) = 0 \Rightarrow x = 0, x = 2$$

$$x_S = \frac{0+2}{2} = 1 \text{ می‌دهد: } x_S = 1$$

$$y_S = 1^2 - 2(1) = 1 - 2 = -1$$

به ازای $x = 1$ ، عرض رأس به دست می‌آید:

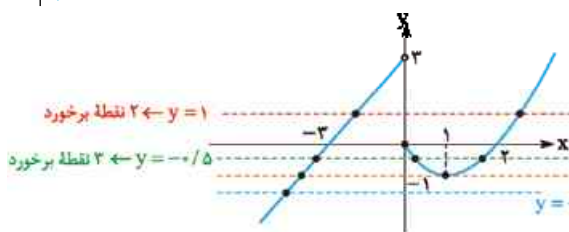
دهانه سهمی رو به بالا است (چون $a > 0$). رأسش هم $(1, -1)$ و ریشه‌هایش هم 0 و 2 هستند. نمودارش را می‌کشیم. چون دامنه این ضابطه، $x \geq 0$ است، پس سمت چپ محور y ها را پاک می‌کنیم:



توخالی

x	0	-3
y	3	0

ضابطه دوم $y = x + 3$ با دامنه $x < 0$ است. برای رسم خط دو نقطه کافی است:



دو نقطه $(0, 3)$ و $(-3, 0)$ را به هم وصل می‌کنیم و از سمت نقطه $(-3, 0)$ امتداد می‌دهیم و هر چهار خط افقی که در گزینه‌ها آمده را رسم می‌کنیم:

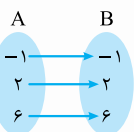
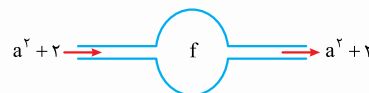
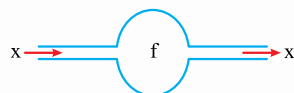
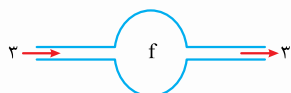
خط $y = -5/2$ ، نمودار را در ۳ نقطه قطع می‌کند که نسبت به سه خط دیگر بیشتر است.

تابع همانی

تابع روبه‌رو را ببینید:

هر عددی که وارد این تابع شده، همان عدد هم از تابع خارج شده است.

به توابعی که به ازای هر عددی که واردشان می‌شود، همان عدد را بیرون می‌دهند، تابع **همانی** می‌گوییم. (اسم این تابع، واقعاً برازنده‌اش!)



مثال آموزشی: اگر f تابعی همانی باشد، مقدار a را به دست آورید.

پاسخ: به ازای ورودی $2 + a$ ، خروجی‌مان $11 - 2a$ شده. چون f همانی است، باید این دو مقدار برابر باشند؛ پس:

$$2 + a = 11 - 2a \Rightarrow a + 2a = 11 - 2 \Rightarrow 3a = 9 \Rightarrow a = \frac{9}{3} = 3$$

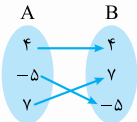
چهره تابع همانی در نمایش‌های مختلف یک تابع

۱) نمایش زوج مرتبی: در نمایش زوج مرتبی تابع همانی، در هر زوج مرتب، مؤلفه اول و دوم با هم برابرند؛ مثلاً تابع $f = \{(2, 2), (-3, -3), (\frac{1}{5}, \frac{1}{5})\}$ یک تابع همانی است.

۲) نمایش جدولی: در نمایش جدولی تابع همانی، هر دو عددی که در یک ستون نوشته می‌شوند باید با هم برابر باشند. مثلاً تابع مقابل یک تابع همانی است.

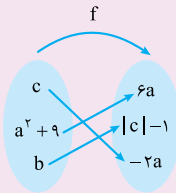
x	4	-3	7
y	4	-3	7

۳) نمایش پیکانی: در نمایش پیکانی تابع همانی باید اعداد سر و ته هر فلش (پیکان) یکسان باشند؛ مثلاً نمایش پیکانی روبه‌رو یک تابع همانی است:



تست: نمودار زیر مربوط به تابع همانی f است. اگر $g(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ تابعی ثابت باشد، کدام است؟

- ۱۰ (۱)
۲۰ (۲)
-۱۰ (۳)
-۲۰ (۴)



پاسخ ۳: پارت ۱ اعداد سر و ته هر فلش باید یکسان باشند. با فلشی شروع می‌کنیم که از a^2+9 به $6a$ وارد شده (چون فقط متغیر a دارد). این دو را برابر قرار

می‌دهیم: $a^2+9=6a \Rightarrow a^2-6a+9=0 \xrightarrow{\text{اتحاد مربع}} (a-3)^2=0 \Rightarrow a=3$

حالا سراغ فلش c به $6a$ می‌رویم: $c=6a \xrightarrow{a=3} c=6(3)=18$

در آخر هم فلش b به $-2a$ را داریم: $b=-2a \xrightarrow{a=3} b=-2(3)=-6$

پارت ۲: سه پارامتر $a=3$ ، $b=18$ و $c=-6$ را در $g(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ جای‌گذاری می‌کنیم:

$$g(x) = \frac{3x+18}{-6x+d}$$

نکته: تابع به فرم $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ در دو حالت، تابع ثابت می‌شود:

- ۱ a و c هر دو صفر باشند.
- ۲ نسبت ضریب x بالا به پایین با نسبت عدد ثابت بالا به پایین یکسان باشد؛ یعنی: $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$

در این‌جا حالت ۱ که نیست، پس باید حالت ۲ باشد؛ در نتیجه: $\frac{3}{-6} = \frac{18}{d} \xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} 3d = -108 \Rightarrow d = -36$

۴) نمایش ضابطه‌ای: گفتیم در تابع همانی، هر عددی که وارد تابع شود، همان عدد از تابع خارج می‌شود؛ پس ضابطه تابع همانی به صورت مقابل است: $f(x) = x$

خروجی ورودی

پس اگر f همانی باشد، آن وقت $f(2) = 2$ یا $f(x^2-1) = x^2-1$ یا ...

حالا که f همانی بود و یک عبارت داشتیم که پر از $f(\dots)$ بود، باید جای تمام $f(\dots)$ ها، را قرار دهیم.

مثال آموزشی: اگر f تابعی همانی و $f(13)+f(a-1)=f(2) \times f(2a)$ باشد، مقدار a را به دست آورید.

پاسخ: جای تمام $f(\dots)$ ها، را قرار می‌دهیم. مثلاً جای $f(13)$ ، 13 را قرار می‌دهیم:

$$f(13)+f(a-1)=f(2) \times f(2a) \Rightarrow 13+a-1=2(2a) \Rightarrow 12+a=4a \Rightarrow 12=4a-a \Rightarrow 12=3a \Rightarrow a=4$$

حالا که یک ضابطه شلوغ پلوغ به ما دادند و گفتند این ضابطه مربوط به یک تابع همانی است، آن را تا حد امکان ساده می‌کنیم. بعد ضریب x را مساوی

یک و ضریب بقیه جملات (شامل x^2 ، x^3 ، عدد ثابت و ...) را مساوی صفر قرار می‌دهیم. مثلاً اگر $f(x) = (a-2)x^2 + (b+3)x + c-1$ تابعی همانی باشد، باید $(b+3)=0$ ، $a-2=0$ و $c-1=0$ باشد. در نتیجه $b=-3$ ، $a=2$ و $c=1$ می‌شود.

ضریب x ضریب x^2 عدد ثابت

تست: تابع $f(x) = a(x-1)^2 + x^2 + bx + c$ همانی است. مقدار d در تساوی $f(a)f(b-2)+f(d+c)=0$ کدام است؟

- ۱ (۱) -۲ (۲) -۳ (۳) -۴ (۴)

پاسخ ۴: پارت ۱ اول ضابطه f را ساده می‌کنیم: $f(x) = a(x^2-2x+1) + x^2 + bx + c = ax^2 - 2ax + a + x^2 + bx + c$

اتحاد مربع

$$f(x) = ax^2 + x^2 - 2ax + bx + a + c = (a+1)x^2 + (-2a+b)x + a+c$$

فاکتوراز x^2 فاکتوراز x

چون f همانی است، ضریب x^2 باید صفر باشد: $a+1=0 \Rightarrow a=-1$

ضریب x باید ۱ باشد: $-2a+b=1 \xrightarrow{a=-1} 2+b=1 \Rightarrow b=-1$

عدد ثابت هم باید صفر باشد: $a+c=0 \xrightarrow{a=-1} -1+c=0 \Rightarrow c=1$

پارت ۲: چون f همانی است، جای تمام $f(\dots)$ ها، را قرار می‌دهیم:

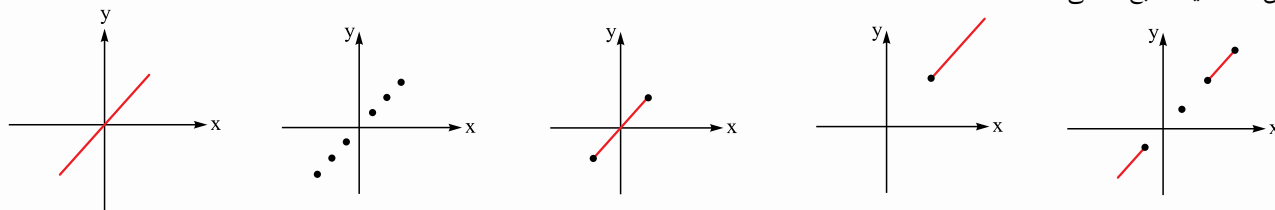
$$f(a)f(b-2)+f(d+c)=0 \Rightarrow a(b-2)+d+c=0$$

$$-1(-1-2)+d+1=0 \Rightarrow 3+d+1=0 \Rightarrow d=-4$$

مقادیر $a=b=-1$ و $c=1$ را جای‌گذاری می‌کنیم:



(۵) نمایش نموداری: همان‌طور که گفتیم ضابطه تابع همانی به صورت $f(x) = x$ است؛ پس نمودار این تابع حتماً روی خط $y = x$ (نیمساز ربع اول و سوم) قرار دارد که می‌تواند «کل خط»، «یک یا چند نقطه روی این خط»، «یک یا چند پاره‌خط روی این خط» و ... باشد. مثلاً تمام نمودارهای زیر نشان‌دهنده یک تابع همانی هستند:



- نکته: ۱** هر نقطه‌ای که روی نیمساز ناحیه اول و سوم باشد، طول و عرض برابری دارد. مثلاً نقاط $(2, 2)$ ، $(-4, -4)$ و $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ روی آن هستند.
- ۲** هر نقطه‌ای که روی نیمساز ناحیه دوم و چهارم باشد، طول و عرضش قرینه‌اند. مثلاً نقاط $(-2, 2)$ ، $(-4, 4)$ و $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ روی آن هستند.
- ۳** معادله نیمساز ناحیه اول و سوم $y = x$ و معادله نیمساز ناحیه دوم و چهارم $y = -x$ است. فقط نقطه $(0, 0)$ روی هر دوی آن‌ها قرار دارد.

تست: f تابعی همانی و نقطه $(f(1-2a) + f(2), 4 - af(a))$ روی نیمساز ناحیه دوم و چهارم قرار دارد. حاصل ضرب مقادیر ممکن برای a کدام است؟ (مثل کنگور)

- ۷ (۱) -۷ (۲) ۲ (۳) -۲ (۴)

پاسخ: ۲ با توجه به همانی بودن f ، مختصات نقطه را ساده می‌کنیم:

چون نقطه داده‌شده روی نیمساز ناحیه دوم و چهارم است، پس طول و عرضش قرینه‌اند:

$$f(1-2a) + f(2) = 4 - af(a) \Rightarrow (1-2a) + 2 = 4 - a^2 \Rightarrow 3 - 2a = 4 - a^2 \Rightarrow a^2 + 2a - 7 = 0$$

حاصل ضرب ریشه‌های معادله درجه دوم برابر با $P = \frac{C}{A} = \frac{-7}{1} = -7$ است؛ پس حاصل ضرب مقادیر a در معادله $\frac{1}{A}a^2 + \frac{2}{B}a - \frac{7}{C} = 0$ برابر است با:

آموزش و تمرین

تابع ثابت

۵۷۱- اگر $f = \{(2, 6), (-5, a+2), (4, 2b)\}$ تابعی ثابت باشد، حاصل $a+b$ کدام است؟

- ۵ (۱) ۶ (۲) ۷ (۳) ۸ (۴)

۵۷۲- اگر $f = \{(2, a-2b), (-5, 3a+b), (6, c+1), (-1, 12+a)\}$ تابعی ثابت باشد، مقدار c کدام است؟

- ۱۷ (۱) ۱۸ (۲) ۱۹ (۳) ۲۰ (۴)

۵۷۳- اگر تابع $f = \{(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)\}$ ، f تابعی ثابت باشد، مجموع میانگین و واریانس داده‌های y_1, y_2 و y_3 کدام است؟ (کتاب درسی)

- ۲۵ (۱) ۲۳ (۲) ۲۲ (۳) ۲۱ (۴)

۵۷۴- اگر $f = \{(m, 3m-1), (-1, k^2-k), (k^2-k, 2)\}$ تابع ثابت باشد، حاصل ضرب اعضای دامنه f کدام است؟ (سر اسری نوبت اول ۱۴۰۳)

- ۲ (۱) -۲ (۲) ۸ (۳) -۸ (۴)

۵۷۵- اگر $f = \{(3, n^2-2n), (m, 8), (2n-5, t), (4, 3m+2)\}$ یک تابع ثابت سه‌عضوی باشد، $m+n+t$ کدام است؟ (سر اسری ۹۸)

- ۱۰ (۱) ۱۱ (۲) ۱۲ (۳) ۱۴ (۴)

۵۷۶- جدول زیر نشان‌دهنده یک تابع خطی با شیب صفر است. مقدار b کدام است؟

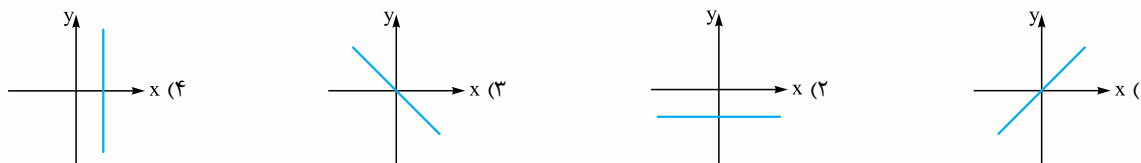
x	a	b	c	d
y	۱-a	d	a+۵	b+۱

- ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)

۵۷۷- اگر نمودار ون مقابل، نمایش تابعی ثابت باشد، b کدام است؟

- ۶ (۱) -۵ (۲) -۴ (۳) -۳ (۴)

۵۷۸- کدام گزینه نشان‌دهنده یک تابع ثابت است؟



۵۷۹- تابع ثابت f از نقطه $(-۲, ۲)$ می گذرد. اگر $f(1-a) = 2a - 4$ باشد، a کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) -۱ (۳) ۲ (۴) -۲

۵۸۰- اگر f تابعی ثابت و $f(2) = a + 3$ و $f(-1) = 2a - 1$ باشد، a کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۵۸۱- اگر f تابعی ثابت و $\frac{2f(1) - 3f(4)}{9 - f(0)} = 4$ باشد، مقدار $f(2)$ کدام است؟

- (۱) ۹ (۲) -۹ (۳) ۱۲ (۴) -۱۲

(آزمون‌های آزمایشی خیلی سبز)

۵۸۲- اگر f تابعی ثابت و $f(4) + f(4^2) + f(4^3) = 1 - f(f(-4))$ حاصل، $f(8)$ کدام است؟

- (۱) 2^2 (۲) 2^3 (۳) 2^{-2} (۴) 2^{-3}

(کتاب درسی)

۵۸۳- اگر f تابعی ثابت و $f(a+b) = f(a) \times f(b)$ باشد، مقدار $f(\frac{b}{a})$ کدام است؟

- (۱) فقط ۱ (۲) فقط -۱ (۳) فقط صفر (۴) صفر یا ۱

۵۸۴- اگر $f(x) = ax + a - 2$ تابعی ثابت باشد، مقدار $f(1)$ کدام است؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) -۲

۵۸۵- اگر $f(x) = a(x+2) - 4x + b$ تابعی ثابت و $f(b) = \frac{b}{4}$ باشد، مقدار ab کدام است؟

- (۱) ۱۶ (۲) -۱۶ (۳) ۶۴ (۴) -۶۴

۵۸۶- اگر $f(x) = \frac{x^2 - 7x - 8}{2x + 2} + ax$ تابعی ثابت باشد، مقدار $a^2 f(a)$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) -۱ (۳) $\frac{1}{4}$ (۴) $-\frac{1}{4}$

تابع چندضابطه‌ای

۵۸۷- تابع f به اعداد بزرگ‌تر از یک، مجذور آن‌ها و به سایر اعداد، قرینه‌شان را نسبت می‌دهد. ضابطه f کدام است؟

