

انتشارالگو



ریاضیات گسسته دوازدهم

محمد شاه‌محمدی و عبدالمجید عزیزی



درس‌نامه
سؤال‌محور

تمرین‌های
تشریحی

سؤالات
امتحانی

آزمون نیم‌سال
و پایان‌سال

پاسخ‌های
تشریحی

پیشگفتار

به نام خدا

اگر کسی سؤال کند ریاضیات چه کاربردی در زندگی ما دارد، احتمالاً نمی‌توانیم در زمانی کوتاه و با چند جمله او را قانع کنیم که ریاضیات واقعاً مفید است.

همان‌طور که احتمالاً سومی‌ها نمی‌توانستند تصور کنند که عددبازی‌های دانشمندانشان، هزاران سال بعد، در رمزگذاری‌های رایانه‌ای، چه اندازه مفید خواهد بود!

احتمالاً نیوتن هم، هنگام ارائه و حل بسیاری از مسائل ریاضی، صرفاً لذت می‌برده و خیلی به این فکر نمی‌کرده که حل این مسائل، صدها سال بعد، چه کمکی به فناوری و زندگی پیشرفته انسان‌ها خواهد کرد.

امروز هم ریاضی‌دانان، در زندگی به اصطلاح مدرن خود، در حال ارائه و حل مسائلی هستند که شاید در آینده‌ای دور یا نزدیک، باعث پیشرفتی شود که زندگی امروز ما را دیگر مدرن معرفی نکند!

به نظر می‌رسد بعضی لذت‌های زندگی روزمره، مثل حل مسئله ریاضی، پله‌های پیشرفت بشر را می‌سازند و خواجه‌نصیرالدین طوسی هنگام حل مسئله، درست می‌گفت که «پادشاهان کجا هستند تا لذت مرا دریابند؟»

بگذریم ...، چند سالی است که در سال دوازدهم، امتحانات نهایی برگزار می‌شود و تاثیر نسبتاً زیادی بر قبولی در دانشگاه دارد. به همین خاطر کتاب گسسته «تمام» را نوشته‌ایم تا به شما کمک کند که مطالب و مفاهیم کتاب درسی را بهتر و راحت‌تر درک کنید. در این کتاب علاوه بر بیان واضح و کامل همه مفاهیم کتاب درسی و حل مسائل و تمرین کتاب درسی، سؤالات امتحانات نهایی برگزارشده و تمرین متنوع و مشابه آن امتحانات نیز آورده شده و فکر می‌کنیم تمام نیازهای دانش‌آموزان را، برای یادگیری و تسلط بر درس ریاضیات گسسته و همچنین کسب نمره کامل در امتحانات، برآورده می‌کند.

این کتاب شامل موارد زیر است:

درس‌نامه

امتحان نهایی در درس ریاضیات گسسته معمولاً شامل دو بخش است، یک بخش با سؤال‌های جای خالی، درست و نادرست و ... و بخش دیگر مسئله‌های محاسباتی و گاهی اثباتی.

الف) برای بخش نخست، در درس‌نامه تمام قسمت‌های حفظی و مهم متن کتاب درسی را آورده‌ایم.
ب) برای بخش مسئله‌ها، در درس‌نامه مثال‌های متعددی آورده‌ایم تا با تیپ‌های مختلف مسئله‌ها و روش‌های حل آن‌ها آشنا شوید.

تمرین‌های تشریحی

در هر درس، بعد از درس‌نامه کامل، تعدادی تمرین تشریحی قرار داده‌ایم تا با حل آن‌ها قدرت حل مسئله و آزمون دادن شما بالا برود. این تمرین‌ها شامل تیپ‌های مختلف سؤال‌هایی هستند که در امتحانات مطرح می‌شوند تا هم شما و هم همکار عزیز ما، یعنی معلم‌تان خیالتان راحت باشد که این نمونه سؤال‌ها را یاد گرفته‌اید.

پاسخ‌های تشریحی

حل تمام مسائل و تمرین‌ها به طور کاملاً تشریحی در این قسمت آورده شده است.

گام نهایی

یک کتاب مستقل شامل:

الف) خلاصه هر فصل شامل تمام تعریف‌ها و مفاهیم مهم

ب) آزمون‌هایی شامل مسائل و پرسش‌های امتحان‌های نهایی و مشابه آن‌ها با بارم‌بندی

پ) پاسخ‌نامه کاملاً تشریحی شامل هر چیزی که باید در برگه امتحان بنویسید، بارم‌بندی شده و دارای توضیحات کامل، برای آموزش شما از نحوه نوشتن راه‌حل برای گرفتن نمره کامل

در آخر باید بگیم این کتاب

«تمام آن چیزی است که شما برای ۲۰ گرفتن لازم دارید»

از انتشارات خوشنم‌الگو، به‌خصوص از خانم مختار، به‌خاطر پیگیری‌های مفیدشان، سپاس‌گزاریم.

از خانم گودرزی، به‌خاطر دقت کم‌نظیر در ویراستاری کتاب و خستگی‌ناپذیری‌شان بسیار بسیار متشکریم و قدردان زحمات‌شان هستیم.

محمد شاه‌محمدی - عبدالمجید عزیزی

فهرست مطالب

فصل اول: آشنایی با نظریهٔ اعداد

- درس اول: استدلال ریاضی ۲
- تمرین‌های تشریحی ۱۱
- درس دوم: بخش‌پذیری در اعداد صحیح ۱۵
- تمرین‌های تشریحی ۲۵
- درس سوم: هم‌نهشتی در اعداد صحیح و کاربردها ۲۹
- تمرین‌های تشریحی ۴۰

فصل دوم: گراف و مدل‌سازی

- درس اول: معرفی گراف ۴۶
- تمرین‌های تشریحی ۵۸
- درس دوم: مدل‌سازی با گراف ۶۶
- تمرین‌های تشریحی ۷۳

فصل سوم: ترکیبیات (شمارش)

- درس اول: مباحثی در ترکیبیات ۸۰
- تمرین‌های تشریحی ۹۰
- درس دوم: روش‌هایی برای شمارش ۹۴
- تمرین‌های تشریحی ۱۰۳

فصل چهارم: پاسخ تمرین‌های تشریحی

- فصل اول
- پاسخ‌های تشریحی درس اول ۱۰۸
- پاسخ‌های تشریحی درس دوم ۱۱۲
- پاسخ‌های تشریحی درس سوم ۱۱۹

- فصل دوم
- پاسخ‌های تشریحی درس اول ۱۳۰
- پاسخ‌های تشریحی درس دوم ۱۳۹

- فصل سوم
- پاسخ‌های تشریحی درس اول ۱۴۵
- پاسخ‌های تشریحی درس دوم ۱۵۴

فصل پنجم: گام نهایی

- خلاصهٔ فصل اول ۱۶۲
- خلاصهٔ فصل دوم ۱۶۴
- خلاصهٔ فصل سوم ۱۶۷

۱۹۶.....	پاسخنامهٔ امتحان فصل اول	۱۷۰.....	امتحان فصل اول
۱۹۸.....	پاسخنامهٔ امتحان فصل دوم	۱۷۱.....	امتحان فصل دوم
۱۹۹.....	پاسخنامهٔ امتحان فصل سوم	۱۷۲.....	امتحان فصل سوم
۲۰۲.....	پاسخنامهٔ امتحان میان سال (۱)	۱۷۴.....	امتحان میان سال (۱)
۲۰۳.....	پاسخنامهٔ امتحان میان سال (۲)	۱۷۵.....	امتحان میان سال (۲)
۲۰۵.....	پاسخنامهٔ امتحان میان سال (۳)	۱۷۶.....	امتحان میان سال (۳)
۲۰۷.....	پاسخنامهٔ امتحان جامع (۱)	۱۷۸.....	امتحان جامع (۱)
۲۰۹.....	پاسخنامهٔ امتحان جامع (۲)	۱۷۹.....	امتحان جامع (۲)
۲۱۱.....	پاسخنامهٔ امتحان جامع (۳)	۱۸۰.....	امتحان جامع (۳)
۲۱۳.....	پاسخنامهٔ امتحان جامع (۴)	۱۸۲.....	امتحان جامع (۴)
۲۱۴.....	پاسخنامهٔ امتحان جامع (۵)	۱۸۳.....	امتحان جامع (۵)
۲۱۵.....	پاسخنامهٔ امتحان جامع (۶)	۱۸۴.....	امتحان جامع (۶)
۲۱۷.....	پاسخنامهٔ امتحان جامع (۷)	۱۸۶.....	امتحان جامع (۷)
۲۱۸.....	پاسخنامهٔ امتحان جامع (۸)	۱۸۸.....	امتحان جامع (۸)
۲۲۰.....	پاسخنامهٔ امتحان جامع (۹)	۱۸۹.....	امتحان جامع (۹)
۲۲۳.....	پاسخنامهٔ امتحان جامع (۱۰)	۱۹۱.....	امتحان جامع (۱۰)
۲۲۵.....	پاسخنامهٔ امتحان جامع (۱۱)	۱۹۲.....	امتحان جامع (۱۱)
۲۲۶.....	پاسخنامهٔ امتحان جامع (۱۲)	۱۹۴.....	امتحان جامع (۱۲)

بخش پذیری در اعداد صحیح

در این درس ابتدا مفهوم بخش پذیری در مجموعه اعداد صحیح و سپس مفاهیم آشنای «بزرگ ترین مقسوم علیه مشترک» و «کوچک ترین مضرب مشترک» را (بیشتر به صورت پارامتری)، بررسی می کنیم. همچنین قضیه تقسیم را مرور کرده و به کمک آن مجموعه اعداد صحیح را به شکل های مختلف افراز می کنیم.