- (۱) $f(x) = \begin{cases} x^2 & x > 1 \\ -x & x \leq 1 \end{cases}$ (۲) $f(x) = \begin{cases} x^2 & x \geq 1 \\ -x & x < 1 \end{cases}$ (۳) $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & x \geq 1 \\ \frac{1}{x} & x < 1 \end{cases}$ (۴) $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & x > 1 \\ \frac{1}{x} & x \leq 1 \end{cases}$

۵۸۸- اگر $f(x) = \begin{cases} 5x + 3 & x \geq 2 \\ 2 - 2x & x < 2 \end{cases}$ باشد، مقدار $f(1)$ کدام است؟

- (۱) -۱ (۲) -۴ (۳) ۸ (۴) ۱۳

(آزمون‌های آزمایشی خیلی سبز)

۵۸۹- در تابع $f(x) = \begin{cases} 2x^2 - x & x \geq 1 \\ 5 & -1 < x < 1 \\ -\sqrt{1-x} & x \leq -1 \end{cases}$ حاصل $f(\frac{5}{4}) + f(\sqrt{2} - 2) + 2f(\frac{-5}{4})$ کدام است؟

- (۱) ۱۱ (۲) ۱۲ (۳) ۱۳ (۴) ۱۴

۵۹۰- اگر $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x & x \geq 0 \\ \frac{a}{x} & x < 0 \end{cases}$ و $f(\sqrt{3} - 1) + 5f(\frac{-1}{4}) = -38$ باشد، a کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) -۲ (۳) ۱ (۴) -۱

۵۹۱- در تابع $f(x) = \begin{cases} x + 2 & x \geq 1 \\ 2x - 3 & x < 1 \end{cases}$ ، اگر $f(a) = 5$ باشد، a کدام است؟

- (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴) ۷

۵۹۲- اگر رابطه $f(x) = \begin{cases} ax^2 + x & x \geq 2 \\ a - x & x \leq 2 \end{cases}$ تابع باشد، چه قدر است؟

- (۱) $\frac{3}{4}$ (۲) $\frac{4}{3}$ (۳) $-\frac{3}{4}$ (۴) $-\frac{4}{3}$

۵۹۳- اگر هزینه پارکینگ یک فروشگاه در روز جمعه براساس مدت‌زمان سپری‌شده (x) از بازگشایی فروشگاه از ساعت ۸ صبح، از تابع

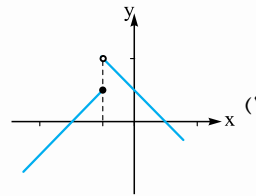
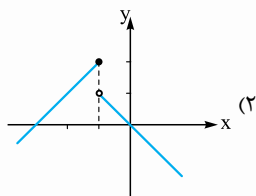
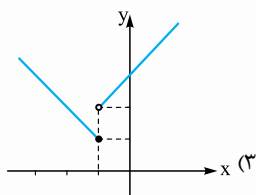
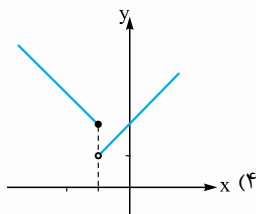
$f(x) = \begin{cases} 4 & 0 \leq x < 3 \\ x + 2 & 3 \leq x < 9 \\ x + 3 & 9 \leq x \leq 16 \end{cases}$ پیروی کند، هزینه پارکینگ خودرویی که از ساعت ۹ تا ۱۷ داخل پارکینگ است، کدام است؟ (هر واحد هزینه $f(x)$ را معادل

با ۵۰۰۰ تومان در نظر بگیرید.)

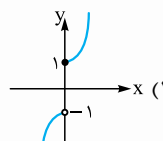
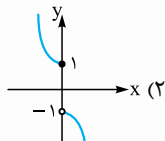
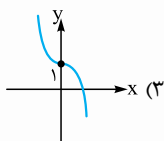
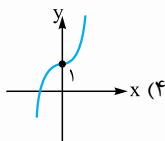
(کتاب درسی)

- (۱) ۵۰۰۰۰ (۲) ۵۵۰۰۰ (۳) ۶۰۰۰۰ (۴) ۷۰۰۰۰

۵۹۴- نمودار تابع $f(x) = \begin{cases} -x+1 & x > -1 \\ x+2 & x \leq -1 \end{cases}$ در کدام گزینه آمده است؟

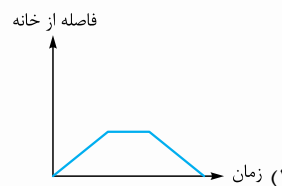
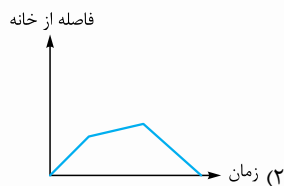
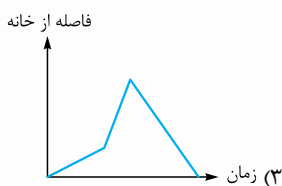
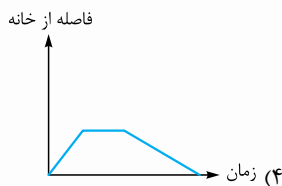


۵۹۵- نمودار تابع $f(x) = \begin{cases} x^2+1 & x > 0 \\ 1-x^2 & x \leq 0 \end{cases}$ به کدام صورت است؟



۵۹۶- کدام یک از نمودارهای زیر می تواند مربوط به داستان «بهزاد برای قدم زدن از خانه خارج شده است. در ابتدا آهسته قدم می زند و سپس سرعتش را بیشتر می کند تا به پارک برسد. سپس از مسیری که آمده بود، برمی گردد و به خانه می رسد.» باشد؟

(کتاب درسی)



۵۹۷- کدام یک از خط های زیر، تابع $f(x) = \begin{cases} -x & x \geq 0 \\ 2-x & x < 0 \end{cases}$ را قطع نمی کند؟

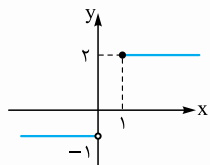
(۴) $y = 1$

(۳) $y = 0$

(۲) $y = -1$

(۱) $y = -2$

۵۹۸- کدام گزینه، ضابطه تابع رسم شده است؟



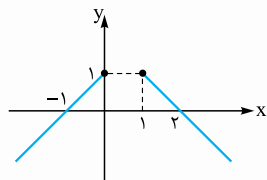
(۲) $f(x) = \begin{cases} 1 & x \geq 2 \\ 0 & x < -1 \end{cases}$

(۴) $f(x) = \begin{cases} 1 & x \geq 2 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$

(۱) $f(x) = \begin{cases} 2 & x \geq 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$

(۳) $f(x) = \begin{cases} 2 & x \geq 1 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$

۵۹۹- کدام گزینه ضابطه تابع رسم شده را نشان می دهد؟



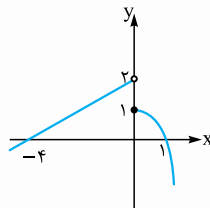
(۲) $f(x) = \begin{cases} -x+1 & x \leq 1 \\ x-2 & x \geq 1 \end{cases}$

(۴) $f(x) = \begin{cases} x+1 & x \leq 0 \\ -x+2 & x \geq 1 \end{cases}$

(۱) $f(x) = \begin{cases} x+1 & x \leq 0 \\ x-2 & x \geq 1 \end{cases}$

(۳) $f(x) = \begin{cases} -x+1 & x \leq 1 \\ -x+2 & x \geq 1 \end{cases}$

۶۰۰- کدام گزینه، ضابطه نمودار مقابل است؟



(۲) $f(x) = \begin{cases} 1-x^2 & x \geq 0 \\ 2x+2 & x < 0 \end{cases}$

(۴) $f(x) = \begin{cases} 1-x^2 & x \geq 0 \\ \frac{x}{2}+2 & x < 0 \end{cases}$

(۱) $f(x) = \begin{cases} x^2-1 & x \geq 0 \\ \frac{x}{2}+2 & x < 0 \end{cases}$

(۳) $f(x) = \begin{cases} x^2-1 & x \geq 0 \\ 2x+2 & x < 0 \end{cases}$

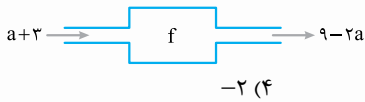
۶۰۱- برد تابع $f(x) = \begin{cases} x+1 & -2 \leq x < 3 \\ -2x+7 & 3 \leq x < 5 \end{cases}$ کدام است؟

(۴) $1 \leq y < 4$

(۳) $-4 < y < 3$

(۲) $-3 < y \leq 1$

(۱) $-3 < y < 4$



۶۰۲- اگر f تابعی همانی باشد، a کدام است؟

- (۱) ۳ (۲) -۳ (۳) ۲ (۴) -۲

۶۰۳- اگر $f = \{(2, a-1), (-3, b+1)\}$ تابعی همانی باشد، $b-a$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) -۱ (۳) ۷ (۴) -۷

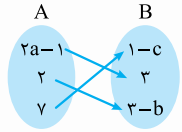
(آزمون‌های آزمایشی خیلی سبز)

۶۰۴- تابع $f = \{(a-11, 7-a), (6b, b^2+a), (c-a, \frac{b}{3}+1)\}$ همانی است. مقدار c کدام است؟

- (۱) ۱۱ (۲) ۱۲ (۳) ۱۳ (۴) ۱۴

۶۰۵- اگر نمایش پیکانی مقابل یک تابع همانی باشد، میانگین اعداد a ، b و c کدام است؟

- (۱) -۱ (۲) -۲ (۳) -۳ (۴) ۳



۶۰۶- کدام گزینه نمودار یک تابع همانی است؟



۶۰۷- اگر f تابعی همانی و $f(a) = 8-a$ باشد، مقدار $f(-a)$ کدام است؟

- (۱) ۴ (۲) -۴ (۳) ۲ (۴) -۲

۶۰۸- اگر f تابعی ثابت و g تابعی همانی و $\frac{f(2)+g(8)}{f(2)-g(-1)} = g(2)$ باشد، مقدار $f(0)$ کدام است؟

- (۱) -۳ (۲) ۳ (۳) -۲ (۴) ۲

(آزمون‌های آزمایشی خیلی سبز)

۶۰۹- تابع ثابت f و تابع همانی g در نقطه $A(2-3a, a+10)$ متقاطع‌اند. مقدار $f(a) + g(\frac{a}{3})$ کدام است؟

- (۱) ۶ (۲) ۷ (۳) ۸ (۴) ۹

۶۱۰- اگر تابع $f(x) = (a-1)x + b + 2$ یک تابع همانی باشد، $a-b$ کدام است؟

- (۱) ۳ (۲) -۳ (۳) ۴ (۴) -۴

۶۱۱- اگر $f(x) = \frac{2x^3 + 3x^2 + cx + d}{ax^2 + bx - 1}$ تابع همانی باشد، مقدار $a+b+c+d$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۶۱۲- اگر تابع $f(x) = a(x+1)^2 + x^2 + bx + c + 3$ همانی باشد، مقدار $\frac{a+b}{c}$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) -۱ (۳) ۲ (۴) -۲

۶۱۳- اگر نقطه $(4m-3, 2m+7)$ روی نیمساز ناحیه اول و سوم باشد، m کدام است؟

- (۱) $\frac{2}{3}$ (۲) $-\frac{2}{3}$ (۳) ۵ (۴) -۵

۶۱۴- اگر نقطه $(m, m^2 - m - 8)$ روی نیمساز ناحیه سوم باشد، m کدام است؟

- (۱) فقط -۲ (۲) فقط ۴ (۳) ۲ یا -۴ (۴) -۲ یا ۴

(خارج ۹۸)

۶۱۵- اگر هر سه زوج مرتب $(n^2 - 3n, 4)$ ، $(20, n^2 + n)$ و $(1, m+n)$ بر روی نیمساز ناحیه اول و سوم باشند، m کدام است؟

- (۱) -۳ (۲) -۲ (۳) ۲ (۴) ۶

تثبیت و تسلط

۶۱۶- رابطه $f = \{(m+3n, 2t^2), (-2, n^2+2n), (1-3m, 8)\}$ یک تابع ثابت با دامنه دوعضوی است. اگر m و n عضوی از اعداد طبیعی باشند، مجموع

(خارج ۱۴۰۱)

دو عضو دامنه چه قدر است؟

- (۱) ۲۳ (۲) ۲۱ (۳) ۵ (۴) ۳

۶۱۷- تابع ثابت $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ از نقطه $(5, 2)$ عبور می‌کند. میانگین مقادیر $f(1)+1$ ، $f(2)+2$ ، $f(3)+3$ ، ... و $f(10)+10$ کدام است؟

- (۱) ۷ (۲) $7/5$ (۳) $6/5$ (۴) ۸

۶۱۸- دو نقطه $(2a+1, 13-2b)$ و $(a-b, b-5)$ روی تابع ثابت f و به فاصله ۵ واحد از هم قرار دارند. بیشترین مقدار $|\frac{b}{a}|$ کدام است؟

- (۱) -۱ (۲) ۱ (۳) -۳ (۴) ۳

۶۱۹- انحراف معیار اعضای بُرد تابع f صفر است. اگر $3f(a)f(b) = f(a)+f(b)+16$ باشد، مجموع مقادیر ممکن برای $f(a)+f(b)$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) $\frac{4}{3}$ (۳) $\frac{3}{2}$ (۴) $\frac{1}{3}$



۶۲۰- برد تابع $f(x) = (a-1)x^2 + (b+3)x + b - a$ ، مجموعه $\{c\}$ است. اگر رابطه $(\frac{b}{c}, 2k-7), (\frac{c}{c}, 1-k), (-a^2, k+c)$ تابع باشد، k کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۶۲۱- اگر $f(x) = (2x+a)(x-2) + bx^2 + 7x$ تابعی ثابت باشد، مقدار $f(5) + 4f(1)$ کدام است؟

- (۱) ۲۰ (۲) ۲۵ (۳) ۳۰ (۴) ۳۵

۶۲۲- اگر $f(x) = \begin{cases} -1 & x \geq 1 \\ 2 & x < 1 \end{cases}$ باشد، حاصل $f(-a^2) - f(a^2 + \sqrt{2})$ کدام است؟

- (۱) صفر (۲) $\sqrt{2}$ (۳) -۳ (۴) ۳

(آزمون‌های آزمایشی خیلی سبز)

۶۲۳- در تابع $f(x) = \begin{cases} \sqrt{4x+a} & x \geq 1 \\ \sqrt{8-2x} & x < 1 \end{cases}$ ، اگر $f(-14) + f(6) = 9$ باشد، مقدار $[f(a)]$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۶۲۴- اگر $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x & x < 1 \\ x^2 + 10x & x \geq 1 \end{cases}$ ، مجموع مقادیر a برای آن که $f(a) = 24$ باشد، کدام است؟

- (۱) -۱۶ (۲) -۲ (۳) ۸ (۴) -۸

۶۲۵- در تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x - 7 & x \geq a \\ x^2 - 4x + 11 & x < a \end{cases}$ ، مقدار $f(2 - \sqrt{a})$ کدام است؟

- (۱) ۷ (۲) ۸ (۳) ۹ (۴) ۱۰

۶۲۶- اگر تابع $f(x) = \begin{cases} (a-1)x + 4 + 2b & x > 2 \\ (b+3a)x^2 + c & x \leq 2 \end{cases}$ یک تابع ثابت باشد، مقدار $a + b + c$ کدام است؟

- (۱) -۱ (۲) -۲ (۳) -۳ (۴) -۴

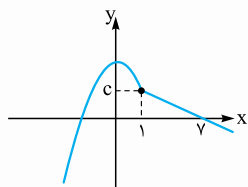
۶۲۷- مساحت محصور بین نمودار تابع $f(x) = \begin{cases} 2x+6 & x < -1 \\ 4 & -1 \leq x \leq 3 \\ -x+7 & x > 3 \end{cases}$ و محور x ها کدام است؟

- (۱) ۲۰ (۲) ۲۴ (۳) ۲۸ (۴) ۳۲

۶۲۸- اگر نمودار تابع $f(x) = \begin{cases} 4-x^2 & x \leq 1 \\ ax+b & x > 1 \end{cases}$ به شکل زیر باشد، عرض نقطهٔ ماکزیمم سهمی $y = ax^2 + 2bx + c$ کدام است؟

- (۱) $\frac{51}{2}$ (۲) $\frac{53}{2}$

- (۳) $\frac{55}{2}$ (۴) $\frac{57}{2}$



۶۲۹- تابع $f = \{(2, 2n^2 - 3n), (m + 3n, 2), (m, -t^2)\}$ یک تابع همانی است. اگر میانگین m, n و t ، صفر باشد، مقدار t کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{2}$ (۲) ۲ (۳) -۲ (۴) $-\frac{1}{2}$

(سرآزمونی مجدد ۱۴۰۱)

۶۳۰- اگر $f = \{(n^2 + 2n, 8), (n + 3, k), (m + 7, t)\}$ یک تابع همانی با دامنهٔ دوعضوی و $m, n \in \mathbb{N}$ باشد، مقدار $m + t + k$ کدام است؟ (مثل کنگور)

- (۱) ۱۱ (۲) ۱۲ (۳) ۱۳ (۴) ۱۴

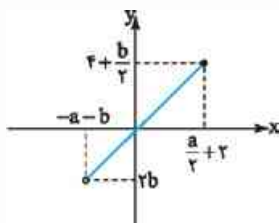
۶۳۱- اگر نمودار مقابل مربوط به یک تابع همانی باشد، مقدار $2a - b$ کدام است؟ (آزمون‌های آزمایشی خیلی سبز)

- (۱) ۵

- (۲) ۶

- (۳) ۷

- (۴) ۸



(آزمون‌های آزمایشی خیلی سبز)

۶۳۲- اگر f تابعی همانی و $f(a^2 - 1) - f(3a^2) = f(8a - 11)$ باشد، بیشترین مقدار $\frac{f(a-3)}{f(a+1)}$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) -۲ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) ۲

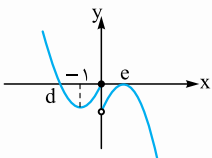
۶۳۳- اگر f تابعی همانی و $4^{f(2x)+f(x^2)} = 8^{f(20)}$ باشد، حاصل $x+1$ کدام می‌تواند باشد؟

- (۱) $\sqrt{29}$ (۲) $\sqrt{30}$ (۳) $\sqrt{31}$ (۴) $\sqrt{33}$

۶۳۴- تابع $f(x) = \sqrt{4x^2 - 20x + 25} + ax + b$ با دامنهٔ $x < \frac{5}{4}$ یک تابع همانی است. مقدار $b^2 - a^3$ کدام است؟

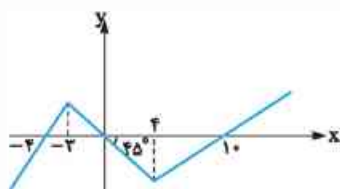
- (۱) -۲ (۲) ۱۷ (۳) -۱۱ (۴) -۸

- ۶۳۵- اگر تابع $f(x) = (x+a)(x+b) - (x-1)(x+3)$ تابعی همانی باشد، مقدار $a^2 + b^2$ کدام است؟
 ۹ (۱) ۱۲ (۲) ۱۵ (۳) ۱۸ (۴)
- ۶۳۶- $f(x) = \frac{ax+3}{12x+a}$ تابعی ثابت که نمودارش زیر محور x‌ها می‌باشد و $g(x) = (a+b)x + \frac{c}{x}$ تابعی همانی است. اگر نمودار تابع $h(x) = kf(x) + ax - b$ محور x‌ها را در نقطه‌ای به طول ۱- قطع کند، k کدام است؟
 ۲ (۱) -۲ (۲) ۴ (۳) -۴ (۴)
- ۶۳۷- اگر f تابع ثابت و برای $m, n, k \in \mathbb{N}$ ، $f(kx) = (k^2 - 3)f(x)$ و تابع g به صورت زیر، یک تابع همانی باشد، مقدار $f(m)$ کدام است؟
 ۲ (۱) -۲ (۲) ۴ (۳) -۴ (۴)
- ۶۳۸- نقاط $(a^2 - 6ab, -9b^2)$ و $B(\frac{a}{b}, c+2)$ به ترتیب روی نیمساز ناحیه سوم و نیمساز ناحیه چهارم هستند. c کدام است؟
 -۳ (۱) -۴ (۲) -۵ (۳) -۶ (۴)
- ۶۳۹- نقطه A روی نیمساز ناحیه اول و سوم است. اگر آن را ۲ واحد به پایین و سپس ۴ واحد به چپ ببریم، بر روی نقطه B واقع بر نیمساز ناحیه دوم و چهارم قرار می‌گیرد. حاصل ضرب طول نقطه A و عرض نقطه B کدام است؟
 ۳ (۱) -۳ (۲) ۶ (۳) -۶ (۴)
- ۶۴۰- برای برخی مقادیر x ، زوج مرتب $(f(x) + f(-x), 3x^2 - 17x + 10)$ روی نیمساز ناحیه دوم و چهارم قرار دارد. اگر تابع f همانی با دامنه $\mathbb{R}$ باشد، اختلاف مقادیر x کدام است؟
 ۱ (۱) $\frac{1}{3}$ (۲) $\frac{1}{3}$ (۳) $\frac{1}{3}$ (۴)
- ۶۴۱- تابع f ، تابع ثابت و برای $m, n \in \mathbb{N}$ داریم $f(m) + f(n) = f(m)f(n)$. اگر دو زوج مرتب $(f(m), 2n^2 - 7n + 1)$ و $(nf(n), m^2 - 4m + 6)$ روی نیمساز ناحیه اول و سوم باشند، مقدار $[\frac{mn}{5}]$ کدام است؟
 ۴ (۱) ۳ (۲) ۲ (۳) ۱ (۴)
- ؟ فراتر از انتظار (تست‌های این بخش را حتماً با مشورت معلم یا مشاور خود حل کنید؛ این توصیه را جدی بگیرید!)**
- ۶۴۲- اگر f تابعی ثابت و $250 = 100f(100) - 99f(99) - \dots - 4f(4) - 3f(3) - 2f(2) - f(1)$ باشد، حاصل $\frac{2f(1)-8}{f(2)-1}$ کدام است؟
 ۲ (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴)
- ۶۴۳- تابع $f(x) = ax + b$ ، از سه نقطه $(1, x_1)$ ، $(2, x_2)$ و $(4, x_3)$ می‌گذرد. اگر واریانس داده‌های x_1 ، x_2 و x_3 ، کم‌ترین مقدار باشد، حاصل $\frac{x_1 + x_2 + x_3}{b} - a$ کدام می‌شود؟
 ۲ (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۶ (۴)
- ۶۴۴- اگر مجموعه $\{k+1, 6-c\}$ بُرد تابع $f: \{1, 2, 3, \dots, 10\} \rightarrow B$ باشد، حاصل ck کدام است؟
 ۴ (۱) ۶ (۲) ۸ (۳) ۱۲ (۴)
- ۶۴۵- تابع $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ $f(x) = \sqrt{4x^2 - 12x + 9} + 2x$ تابعی ثابت است. A کدام می‌تواند باشد؟
 ۱ (۱) $\{x | x \in \mathbb{R}, 0 < x < 2\}$ ۲ (۲) $\{x | x \in \mathbb{R}, -1 < x < 1\}$ ۳ (۳) $\{x | x \in \mathbb{R}, 1 < x < 3\}$ ۴ (۴) $\{x | x \in \mathbb{R}, \sqrt{2} < x < \sqrt{3}\}$
- ۶۴۶- تابع $f(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 12x^2 + 36}}{3x^2 + bx + c}$ تابعی ثابت است. مقدار k در تساوی $cf(c) + k = b$ کدام است؟
 ۶ (۱) -۶ (۲) ۳ (۳) -۳ (۴)
- ۶۴۷- تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 + k & x \geq 2 \\ 9 - x & -1 \leq x \leq 2 \\ 2x + m & x \leq -1 \end{cases}$ در چند نقطه، خط $y = 8$ را قطع می‌کند. مجموع طول این نقاط کدام است؟
 ۴ (۱) $\sqrt{5} - 1$ (۲) $\sqrt{5} + 1$ (۳) ۳ (۴) ۴
- ۶۴۸- نمودار تابع $y = \begin{cases} x^2 + ax + b & x \leq 0 \\ cx^2 + 4x + c & x > 0 \end{cases}$ به شکل روبه‌رو است. مقدار $a + b + c + d + e$ کدام است؟
 ۱ (۱) صفر ۲ (۲) -۲ (۳) -۱ (۴)



۶۴۹- نمودار تابع سه ضابطه‌ای $f(x)$ به صورت مقابل است. اگر نقاط $(x_1, 20)$ و $(x_2, -9)$ روی این تابع باشند،

حاصل $x_1 + x_2$ کدام است؟



۳۲ (۲)

۳۱ (۱)

۳۴ (۴)

۳۳ (۳)

۶۵۰- تابع $f(x) = \begin{cases} -x^2 - 4x & -5 \leq x < 0 \\ 2x - 6 & 0 \leq x \leq 3 \end{cases}$ مفروض است. با حذف کدام یک از اعداد زیر از دامنه، برد f تغییر می‌کند؟

$x = 2$ (۴)

$x = 0$ (۳)

$x = -1$ (۲)

$x = -4$ (۱)

۶۵۱- تابع همانی f ، سهمی $y = ax^2 - x$ را در دو نقطه به طول‌های $b+2$ و $b-4$ قطع می‌کند. مجموع مقادیر ممکن برای $\frac{b}{a}$ کدام است؟

۲۰ (۴)

۱۸ (۳)

۱۶ (۲)

۱۵ (۱)

۶۵۲- تابع f ، تابع ثابت و برای هر $m, n \in \mathbb{N}$ داریم $2f(m+n) = f(m)f(n) + 1$. اگر برای هر $m, n \in \mathbb{N}$ ، $g(m+n) = mf(n) + nf(m)$ باشد، جمع

ریشه‌های معادله درجه دوم $f(2)x^2 - 3g(2)x + g(4) = 0$ ، چند برابر ضرب ریشه‌های آن است؟

$\frac{3}{4}$ (۴)

$\frac{4}{3}$ (۳)

$\frac{3}{2}$ (۲)

$\frac{2}{3}$ (۱)

درس ۶: توابع پلکانی، علامت، جزء صحیح و قدرمطلق

تابع پلکانی

توابع چندضابطه‌ای زیر را ببینید:

$$f(x) = \begin{cases} 2 & x > 0 \\ -3 & x \leq 0 \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} -1 & 2 \leq x < 4 \\ 2 & 0 < x < 2 \\ 4 & -3 < x \leq -1 \end{cases}$$

تابع f ، یک تابع ۲ ضابطه‌ای است که هر دو ضابطه‌اش عدد ثابت هستند. تابع g نیز یک تابع ۳ ضابطه‌ای است که هر سه ضابطه‌اش عدد ثابت می‌باشد. به این جور توابع چندضابطه‌ای که تمام ضابطه‌هایشان عدد ثابت هستند، توابع پلکانی می‌گوییم.

مثال آموزشی: اگر تابع $f(x) = \begin{cases} (a+2)x+3 & x \geq 1 \\ \frac{b}{x} + a^2 & x < 1 \end{cases}$ یک تابع پلکانی باشد، مقدار a ، b و $f(a)$ را به دست آورید.

$a+2=0 \Rightarrow a=-2$

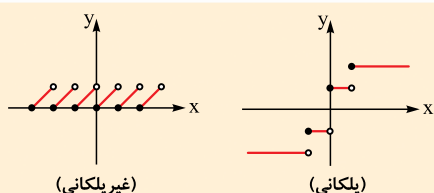
پاسخ: باید هر دو ضابطه، عدد ثابت باشند. در ضابطه بالایی، ضرب x باید صفر باشد:

در ضابطه پایینی هم ضرب $\frac{1}{x}$ که b می‌باشد باید صفر باشد: $b=0$

با جای‌گذاری $a=-2$ و $b=0$ ضابطه را می‌نویسیم:

$$f(x) = \begin{cases} (-2+2)x+3 & x \geq 1 \\ \frac{0}{x} + (-2)^2 & x < 1 \end{cases} = \begin{cases} 3 & x \geq 1 \\ 4 & x < 1 \end{cases}$$

مقدار $f(a)$ یا همان $f(-2)$ از ضابطه پایین به دست می‌آید: $f(a) = f(-2) = 4$



(غیرپلکانی)

(پلکانی)

نکته: از آنجایی که نمودار تابع ثابت، یک خط افقی است، پس تابع پلکانی

از چند خط افقی تشکیل می‌شود.

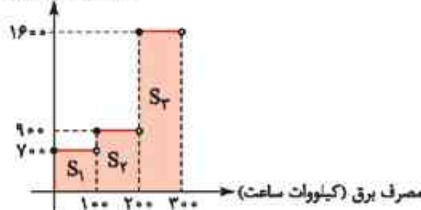
مثلاً نمودار سمت راست یک تابع پلکانی است. (چون همه خط‌ها افقی هستند).

ولی نمودار سمت چپ پلکانی نیست. (چون خط‌ها افقی نیستند و شیب دارند).

مسائل مالیات و قبض آب و برق

یکی از جاهایی که در زندگی روزانه، تابع پلکانی را می‌بینیم، محاسبه مالیات حقوق‌ها یا محاسبه هزینه برق و آب مصرفی است.

هزینه پلکانی برق (ریال)



در نمودار پلکانی مربوط به مالیات حقوق‌ها، اگر بخواهیم مالیات مربوط به حقوق ۸ تومانی را حساب کنیم

باید مساحت زیر تابع پلکانی تا محور x را از $x=0$ تا $x=a$ حساب کنیم. عدد به دست آمده، همان

عدد مالیات است. درباره نمودار برق یا آب هم همین‌طور است و مساحت زیر این نمودار تا محور x ‌ها

از $x=0$ تا $x=a$ ، هزینه مصرف آب (یا برق) به میزان a واحد است.

مثلاً سطح رنگی در نمودار مقابل، مربوط به هزینه برق مصرفی، به ازای ۳۰۰ کیلووات ساعت است.

$S_1 + S_2 + S_3 = (100 \times 700) + (100 \times 900) + (100 \times 1600) = 70000 + 90000 + 160000 = 320000$

۵۵۱. قیمت فروش هر کالا k واحد پول است؛ پس تابع درآمد به صورت مقابل است: $R(x) = k \cdot x$ $\Rightarrow$ تعداد کالا $\times$ قیمت هر کالا = درآمد
با داشتن توابع درآمد و هزینه، تابع سود را می‌نویسیم:

$$P(x) = R(x) - C(x) \Rightarrow P(x) = kx - \left(\frac{x^2}{2} + 30x + 70\right)$$

$$= \frac{-x^2}{2} + \underbrace{kx - 30x}_{\text{فاکتور از } x} - 70 \Rightarrow P(x) = \frac{-1}{2}x^2 + \underbrace{(k-30)}_a x - \underbrace{70}_c$$

تابع سود در x رأسش بیشترین سود را می‌دهد:

$$x_S = \frac{-b}{2a} = \frac{-(k-30)}{2 \cdot \left(\frac{-1}{2}\right)} = \frac{-(k-30)}{-1} = k - 30$$

این عدد باید ۹۰ باشد: $k - 30 = 90 \Rightarrow k = 120$

پس ضابطه تابع سود به صورت زیر می‌شود:

$$P(x) = \frac{-1}{2}x^2 + (k-30)x - 70 \xrightarrow{k=120} P(x) = \frac{-1}{2}x^2 + 90x - 70$$

سود ماکزیمم به ازای $x = 90$ به دست می‌آید:

$$P(90) = \frac{-1}{2}(90)^2 + 90(90) - 70 = -4050 + 8100 - 70 = 3980$$

خواسته سؤال برابر است با: $t + k = 3980 + 120 = 4100$

۵۵۲. تابع درآمد را می‌نویسیم:

$$R(x) = A \times x = Ax$$

با داشتن تابع هزینه $C(x) = x^2 + 40x + 600$ و تابع درآمد $R(x) = Ax$ تابع سود را می‌نویسیم:

$$P(x) = R(x) - C(x) \Rightarrow P(x) = Ax - (x^2 + 40x + 600)$$

$$= Ax - x^2 - 40x - 600 \Rightarrow P(x) = \underbrace{-1}_a x^2 + \underbrace{(A-40)}_b x - \underbrace{600}_c$$

چون ماکزیمم سود ۱۰۰۰ است، پس باید $\frac{-\Delta}{4a}$ برابر ۱۰۰۰ باشد.

$$\frac{-\Delta}{4a} = 1000 \xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} -\Delta = 4000a \Rightarrow -(b^2 - 4ac) = 4000a$$

$$\Rightarrow -((A-40)^2 - 4(-1)(-600)) = 4000(-1)$$

$$\xrightarrow{\text{دو طرف را قیینه می‌کنیم.}} (A-40)^2 - 2400 = 4000 \Rightarrow (A-40)^2 = 6400$$

$$\Rightarrow A - 40 = \pm 80 \Rightarrow \begin{cases} A - 40 = 80 \Rightarrow A = 120 \checkmark \\ A - 40 = -80 \Rightarrow A = -40 \times \end{cases}$$

(قیمت کالا منفی نمی‌شود.)



برای مشاهده پاسخ سوالات ۵۵۳ تا ۵۷۰ منو اسکن کن

۵۷۱. در نمایش زوج مرتبی تابع ثابت، مؤلفه دوم تمام زوج مرتبها باید یکسان باشد: $(2, 6), (-5, a+2), (4, 2b)$

پس $a+2, 6$ و $2b$ باید برابر باشند:

$$\begin{cases} a+2=6 \Rightarrow a=4 \\ 2b=6 \Rightarrow b=3 \end{cases} \Rightarrow a+b=4+3=7$$

۵۷۲. مؤلفه دوم همه زوج مرتبها باید برابر باشد. از $(2, a-3b)$ و $(-1, 12+a)$ شروع می‌کنیم (چون a ها ساده می‌شوند و بعدش b به دست می‌آید):

$$12+a = a-3b \Rightarrow 3b = -12 \Rightarrow b = -4$$

جای تمام b ها، -4 قرار می‌دهیم:

$$f = \{(2, a-3b), (-5, 3a+b), (6, c+1), (-1, 12+a)\}$$

$$\xrightarrow{b=-4} f = \{(2, a+12), (-5, 3a-4), (6, c+1), (-1, 12+a)\}$$

پس باید ماکسیمم تابع درجه دوم $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + x + 120$ را حساب کنیم.