بخش پذیری در اعداد صحیح

می دانیم که ۶ بر ۲ بخش پذیر است. می توانیم این بخش پذیری را این طور بیان کنیم که «۲، ۶ را می شمارد.» و معنای آن این است که ۲، در سه گام، ۶ را طی می کند: $6 = 2 + 2 + 2$ یا $6 = 2 \times 3$.

مفهوم عاد کردن یا شمردن

فرض کنید a و b دو عدد صحیح باشند و $a \neq 0$. می گوییم a شمارنده b است، به شرطی که عددی صحیح مانند q وجود داشته باشد که $b = aq$. در این صورت می نویسیم $a \mid b$ و می خوانیم a ، b را می شمارد یا b را عاد می کند یا a یک شمارنده b است.

مثال

۶ را می گوییم ۲، ۶ را می شمارد (۲، ۶ را عاد می کند). همین طور $6 \mid -2$ و می گوییم -2 ، ۶ را می شمارد (-2 ، ۶ را عاد می کند).

نکته

اگر b بر a بخش پذیر نباشد، می نویسیم $a \nmid b$ و می خوانیم a ، b را نمی شمارد یا a ، b را عاد نمی کند.

مثال

۶ بر ۴ بخش پذیر نیست، پس $4 \nmid 6$. همچنین ۱ بر ۲ بخش پذیر نیست، پس $2 \nmid 1$.

نکته

می توان رابطه شمردن را این طور تعریف کرد: $a \mid b \Leftrightarrow b = aq, \quad a \neq 0, \quad a, b, q \in \mathbb{Z}$

نکته

- عدد ۱ هر عدد صحیح دلخواهی مانند a را می شمارد، زیرا $a = 1 \times a \Rightarrow 1 \mid a$.
- عدد -1 هر عدد صحیح دلخواهی مانند a را می شمارد، زیرا $a = (-1)(-a) \Rightarrow -1 \mid a$.
- قرارداد: عدد صفر، صفر را می شمارد: $0 \mid 0$.
- هر عدد صحیح دلخواه غیر صفر، مانند a ، صفر را می شمارد؛ زیرا $0 = a \times 0 \Rightarrow a \mid 0$.
- هر عدد صحیح دلخواه، خودش و قرینه خودش را می شمارد، زیرا: $-a = a(-1) \Rightarrow a \mid -a$ ، $a = a \times 1 \Rightarrow a \mid a$.

مسئله ۱

با توجه به تعریف عاد کردن، جاهای خالی را پر کنید.

الف) $7 \mid 63 \Leftrightarrow 63 = \dots \times \dots$

ب) $91 = 7 \times 13 \Leftrightarrow \dots \mid \dots$

پ) $-6 \mid 54 \Leftrightarrow \dots = \dots \times (-6)$

ت) $5 \mid -35 \Leftrightarrow \dots = 5 \times \dots$

ث) $0 = 18 \times \dots \Leftrightarrow 18 \mid \dots$

ج) $a \mid 1 \Leftrightarrow a = \dots$ یا $a = \dots$

چ) $26 = 2 \times 13 \Rightarrow 2 \mid \dots, 13 \mid \dots$

الف) $7 \mid 63 \Leftrightarrow 63 = 7 \times 9$

ب) $91 = 7 \times 13 \Leftrightarrow 7 \mid 91$

پ) $-6 \mid 54 \Leftrightarrow 54 = (-9) \times (-6)$

ت) $5 \mid -35 \Leftrightarrow -35 = 5 \times (-7)$

ث) $0 = 18 \times 0 \Leftrightarrow 18 \mid 0$

ج) $a \mid 1 \Leftrightarrow a = 1$ یا $a = -1$

چ) $26 = 2 \times 13 \Rightarrow 2 \mid 26, 13 \mid 26$

راه حل

مسئله ۲

کار در کلاس صفحه (۱۰) کتاب درسی

با استفاده از تعریف عاد کردن و قوانین ضرب و تقسیم اعداد توان‌دار با پایه‌های برابر، ابتدا نشان دهید که $3^5 | 3^9$ و سپس ثابت کنید:

$$\forall m, n \in \mathbb{N}, m \leq n \Rightarrow a^m | a^n$$

$$3^9 = 3^4 \times 3^5 \xrightarrow{b=3^4, a=3^5, q=3^4} 3^5 | 3^9$$

راه‌حل ابتدا نشان می‌دهیم $3^5 | 3^9$. می‌دانیم اگر $b = aq$ آن‌گاه $a | b$. توجه کنید که

$$\forall m, n \in \mathbb{N}, m \leq n \Rightarrow a^m | a^n$$

اکنون ثابت می‌کنیم: $m \leq n$ آن‌گاه می‌توان n را به صورت مجموع m و عدد نامنفی r نوشت: $n = m + r$. بنابراین:

$$a^n = a^{m+r} \Rightarrow a^n = a^m \times a^r \xrightarrow{a^r = q} a^n = a^m q \Rightarrow a^m | a^n$$

ویژگی‌های رابطه عاد کردن (رابطه شمردن)

ویژگی ۱ رابطه عاد کردن

اگر عدد a عدد b را بشمارد، آن‌گاه هر مضرب صحیح عدد b را نیز می‌شمارد. یعنی: $m \in \mathbb{Z}, a | b \Rightarrow a | mb$

$$a | b \Rightarrow b = aq \xrightarrow{\times m} mb = a(mq) \Rightarrow a | mb$$

اثبات:

مثال

از $6 | 12$ نتیجه می‌شود $6 | 5 \times 12$. همچنین از $7 | 35$ نتیجه می‌شود $7 | 10 \times 35$ ، چون $10 \times 35 = 350$.

نکته

اگر $a | b$ ، آن‌گاه $a | b^n$ (که $n \in \mathbb{N}$).اثبات: طبق ویژگی (۱)، داریم $a | b \Rightarrow a | mb$ ، اگر فرض کنیم $m = b^{n-1}$ ، به دست می‌آید $a | b^{n-1} \times b \Rightarrow a | b^n$.نتیجه اگر $a | b$ آن‌گاه $a | b^2, a | b^3, \dots$.

مثال

از $3 | 6$ نتیجه می‌شود $3 | 36, 3 | 216, \dots$ چون $36 = 6^2$ و $216 = 6^3$ و

نکته

اگر $a | bc$ آن‌گاه نمی‌توان گفت لزوماً $a | b$ یا $a | c$.

مثال

توجه کنید که $4 \times 6 = 24$ و $12 | 24$ و $12 | 4$ ، همچنین $8 \times 2 = 16$ و $4 | 16$ و $4 | 8$. اما $5 | 25$ و $5 | 125 = 25 \times 5$ و $5 | 25$.

نکته

فرض کنید $k \in \mathbb{Z}$. اگر $a | b$ ، آن‌گاه $ka | kb$.

$$a | b \Rightarrow b = aq \xrightarrow{\times k} kb = (ka)q \Rightarrow ka | kb$$

اثبات:

مثال

از $10 | 100$ نتیجه می‌شود $7 \times 10 | 7 \times 100$ یا همان $70 | 700$. همچنین از $11 | 121$ نتیجه می‌شود $55 | 605$ چون $55 = 5 \times 11$ و $55 = 5 \times 121$.

نکته

فرض کنید $k \in \mathbb{Z} - \{0\}$. اگر $ka | kb$ ، آن‌گاه $a | b$.

$$ka | kb \Rightarrow kb = kaq \xrightarrow{\div k, k \neq 0} b = aq \Rightarrow a | b$$

اثبات:

مثال

از $75 | 300$ نتیجه می‌شود که $25 | 100$ (دو طرف را بر ۳ تقسیم کرده‌ایم). همچنین از $96 | 192$ می‌توان نتیجه گرفت $48 | 96$. دو طرف را بر ۲ تقسیم کردیم.

نکته

اگر $a | b$ آن‌گاه $a | \pm b, a | |b|, a | |a|$.

ویژگی ۲ رابطه عاد کردن (خاصیت تعدی برای رابطه عاد کردن)

اگر عدد a عدد b را بشمارد و عدد b نیز عدد c را بشمارد آن گاه عدد a عدد c را می شمارد: $a|b \wedge b|c \Rightarrow a|c$

$$\begin{cases} a|b \Rightarrow b=aq_1 & (1) \\ b|c \Rightarrow c=bq_2 \end{cases} \xrightarrow{(1)} c=aq_1q_2 \xrightarrow{q_1q_2=q} c=aq \Rightarrow a|c$$

اثبات:

مثال

از $۵|۲۵$ و $۲۵|۱۰۰$ می توان نتیجه گرفت که $۵|۱۰۰$. همچنین از $۴|۱۲$ و $۱۲|۱۳۲$ ، $۱۲|۱۳۲=۱۲ \times ۱۱$ نتیجه می گیریم $۴|۱۳۲$.

نتیجه: برای هر عدد طبیعی n : $a|b \Rightarrow a|b^n$

$$a|b, \quad b|b^n \Rightarrow a|b^n$$

اثبات: از خاصیت تعدی رابطه عاد کردن استفاده می کنیم:

ویژگی ۳ رابطه عاد کردن

هرگاه عددی دو عدد را بشمارد آن گاه مجموع و تفاضل آن دو عدد را نیز می شمارد: $a|b \wedge a|c \Rightarrow a|b \pm c$

$$\begin{cases} a|b \Rightarrow b=aq_1 \\ a|c \Rightarrow c=aq_2 \end{cases} \xrightarrow{\pm} b \pm c = aq_1 \pm aq_2 = a(q_1 \pm q_2) \xrightarrow{q_1 \pm q_2 = q} b \pm c = aq \Rightarrow a|b \pm c$$

اثبات:

مثال

$$۴|۱۲, ۴|۱۶ \Rightarrow \begin{cases} ۴|۱۲+۱۶ \Rightarrow ۴|۲۸ \\ ۴|۱۲-۱۶ \Rightarrow ۴|-۴ \end{cases} \quad ۷|۱۴a, ۷|۴۲b \Rightarrow \begin{cases} ۷|۱۴a+۴۲b \\ ۷|۱۴a-۴۲b \end{cases}$$

با توجه به ویژگی (۳) رابطه عاد کردن داریم:

نکته

اگر $a|b \pm c$ آن گاه لزوماً نمی توان گفت $a|b$ یا $a|c$.

مثال

$$۸ \nmid ۷, \quad ۸ \nmid ۱۵ \quad \text{اما} \quad ۸|۸=۱۵-۷ \quad (\text{ب})$$

$$۱۲ \nmid ۳۱, \quad ۱۲ \nmid ۱۷ \quad \text{اما} \quad ۱۲|۴۸=۱۷+۳۱ \quad (\text{الف})$$

نکته

اگر $a|b \pm c$ و $a|b$ ، آن گاه $a|c$.

اثبات:

$$\begin{cases} a|b \pm c \Rightarrow b \pm c = aq_1 \\ a|b \Rightarrow b = aq_2 \end{cases} \Rightarrow aq_2 \pm c = aq_1 \Rightarrow \pm c = aq_1 - aq_2 \Rightarrow \pm c = a(q_1 - q_2) \\ c = a[\pm(q_1 - q_2)] \xrightarrow{\pm(q_1 - q_2)=q} c = aq \Rightarrow a|c$$

(دقت کنید که اگر $a|b \pm c$ و $a|c$ ، آن گاه $a|b$).

مثال

از $۱۴|۲۸ \pm c$ ، نتیجه می گیریم که c عددی است که حتماً بر ۱۴ بخش پذیر است، زیرا $۱۴|۲۸$ ، پس $۱۴|\pm c$.

ویژگی ۴ رابطه عاد کردن:

اگر $a|b$ و $b \neq 0$ ، در این صورت $|a| \leq |b|$.

$$a|b \Rightarrow b=aq \xrightarrow{b \neq 0} q \neq 0 \xrightarrow{q \in \mathbb{Z}} q \in \mathbb{Z} - \{0\} \Rightarrow |q| \geq 1 \xrightarrow{\times |a|} |a||q| \geq |a| \Rightarrow |aq| \geq |a| \xrightarrow{b=aq} |b| \geq |a|$$

اثبات:

نتیجه: اگر $a|b$ و $b|a$ آن گاه $a = \pm b$.

$$\begin{cases} a|b \xrightarrow{\text{ویژگی ۴ رابطه عاد کردن}} |a| \leq |b| \\ b|a \xrightarrow{\text{ویژگی ۴ رابطه عاد کردن}} |b| \leq |a| \end{cases} \Rightarrow |a| = |b| \Rightarrow a = \pm b$$

اثبات:

مسئله ۳

کار در کلاس صفحه (۱۱) کتاب درسی

اگر $a \neq 0$ عددی صحیح و دو عدد $6m+5$ و $7m+6$ بر a بخش پذیر باشند ثابت کنید $a = \pm 1$.

راه حل

وقتی عددی بر a بخش پذیر است، یعنی a آن عدد را می شمارد: $a | 6(7m+6) \Rightarrow a | 42m+36$ ویژگی ۱ رابطه عادی کردن

$$a | 6m+5 \xrightarrow{\text{ویژگی ۱ رابطه عادی کردن}} a | 7(6m+5) \Rightarrow a | 42m+35$$

توجه کنید که بنا بر ویژگی ۳ رابطه عادی کردن می توان سمت راست دو رابطه بالا را از هم کم کرد. وقتی عددی ۱ را می شمارد آن عدد فقط می تواند ۱ یا -۱ باشد؛ زیرا عدد ۱ فقط بر ۱ یا -۱ بخش پذیر است؛ بنابراین $a = +1$ یا $a = -1$.

مسئله ۴

کار در کلاس صفحه (۱۱) کتاب درسی

اگر $a | b$ نشان دهید که $a^n | b^n$.

راه حل

$$a | b \Rightarrow b = aq \xrightarrow{\text{توان } n} b^n = a^n q^n \xrightarrow{q^n = q'} b^n = a^n q' \Rightarrow a^n | b^n$$

مسئله ۵

کار در کلاس صفحه (۱۱) کتاب درسی

اگر $a | b$ و $c | d$ نشان دهید که $ac | bd$.

راه حل

$$\begin{cases} a | b \Rightarrow b = aq_1 \\ c | d \Rightarrow d = cq_2 \end{cases} \xrightarrow{\text{دو طرف تساوی ها را در هم ضرب می کنیم}} bd = acq_1q_2 \xrightarrow{q_1q_2 = q} bd = (ac)q \Rightarrow ac | bd$$

مسئله ۶

کار در کلاس صفحه (۱۱) کتاب درسی

اگر $a | b$ و $a | c$ نشان دهید که $a | mb \pm nc$.

راه حل

$$\begin{cases} a | b \xrightarrow{\text{ویژگی ۱ رابطه عادی کردن}} a | mb \\ a | c \xrightarrow{\text{ویژگی ۱ رابطه عادی کردن}} a | nc \end{cases} \xrightarrow{\text{ویژگی ۳ رابطه عادی کردن}} a | mb \pm nc$$

عدد اول

عدد اول عددی طبیعی و بزرگتر از ۱ است که به جز خودش و ۱، هیچ شمارنده مثبتی ندارد.

نکته

• مجموعه اعداد اول، $P = \{2, 3, 5, 7, 11, \dots\}$ نامتناهی است، عدد اول را معمولاً با p نمایش می دهیم.• اگر p عددی اول و a عددی طبیعی باشد: $a | p \Rightarrow a = 1$ یا $a = p$ • اگر p عددی اول و a عددی صحیح باشد: $a | p \Rightarrow a = \pm 1$ یا $a = \pm p$

مسئله ۷

اگر عددی طبیعی a ، دو عدد $9k+7$ و $7k+6$ را عادی کند، ثابت کنید $a = 1$ یا $a = 5$.