ابتدا x رأس: $x_S = \frac{-b}{2a} = \frac{-1}{2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{1}{1} = 1$

با جای گذاری $x = 5$ در $f(x)$ ، داریم:

$$f(x) = (30+x)(4-\frac{1}{10}x) \Rightarrow f(5) = (30+5)(4-\frac{1}{10} \times 5)$$

$$= (35)(4-0.5) = (35)(3.5) = 122.5$$

۵۴۹. تابع درآمد را می‌نویسیم:

$$R(x) = 120 \times x$$

تعداد کالا $\times$ قیمت فروش هر کالا = درآمد

برای به دست آوردن نقطه سربه‌سر باید تابع درآمد و هزینه را برابر قرار دهیم:

$$C(x) = R(x) \Rightarrow x^2 - 40x - 3600 = 120x$$

$$\Rightarrow x^2 - 160x - 3600 = 0$$

جمع ضرب

دو عدد که جمعشان -160 و ضربشان -3600 باشد، -180 و 20 هستند. معادله را به کمک تجزیه با اتحاد جمله‌مشترب حل می‌کنیم:

$$x^2 - 160x - 3600 = 0 \Rightarrow (x-180)(x+20) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 180 \checkmark \\ x = -20 \times \end{cases}$$

تعداد کالا نمی‌تواند منفی باشد.

تجزیه اگر برای حل معادله درجه دوم $x^2 - 160x - 3600 = 0$ نمی‌توانستید دو عدد 20 و -180 را حدس بزنید، آن را به شکل $x^2 - 160x = 3600$ و بعد به شکل $x(x-160) = 3600$ بنویسید و از گزینه‌ها کمک بگیرید.

۵۵۵. فاصله دو نقطه سربه‌سر 20 است؛ پس اختلاف ریشه‌های معادله $-\frac{1}{4}x^2 + 6x + k = 0$ باید 20 باشد. اختلاف ریشه‌های معادله را حساب می‌کنیم:

$$M = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|} = \frac{\sqrt{36 - 4 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) \cdot k}}{\left|-\frac{1}{4}\right|} = \frac{\sqrt{36+k}}{\frac{1}{4}} = 4\sqrt{36+k}$$

عبارت به دست آمده را برابر با 20 قرار می‌دهیم:

$$4\sqrt{36+k} = 20 \xrightarrow{\div 4} \sqrt{36+k} = 5$$

$$\xrightarrow{\text{توان } 2} 36+k = 25 \Rightarrow k = -11$$

هزینه اولیه تولید یک کالا 14 و هزینه تولید هر واحد کالا 8 است؛ پس تابع هزینه به صورت زیر است:

$$H(x) = 14 + 8x$$

هزینه ثابت + هزینه هر کالا $\times$ تعداد

با داشتن تابع سود و هزینه، تابع درآمد را می‌نویسیم:

$$P(x) = R(x) - C(x) \Rightarrow P(x) + C(x) = R(x)$$

$$\Rightarrow R(x) = \left(-\frac{1}{4}x^2 + 6x - 11\right) + (14 + 8x) = -\frac{1}{4}x^2 + 14x + 3$$

بیشترین درآمد را حساب می‌کنیم:

$$\max(R) = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-(b^2 - 4ac)}{4a} = \frac{-(14^2 - 4 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) \cdot 3)}{4 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right)}$$

$$= \frac{-(196+3)}{-1} = 199$$

مؤلفه‌های دوم دو زوج مرتب $(2, a+12)$ و $(-5, 3a-4)$ را برابر قرار می‌دهیم:

$$3a-4 = a+12 \Rightarrow 2a = 16 \Rightarrow a = 8$$

حالا مؤلفه‌های دوم $(2, a+12)$ و $(6, c+1)$ را برابر قرار می‌دهیم:

$$a+12 = c+1 \xrightarrow{a=8} 20 = c+1 \Rightarrow c = 19$$

۵۷۳. اگر f تابعی ثابت باشد، برد آن شامل یک عضو است و تمام

مؤلفه‌های دوم زوج مرتب‌های آن با هم برابرند. پس در این‌جا $y_1 = y_2 = y_3$.

یادآوری ۱ برای چند داده یکسان، میانگین برابر با یکی از آن‌ها است.

پس میانگین این سه داده برابر با y_1 یا y_2 یا y_3 است.

یادآوری ۲ واریانس چند عدد یکسان، برابر با صفر است.

پس واریانس اعداد y_1, y_2, y_3 که همگی با هم برابرند، برابر با صفر است.

پس جمع میانگین و واریانس برابر است با: $\bar{y} + \sigma^2 = y_3 + 0 = y_3$

البته جواب y_1 یا y_2 هم می‌توانست باشد.

۵۷۴. باید مؤلفه‌های دوم زوج مرتب‌ها برابر باشند:

$$3m-1 = k^2 - k = 2 \quad \text{و} \quad k^2 - k \text{ را برابر با } 2 \text{ قرار می‌دهیم:}$$

$$\begin{cases} 3m-1=2 \rightarrow 3m=3 \rightarrow m=1 \\ k^2-k=2 \end{cases}$$

دقت کنید نیازی به محاسبه k نیست و همین که بدانیم $k^2 - k$ برابر با ۲ است، کفایت. با جای‌گذاری $m=1$ و $k^2 - k = 2$ ، اعضای دامنه f را می‌نویسیم:

$$f = \left\{ \left(\frac{m}{3}, 3m-1 \right), \left(-\frac{1}{2}, k^2-k \right), \left(\frac{k^2-k}{2}, 2 \right) \right\} \rightarrow D_f = \{1, -1, 2\}$$

حاصل ضرب اعضای D_f برابر است با:

$$1 \times (-1) \times 2 = -2$$

۵۷۵. در تابع ثابت، مؤلفه دوم تمام زوج مرتب‌ها با هم برابر است؛ پس

$$t - 2n, 8, n^2 - 2n \text{ با هم برابرند:}$$

$$3m+2=8 \Rightarrow 3m=6 \Rightarrow m=2$$

$$n^2 - 2n = 8 \Rightarrow n^2 - 2n - 8 = 0 \Rightarrow (n-4)(n+2) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} n=4 \\ n=-2 \end{cases}$$

برای t و m ، یک مقدار به دست آمد ولی برای n ، دو مقدار. باید هر دو را امتحان کنیم.

یک بار $n=4$ و $m=2$ و $t=8$ را در تابع جای‌گذاری می‌کنیم:

$$f = \{(3, 8), (2, 8), (2, 8), (4, 8)\}$$

به خاطر تکراری‌بودن حذف می‌شود.

پس در این حالت تابع f دارای ۳ عضو (زوج مرتب) است و داریم:

$$m+n+t = 2+4+8 = 14$$

با این‌که حالت قبل قطعاً جواب بود ولی یک بار هم با $m=2, n=-2$ و

$$f = \{(3, 8), (2, 8), (-9, 8), (4, 8)\}$$

در این حالت تابع ۴ عضوی شد؛ پس قابل قبول نیست!

۵۷۶. **منظورش اینه** تابع خطی با شیب صفر یعنی تابع ثابت

چون تابع ثابت است، پس اعداد سطر دوم جدول باید با هم برابر باشند:

$$1-a = d = a+5 = b+1$$

با برابری $1-a$ و $a+5$ شروع می‌کنیم:

$$a+5 = 1-a \Rightarrow 2a = -4 \Rightarrow a = -2$$

حالا $b+1$ را با $a+5$ برابر قرار می‌دهیم:

$$b+1 = a+5 \xrightarrow{a=-2} b+1 = 3 \Rightarrow b = 2$$

۵۷۷. باید اعدادی که به آن‌ها پیکان وارد شده، یکسان باشند:

$$\frac{a}{2} + b = \sqrt{a + \frac{3}{2}} = \frac{25+2b}{2} \quad \text{با } \frac{a}{2} + b \text{ و } \frac{25+2b}{2} \text{ شروع می‌کنیم:}$$

$$\frac{a}{2} + b = \frac{25+2b}{2} \xrightarrow{\times 2} a + 2b = 25 + 2b \Rightarrow a = 25$$

حالا $\sqrt{a + \frac{3}{2}} = \frac{25+2b}{2}$ را برابر قرار می‌دهیم:

$$\sqrt{a + \frac{3}{2}} = \frac{25+2b}{2} \xrightarrow{a=25} \sqrt{25 + \frac{3}{2}} = \frac{25+2b}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{13}{2} = \frac{25+2b}{2} \Rightarrow 13 = 25 + 2b \Rightarrow 2b = -12 \Rightarrow b = -6$$

۵۷۸. نمودار تابع ثابت، روی یک خط افقی قرار دارد. این شرط فقط در

۲ دیده می‌شود.

۵۷۹. از این‌که تابع ثابت f از نقطه $(2, -6)$ می‌گذرد، نتیجه می‌گیریم

برد تابع f ، $\{-6\}$ و ضابطه‌اش به صورت $f(x) = -6$ است.

در تساوی $f(1-a) = 2a-4$ ، عبارت $2a-4$ باید برابر -6 باشد:

$$2a-4 = -6 \Rightarrow 2a = -2 \Rightarrow a = -1$$

۵۸۰. در تابع ثابت، تمام خروجی‌ها (y ها) با هم برابرند؛ پس در این‌جا

باید $a+3$ و $2a-1$ برابر باشند:

$$2a-1 = a+3 \Rightarrow 2a-a = 3+1 \Rightarrow a = 4$$

۵۸۱. تابع f ثابت است؛ پس حق داریم جای تمام f ها، c قرار دهیم:

$$\frac{2f(1)-3f(4)}{9-f(0)} = 4 \Rightarrow \frac{2c-3c}{9-c} = 4 \Rightarrow \frac{-c}{9-c} = 4$$

$$\xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} -c = 36 - 4c \Rightarrow 4c - c = 36 \Rightarrow 3c = 36 \Rightarrow c = 12$$

پس ضابطه f به صورت $f(x) = 12$ است و در نتیجه:

۵۸۲. **۳**

از قیافش نترس اگر در تساوی داده شده، جای تمام f ها، c قرار

دهیم، تساوی داده‌شده ساده‌تر می‌شود.

$$f(4) + f(4^2) + f(4^3) = 1 - f(f(-4)) \Rightarrow c + c + c = 1 - c$$

$$\Rightarrow 4c = 1 \Rightarrow c = \frac{1}{4}$$

پس مقدار $f(8)$ هم همان $c = \frac{1}{4}$ است که با 2^{-2} برابر می‌باشد.

۵۸۳. **۴** تابعی ثابت است؛ پس ضابطه‌اش به صورت $f(x) = c$ است.

جای تمام f ها، c قرار می‌دهیم:

$$f(a+b) = f(a) + f(b) \Rightarrow c = c + c \Rightarrow c = c^2$$

$$\Rightarrow c^2 - c = 0 \xrightarrow{\text{فاکتور از } c} c(c-1) = 0 \Rightarrow c = 0, c = 1$$

پس مقدار $f\left(\frac{b}{a}\right)$ یا صفر است یا ۱.

۵۸۴. در ضابطه تابع ثابت f ، خبری از x نیست و فقط یک عدد خالی داریم!

ضریب x یعنی a باید صفر باشد: $f(x) = -2 \xrightarrow{a=0}$

پس مقدار این تابع به ازای هر x ورودی، -2 است:

۵۸۵. **۴** ضابطه f را ساده‌تر می‌نویسیم:

$$f(x) = a(x+2) - 4x + b = ax + 2a - 4x + b$$

در دو جمله ax و $-4x$ ، از x فاکتور می‌گیریم:

در تابع ثابت، x نباید داشته باشیم؛ پس ضریبش صفر است:

$$a - 4 = 0 \Rightarrow a = 4$$

با جای‌گذاری $a = 4$ ، ضابطه f به شکل زیر درمی‌آید:

$$f(x) = (a-4)x + 2a + b \xrightarrow{a=4} f(x) = 8 + b$$

$x = \frac{-1}{4}$ در محدوده $x < 0$ است؛ پس برای محاسبه $f(\frac{-1}{4})$ ، سراغ ضابطه

دوم می‌رویم:

$$f(x) = \frac{a}{x} \Rightarrow f(\frac{-1}{4}) = \frac{1}{\frac{-1}{4}} = -4a$$

$$f(\sqrt{3}-1) + 5f(\frac{-1}{4}) = -38 \Rightarrow 2 + 5(-4a) = -38 \Rightarrow 2 - 20a = -38 \Rightarrow -20a = -40 \Rightarrow a = 2$$

۵۹۱. ۱ چون نمی‌دانیم a در کدام یک از محدوده‌های $x \geq 1$ و $x < 1$ قرار دارد، باید هر دو حالت را حل کنیم و جواب به دست آمده را بررسی کنیم. فرض کنیم a در محدوده $x \geq 1$ است؛ پس برای محاسبه $f(a)$ در ضابطه اول یعنی $x+2$ ، جای x ، a می‌گذاریم:

$$f(x) = x+2 \Rightarrow f(a) = a+2 \Rightarrow 5 = a+2 \Rightarrow a = 3 \checkmark$$

$a = 3$ در محدوده $x \geq 1$ است؛ پس قابل قبول است.

فرض کنیم a در محدوده $x < 1$ است؛ پس برای محاسبه $f(a)$ در ضابطه دوم یعنی $2x-3$ ، جای x ، a می‌گذاریم:

$$f(x) = 2x-3 \Rightarrow f(a) = 2a-3 \Rightarrow 5 = 2a-3 \Rightarrow 2a = 8 \Rightarrow a = 4 \times$$

$a = 4$ در محدوده $x < 1$ قرار ندارد؛ پس قابل قبول نیست.

۵۹۲. ۴ دامنه ضابطه‌ها به صورت $x \geq 2$ و $x \leq 2$ است. $x = 2$ در هر دو ضابطه مشترک است. مقدار $f(2)$ را به کمک هر دو ضابطه حساب می‌کنیم:

$$f(2) = a(2)^2 + 2 = 4a + 2$$

$$f(2) = a - 2$$

این دو مقدار باید برابر باشند، چون در غیر این صورت f تابع نیست (به ازای $x = 2$ دو خروجی متفاوت می‌دهد):

$$4a + 2 = a - 2 \Rightarrow 3a = -4 \Rightarrow a = -\frac{4}{3}$$

۵۹۳. ۱

منظورش اینه

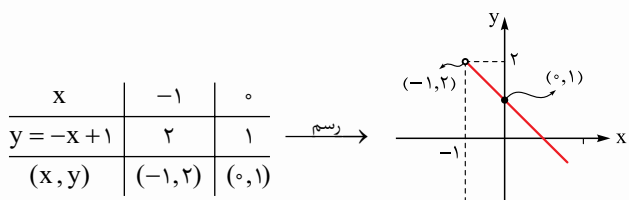
$$f(x) = \begin{cases} 4 & 0 \leq x < 3 \\ x+2 & 3 \leq x < 9 \\ x+3 & 9 \leq x \leq 16 \end{cases}$$

x تعداد ساعات حضور در پارکینگ است. اگر خودرویی بین صفر تا ۳ ساعت داخل پارکینگ باشد، ۴ واحد هزینه پرداخت می‌کند. اگر بین ۳ تا ۹ ساعت داخل پارکینگ باشد، معادل $x+2$ واحد هزینه پرداخت می‌کند و اگر بین ۹ تا ۱۶ ساعت داخل پارکینگ باشد، معادل $x+3$ واحد هزینه پرداخت می‌کند.

چون $17-9=8$ در محدوده $9 \leq x < 17$ قرار می‌گیرد، پس با ضابطه وسطی کار داریم:

پس این شخص ۱۰ واحد هزینه پرداخت می‌کند. چون هر واحد هزینه معادل با ۵۰۰۰ تومان بوده است، پس $5000 \times 10 = 50000$ تومان پرداخت می‌کند.

۵۹۴. ۱ ابتدا در محدوده $x > -1$ ، تابع $y = -x+1$ را رسم می‌کنیم. برای رسم خط کافی است دو نقطه از آن را داشته باشیم. بهتر است $x=1$ (که لب مرز است) و صفر (که در محدوده $x > -1$ قرار دارد) بدهیم.



پس مقدار تابع f به ازای هر x ورودی باید $a+b$ باشد؛ یعنی از $f(b) = \frac{b}{4}$ نتیجه می‌گیریم $\frac{b}{4}$ همان $a+b$ است:

$$a+b = \frac{b}{4} \xrightarrow{\times 4} 4a+4b = b \Rightarrow b = -4a$$

$$ab = 4 \times (-16) = -64$$

در نتیجه:

۵۸۶. ۲ صورت کسر را با اتحاد جمله‌مشتک و مخرج را با فاکتورگیری

تجزیه می‌کنیم:

$$f(x) = \frac{x^2 - 7x - 8}{2x+2} + ax = \frac{(x-8)(x+1)}{2(x+1)} + ax$$

$$= \frac{x-8}{2} + ax = \frac{x}{2} - \frac{8}{2} + ax$$

در جملات $\frac{x}{2}$ و ax از x فاکتور می‌گیریم:

$$f(x) = \frac{x}{2} + ax - 4 = x(\frac{1}{2} + a) - 4$$

چون f ثابت است، ضریب x باید صفر باشد:

$$\frac{1}{2} + a = 0 \Rightarrow a = -\frac{1}{2}$$

پس ضابطه f به صورت $f(x) = -4$ شد. در نتیجه:

$$a^2 \times f(a) = (\frac{-1}{2})^2 \times (-4) = \frac{1}{4} \times (-4) = -1$$

۵۸۷. ۱ f ، تابعی دوضابطه‌ای است.