راه حل

$$\begin{cases} a | 9k+7 \Rightarrow a | 7(9k+7) \Rightarrow a | 63k+49 \\ a | 7k+6 \Rightarrow a | 9(7k+6) \Rightarrow a | 63k+54 \end{cases} \xrightarrow[\text{عادی کردن}]{\text{ویژگی (۳) رابطه}} a | 63k+54 - (63k+49) \Rightarrow a | 5 \xrightarrow[\text{اول است}]{\text{عدد ۵}} a = 1 \text{ یا } a = 5$$

مسئله ۸

دی ۹۷ - شهریور ۱۴۰۰

اگر $a > 1$ ، $a | 9k+4$ و $a | 5k+3$ ثابت کنید a عددی اول است.

راه حل

$$\begin{cases} a | 5k+3 \Rightarrow a | 9(5k+3) \Rightarrow a | 45k+27 \\ a | 9k+4 \Rightarrow a | 5(9k+4) \Rightarrow a | 45k+20 \end{cases} \xrightarrow[\text{عادی کردن}]{\text{ویژگی (۳) رابطه}} a | 45k+27 - (45k+20) \Rightarrow a | 7$$

$\xrightarrow[\text{عدد ۷ اول است}]{\text{عدد ۷ اول است}} a = 7 \Rightarrow a$ عددی اول است.

مسئله ۹

ثابت کنید اگر a عددی صحیح و فرد باشد و $b|a+2$ ، آنگاه a^2+b^2-2 بر ۸ بخش پذیر است.

راه حل

$$a \text{ عددی فرد است. } \Rightarrow a=2k+1 \Rightarrow a+2=2k+1+2 \Rightarrow a+2=2(k+1)+1$$

$$\xrightarrow{k+1=m} a+2=2m+1 \Rightarrow a+2 \text{ عددی فرد است.}$$

از طرفی $b|a+2$ ، یعنی $a+2=bq$ پس bq مساوی عددی فرد است، بنابراین b و q نمی توانند زوج باشند و فرد هستند.

$$\left. \begin{aligned} b \text{ عددی فرد است. } \xrightarrow{b=2k'+1} b^2 &= (2k'+1)^2 = 4k'^2 + 4k' + 1 = 4(k'^2 + k') + 1 = 4(\underbrace{k'(k'+1)}_{2t'}) + 1 = 8t' + 1 \\ a \text{ عددی فرد است. } \xrightarrow{a=2k+1} a^2 &= (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 4(k^2 + k) + 1 = 4(\underbrace{k(k+1)}_{2t}) + 1 = 8t + 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$a^2 + b^2 = 8t + 8t' + 2 \Rightarrow a^2 + b^2 - 2 = 8(t+t') \xrightarrow{t+t'=k} a^2 + b^2 - 2 = 8k \Rightarrow 8|a^2 + b^2 - 2$$

نکته

$n!$ برابر است با حاصل ضرب اعداد طبیعی ۱ تا n ؛ پس هر عدد طبیعی کوچک تر از یا مساوی n شمارنده $n!$ است: $k \leq n, (k \in \mathbb{N}): k|n!$

مسئله ۱۰

نشان دهید هیچ یک از ۹۹ عدد متوالی مقابل اول نیست.

$$\left\{ \begin{array}{l} 2|100! \\ 2|2 \end{array} \right\} \Rightarrow 2|100!+2, \left\{ \begin{array}{l} 3|100! \\ 3|3 \end{array} \right\} \Rightarrow 3|100!+3, \dots, \left\{ \begin{array}{l} 100|100! \\ 100|100 \end{array} \right\} \Rightarrow 100|100!+100$$

راه حل توجه کنید که

در نتیجه هر یک از عددهای مورد نظر مقسوم علیه بزرگتر از ۱ به جز خودش دارد، پس عددی اول نیست.

نتیجه در حالت کلی می توانیم بازه ای شامل n عدد طبیعی متوالی غیراول معرفی کنیم و این بازه عبارت است از $[(n+1)!+2, (n+1)!+n+1]$

بزرگترین مقسوم علیه مشترک

مقسوم علیه یک عدد

هر مقسوم علیه عددی مانند b ، عددی است مانند a که $a|b$.

مثال

۱۲ مقسوم علیه ۳۶ است؛ زیرا $36=3 \times 12$ و $36|12$. همچنین ۴۹ مقسوم علیه ۱۹۶ است، چون $196=4 \times 49$ و $196|49$.

نکته

دو عدد صحیح ممکن است یک یا چند مقسوم علیه مشترک داشته باشند.

مثال

دو عدد ۳۶ و ۲۴ را در نظر بگیرید. مقسوم علیه های این دو عدد را می نویسیم:

$$36: \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 9, \pm 12, \pm 18, \pm 36$$

$$24: \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 8, \pm 12, \pm 24$$

همان طور که می بینید این دو عدد، دارای مقسوم علیه های مشترک $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 12$ هستند و بزرگترین آنها ۱۲ است.

بزرگترین مقسوم علیه مشترک

عدد طبیعی d را ب.م.م. دو عدد صحیح a و b (که هر دو با هم صفر نیستند) می نامیم و می نویسیم $(a, b)=d$ ، هرگاه

$$\forall m > 0: m|a, m|b \Rightarrow m \leq d \quad \text{ب) } d|a, d|b \quad \text{الف)}$$

مثال

به نمونه های مقابل توجه کنید. $(24, 36)=12$, $(8, 16)=8$, $(0, 6)=6$, $(4, -6)=2$, $(4, 9)=1$

نکته

• اگر $(a, b)=1$ ، می گوییم a و b نسبت به هم اول هستند.

• $(0, 0)$ تعریف نمی شود.

مثال

۱۷ و ۱۲ نسبت به هم اول اند، چون $(17, 12) = 1$. همچنین ۵۵ و ۲۱ نسبت به هم اول اند. چون $(55, 21) = 1$. در حقیقت ۵۵ و ۲۱ عامل مشترک بزرگتر از ۱ ندارند.

نکته

توجه کنید که علامت و ترتیب قرار گرفتن دو عدد در مقدار ب.م.م. تأثیری ندارد، یعنی $(a, b) = (b, a) = (a, -b) = (b, -a) = (-b, -a)$

مثال

مشاهده می کنید که علامت و ترتیب قرار گرفتن دو عدد ۲۴ و ۳۶ در مقدار ب.م.م. آن ها اثری ندارد.
 $(24, 36) = (36, 24) = (-36, -24) = (24, -36) = (-24, 36) = 12$

مسئله ۱۱

کار در کلاس صفحه (۱۳) کتاب درسی

با توجه به تعریف ب.م.م. ثابت کنید $a|b \Rightarrow (a, b) = |a|$

راه حل

اولاً باید ثابت کنیم $|a|$ و $|a||b|$ ، ثانیاً باید ثابت کنیم $|a|$ از بقیه مقسوم علیه های مثبت a و b بزرگتر یا مساوی است. یعنی

$$m|a, m|b \Rightarrow m \leq |a|$$

اولاً: هر عدد خودش را عاد می کند. همچنین طبق فرض داریم $a|b$. از طرف دیگر اگر $a|b$ آن گاه $|a||b|$ ، پس داریم:

$$a|a \Rightarrow |a||a|, \text{ فرض } a|b \Rightarrow |a||b|$$

ثانیاً: فرض کنید m یک مقسوم علیه مثبت a و b باشد، در این صورت $m|a$ و $m|b$ ، همچنین می دانیم اگر $m|a$ آن گاه، $|m|$ از $|a|$ کوچکتر

$$m|a \xrightarrow{a \neq 0} |m| \leq |a| \xrightarrow{m > 0} m \leq |a|$$

یا مساوی با آن است ($a \neq 0$). پس داریم

$$m|a, m|b \Rightarrow m \leq |a|, \forall m > 0 \text{ (ب) } |a||a|, |a||b| \text{ (الف)}$$

پس هر دو بخش تعریف ب.م.م. در این جا برقرارند:

بنابراین با شرط $a|b$ ، ب.م.م. دو عدد a و b برابر $|a|$ است.

مسئله ۱۲

کار در کلاس صفحه (۱۴) کتاب درسی

اگر p عددی اول باشد، $a \in \mathbb{Z}$ و $p \nmid a$ ، ثابت کنید $(p, a) = 1$.

راه حل

فرض می کنیم $(p, a) = d$. چون ب.م.م. p و a برابر d است، پس p و a بر d بخش پذیرند. از طرف دیگر چون p اول است جز خودش و ۱ بر

$$(p, a) = d \Rightarrow \begin{cases} d|p \xrightarrow{\text{اول } p} d=1 \text{ یا } d=p \\ d|a \end{cases}$$

عدد دیگری بخش پذیر نیست. پس $d=1$ یا $d=p$. آنچه گفتیم معادل است با

اما اگر $d=p$ چون $d|a$ ، پس یعنی $p|a$ که مخالف فرض سؤال است، پس باید $d=1$. توجه کنید که معادل ریاضی این جمله به صورت زیر است:

$$d=p \xrightarrow{d|a} p|a \text{ (نادرست است چون مخالف فرض } p \nmid a \text{ است.)}$$

بنابراین: $d=1 \Rightarrow (p, a) = 1$

نکته

حکم این مسئله در حالت کلی (که p عددی اول نباشد) لزوماً درست نیست.

مثال

اگر $p=4$ و $a=6$ داریم: $4 \nmid 6, (4, 6) \neq 1$. یعنی حکم مسئله قبل اگر p اول نباشد لزوماً درست نیست.

کوچکترین مضرب مشترک دو عدد

مضارب یک عدد صحیح

مضارب یک عدد صحیح مانند a عبارتند از $\pm a, \pm 2a, \pm 3a, \dots$ در حالت کلی ma مضرب a است ($m \in \mathbb{Z}$).

مثال

مضارب غیرصفر ۴ عبارت هستند از $\pm 4, \pm 8, \pm 12, \dots$

مثال

دو عدد ۴ و ۶ را در نظر بگیرید. بعضی از مضارب مثبت این دو عدد را می‌نویسیم:
 ۴: ۴, ۸, ۱۲, ۱۶, ۲۰, ۲۴, ۲۸, ۳۲, ۳۶, ...
 ۶: ۶, ۱۲, ۱۸, ۲۴, ۳۰, ۳۶, ۴۲, ...

همان‌طور که می‌بینید بعضی از مضارب این دو عدد، مشترک‌اند، مانند ۱۲, ۲۴, ۳۶, همچنین کوچک‌ترین مضرب مشترک آن‌ها ۱۲ است.

کوچک‌ترین مضرب مشترک

عدد طبیعی c را ک.م.م. دو عدد صحیح و ناصفر a و b می‌نامیم و می‌نویسیم $[a, b] = c$ ، هرگاه:
 (الف) $a|c, b|c$ (ب) $\forall m > 0, a|m, b|m \Rightarrow c \leq m$

مثال

به نمونه‌های مقابل توجه کنید.
 $[4, -16] = 16, [3, 4] = 12, [1, 8] = 8, [-4, 6] = 12, [4, 6] = 12$

نکته

- $[0, a]$ تعریف نمی‌شود.
- علامت و ترتیب قرار گرفتن a و b در مقدار ک.م.م. تأثیری ندارد، یعنی
 $[a, b] = [b, a] = [-a, -b] = [-a, b] = [a, -b] = [-b, -a]$

مثال

توجه کنید که علامت و ترتیب قرار گرفتن دو عدد ۸ و ۱۲ اثری در مقدار ک.م.م. این دو عدد ندارد. $[8, 12] = [12, 8] = [8, -12] = [-8, -12] = \dots = 24$

کار در کلاس صفحه (۱۳) کتاب درسی

مسئله ۱۳

با توجه به تعریف ک.م.م. ثابت کنید $a|b \Rightarrow [a, b] = |b|$.
راه‌حل اولاً باید ثابت کنیم a و b هر دو $|b|$ را می‌شمارند؛ یعنی $a||b|$ و $b||b|$ و ثانیاً باید ثابت کنیم $|b|$ از بقیه مضارب مثبت a و b کوچک‌تر یا مساوی است، یعنی: $\forall m > 0, a|m, b|m \Rightarrow |b| \leq m$.
اولاً: هر عدد خودش را عاد می‌کند و طبق فرض داریم $a|b$ ، از طرف دیگر می‌دانیم اگر $a|b$ آن‌گاه $a||b|$ ، پس داریم:
 $b|b \Rightarrow b||b|$, فرض $a|b \Rightarrow a||b|$
ثانیاً: فرض می‌کنیم m یک مضرب مشترک مثبت a و b باشد، در این صورت $a|m$ و $b|m$. همچنین می‌دانیم اگر $b|m$ ، آن‌گاه $|b|$ از $|m|$ کوچک‌تر یا مساوی با آن است ($m \neq 0$).
 پس اولاً $|b|$ مضرب a و b است یعنی $a||b|$ و $b||b|$. ثانیاً از هر مضرب مثبت دیگری از a و b ، کوچک‌تر یا مساوی است، یعنی $|b| \leq m$.
 نتیجه می‌گیریم اگر $a|b$ ، آن‌گاه ک.م.م. a و b برابر $|b|$ است.

نکته

اگر a و b عدد صحیح و $k \neq 0$ ، آن‌گاه:
 $[ka, kb] = k[a, b], (ka, kb) = k(a, b)$

مثال

(الف) $(-12, 8) = 4(-3, 2) = 4 \times 1 = 4$ (ب) $[-12, 8] = 4[-3, 2] = 4 \times 6 = 24$

نکته

توجه کنید که $a, b = |ab|$. در حالت خاص اگر a و b نسبت به هم اول باشند $((a, b) = 1)$ ، آن‌گاه $[a, b] = |ab|$.

مثال

دو عدد $a = 2$ و $b = 3$ نسبت به هم اول‌اند و $[2, 3] = 2 \times 3 = 6$.
 برای دو عدد $a = 6$ و $b = 15$ داریم $(a, b) = (6, 15) = (2 \times 3, 3 \times 5) = 3$. در نتیجه $[a, b] = \frac{6 \times 15}{3} = \frac{6 \times 15}{(6, 15)} = 30$.

• یادآوری: برای محاسبهٔ ب.م.م. دو عدد صحیح a و b ، قدر مطلق آن‌ها را به عوامل اول تجزیه می‌کنیم و ب.م.م. برابر می‌شود با حاصل ضرب عوامل مشترک با توان کمتر.

مثال

$$(24, 36) = ? \Rightarrow \begin{cases} 24 = 2^3 \times 3 \\ 36 = 2^2 \times 3^2 \end{cases} \Rightarrow (24, 36) = 2^2 \times 3^1 = 12$$

● یادآوری: برای محاسبه ک.م.م دو عدد صحیح a و b ، قدر مطلق آن‌ها را به عوامل اول تجزیه می‌کنیم. در این صورت ک.م.م برابر می‌شود با حاصل ضرب عوامل غیرمشتrek در عوامل مشترک با توان بیشتر.

مثال

$$[-120, 36] = ? \Rightarrow \begin{cases} 120 = 2^3 \times 3 \times 5 \\ 36 = 2^2 \times 3^2 \end{cases} \Rightarrow [-120, 36] = 2^3 \times 3^2 = 360$$

مسئله ۱۴

فرض کنید a عددی طبیعی باشد، حاصل $[21a^2, 35a^3]$ را به دست آورید.

دی ۹۸

راه حل

ابتدا توجه کنید که

$$[21a^2, 35a^3] = [3 \times 7a^2, 5 \times 7a^3] = 7a^2 [3, 5a] \quad (1)$$

اکنون دو حالت در نظر می‌گیریم. توجه کنید که اگر $a|b$ ، آن‌گاه $[a, b] = |b|$:

$$3|a \Rightarrow 3|5a \xrightarrow{a>0} [3, 5a] = 5a \xrightarrow{(1)} [21a^2, 35a^3] = 7a^2 \times 5a = 35a^3$$

$$3 \nmid a \Rightarrow (3, 5a) = 1 \xrightarrow{a>0} [3, 5a] = 3 \times 5a = 15a \xrightarrow{(1)} [21a^2, 35a^3] = 7a^2 \times 15a = 105a^3$$

توجه کنید که در حالتی که $a \nmid 3$ ، 3 و $5a$ عامل مشترک بزرگ‌تر از ۱ ندارند، پس $(3, 5a) = 1$. همچنین می‌دانیم اگر $(a, b) = 1$ ، آن‌گاه $[a, b] = |ab|$.

مسئله ۱۵

اگر a عددی طبیعی باشد، حاصل $(5a+4, 2a+3)$ را به دست آورید.