ضابطه اول: دامنه‌اش اعداد بزرگ‌تر از یک ($x > 1$) و ضابطه‌اش، مجذور x ، یعنی x^2 است.

ضابطه دوم: دامنه‌اش مابقی اعداد، یعنی اعداد کوچک‌تر یا مساوی یک ($x \leq 1$) و ضابطه‌اش، قرینه x ، یعنی $-x$ است.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x > 1 \\ -x & x \leq 1 \end{cases}$$

۵۸۸. ۱ برای محاسبه $f(1)$ باید مقدار تابع را به ازای ورودی $x=1$ به دست آوریم. $x=1$ در محدوده $x < 2$ است؛ پس برای محاسبه $f(1)$ از ضابطه دوم استفاده می‌کنیم و جای x هایش ۱ را قرار می‌دهیم:

$$x < 2: f(x) = 2-3x \Rightarrow f(1) = 2-3(1) = 2-3 = -1$$

۵۸۹. ۲ عدد $\frac{5}{4}$ در محدوده $x \geq 1$ قرار دارد؛ پس برای محاسبه $f(\frac{5}{4})$ سراغ ضابطه بالایی می‌رویم:

$$x \geq 1: f(x) = 2x^2 - x \Rightarrow f(\frac{5}{4}) = 2(\frac{5}{4})^2 - \frac{5}{4} = \frac{25}{8} - \frac{5}{4} = \frac{25}{8} - \frac{10}{8} = \frac{15}{8} = 1\frac{7}{8}$$

۵۸۹. ۲ تقریباً $1/4$ است؛ پس $\sqrt{2}-2$ تقریباً $-0.6/4 = -0.15$ می‌شود که در محدوده $-1 < x < 1$ قرار دارد؛ پس برای محاسبه $f(\sqrt{2}-2)$ سراغ ضابطه وسطی می‌رویم:

$$-1 < x < 1: f(x) = 5 \Rightarrow f(\sqrt{2}-2) = 5$$

۵۸۹. ۲ عدد $-\frac{5}{4}$ در محدوده $x \leq -1$ قرار دارد؛ پس برای محاسبه $f(-\frac{5}{4})$ سراغ ضابطه پایینی می‌رویم:

$$x \leq -1: f(x) = -\sqrt{1-x} \Rightarrow f(-\frac{5}{4}) = -\sqrt{1+\frac{5}{4}} = -\sqrt{\frac{9}{4}} = -\frac{3}{2}$$

سه مقدار به دست آمده را در عبارت خواسته‌شده جای گذاری می‌کنیم:

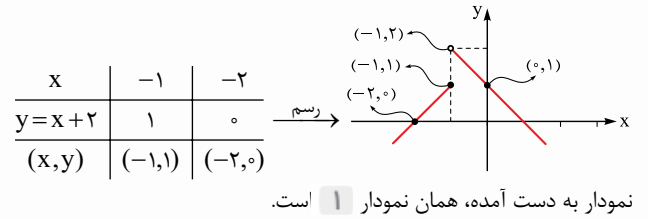
$$f(\frac{5}{4}) + f(\sqrt{2}-2) + 2f(-\frac{5}{4}) = 1\frac{7}{8} + 5 + 2(-\frac{3}{2}) = 1\frac{7}{8} - 3 = -\frac{5}{8}$$

۵۹۰. ۱ $\sqrt{3}$ تقریباً $1/7$ است، پس $x = \sqrt{3}-1 \approx 0.7$ در محدوده $x \geq 0$ است، در نتیجه برای محاسبه $f(\sqrt{3}-1)$ از ضابطه اول استفاده

می‌کنیم:

$$f(x) = x^2 + 2x \Rightarrow f(\sqrt{3}-1) = (\sqrt{3}-1)^2 + 2(\sqrt{3}-1) = (3+1-2\sqrt{3}) + 2\sqrt{3}-2 = 2$$

در محدوده $-1 \leq x$ ، تابع $y = x + 2$ را رسم می‌کنیم. بهتر است x را -1 (که لب مرز است) و -2 (که در محدوده $-1 \leq x$ قرار دارد) بدهیم:



نمودار به دست آمده، همان نمودار ۱ است.

نیزبازی به ازای $x = -1$ از ضابطه پایین خروجی می‌گیریم:

$$y = x + 2 = -1 + 2 = 1$$

پس نقطه $(-1, 1)$ باید روی نمودار باشد. در نتیجه ۲ و ۳ رد می‌شوند.

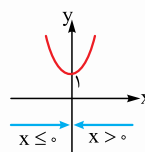
به ازای $x = 1$ از ضابطه بالایی خروجی می‌گیریم:

$$y = -x + 1 = -1 + 1 = 0$$

پس نقطه $(1, 0)$ باید روی نمودار باشد. از بین دو گزینه باقی‌مانده، فقط ۱ این شرط را دارد.

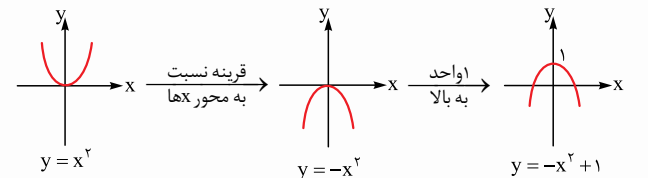
۵۹۵. ۴ هر ضابطه را در محدوده دامنه خودش رسم می‌کنیم.

اول سهمی $y = x^2 + 1$ را به ازای $x > 0$ رسم می‌کنیم.
برای رسم سهمی $y = x^2 + 1$ ، نمودار سهمی $y = x^2$ را یک واحد به بالا می‌بریم:



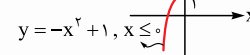
در محدوده $x > 0$ ، قسمت سمت چپ محور y ‌ها را حذف می‌شود و فقط سمت راست محور y ‌ها می‌ماند.

حالا باید سهمی $y = -x^2 + 1$ را به ازای $x \leq 0$ رسم کنیم. برای رسم سهمی $y = -x^2 + 1$ ، اول نمودار سهمی $y = x^2$ را نسبت به محور x ‌ها قرینه می‌کنیم (تا نمودار $y = -x^2$ به دست آید). بعد آن را یک واحد به بالا می‌بریم (تا نمودار $y = -x^2 + 1$ به دست آید).



در محدوده $x \leq 0$ ، قسمت سمت راست محور y ‌ها را حذف می‌شود و فقط سمت چپ آن می‌ماند.

حالا دو نمودار به دست آمده را در یک دستگاه رسم می‌کنیم:



نیزبازی مقدار تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & x > 0 \\ 1 - x^2 & x \leq 0 \end{cases}$ را در $x = -1$ حساب می‌کنیم.

$$\text{به ازای } x = -1 \text{ داریم: } 1 - (-1)^2 = 1 - 1 = 0$$

نقطه $(-1, 0)$ روی نمودار ۱، ۲ و ۳ نیست؛ پس جواب ۴ است.

۵۹۶. ۳ نمودارهای ۱ و ۴ نمی‌توانند جواب باشند؛ چون در این دو نمودار، در یک بازه زمانی، فاصله بهزاد از خانه ثابت مانده است و این به معنی آن است که بهزاد در مسیر توقف کرده است که این موضوع در داستان قید نشده است؛ پس جواب، ۲ یا ۳ است.

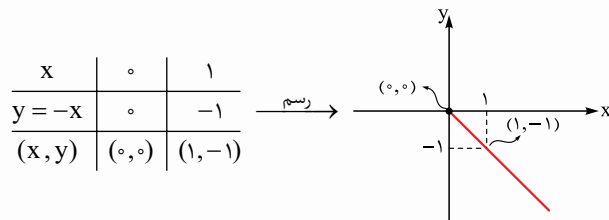
از آن جا که بهزاد ابتدا آهسته‌تر قدم می‌زد و سپس سرعت می‌گیرد، شیب قسمت اول باید کم‌تر از شیب قسمت دوم باشد.

در ۳، شیب قسمت اول، کم‌تر از شیب قسمت دوم است؛ پس جواب ۳ است.
قسمت اول: بهزاد آهسته از خانه دور می‌شود.

قسمت دوم: بهزاد با سرعت بیشتری به سمت پارک می‌رود و همچنان در حال دور شدن از خانه است!

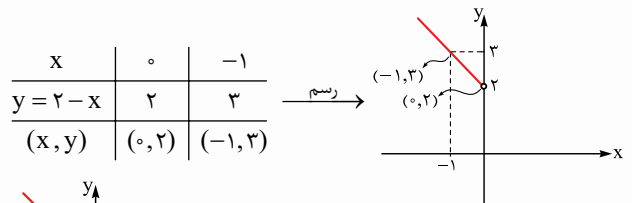
قسمت سوم: بهزاد به سمت خانه برمی‌گردد و فاصله‌اش از خانه رو به کم شدن است.
۵۹۷. ۴ تابعی دوضابطه‌ای است. این تابع دوضابطه‌ای را در دو بخش جدا رسم می‌کنیم.

ابتدا در محدوده $x \geq 0$ ، تابع $y = -x$ را رسم می‌کنیم. بهتر است x را صفر (که لب مرز است) و ۱ (که در محدوده $x \geq 0$ قرار دارد) بدهیم.

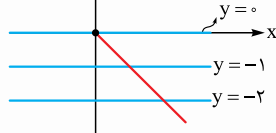


در محدوده $x < 0$ ، تابع $y = 2 - x$ را رسم می‌کنیم. بهتر است x را صفر (که لب مرز است) و -1 (که در محدوده $x < 0$ قرار دارد) بدهیم.

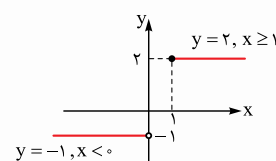
فقط دقت کنید در این حالت به ازای $x = 0$ ، نقطه‌ای که به دست می‌آید را باید توخالی بگذاریم. (چون خود $x = 0$ در محدوده دامنه ضابطه پایینی نیست).



حالا نمودار f (هر دو ضابطه) را به همراه چهار خط داده‌شده در گزینه‌ها رسم می‌کنیم:

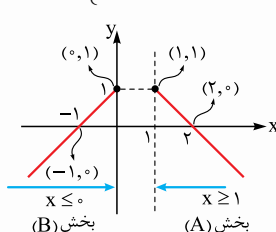


فقط خط $y = 1$ از بین این چهار خط، نمودار تابع f را قطع نمی‌کند.



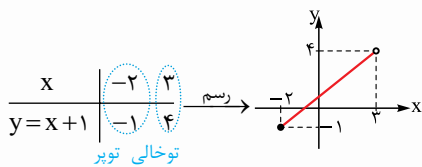
۵۹۸. ۳ تابع رسم‌شده از دو خط افقی تشکیل شده است. ضابطه خط‌های افقی به صورت « $y = \text{عددی}$ » است. به ازای $x \geq 1$ ، ضابطه $y = 2$ و به ازای $x < 0$ ، ضابطه $y = -1$ است.

پس ضابطه تابع به صورت مقابل است:

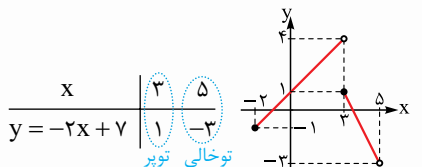


۵۹۹. ۴ تابع رسم‌شده از دو بخش تشکیل شده است. هر دو بخش یک خط هستند. برای به دست آوردن معادله یک خط، نیاز به شیب و یک نقطه از آن خط داریم:

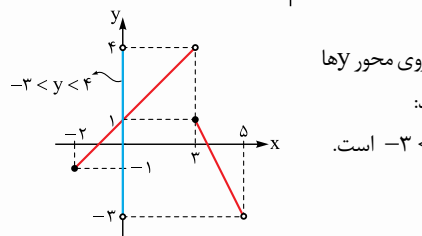
۶۰۱. ۱ نمودار هر ضابطه را در دامنه‌اش رسم می‌کنیم:



ضابطه اول یک خط راست است. با دادن x های سر و ته بازه، دو نقطه از آن را مشخص می‌کنیم:



ضابطه دوم هم یک خط راست است. همان کار را می‌کنیم و نمودار این بخش را به نمودار ضابطه بالایی اضافه می‌کنیم:



حالا نمودار به دست آمده را روی محور y ها می‌کوبیم تا برد به دست آید: پس برد محدوده $-3 < y < 4$ است.

۶۰۲. ۳ در تابع همانی به ازای هر عددی که وارد تابع می‌شود، همان عدد از تابع خارج می‌شود؛ پس در این جا باید ورودی $a + 3$ با خروجی $9 - 2a$ برابر باشد:

۶۰۳. ۴ در تابع همانی مؤلفه‌های اول و دوم هر زوج مرتب با هم برابرند. در زوج مرتب $(2, a-1)$ ، باید 2 با $a-1$ با هم برابر باشند:

در زوج مرتب $(-3, b+1)$ ، باید -3 با $b+1$ با هم برابر باشند:

۶۰۴. ۱ در زوج مرتب $(a-11, 7-a)$ ، مؤلفه اول و دوم را برابر قرار می‌دهیم:

در زوج مرتب $(6b, b^2 + a)$ ، مؤلفه اول و دوم را برابر قرار می‌دهیم:

در زوج مرتب $(c-a, \frac{b}{3} + 1)$ ، مؤلفه اول و دوم را برابر قرار می‌دهیم:

۶۰۵. ۱ در نمایش پیکانی تابع همانی، اعداد سر و ته پیکان باید با هم برابر باشند؛ پس:

حالا میانگین سه عدد a ، b و c را حساب می‌کنیم:

۶۰۶. ۳ نمودار تابع همانی حتماً روی خط $y = x$ (نیمساز ربع اول و سوم) یا بخشی از نیمساز $y = x$ باشد.

بین گزینه‌ها تنها نموداری که روی $y = x$ قرار دارد، ۳ است.

۶۰۷. ۲ از $f(a) = 8 - a$ می‌فهمیم که نقطه $(a, 8 - a)$ روی تابع f است. چون f همانی است، پس باید مؤلفه x و y نقاط آن با هم برابر باشند:

۶۰۸. ۲ فقط خروجی ۲ و ۴، عدد ۱ می‌شود؛ پس دو گزینه دیگر حذف می‌شوند.

نقطه $(-4, 0)$ روی تابع است که در بین دو گزینه باقی‌مانده، فقط در صدق می‌کند.

نقطه $(1, 1)$ روی نمودار تابع است. در بین گزینه‌ها با جای گذاری $x = 0$ ، فقط خروجی ۲ و ۴، عدد ۱ می‌شود؛ پس دو گزینه دیگر حذف می‌شوند.

نقطه $(-4, 0)$ روی تابع است که در بین دو گزینه باقی‌مانده، فقط در صدق می‌کند.

بخش (A): یک خط است که از دو نقطه $(2, 0)$ و $(1, 1)$ گذشته است. شیب آن را به دست می‌آوریم:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{1 - 0}{1 - 2} = \frac{1}{-1} = -1$$

حالا با داشتن شیب و یک نقطه از خط (مثلاً $(2, 0)$) معادله خط را می‌نویسیم:

$$y - y_1 = m(x - x_1) \Rightarrow y - 0 = -1(x - 2) \Rightarrow y = -x + 2$$

پس ضابطه اول به صورت $y = -x + 2$ با شرط دامنه $x \geq 1$ است.

بخش (B): یک خط است که از دو نقطه $(0, 1)$ و $(-1, 0)$ می‌گذرد. شیب آن را حساب می‌کنیم:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{1 - 0}{0 - (-1)} = \frac{1}{1} = 1$$

با داشتن شیب و یک نقطه از خط (مثلاً $(-1, 0)$) معادله خط را می‌نویسیم:

$$y - y_1 = m(x - x_1) \Rightarrow y - 0 = 1(x - (-1)) \Rightarrow y = x + 1$$

پس ضابطه دوم هم به صورت $y = x + 1$ با شرط دامنه $x \leq 0$ است. در نهایت ضابطه f به صورت مقابل به دست می‌آید:

$$f(x) = \begin{cases} -x + 2 & x \geq 1 \\ x + 1 & x \leq 0 \end{cases}$$

تیزبازی: نقطه $(1, 1)$ روی نمودار تابع است. در بین گزینه‌ها با جای گذاری $x = 1$ ، فقط خروجی ۳ و ۴، عدد ۱ می‌شود؛ پس دو گزینه دیگر حذف می‌شوند.

نقطه $(-1, 0)$ نیز روی تابع است که در بین دو گزینه باقی‌مانده، فقط در صدق می‌کند.