دی ۹۹

راه حل

فرض می‌کنیم حاصل این ب.م.م برابر d باشد:

$$(5a+4, 2a+3) = d \Rightarrow \begin{cases} d|5a+4 \\ d|2a+3 \end{cases} \xrightarrow[\text{عاد کردن}]{\text{ویژگی (۱) رابطه}} \begin{cases} d|2(5a+4) \\ d|5(2a+3) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d|10a+8 \\ d|10a+15 \end{cases}$$

$$\xrightarrow[\text{را از هم کم می‌کنیم (ویژگی ۳)}]{\text{سمت راست دو رابطه}} d|10a+15-10a-8 \Rightarrow d|7 \Rightarrow d=1 \text{ یا } d=7$$

مسئله ۱۶

m و n اعدادی صحیح و غیرصفر هستند. حاصل (n^2m^3, n^3m^4) را به دست آورید.

$$n^2m^3 | n^3m^4 \Rightarrow (n^2m^3, n^3m^4) = |n^2m^3|$$

می‌دانیم اگر $a|b$ آن‌گاه $(a, b) = |a|$ ، پس

قضیه تقسیم و کاربردها

● یادآوری: در سال‌های گذشته با عملیات تقسیم آشنا شده‌اید، مثلاً

$$5 \overline{) 72}$$

$$\underline{5} \quad 14$$

$$22 \Rightarrow 72 = 5 \times 14 + 2, \text{ باقی‌مانده} = 2, \text{ خارج قسمت} = 5, \text{ مقسوم علیه} = 14, \text{ مقسوم} = 72$$

$$20$$

$$\underline{2}$$

باقی‌مانده باید کوچک‌تر از مقسوم علیه و بزرگ‌تر از یا مساوی صفر باشد.

همچنین می‌گفتند برای امتحان کردن عملیات تقسیم، خارج قسمت را در مقسوم علیه ضرب کرده، حاصل را با باقی‌مانده جمع کنید، اگر عدد به دست آمده برابر مقسوم شد، عملیات درست انجام شده است. در مثال قبل این کار را انجام می‌دهیم.

$$5 \times 14 + 2 = 72 \Rightarrow \text{عملیات درست است.}$$

$$a \overline{) b}$$

$$\vdots \quad q$$

$$\underline{r}$$

همین عملیات را پارامتری می‌نویسیم:

a را مقسوم، b را مقسوم علیه، q را خارج قسمت و r را باقی‌مانده می‌نامیم و امتحان عملیات، بررسی تساوی $a = bq + r$ است و باید $0 \leq r < b$.

قضیه تقسیم

قضیه

اگر a عددی صحیح و b عددی طبیعی باشد، در این صورت، اعدادی صحیح و منحصر به فرد مانند q و r یافت می‌شوند به قسمی که $a = bq + r$ و $0 \leq r < b$.

- در تقسیم ۲۷ بر ۴ داریم: $27 = 4 \times 6 + 3$
- در تقسیم ۱۸ بر ۷ داریم: $18 = 7 \times 2 + 4$
- در تقسیم ۱۸ بر ۷ داریم (دقت کنید که باقی‌مانده باید بزرگ‌تر از یا مساوی صفر باشد) $18 = 7 \times (-3) + 3$ ، یعنی خارج قسمت برابر ۳- و باقی‌مانده برابر ۳ است.
- توجه کنید که چون $18 = 7 \times 2 + 4$ داریم $18 = 7 \times (-2) - 4$ و چون باقی‌مانده نباید منفی باشد، می‌نویسیم: $18 = 7 \times (-2) - 7 + 7 - 4$ که به صورت $18 = 7 \times (-3) + 3$ قابل نوشتن است.

نکته

در قضیه تقسیم که $a = bq + r$ ، می‌توان گفت $q = \left[\frac{a}{b} \right]$ (نماد جزء صحیح است).

در مثال قبل که ۱۸ را بر ۷ تقسیم کردیم، $a = -18$ و $b = 7$ ، بنابراین $q = \left[\frac{-18}{7} \right] = -3$ و $18 = 7(-3) + 3$ که باقی‌مانده برابر ۳ است.

مسئله ۱۷

اگر باقی‌مانده تقسیم اعداد m و n بر ۱۷ به ترتیب برابر ۵ و ۳ باشد، در این صورت باقی‌مانده تقسیم عدد $2m - 5n$ بر ۱۷ را به دست آورید. دی ۹۹ و شهریور ۹۹

قضیه تقسیم را برای تقسیم m و n بر ۱۷ می‌نویسیم:

$$\begin{cases} m = 17q_1 + 5 \xrightarrow{\times 2} 2m = 2 \times 17q_1 + 10 \\ n = 17q_2 + 3 \xrightarrow{\times 5} 5n = 5 \times 17q_2 + 15 \end{cases} \xrightarrow{\text{دو طرف تساوی ها را از هم کم می کنیم}} \begin{cases} 2m = 34q_1 + 10 \\ 5n = 85q_2 + 15 \end{cases}$$

$$2m - 5n = 34q_1 + 10 - 85q_2 - 15 \Rightarrow 2m - 5n = 17(2q_1 - 5q_2) - 5 \xrightarrow{2q_1 - 5q_2 = q_3} (2m - 5n) = 17q_3 - 5$$

ولی اینجا نمی‌توانیم بگوییم باقی‌مانده ۵- است، چون باقی‌مانده باید نامنفی باشد. برای آنکه باقی‌مانده نامنفی شود به این ترتیب عمل می‌کنیم:

q_3 عددی صحیح است و می‌توان آن را به صورت مجموع عددی دیگر به علاوه ۱ نوشت؛ یعنی $q_3 = q + 1$ (این کار برای هر عدد صحیح درست است، مثلاً $15 = 14 + 1$ یا $-2 = -3 + 1$). پس

$$(2m - 5n) = 17q + 17 - 5 \Rightarrow (2m - 5n) = 17q + 12$$

بنابراین باقی‌مانده برابر ۱۲ است. توجه کنید باقی‌مانده باید از مقسوم‌علیه کمتر باشد: $12 < 17$.

افراز مجموعه $\mathbb{Z}$ به کمک قضیه تقسیم

طبق قضیه تقسیم، در تقسیم هر عدد صحیح دلخواه، مانند a بر ۲ داریم $a = 2q + r$ که $0 \leq r < 2$ پس $r = 0$ یا $r = 1$ ؛ بنابراین هر عدد صحیح دلخواه را می‌توان به یکی از دو صورت $a = 2q$ یا $a = 2q + 1$ نوشت. یعنی تمام اعداد صحیح به دو مجموعه تقسیم شدند که این دو مجموعه، هیچ کدام تهی نیستند و همچنین هیچ اشتراکی ندارند. همان‌طور که می‌دانید به این تقسیم‌بندی یک مجموعه، افراز می‌گویند. به عبارت دیگر مجموعه اعداد صحیح، به دو مجموعه افراز شده است.

اعداد زوج به صورت $2q$: $A_0 = \{\dots, -4, -2, 0, 2, 4, \dots\}$

اعداد فرد به صورت $2q + 1$: $A_1 = \{\dots, -3, -1, 1, 3, \dots\}$

و واضح است که $\mathbb{Z} = A_0 \cup A_1$ و $A_0 \cap A_1 = \emptyset$.

به همین ترتیب در تقسیم هر عدد صحیح دلخواه بر ۳، باقی‌مانده برابر ۰ یا ۱ یا ۲ است. پس می‌توان گفت هر عدد صحیح دلخواه به یکی از صورت‌های $3q$ یا $3q + 1$ یا $3q + 2$ است. پس این بار مجموعه اعداد صحیح به سه مجموعه افراز می‌شود:

اعداد به صورت $3q$: $A_0 = \{\dots, -9, -6, -3, 0, 3, 6, 9, \dots\}$

اعداد به صورت $3q + 1$: $A_1 = \{\dots, -8, -5, -2, 1, 4, 7, 10, \dots\}$

اعداد به صورت $3q + 2$: $A_2 = \{\dots, -7, -4, -1, 2, 5, 8, 11, \dots\}$

که هیچ دوتایی از آن‌ها اشتراک ندارند و $\mathbb{Z} = A_0 \cup A_1 \cup A_2$.

در حالت کلی در تقسیم بر m ، مجموعه اعداد صحیح به m مجموعه افراز می‌شود (مجموعه اعداد به صورت‌های mq ، $mq + 1$ ، $mq + 2$ ، ... و $mq + (m - 1)$) که هیچ دوتایی از آن‌ها اشتراک ندارند و اجتماع آن‌ها برابر مجموعه اعداد صحیح است.

گاهی برای معرفی این مجموعه‌ها، از هر کدام یک نماینده (معمولاً باقی‌مانده) را انتخاب می‌کنیم و آن را به صورت $[r]_m$ می‌نویسیم که در اینجا r یکی از باقی‌مانده‌های تقسیم بر m است؛ پس می‌توان گفت در تقسیم بر m : $\mathbb{Z} = [0]_m \cup [1]_m \cup \dots \cup [m-1]_m$

مسئله ۱۸

نابینا کنید اگر p عددی اول باشد و $p > 3$ ، آنگاه این عدد اول، به یکی از صورت‌های $p = 6k + 1$ یا $p = 6k + 5$ نوشته می‌شود. راه‌حل

از صورت سؤال حدس می‌زنیم که بهتر است عدد صحیح دلخواه a را بر ۶ تقسیم کنیم و می‌دانیم در تقسیم بر ۶ اعداد صحیح به یکی از فرم‌های $6k$ ، $6k + 1$ ، $6k + 2$ ، $6k + 3$ ، $6k + 4$ و $6k + 5$ نوشته می‌شود. این ۶ دسته را، از نظر اول بودن یا غیراول بودن بررسی می‌کنیم:

$6k$: عددی غیراول است، زیرا $6k = 2 \times 3k$ و غیر از ۱ و خودش بر ۲ و ۳ بخش‌پذیر است.

$6k + 1$: می‌تواند اول باشد، مثلاً به ازای $k = 1$ برابر ۷ است که عددی اول است.

$6k + 2$: به ازای $k \neq 0$ غیراول است، چون $6k + 2 = 2(3k + 1)$ که حاصل ضرب دو عدد نامساوی ۱ است. توجه کنید که اگر $k = 0$ ، آنگاه $6k + 2 = 2$ ، که اول است، ولی در صورت سؤال گفته شده است $p > 3$.

$6k + 3$: به ازای $k \neq 0$ غیراول است، چون $6k + 3 = 3(2k + 1)$ که حاصل ضرب دو عدد نامساوی ۱ است. توجه کنید که اگر $k = 0$ ، $6k + 3 = 3$ ، که اول است، ولی در صورت سؤال گفته شده است $p > 3$.

$6k + 4$: عددی غیراول است، زیرا $6k + 4 = 2(3k + 2)$ ، که حاصل ضرب دو عدد نامساوی ۱ است.

$6k + 5$: می‌تواند اول باشد، مثلاً به ازای $k = 0$ ، برابر ۵ است که عددی اول است.

بنابراین تنها دو فرم $6k + 1$ یا $6k + 5$ می‌توانند اعداد اول بزرگتر از ۳ را معرفی کنند.

نکته

هر عدد اول بزرگتر از ۳ به یکی از فرم‌های $6k + 1$ یا $6k + 5$ است. اما هر عدد به فرم $6k + 1$ یا $6k + 5$ لزوماً اول نیست.

مثال

- اعداد اول ۱۹ و ۱۱ را به یکی از فرم‌های $6k + 1$ و $6k + 5$ می‌نویسیم:
- دو عدد ۴۹ و ۳۵ به یکی از فرم‌های $6k + 1$ و $6k + 5$ نوشته می‌شوند ولی اول نیستند.

مسئله ۱۹

ابتدا ثابت کنید که هر عدد صحیح و فرد، مانند a ، به یکی از دو صورت $4k + 1$ یا $4k + 3$ نوشته می‌شود. سپس نشان دهید که مربع هر عدد فرد به شکل $8t + 1$ نوشته می‌شود (باقی‌مانده تقسیم مربع هر عدد فرد بر ۸ مساوی با ۱ است).

راه‌حل هر عدد صحیح دلخواه در تقسیم بر ۴ به یکی از فرم‌های $4k$ یا $4k + 1$ یا $4k + 2$ یا $4k + 3$ است. هر کدام را از نظر زوج یا فرد بودن بررسی می‌کنیم:

$$\text{عددی فرد } 4k + 1 = 2(\underbrace{2k}_{q}) + 1 = 2q + 1, \quad \text{عددی زوج } 4k = 2(\underbrace{2k}_{q}) = 2q$$

$$\text{عددی فرد } 4k + 3 = 4k + 2 + 1 = 2(\underbrace{2k + 1}_{q}) + 1 = 2q + 1, \quad \text{عددی زوج } 4k + 2 = 2(\underbrace{2k + 1}_{q}) = 2q$$

یعنی در بین همه اعداد صحیح، فقط اعداد به فرم $4k + 1$ یا $4k + 3$ عددهایی فرد هستند. حالا مربع این عددها را بررسی می‌کنیم:

$$(4k + 1)^2 = 16k^2 + 8k + 1 = 8(\underbrace{2k^2 + k}_{t}) + 1 = 8t + 1$$

$$(4k + 3)^2 = 16k^2 + 24k + 9 = 16k^2 + 24k + 8 + 1 = 8(\underbrace{2k^2 + 3k + 1}_{t}) + 1 = 8t + 1 \quad \text{است.}$$

مسئله ۲۰

اگر a عددی صحیح و فرد باشد و $b \mid a + 2$ در این صورت باقی‌مانده تقسیم عدد $a^2 + b^2 + 3$ را بر ۱۶ بیابید.

$$a \Rightarrow a = 2k + 1 \Rightarrow a^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 4k(k + 1) + 1 = 8t_1 + 1$$

$$b \mid a + 2 \Rightarrow a + 2 = bq \xrightarrow[a = 2k + 1]{a \text{ عددی فرد است.}} 2k + 1 + 2 = bq$$

$$2(\underbrace{k + 1}_{n}) + 1 = bq \Rightarrow 2n + 1 = bq \Rightarrow bq \text{ عددی فرد است.} \Rightarrow b \text{ نمی‌تواند زوج باشد.}$$

چون b عددی فرد است، $b^2 = 8t_2 + 1$ پس

$$a^2 + b^2 + 3 = 8t_1 + 1 + 8t_2 + 1 + 3 = 8(t_1 + t_2) + 5 = 8t + 5 \Rightarrow \begin{cases} t = 2q \Rightarrow a^2 + b^2 + 3 = 16q + 5 \\ t = 2q + 1 \Rightarrow a^2 + b^2 + 3 = 16q + 13 \end{cases}$$

در نتیجه باقی‌مانده برابر ۵ یا ۱۳ است.

تمرین‌های تشریحی

• جاهای خالی را با عدد یا عبارت مناسب پر کنید.

۶۵- در تقسیم عدد $127 - 15$ بر 15 ، باقی‌مانده برابر و خارج قسمت برابر است.

۶۶- باقی‌مانده تقسیم مربع هر عدد فرد، بر 8 برابر است.

۶۷- بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک دو عدد n و $n+1$ برابر است.

۶۸- اگر $a|b+c$ و $a|b-c$ ، آن‌گاه می‌توان نتیجه گرفت $(a|2b, a|b)$

۶۹- حاصل ضرب 3 عدد صحیح متوالی همواره بر بخش‌پذیر است.

۷۰- اگر $a|1$ آن‌گاه، a برابر یا است.

۷۱- a و b اعدادی صحیح و a مخالف صفر است. اگر $a|b$ ، آن‌گاه عدد شمارنده عدد است.

۷۲- اگر $a|a$ آن‌گاه a برابر است.

۷۳- اگر a عددی طبیعی، $a|p$ و p عدد اول باشد، در این صورت a برابر یا است.

۷۴- اگر $a|b$ و $|a| > |b|$ ، آن‌گاه است.

۷۵- اگر p عددی اول و a و b دو عدد صحیح باشند به‌طوری‌که $p|ab$ ، آن‌گاه یا است.

۷۶- اگر برای دو عدد صحیح a و b داشته باشیم $a|b$ ، برای هر $m \in \mathbb{Z}$ داریم $(a|mb, ma|b)$

۷۷- هر دو عدد اول متمایز، نسبت به هم هستند.

۷۸- اگر دو عدد صحیح بر م.م.م. خودشان تقسیم شوند آن‌گاه دو عدد به‌دست آمده هستند.

۷۹- اگر $(a, b) = 1$ ، آن‌گاه (a^5, b^{15}) برابر است.

۸۰- اگر $a|bc$ و $(a, b) = 1$ ، آن‌گاه $(c|a, a|c, a|b)$

۸۱- حاصل $[46, 49]$ برابر است.