۶۰۰. ۴ نمودار رسم شده از دو بخش تشکیل شده است. بخش سمت راست مربوط به یک سهمی و بخش سمت چپ مربوط به یک خط است:

بخش (A): از روی نمودار سهمی $y = x^2$ به دست می‌آید:

بخش (B): قسمت سمت راست همین شکل است؛ یعنی همین شکل با دامنه $x \geq 0$:

بخش (B): یک خط است که از دو نقطه $(0, 2)$ و $(-4, 0)$ می‌گذرد. شیب آن برابر است با:

$$m = \frac{0 - 2}{-4 - 0} = \frac{-2}{-4} = \frac{1}{2}$$

با داشتن شیب $(m = \frac{1}{2})$ و عرض از مبدأ $(h = 2)$ معادله خط به صورت $y = \frac{1}{2}x + 2$ درمی‌آید. پس ضابطه دوم هم به شکل $y = \frac{x}{2} + 2$ با دامنه $x < 0$ است.

در نتیجه:

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & x \geq 0 \\ \frac{x}{2} + 2 & x < 0 \end{cases}$$

تیزبازی: نقطه $(0, 1)$ روی تابع است. در بین گزینه‌ها با جای گذاری $x = 0$ ، فقط خروجی ۲ و ۴، عدد ۱ می‌شود؛ پس دو گزینه دیگر حذف می‌شوند.

نقطه $(-4, 0)$ روی تابع است که در بین دو گزینه باقی‌مانده، فقط در صدق می‌کند.

نقطه $(0, 1)$ روی نمودار تابع است. در بین گزینه‌ها با جای گذاری $x = 0$ ، فقط خروجی ۲ و ۴، عدد ۱ می‌شود؛ پس دو گزینه دیگر حذف می‌شوند.

نقطه $(-4, 0)$ روی تابع است که در بین دو گزینه باقی‌مانده، فقط در صدق می‌کند.

چون $a = 4$ شد، پس $-a = -4$ است. حالا $f(-a)$ را حساب می‌کنیم:

$$f(-a) = f(-4) \stackrel{\text{همانی}}{=} -4$$

۶۰۸. f تابعی ثابت است؛ پس جای تمام f ها، c قرار می‌دهیم:

$$\frac{4f(2) + g(8)}{f(x) - g(-1)} = g(2) \Rightarrow \frac{4c + g(8)}{c - g(-1)} = g(2)$$

از طرفی g تابعی همانی است؛ پس $g(a)$ برابر با a است: $\frac{4c + 8}{c - (-1)} = 2$ معادله بالا را طرفین وسطین می‌کنیم:

$$\frac{4c + 8}{c + 1} = 2 \Rightarrow 4c + 8 = 2c + 2 \Rightarrow 4c - 2c = 2 - 8 \Rightarrow 2c = -6 \Rightarrow c = -3$$

یعنی ضابطه تابع ثابت f به صورت $f(x) = -3$ است و در نتیجه: $f(0) = -3$

۶۰۹. 2 نقطه $A(2-3a, a+10)$ روی تابع همانی g قرار دارد؛ پس طول و عرضش برابر است: $2-3a = a+10 \Rightarrow -4a = 8 \Rightarrow a = -2$

با جای گذاری $a = -2$ ، نقطه A به صورت زیر می‌شود:

$$A(2-3a, a+10) \Rightarrow A(8, 8)$$

چون نقطه $(8, 8)$ روی تابع ثابت f قرار دارد و ضابطه تابع ثابت به صورت $f(x) = c$ است، پس c باید 8 باشد:

$$f(a) + g\left(\frac{a}{2}\right) = f(-2) + g(-1) = 8 + (-1) = 7$$

۶۱۰. 3 ضابطه تابع همانی به صورت $f(x) = x$ است؛ پس ضریب x باید 1 و عددی که بعد از x می‌آید (یا همان عدد ثابت) باید صفر باشد:

$$f(x) = (a-1)x + \underbrace{b+2}_{\text{صفر}} \Rightarrow \begin{cases} a-1=1 \Rightarrow a=2 \\ b+2=0 \Rightarrow b=-2 \end{cases}$$

پس: $a-b = 2 - (-2) = 4$

۶۱۱. 4

از قیافش نترس فقط کافیه کسر داده شده را مساوی x بگذاریم و طرفین وسطین کنیم.

ضابطه تابع داده شده را برابر با x قرار می‌دهیم و طرفین وسطین می‌کنیم:

$$\frac{2x^3 + 3x^2 + cx + d}{ax^2 + bx - 1} = x \Rightarrow 2x^3 + 3x^2 + cx + d = ax^3 + bx^2 - 1x$$

حالا ضرایب عبارت‌های هم‌درجه در دو طرف تساوی را با هم برابر قرار می‌دهیم:

$$2x^3 + 3x^2 + cx + d = ax^3 + bx^2 - 1x + 0$$

$$a+b+c+d = 2+3+(-1)+0 = 4$$

۶۱۲. 2

از قیافش نترس اگر در ضابطه f ، جملات هم‌درجه را کنار هم بنویسیم، کار ساده‌تر می‌شود.

ضابطه f را باز می‌کنیم:

$$f(x) = a(x+1)^2 + x^2 + bx + c + 3 = a(x^2 + 2x + 1) + x^2 + bx + c + 3 = ax^2 + 2ax + a + x^2 + bx + c + 3$$

عبارت‌های هم‌درجه را کنار هم می‌نویسیم:

$$f(x) = \underbrace{ax^2}_{\text{صفر}} + \underbrace{2ax + bx}_{\text{1}} + \underbrace{a + c + 3}_{\text{صفر}} = (a+1)x^2 + (2a+b)x + (a+c+3)$$

طبق ضابطه تابع همانی، باید ضریب x^2 و عدد ثابت انتهایی صفر و ضریب x یک باشد:

$$\underbrace{(a+1)}_{\text{صفر}} x^2 + \underbrace{(2a+b)}_1 x + \underbrace{(a+c+3)}_{\text{صفر}}$$

پس:

$$1)a+1=0 \Rightarrow a=-1$$

$$2)2a+b=1 \xrightarrow{a=-1} -2+b=1 \Rightarrow b=3$$

$$3)a+c+3=0 \xrightarrow{a=-1} -1+c+3=0 \Rightarrow c=-2$$

$$\frac{a+b}{c} = \frac{-1+3}{-2} = \frac{2}{-2} = -1$$

در نتیجه:

۶۱۳. 3 نقطه‌ای که روی نیمساز ربع اول و سوم است، مؤلفه اول و دوم زوج

مرتبط با هم برابرند؛ پس برای آن که نقطه $(4m-3, 2m+7)$ روی نیمساز ربع اول و سوم باشد، باید:

$$4m-3 = 2m+7 \Rightarrow 4m-2m = 7+3 \Rightarrow 2m = 10 \Rightarrow m = 5$$

۶۱۴. 1 اگر نقطه‌ای روی نیمساز ناحیه سوم باشد، دارای طول (x) و عرض (y)

برابر است. در این‌جا هم که نقطه $(m, m^2 - m - 8)$ روی نیمساز ناحیه سوم

است، پس باید m و $m^2 - m - 8$ با هم برابر باشند:

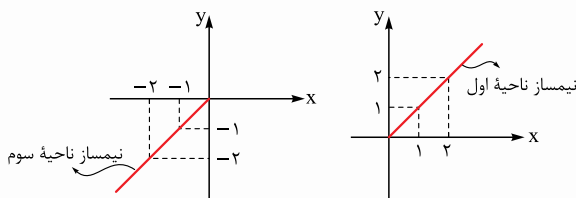
$$m^2 - m - 8 = m \Rightarrow m^2 - 2m - 8 = 0$$

$$\xrightarrow{\text{جمله مشترک}} (m-4)(m+2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} m = 4 \\ m = -2 \end{cases}$$

دقت کنید اگر نقطه‌ای روی نیمساز ناحیه اول باشد، دارای طول و عرض برابر

با علامت مثبت است و اگر نقطه‌ای روی نیمساز ناحیه سوم باشد، دارای طول و

عرض برابر با علامت منفی است.



پس در این‌جا که نقطه روی نیمساز ناحیه سوم است، طول و عرض باید هر دو

منفی باشند. طول نقطه $(m, m^2 - m - 8)$ ، برابر با m است؛ پس m باید

عددی منفی باشد. در نتیجه $m = -2$ قبول است و $m = 4$ رد می‌شود.

۶۱۵. 1 اگر نقطه‌ای روی نیمساز ناحیه اول و سوم باشد، مؤلفه اول و دومش

یکسان است.

• برای نقطه $(n^2 - 3n, 4)$ ، طول و عرض را برابر قرار می‌دهیم:

$$n^2 - 3n = 4 \Rightarrow n^2 - 3n - 4 = 0$$

$$\xrightarrow{\text{جمله مشترک}} (n-4)(n+1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} n = 4 \\ n = -1 \end{cases}$$

• برای نقطه $(n^2 + n, 20)$ ، طول و عرض را برابر قرار می‌دهیم:

$$n^2 + n = 20 \Rightarrow n^2 + n - 20 = 0$$

$$\xrightarrow{\text{جمله مشترک}} (n+5)(n-4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} n = -5 \\ n = 4 \end{cases}$$

از معادله اول، مقدار n ، برابر با « 4 و « -1 » و از معادله دوم، مقدار n ، برابر با « 4 و « -5 »

شد. برای آن‌که هر دو معادله برقرار باشند، باید جواب مشترک این دو معادله

یعنی $n = 4$ را در نظر بگیریم.

• برای نقطه $(1, m+n)$ ، طول و عرض را برابر قرار می‌دهیم:

$$m+n=1 \xrightarrow{n=4} m+4=1 \Rightarrow m=-3$$

۶۱۶. 3

استراتژی y همه زوج مرتب‌ها را برابر قرار دهید. از دوتا n به دست آمده،

اونی که عدد طبیعی شده را قبول می‌کنیم. بعد m باید طوری انتخاب شود

که تا از مؤلفه‌های اول هم تکراری شوند. (چون تابع 2 عضوی است.)

(۲) یک بار هم $a-6$ منهای $2a+1$ را برابر ۵ می‌گذاریم:

$$(a-6)-(2a+1)=5 \Rightarrow -a-7=5 \Rightarrow a=-12$$

مقدار $\left[\frac{b}{a}\right]$ را در دو حالت حساب می‌کنیم:

حالت اول: $\left. \begin{matrix} b=6 \\ a=-2 \end{matrix} \right\} \Rightarrow \left[\frac{b}{a}\right] = \left[\frac{6}{-2}\right] = [-3] = -3$

حالت دوم: $\left. \begin{matrix} b=6 \\ a=-12 \end{matrix} \right\} \Rightarrow \left[\frac{b}{a}\right] = \left[\frac{6}{-12}\right] = [-0.5] = -1$

بیشترین مقدارش ۱- است.

۲. ۶۱۹

یادآوری اگر انحراف معیار تعدادی داده صفر باشد، آن داده‌ها برابرند.

انحراف معیار اعضای برد f صفر است؛ پس اعضای برد f یکسان بوده‌اند و در نتیجه f تابعی ثابت است.

چون f تابعی ثابت است، پس جای تمام $(c, f(c))$ ها، $f(c)$ قرار می‌دهیم:

$$3f(a)f(b)=f(a)+f(b)+16 \Rightarrow 3c^2=2c+16 \Rightarrow 3c^2-2c-16=0$$

A B C

دلتا و بعدش ریشه‌ها را حساب می‌کنیم:

$$\Delta = B^2 - 4AC = (-2)^2 - 4(3)(-16) = 4 + 192 = 196 = 14^2$$

$$c = \frac{-B \pm \sqrt{\Delta}}{2A} = \frac{-(-2) \pm \sqrt{14^2}}{2(3)} = \frac{2 \pm 14}{6} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = \frac{16}{6} = \frac{8}{3} \\ c_2 = \frac{-12}{6} = -2 \end{cases}$$

(۱) یک بار ضابطه f به صورت $f(x) = \frac{8}{3}$ است. در این حالت داریم:

$$f(a)+f(b) = \frac{8}{3} + \frac{8}{3} = \frac{16}{3}$$

(۲) یک بار هم ضابطه f به صورت $f(x) = -2$ است. در این حالت داریم:

$$f(a)+f(b) = (-2) + (-2) = -4$$

$$\frac{16}{3} + (-4) = \frac{16}{3} + \frac{-12}{3} = \frac{4}{3}$$

مجموع مقادیر بالا برابر است با:

۳. ۶۲۰

منظورش اینه برد تابع ... مجموعه $\{c\}$ است. یعنی $\leftarrow$ برد تابع ...

تک‌عضوی است. یعنی $\leftarrow$ تابع ... ثابت است.

در تابع ثابت، ضرب X و X^2 باید صفر باشد (کلاً نباید هیچ توانی از X داشته باشیم):

$$f(x) = \underbrace{(a-1)}_{\text{صفر}} x^2 + \underbrace{(b+3)}_{\text{صفر}} x + b - a$$

$$x^2 \text{ ضرب } 0 \Rightarrow a-1=0 \Rightarrow a=1$$

$$x \text{ ضرب } 0 \Rightarrow b+3=0 \Rightarrow b=-3$$

پس ضابطه f به صورت زیر است:

$$f(x) = b - a \xrightarrow{a=1, b=-3} f(x) = -3 - 1 = -4$$

در نتیجه برد f ، مجموعه تک‌عضوی $\{-4\}$ است؛ پس $C = -4$.

$$\text{رابطه داده‌شده را می‌نویسیم: } \left\{ (-a^2, k+c), \left(\frac{c}{3}, 1-k\right), \left(\frac{b}{3}, 2k-7\right) \right\}$$

$$\xrightarrow{a=1, b=-3, c=-4} \left\{ (-1, k-4), \left(\frac{-4}{3}, 1-k\right), \left(\frac{-3}{3}, 2k-7\right) \right\}$$

دو زوج مرتب $(-1, k-4)$ و $\left(\frac{-3}{3}, 2k-7\right)$ ، مؤلفه‌های اول یکسانی دارند؛

$$2k-7 = k-4 \Rightarrow k=3$$

پس مؤلفه‌های دومشان هم باید برابر باشند:

در تابع ثابت، مؤلفه دوم زوج مرتب‌ها با هم برابر است؛ پس در تابع $f = \{(m+3n, 2t^2), (-2, n^2+2n), (1-3m, 8)\}$ باید $2t^2 = 8 \Rightarrow t^2 = 4$

۸ برابر باشند:

$$n^2 + 2n = 8 \Rightarrow n^2 + 2n - 8 = 0$$

$$\xrightarrow{\text{تجزیه با جمله مشترک}} (n+4)(n-2) = 0 \xrightarrow{n \in \mathbb{N}} \begin{cases} n = -4 \times \\ n = 2 \checkmark \end{cases}$$

به ازای $n=2$ و $t^2=4$ ، تابع به صورت زیر است:

$$f = \{(m+6, 8), (-2, 8), (1-3m, 8)\}$$

برای آن که دامنه تابع، ۲ عضو باشد باید از بین سه عضو دامنه (یعنی $m+6$ ، -2 و $1-3m$)، دوتا شبیه هم باشند. حواستان هم باشد که m باید عدد طبیعی باشد. چند حالت ممکن را بررسی می‌کنیم:

$$(1) \quad m+6 = -2 \Rightarrow \underbrace{m = -8}_{\text{طبیعی نیست}} \times$$

$$(2) \quad 1-3m = -2 \Rightarrow -3m = -3 \Rightarrow m = 1 \checkmark$$

$$(3) \quad m+6 = 1-3m \Rightarrow 4m = -5 \Rightarrow \underbrace{m = \frac{-5}{4}}_{\text{طبیعی نیست}} \times$$

پس $m=1$ است و تابع به شکل زیر می‌شود:

$$f = \{(m+6, 8), (-2, 8), (1-3m, 8)\}$$

از بین دو زوج مرتب تکراری، یکی را حذف می‌کنیم: $f = \{(7, 8), (-2, 8)\}$
مجموع اعضای دامنه f را حساب می‌کنیم: $7 + (-2) = 5$

۶۱۷. ۲ وقتی تابع ثابت از نقطه $(5, 2)$ عبور می‌کند یعنی بردش $\{2\}$ است، پس خروجی‌اش به ازای تمام ورودی‌ها ۲ می‌باشد؛ بنابراین:

$$f(1) = f(2) = \dots = f(10) = 2$$

الان قرار است میانگین اعداد زیر را حساب کنیم:

$$\underbrace{f(1)+1}_{2+1}, \underbrace{f(2)+2}_{2+2}, \underbrace{f(3)+3}_{2+3}, \dots, \underbrace{f(10)+10}_{2+10}$$

یادآوری از آمار می‌دانیم اگر به همه داده‌ها k واحد اضافه شود، به میانگینشان هم k واحد اضافه می‌شود.

اعداد بالا همان اعداد ۱ تا ۱۰ هستند که به هر کدام ۲ واحد اضافه شده است.

میانگین اعداد ۱ تا ۱۰، میانگین دو عدد وسطشان یعنی ۵ و ۶ است که برابر با $\frac{5+6}{2} = \frac{11}{2}$ می‌شود. حالا به $5/5$ ، 2 واحد اضافه می‌کنیم تا میانگین این اعداد به دست آید:

$$5/5 + 2 = 7/5$$

۶۱۸. ۱ باید عرض دو نقطه $(2a+1, 13-2b)$ و $(a-b, b-5)$ که روی یک تابع ثابت قرار دارند، یکسان باشد:

$$b-5 = 13-2b \Rightarrow 3b = 18 \Rightarrow b = 6$$

با جای‌گذاری $b=6$ ، مختصات دو نقطه را می‌نویسیم:

$$(2a+1, 13-2b) \xrightarrow{b=6} (2a+1, 1)$$

$$(a-b, b-5) \xrightarrow{b=6} (a-6, 1)$$

از آن جایی که با دو نقطه با عرض یکسان روبه‌رو هستیم، برای آن که فاصله دو نقطه ۵ واحد باشد، باید اختلاف طول دو نقطه ۵ باشد؛ پس دو حالت داریم:

$$(1) \quad \text{یک بار } 2a+1 \text{ منهای } a-6 \Rightarrow a+7=5 \Rightarrow a=-2$$

$$(2a+1) - (a-6) = 5 \Rightarrow a+7=5 \Rightarrow a=-2$$

$$f(x) = (2x+a)(x-2) + bx^2 + 7x = 2x^2 - 4x + ax - 2a + bx^2 + 7x$$

جملات هم‌درجه را کنار هم می‌نویسیم:

$$f(x) = \underbrace{2x^2 + bx^2}_{\text{فاکتور از } x^2} - 4x + ax + 7x - 2a$$

$$= (2+b)x^2 + (-4+a+7)x - 2a = (2+b)x^2 + (3+a)x - 2a$$

ضریب x^2 و x باید صفر باشد:

$$\begin{cases} 2+b=0 \Rightarrow b=-2 \\ 3+a=0 \Rightarrow a=-3 \end{cases}$$

پس ضابطه f به شکل زیر است:

$$f(x) = \underbrace{(2+b)x^2}_{\text{حذف}} + \underbrace{(3+a)x}_{\text{حذف}} - \underbrace{2a}_{-3} = -2(-3) = 6$$

ضابطه f به شکل $f(x) = 6$ شد؛ پس هر جا f دیدیم، جایش ۶ قرار می‌دهیم:

$$f(5) + 4f(1) = 6 + 24 = 30$$

از قیافش نترس باید ببینید $-a^2$ و $a^2 + \sqrt{2}$ در کدام محدوده دامنه قرار می‌گیرند.

هر عددی به توان عدد زوج برسد، جوابش عددی بزرگ‌تر یا مساوی صفر است؛ پس a^2 همیشه بزرگ‌تر یا مساوی صفر است: $a^2 \geq 0$. در نتیجه قرینه‌اش یعنی $-a^2 \leq 0$ همیشه کوچک‌تر یا مساوی صفر است:

برای محاسبه مقدار تابع f به ازای اعداد کوچک‌تر یا مساوی صفر باید به سراغ ضابطه دوم برویم، چون این اعداد در محدوده $x < 1$ قرار دارند. از آن جایی که خروجی این ضابطه، عدد ثابت ۲ است، پس:

$$f(-a^2) = 2$$

از طرفی اگر به دو طرف نامساوی $a^2 \geq 0$ ، عدد $\sqrt{2}$ را اضافه کنیم به $\sqrt{2} \geq a^2 + \sqrt{2}$ می‌رسیم. چون $a^2 + \sqrt{2} \geq 1/4$ از ۱/۴ بزرگ‌تر است، پس از ۱ هم بزرگ‌تر است (یعنی مربوط به ضابطه‌ای می‌شود که دامنه‌اش $x > 1$ است).

در نتیجه برای محاسبه $f(a^2 + \sqrt{2})$ سراغ ضابطه اول می‌رویم که خروجی‌اش عدد ۱- است:

$$f(-a^2) - f(a^2 + \sqrt{2}) = 2 - (-1) = 3$$

تیزبازی جای a هر عددی دوست داریم قرار می‌دهیم؛ مثلاً a را صفر می‌دهیم:

$$f(-a^2) - f(a^2 + \sqrt{2}) \xrightarrow{a=0} f(0) - f(\sqrt{2}) = 2 - (-1) = 3$$

ضابطه بالا ضابطه پایین

۶۲۳. ۲ $x = -14$ در دامنه $x < 1$ قرار دارد؛ پس برای محاسبه $f(-14)$

از ضابطه پایینی استفاده می‌کنیم:

$$x < 1: f(x) = \sqrt{8-2x} \Rightarrow f(-14) = \sqrt{8-2(-14)} = \sqrt{8+28} = \sqrt{36} = 6$$

۶ $x = 6$ در دامنه $x \geq 1$ قرار دارد؛ پس برای محاسبه $f(6)$ از ضابطه بالایی استفاده می‌کنیم:

$$x \geq 1: f(x) = \sqrt[3]{4x+a} \Rightarrow f(6) = \sqrt[3]{4(6)+a} = \sqrt[3]{24+a}$$

مقادیر به دست آمده را در تساوی $f(-14) + f(6) = 9$ جای‌گذاری می‌کنیم:

$$6 + \sqrt[3]{24+a} = 9 \Rightarrow \sqrt[3]{24+a} = 3$$

زیر رادیکال باید چه عددی باشد تا فرجه سوم آن ۳ باشد؟ باید 3^3 یعنی ۲۷ باشد؛ پس $24+a = 27 \Rightarrow a = 3$ قرار می‌دهیم:

برای محاسبه $f(a)$ که همان $f(3)$ است باید سراغ ضابطه بالا برویم:

$$x \geq 1: f(x) = \sqrt[3]{4x+3} \Rightarrow f(3) = \sqrt[3]{4(3)+3} = \sqrt[3]{15}$$

حالا باید جزء صحیح $\sqrt[3]{15}$ را حساب کنیم. چون $3^3 < 15 < 4^3$ است، پس $3 < \sqrt[3]{15} < 4$ و در نتیجه: $[\sqrt[3]{15}] = [2/\dots] = 2$

۶۲۴. ۲ برای a ، دو حالت در نظر می‌گیریم:

حالت اول: اگر $a < 1$ باشد، برای محاسبه $f(a)$ سراغ ضابطه بالایی می‌رویم. خروجی‌اش $a^2 - 2a$ می‌شود و آن را با ۲۴ برابر می‌گذاریم:

$$a^2 - 2a = 24 \Rightarrow a^2 - 2a - 24 = 0 \Rightarrow (a-6)(a+4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a=6 \\ a=-4 \end{cases}$$

جوابی که در محدوده $a < 1$ است قبول می‌باشد: $a = -4$

حالت دوم: اگر $a \geq 1$ باشد، برای محاسبه $f(a)$ سراغ ضابطه پایینی می‌رویم. خروجی‌اش $a^2 + 10a$ می‌شود و آن را با ۲۴ برابر می‌گذاریم:

$$a^2 + 10a = 24 \Rightarrow a^2 + 10a - 24 = 0 \Rightarrow (a+12)(a-2) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a=-12 \\ a=2 \end{cases}$$

جوابی که در محدوده $a \geq 1$ است قبول می‌باشد: $a = 2$

مجموع مقادیر a برابر است با: $-4 + 2 = -2$

۶۲۵. ۴ برای آن‌که ضابطه به فرم $\begin{cases} A & x \geq a \\ B & x \leq a \end{cases}$ تابع باشد، باید مقدار A

و B به ازای $x = a$ برابر باشد. در هر دو ضابطه بالا و پایین، جای a قرار

$$\text{می‌دهیم: } x^2 + 2x - 7 \xrightarrow{x=a} a^2 + 2a - 7$$

$$x^2 - 4x + 11 \xrightarrow{x=a} a^2 - 4a + 11$$

باید دو مقدار به دست آمده برابر باشند (در غیر این صورت، f تابع نیست):

$$a^2 + 2a - 7 = a^2 - 4a + 11 \Rightarrow 2a + 4a = 11 + 7$$

$$\Rightarrow 6a = 18 \Rightarrow a = 3$$

برای به دست آوردن $f(\sqrt{3})$ باید سراغ ضابطه با دامنه $x \leq 3$ برویم.

تقریباً ۰/۲

تیزبازی اگر جای ۱۱، بنویسیم $4+7$ و بعد در آن مربع کامل بسازیم،

می‌توانیم با محاسبات کم‌تری به خواسته سؤال برسیم:

$$x \leq 3: f(x) = x^2 - 4x + 11 = x^2 - 4x + 4 + 7 = (x-2)^2 + 7$$

مربع کامل

$$\xrightarrow{x=2-\sqrt{3}} f(2-\sqrt{3}) = (2-\sqrt{3}-2)^2 + 7 = (-\sqrt{3})^2 + 7 = 3 + 7 = 10$$

۶۲۶. ۴ برای آن‌که یک تابع دوضابطه‌ای، تابعی ثابت باشد، باید هر دو

ضابطه‌اش یک عدد یکسان باشند.

در ضابطه اول، باید ضریب x صفر باشد:

$$a-1=0 \Rightarrow a=1$$

در ضابطه دوم، باید ضریب x^2 صفر باشد:

$$b+3a=0 \xrightarrow{a=1} b+3=0 \Rightarrow b=-3$$

با جای‌گذاری $a=1$ و $b=-3$ ، ضابطه f به شکل زیر درمی‌آید:

$$f(x) = \begin{cases} (a-1)x + 4 + 2b & x > 2 \\ (b+3a)x^2 + c & x \leq 2 \end{cases} = \begin{cases} 4 + 2b & x > 2 \\ c & x \leq 2 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{b=-3} \begin{cases} -2 & x > 2 \\ c & x \leq 2 \end{cases} \xrightarrow{\text{تابع ثابت (ضابطه‌ها یکسان)}} c = -2$$

$$a+b+c = 1 + (-3) + (-2) = -4$$

در نتیجه:

از قیافش نترس اگر نمودار f را بکشید، شکل محصور بین f و محور x ها

برایتان آشناست.

$$n = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{3 \pm 5}{2(2)} \Rightarrow \begin{cases} n_1 = \frac{8}{4} = 2 \\ n_2 = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2} \end{cases} \quad \text{ریشه‌ها برابر است با:}$$

حالا سراغ $(m+3n, 2)$ می‌رویم. باید $m+3n$ و 2 برابر باشند:

$$m+3n=2 \Rightarrow m=2-3n$$

به ازای هر دو مقدار n مقدار m را حساب می‌کنیم:

$$m_1 = 2-3n_1 = 2-3(2) = 2-6 = -4 \quad (1) \text{ اگر } n_1 = 2 \text{ باشد:}$$

$$m_2 = 2-3n_2 = 2-3(-\frac{1}{2}) = 2+\frac{3}{2} = \frac{7}{2} \quad (2) \text{ اگر } n_2 = -\frac{1}{2} \text{ باشد:}$$

در آخر هم نوبت $(m, -t^2)$ است. باید $m = -t^2$ باشد. از آنجایی که $t^2 \geq 0$ ، پس $-t^2 \leq 0$ است و m نیز باید عددی کوچک‌تر یا مساوی صفر باشد؛ پس $m_1 = -4$ قبول است (و در n ها هم $n_1 = 2$ قبول است). در نتیجه:

$$m = -t^2 \Rightarrow -4 = -t^2 \Rightarrow t^2 = 4 \Rightarrow t = \pm 2$$

با داشتن $n = 2$ و $m = -4$ ، برای آن‌که میانگین m و n صفر شود (میانگین زمانی صفر می‌شود که جمعشان صفر باشد)، فقط $t = 2$ قبول است.

۶۳۰. **۴** در تابع همانی، مؤلفه‌های اول و دوم هر زوج مرتب با هم برابرند:

$$1)(n^2+2n, 8) \Rightarrow n^2+2n=8 \Rightarrow n^2+2n-8=0$$

$$\Rightarrow (n+4)(n-2)=0 \Rightarrow \begin{cases} n=-4 \quad \times (n \in \mathbb{N}) \\ n=2 \quad \checkmark \end{cases}$$

$$2)(n+3, k) \Rightarrow n+3=k \xrightarrow{n=2} k=5$$

تا این‌جا تابع به شکل $f = \{(\lambda, 8), (5, 5), (m+7, t)\}$ درآمد.

چون تابع دوعضوی است، پس $m+7$ باید با 5 یا 8 برابر باشد.

$$\begin{cases} m+7=5 \Rightarrow m=-2 \quad \times (m \in \mathbb{N}) \\ m+7=8 \Rightarrow m=1 \quad \checkmark \end{cases}$$

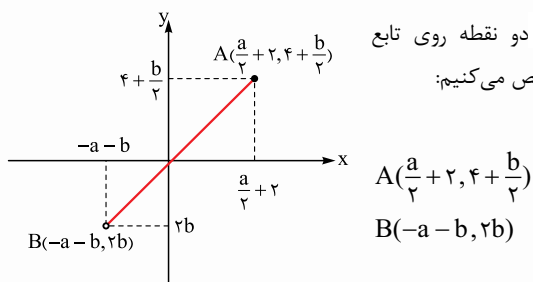
حالا مؤلفه‌های زوج مرتب سوم را برابر قرار می‌دهیم:

$$(m+7, t) \Rightarrow m+7=t \xrightarrow{m=1} t=8$$

$$m+t+k=1+8+5=14$$

پس:

۶۳۱. **۳** دو نقطه روی تابع همانی مشخص می‌کنیم:



طول و عرض نقطه A را برابر قرار می‌دهیم:

$$\frac{a}{2} + 2 = 4 + \frac{b}{2} \xrightarrow{\times 2} a+4=8+b$$

طول و عرض نقطه B را برابر قرار می‌دهیم:

$$-a-b=2b \Rightarrow -a=3b \Rightarrow a=-3b$$

در معادله $a+4=8+b$ ، جای a ، $-3b$ قرار می‌دهیم:

$$a+4=8+b \Rightarrow -3b+4=8+b \Rightarrow -4b=4 \Rightarrow b=-1$$

$$a=-3b=-3(-1)=3$$

پس:

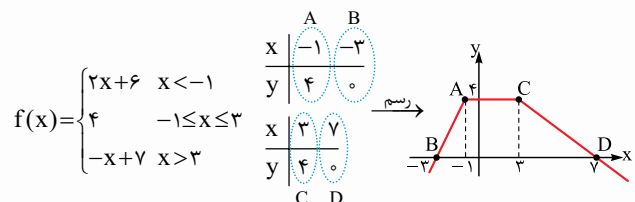
با جای گذاری $a=3$ و $b=-1$ داریم: $2a-b=2(3)-(-1)=6+1=7$

۶۳۲. **۴** جای تمام $f(\lambda)$ ها، را قرار می‌دهیم:

$$f(a^2-1)-f(3a^2)=f(\lambda a-11) \Rightarrow a^2-1-3a^2=\lambda a-11$$

$$\Rightarrow 2a^2+\lambda a-10=0 \xrightarrow{\div 2} a^2+\frac{\lambda}{2}a-5=0$$

ضابطه وسطی که خط افقی $(y=4)$ است. برای رسم دو ضابطه دیگر هم کافیست دو نقطه از خط را بدهیم:



شکل محصور بین نمودار f و محور x ها یک دوزنقه با قاعده‌های 4 و 10 ارتفاع 4 شد:

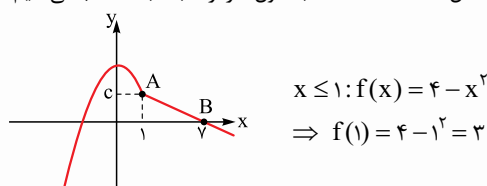
مساحت دوزنقه را حساب می‌کنیم:

$$S = \frac{(4+10) \times 4}{2} = 28$$

۶۲۸. **۳**

منظورش اینه عرض نقطه ماکزیمم سهمی یعنی عرض نقطه رأس سهمی

پارت ۱! با توجه به شکل، مختصات نقطه A به طول 1 را از ضابطه بالا حساب می‌کنیم:



پس مختصات A به صورت $(1, 3)$ و در نتیجه $c=3$ است.

ضابطه پایینی مربوط به خطی است که از نقاط $A(1, 3)$ و $B(2, 0)$ می‌گذرد.

$$m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{0-3}{2-1} = \frac{-3}{1} = -3$$

حالا با داشتن شیب و یک نقطه از خط، معادله خط را می‌نویسیم:

$$y - y_1 = m(x - x_1) \Rightarrow y - 0 = -3(x - 2) \Rightarrow y = -3x + 6$$

پس ضابطه پایینی به صورت $\frac{-1}{2}x + \frac{7}{2}$ است.

پارت ۲! در نتیجه سهمی $y = ax^2 + 2bx + c$ به صورت زیر می‌شود:

$$y = \frac{-1}{2}x^2 + 7x + 3$$

$$x_S = \frac{-B}{2A} = \frac{-7}{2(\frac{-1}{2})} = \frac{-7}{-1} = 7$$

طول رأس برابر است با:

با جای گذاری $x_S = 7$ در ضابطه سهمی، عرض رأس درمی‌آید:

$$y_S = \frac{-1}{2}(7)^2 + 7(7) + 3 = \frac{-49}{2} + 49 + 3 = \frac{-49 + 98 + 6}{2} = \frac{55}{2}$$

۶۲۹. **۲** باید مؤلفه اول و دوم هر زوج مرتب، با هم برابر باشند. با زوج مرتب

$$2 = 2n^2 - 3n \Rightarrow 2n^2 - 3n - 2 = 0 \Rightarrow 2n^2 - 3n - 2 = 0$$

دلتا را حساب می‌کنیم:

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4(2)(-2) = 9 + 16 = 25$$

از اتحاد مربع می‌دانیم:

$$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$$

$a+b=3$ و $ab=-3$ را در تساوی بالا جای گذاری می‌کنیم:

$$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab \Rightarrow 9 = a^2 + b^2 - 6 \Rightarrow a^2 + b^2 = 15$$

۶۳۶. ۲

نکته: تابع $y = \frac{Ax+B}{Cx+D}$ با شرط $\frac{A}{C} = \frac{B}{D}$ تابعی ثابت است.

پارت ۱ تابع $f(x) = \frac{ax+3}{12x+a}$ ثابت است؛ پس طبق نکته گفته شده داریم:

$$\frac{a}{12} = \frac{3}{a} \Rightarrow a^2 = 36 \Rightarrow a = \pm 6$$

به ازای هر دو مقدار a ، ضابطه f را می‌نویسیم. هر کدام برابر با عددی منفی شد، قبول است (چون باید زیر محور x باشد).

$$a=6: f(x) = \frac{6x+3}{12x+6} = \frac{3(2x+1)}{6(2x+1)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \quad \times$$

$$a=-6: f(x) = \frac{-6x+3}{12x-6} = \frac{-3(2x-1)}{6(2x-1)} = \frac{-3}{6} = \frac{-1}{2} \quad \checkmark$$

پارت ۲ با جای گذاری $a=-6$ ، ضابطه g به شکل زیر می‌شود:

$$g(x) = (a+b)x + \frac{c}{x} \xrightarrow{a=-6} g(x) = (-6+b)x + \frac{c}{x}$$

برای آن که g همانی باشد، باید ضریب x برابر یک و ضریب $\frac{1}{x}$ برابر صفر باشد:

$$-6+b=1 \Rightarrow b=7 \quad \text{و} \quad c=0$$

پارت ۳ تابع h را تشکیل می‌دهیم:

$$h(x) = k f(x) + ax - b \xrightarrow[\substack{a=-6 \\ b=7}]{\substack{a=-6 \\ b=7}} h(x) = \frac{-k}{2} - 6x - 7$$

تابع h ، محور x ها را در -1 قطع می‌کند؛ پس نقطه $(-1, 0)$ روی آن است:

$$h(-1) = 0 \Rightarrow \frac{-k}{2} + 6 - 7 = 0 \Rightarrow \frac{-k}{2} = 1 \Rightarrow k = -2$$

۶۳۷. ۳ **پارت ۱** تابع f ثابت است، پس ضابطه‌اش به صورت $f(x) = c$

است و می‌توانیم جای تمام $f(x)$ ها، عدد c را قرار دهیم:

$$f(kx) = (k^2 - 3)f(x) \Rightarrow c = (k^2 - 3)c$$

با فرض $c \neq 0$ جلو می‌رویم و c ها را از دو طرف تساوی خط می‌زنیم. (اگر به جواب نرسیدیم، سراغ حالت $c=0$ می‌رویم.)

$$c = (k^2 - 3)c \Rightarrow 1 = k^2 - 3 \Rightarrow k^2 = 4 \xrightarrow{k \in \mathbb{N}} k = 2$$

پارت ۲ با جای گذاری $k=2$ ، تابع g را می‌نویسیم:

$$g = \{(2, n^2 - 3n + 4), (2n, m^2 - 4m + 4), (f(n), n - 4)\}$$

چون g همانی است، پس مؤلفه‌های اول و دوم زوج مرتب $(2, n^2 - 3n + 4)$ برابرند:

$$n^2 - 3n + 4 = 2 \Rightarrow n^2 - 3n + 2 = 0 \Rightarrow (n-2)(n-1) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} n=2 \\ n=1 \end{cases}$$

هر دو n به دست آمده طبیعی هستند. یک بار به ازای $n=1$ و یک بار به ازای $n=2$ ، مؤلفه اول و دوم زوج مرتب $(2n, m^2 - 4m + 4)$ را برابر قرار

می‌دهیم: $n=1 \Rightarrow 2 = m^2 - 4m + 4 \Rightarrow m^2 - 4m + 2 = 0$

دلتای این معادله را حساب می‌کنیم: $\Delta = (-4)^2 - 4(1)(2) = 16 - 8 = 8$

چون 8 ، مربع کامل نیست، پس این معادله، m طبیعی به ما نمی‌دهد.

$$\xrightarrow{\text{جمله مشترک}} (a+5)(a-1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a_1 = -5 \\ a_2 = 1 \end{cases}$$

در هر دو حالت، مقدار $\frac{f(a-3)}{f(a+1)}$ را حساب می‌کنیم:

$$\frac{f(a-3)}{f(a+1)} \xrightarrow{\text{همانی}} \frac{a-3}{a+1} \begin{cases} a_1 = -5 \rightarrow \frac{-5-3}{-5+1} = \frac{-8}{-4} = 2 \\ a_2 = 1 \rightarrow \frac{1-3}{1+1} = \frac{-2}{2} = -1 \end{cases}$$

پس بیشترین مقدارش برابر با 2 است.

۶۳۳. ۳ جای تمام $f(x)$ ها، را می‌نویسیم:

$$\frac{f(2x)+f(x^2)}{f(2^0)} = \frac{f(2^0)}{f(2^0)} \Rightarrow 2^{2x+x^2} = 2^{2^0}$$

جای 4 و 8 به ترتیب 2^2 و 2^3 می‌نویسیم:

$$(2^2)^{2x+x^2} = (2^2)^{2^0} \Rightarrow 2^{4x+2x^2} = 2^{2^0}$$

پایه‌ها برابرند؛ پس توان‌ها باید برابر باشند:

$$2x^2 + 4x = 2^0 \xrightarrow{\div 2} x^2 + 2x = 3^0$$

به دو طرف 1 واحد اضافه می‌کنیم:

$$x^2 + 2x + 1 = 3^0 + 1 \Rightarrow (x+1)^2 = 2^1 \xrightarrow{\text{ریشه‌گیری}} x+1 = \pm\sqrt{2^1}$$

فقط $\sqrt{2^1} + 1$ در گزینه دیده می‌شود.

۶۳۴. ۱

از قیافش نترس رادیکال باید حذف شود؛ پس احتمالاً زیر رادیکال باید به

شکل $\sqrt{\quad}$ درآید.

عبارت زیر رادیکال مربع کامل است:

$$f(x) = \sqrt{4x^2 - 20x + 25} + ax + b = |2x - 5| + ax + b$$

با توجه به دامنه $(x < \frac{5}{2})$ ، عبارت داخل قدرمطلق، منفی است؛ پس قرینه‌اش از آن خارج می‌شود:

$$f(x) = -2x + 5 + ax + b \xrightarrow{\text{بین } -2x \text{ و } ax \text{ فاکتور می‌گیریم.}} \text{از } x \text{ فاکتور می‌گیریم.}$$

$$f(x) = (a-2)x + (b+5)$$

با توجه به ضابطه تابع همانی $(y=x)$ ، ضریب x باید 1 و عدد $b+5$ باید

$$\begin{cases} a-2=1 \Rightarrow a=3 \\ b+5=0 \Rightarrow b=-5 \end{cases}$$

پس: $b^2 - a^2 = (-5)^2 - 3^2 = 25 - 9 = 16$

۶۳۵. ۳

استراتژی نیازی به محاسبه خود a و b نیست. با داشتن $a+b$ و ab ، به

کمک اتحاد مربع، حاصل $a^2 + b^2$ به دست می‌آید.

ضابطه f را ساده‌تر می‌نویسیم: $f(x) = \frac{(x+a)(x+b) - (x-1)(x+3)}{\text{جمله مشترک}}$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{(x^2 + (a+b)x + ab) - (x^2 + 2x - 3)}{\text{جمله مشترک}}$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{x^2 + (a+b)x + ab - x^2 - 2x + 3}{\text{جمله مشترک}}$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{(a+b-2)x + ab+3}{\text{صفر}}$$

در دو جمله‌ای که زیرشان یک خط کشیدیم، از x فاکتور می‌گیریم:

$$f(x) = x(a+b-2) + ab+3$$

در ضابطه تابع همانی، ضریب x باید 1 و عدد ثابت انتهایی باید صفر باشد:

$$f(x) = x(a+b-2) + ab+3 \Rightarrow \begin{cases} a+b-2=1 \Rightarrow a+b=3 \\ ab+3=0 \Rightarrow ab=-3 \end{cases}$$

$$(m^2 - 4m + 6, n f(n)) = (m^2 - 4m + 6, 2n)$$

در زوج مرتب اول، مؤلفه اول و دوم برابرند:

$$2n^2 - 7n + 1 = -2 \Rightarrow 2n^2 - 7n + 3 = 0$$

$$\Delta = 49 - 24 = 25 \rightarrow n = \frac{7 \pm 5}{4} \Rightarrow \begin{cases} n = 3 \checkmark \\ n = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \times \end{cases}$$

چون n طبیعی است فقط $n = 3$ قبول است.

تذکر اگر $f(x) = 0$ را می‌گرفتیم، معادله $2n^2 - 7n + 1 = -f(m)$

ریشه طبیعی نداشت؛ برای همین $f(x) = 0$ رد می‌شود.

در زوج مرتب دوم هم، مؤلفه اول و دوم برابرند:

$$m^2 - 4m + 6 = 2n \xrightarrow{n=3} m^2 - 4m + 6 = 6$$

$$\Rightarrow m^2 - 4m = 0 \Rightarrow m(m - 4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} m = 0 \times \\ m = 4 \checkmark (m \in \mathbb{N}) \end{cases}$$

$$\left[\frac{mn}{\Delta}\right] = \left[\frac{4 \times 3}{5}\right] = \left[2 \frac{2}{5}\right] = 2 \quad \text{مقدار عبارت خواسته شده برابر است با:}$$

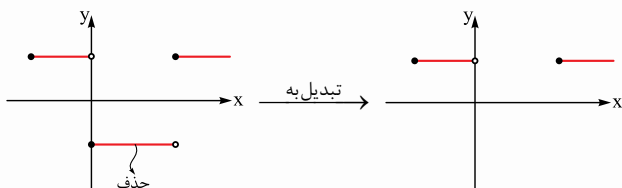


برای مشاهده پاسخ سوالات
۶۴۲ تا ۶۵۲ منو اسکن کن

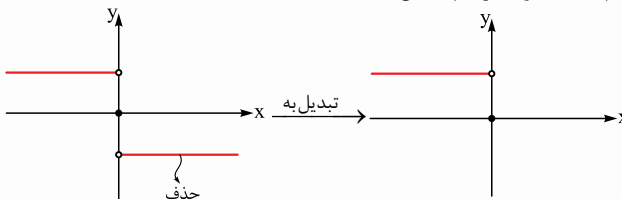
۶۵۳. ۲ در بین ۴ گزینه، نمودار ۱ و ۴، تابع پلکانی محسوب نمی‌شوند،

چون پاره‌خط غیرافزاینده دارند.

در بین ۲ و ۳، در ۲ با حذف پاره‌خط زیر محور x ها، ۲ پاره‌خط دیگر در یک امتداد قرار می‌گیرند و تابع ثابت می‌شود:



ولی در ۳، اگر نیم‌خط پایینی حذف شود، شکل به صورت زیر می‌شود که به خاطر تکه‌تکه‌ای که روی مبدأ قرار دارد، تابع ثابت نیست (اگر نیم‌خط بالایی هم حذف شود، باز هم همین است):



۶۵۴. ۲ تابع پلکانی، تابعی چندضابطه‌ای است که تمام ضابطه‌هایش عدد

ثابت باشند. فقط تابع ۲ این ویژگی را دارد:

اعداد ثابت

$$f(x) = \begin{cases} 2 & x > 0 \\ -3 & x < -1 \end{cases}$$

۶۵۵. ۳ باید ضابطه اول را درست کنیم. نباید x در آن باشد. باید ضریب x

$$k - 1 = 0 \Rightarrow k = 1$$

یعنی $k - 1$ صفر باشد:

با $k = 1$ تابع را دوباره می‌نویسیم:

$$f(x) = \begin{cases} (k-1)x + 5 & x \geq 0 \\ k+2 & x < 0 \end{cases} \xrightarrow{k=1} f(x) = \begin{cases} 5 & x \geq 0 \\ 3 & x < 0 \end{cases}$$

برای به دست آوردن $f(-1)$ سراغ ضابطه دوم می‌رویم، چون -1 در محدوده

$$f(-1) = 3 \quad x < 0 \text{ است و خروجی ضابطه دوم عدد ۳ است؛ پس:}$$

$$n = 2 \Rightarrow 4 = m^2 - 4m + 4 \Rightarrow m^2 - 4m = 0$$

$$\xrightarrow{\text{فکتور}} m(m - 4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} m = 0 \times \\ m = 4 \checkmark \end{cases}$$

تنها m طبیعی به دست آمده، $m = 4$ است.

تا این جا $n = 2$ و $m = 4$ شد، می‌ماند زوج مرتب سوم یعنی $(f(n), n - 4)$:

$$f(n) = n - 4 \xrightarrow[n=2]{\text{ثابت } f} c = 2 - 4 \Rightarrow c = -2$$

f ثابت است، پس $f(m)$ هم برابر با c یعنی -2 است:

چون به جواب رسیدیم، سراغ حالت $c = 0$ نمی‌رویم!

۶۳۸. ۳ نقطه $A(a^2 - 6ab, -9b^2)$ روی نیمساز ناحیه سوم است، پس

$$a^2 - 6ab = -9b^2 \Rightarrow a^2 + 9b^2 - 6ab = 0$$

$$\xrightarrow{\text{اتحاد مربع}} (a - 3b)^2 = 0 \Rightarrow a - 3b = 0 \Rightarrow a = 3b \Rightarrow \frac{a}{b} = 3 \quad (*)$$

نقطه $B(\frac{a}{b}, c + 2)$ روی نیمساز ناحیه چهارم است، پس طول و عرض آن

$$\frac{a}{b} = -(c + 2) \quad (*) \Rightarrow 3 = -c - 2 \Rightarrow c = -5$$

قرینه‌اند:

۶۳۹. ۱ نقطه A روی نیمساز ناحیه اول و سوم است، پس طول و عرضش

برابرند. مختصاتش را به شکل $A(a, a)$ می‌نویسیم.

این نقطه را ۲ واحد به پایین می‌بریم (پس از عرض ۲ تا کم می‌شود) و بعد ۴

به چپ می‌بریم (پس از طولش ۴ تا کم می‌شود)؛ پس مختصات B به صورت

$$B(a - 4, a - 2) \text{ است.}$$

چون B روی نیمساز ناحیه دوم و چهارم است، پس طول و عرضش قرینه‌اند:

$$y_B = -x_B \Rightarrow a - 2 = -(a - 4) \Rightarrow a - 2 = -a + 4$$

$$\Rightarrow 2a = 6 \Rightarrow a = 3$$

$$\begin{cases} A(a, a) \Rightarrow A(3, 3) \\ B(a - 4, a - 2) \Rightarrow B(-1, 1) \end{cases}$$

مختصات A و B را می‌نویسیم:

$$x_A \times y_B = 3 \times 1 = 3$$

حاصل ضرب طول A و عرض B برابر است با:

$$f(x) + f(-x) = x + (-x) = 0 \quad \text{پس:}$$

زوج مرتبمان را ساده می‌کنیم:

$$(f(x) + f(-x), 3x^2 - 17x + 10) = (0, 3x^2 - 17x + 10)$$

نقطه $(0, 3x^2 - 17x + 10)$ روی نیمساز ناحیه دوم و چهارم قرار دارد، پس

طول و عرضش قرینه هم هستند. چون طول نقطه صفر است، پس عرضش هم

$$3x^2 - 17x + 10 = 0$$

باید صفر باشد:

$$\text{بادآوری} \quad \text{اختلاف جواب‌های معادله درجه دوم از رابطه } \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|} \text{ به دست می‌آید.}$$

اختلاف جواب‌های معادله بالا برابر است با:

$$|x_1 - x_2| = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|} = \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{|a|} = \frac{\sqrt{(-17)^2 - 4(3)(10)}}{|3|} = \frac{\sqrt{169}}{3} = \frac{13}{3}$$

۶۴۱. ۳ f تابع ثابت است، پس جای تمام $f(x)$ ها، c می‌نویسیم:

$$f(m) + f(n) = f(m)f(n) \Rightarrow c + c = c \times c$$

$$\Rightarrow 2c = c^2 \Rightarrow c^2 - 2c = 0 \Rightarrow c(c - 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} c = 0 \\ c = 2 \end{cases}$$

پس ضابطه f به صورت $f(x) = 2$ یا $f(x) = 0$ است.

با فرض $f(x) = 2$ ، دو زوج مرتب داده شده که روی نیمساز ربع ۱ و ۳ هستند

$$\text{را ساده‌تر می‌نویسیم: } (2n^2 - 7n + 1, -f(m)) = (2n^2 - 7n + 1, -2)$$