۸۲- اگر a, b و c اعداد طبیعی باشند که $a|b$ و $b|c$ ، در این صورت حاصل عبارت $([a, b], [a, c])$ برابر است.

۸۳- اگر k عددی صحیح باشد، باقی‌مانده تقسیم $19k - 300$ بر 19 برابر است.

۸۴- فرض کنید k عددی طبیعی باشد، حاصل (m^{2k}, m^{2k+1}) برابر با است.

۸۵- m عددی صحیح است. حاصل $(2m, 6m^3)$ برابر با است.

۸۶- $[a, b] = c$ اگر و تنها اگر دو شرط زیر برقرار باشند.

۱) $a|c, b|c$ ۲) $\forall m > 0, \dots\dots\dots$

۸۷- اگر $a|b$ آن‌گاه ب.م.م. دو عدد a و b برابر است. $(|a|, a)$

۸۸- ک.م.م. دو عدد 720 و 504 برابر است.

۸۹- اگر p عددی اول باشد و $a \in \mathbb{Z}$ ، $p|a$ $(p, a) = \dots\dots\dots$

۹۰- اگر a و b دو عدد طبیعی بزرگ‌تر از یک باشند، $27|b$ و $9a|b$ آن‌گاه $a = \dots\dots\dots$ است.

• در سؤال‌های ۹۱ تا ۱۱۹ درستی یا نادرستی هر گزاره را مشخص کنید.

۹۱- اگر $(a, b) = d$ ، آن‌گاه $(a^n, b^n) = d$.

۹۲- اگر $(a, b) = 1$ ، $c|a$ و $d|b$ آن‌گاه $(c, d) = 1$.

خرداد ۱۴۰۰

دی ۱۴۰۰

دی ۱۴۰۲

دی ۱۴۰۲

خرداد ۱۴۰۰

شهریور ۹۸

خرداد ۱۴۰۳

دی ۱۴۰۳

۹۳- اگر عددی نسبت به دو عدد صحیح اول باشد، آن گاه نسبت به ضرب آنها نیز اول است و برعکس.

۹۴- اگر $[a, b] = c$ و $n \in \mathbb{N}$ ، آن گاه $[a^n, b^n] = c^n$.

۹۵- اگر داشته باشیم $(a, b) = 1$ ، آن گاه می‌گوییم a و b نسبت به هم اول‌اند.

۹۶- اگر $a | b$ ، آن گاه $(a, b) = a$.

۹۷- برای دو عدد طبیعی a و b ، اگر $a | b$ آن گاه $[a, b] = b$.

۹۸- برای دو عدد صحیح و ناصفر a و b و عدد طبیعی c اگر $(a | c, b | c)$ و $(\forall m > 0, a | m, b | m \Rightarrow c | m)$ آن گاه $[a, b] = c$.

۹۹- بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک دو عدد ۴ و ۲ برابر ۲- است.

۱۰۰- تفاضل هر دو عدد دلخواه از مجموعه $A = \{x \in \mathbb{Z} | x = 4k + 3\}$ مضرب ۴ است.

۱۰۱- حاصل $(30, [-18, -12])$ برابر ۶- است.

۱۰۲- اگر $m \in \mathbb{Z}^+ - \{0\}$ آن گاه $[m^7, (m^3, m^5)] = m^7$.

۱۰۳- فرض می‌کنیم $ab = cd$ ، a, b, c, d اعداد صحیح و ناصفرند. در این صورت پنج رابطه عادی کردن از این تساوی نتیجه بگیرید.

۱۰۴- ثابت کنید اگر $a | b$ آن گاه $a | -b$ ، $-a | b$ و $-a | -b$.

۱۰۵- آیا از اینکه $a | b$ و $c | d$ همواره می‌توان نتیجه گرفت $a + c | b + d$ ؟

۱۰۶- اگر $m, n \in \mathbb{N}$ و $a, b \in \mathbb{Z}$ ثابت کنید: $a^m | b^n \Rightarrow a | b$ ، $m \leq n$.

۱۰۷- اگر $a | 19$ آن گاه $a | 95$.

۱۰۸- اگر $a | 23$ آن گاه $a | 161$.

۱۰۹- اگر $a | 36$ آن گاه $a | 18$ یا $a | 16$.

۱۱۰- اگر $a, b \in \mathbb{Z}$ و $4 | b$ و $6 | a$ آن گاه $36 | 3ab$.

۱۱۱- اگر $a, b \in \mathbb{Z}$ و $4 | b$ و $6 | a$ آن گاه $10 | a + b$.

۱۱۲- اگر $a, b \neq 0$ دو عدد صحیح باشند، آن گاه $a | a - b \Rightarrow a | a + b$.

۱۱۳- برای اعداد صحیح a, b و c که $a \neq 0$ اگر $a | b + c$ آن گاه $a | b$ یا $a | c$.

۱۱۴- اگر $a | b$ و $b \neq 0$ ، در این صورت $|a| > |b|$.

۱۱۵- اگر $a | 12$ و $a | 36$ ، آن گاه برای a چهار مقدار صحیح وجود دارد.

۱۱۶- اگر $a \neq 0$ ، $b \neq 0$ و c عدد صحیح باشند و $a^3 | b$ و $a^3 | c^2$ آن گاه $a^3 | c^2$.

۱۱۷- اگر $a^3 | b^4$ ، آن گاه $a^2 | b^5$.

۱۱۸- اگر a عددی صحیح و فرد و b عددی صحیح باشد، در این صورت باقی‌مانده تقسیم عدد $a^2 + b^2 + 3$ بر ۸ برابر است با ۵.

۱۱۹- اگر $a^2 | b^4$ آن گاه $a | b$.

• در سؤال‌های ۱۲۰ تا ۱۲۵ گزینه صحیح را مشخص کنید.

۱۲۰- کدام عبارت همواره درست نیست؟ ($a, b, n \in \mathbb{Z}$)

الف) $3 | 6a + 15b$ ب) $2 | a(a+1) + 4$ ج) $3 | a(a+1)(a+2) + 6$ د) $3 | 27n + 5$

۱۲۱- به ازای چند مقدار a ، تساوی $(3a, 49) = a$ برقرار است؟

الف) ۱ ب) ۲ ج) ۳ د) ۴

شهریور ۱۴۰۲

شهریور ۱۴۰۰

دی ۹۸ و ۹۹

خرداد ۱۴۰۱

خرداد ۱۴۰۱

خرداد ۱۴۰۳

شهریور ۱۴۰۳

تمرین کتاب درسی

تمرین کتاب درسی

تمرین کتاب درسی

تمرین کتاب درسی - شهریور ۱۴۰۰

دی ۱۴۰۱ و شهریور ۱۴۰۲

خرداد ۱۴۰۱

۱۲۲- فرض کنید n عددی صحیح باشد، حاصل $(\Delta n + 9, 3)$ کدام عدد نمی‌تواند باشد؟

- الف) ۲ (ب) ۶ (ج) ۵ (د) ۱

۱۲۳- فرض کنید p عددی اول باشد، حاصل $(\Delta p + 7, p)$ برابر کدام مورد می‌تواند باشد؟

- الف) ۵ (ب) ۷ (ج) ۱۱ (د) ۳

۱۲۴- فرض کنید a عددی طبیعی باشد. حاصل $[\Delta a, 36]$ برابر کدام عدد می‌تواند باشد؟

- الف) ۱۰۸ (ب) ۱۸۰ (ج) ۱۴۴ (د) ۱۹۲

۱۲۵- فرض کنید m و n عددهایی طبیعی باشند و $[\Delta m, n^2] = nm^2$ ، کدام گزینه همواره درست است؟

- الف) $\Delta | n$ (ب) $\Delta | m$ (ج) $n | m^2$ (د) $m | n^2$

دی ۹۸

۱۲۶- اگر عدد طبیعی $a > 1$ ، در دو شرط $a | 4k + 9$ و $a | 6k + 14$ صدق کند مقدار a را بیابید.

شهریور ۹۹

۱۲۷- فرض کنید a و n دو عدد طبیعی باشند، به‌طوری که $a | 3n + 4$ و $a | 2n + 3$ نشان دهید $a = 1$.

شهریور ۱۴۰۱

۱۲۸- اگر عدد طبیعی a ، دو عدد $\Delta k + 9$ و $\Delta k + 13$ را عاد کند ثابت کنید $a = 1$ یا $a = 7$.

۱۲۹- اگر $a \neq 0$ عددی صحیح و دو عدد $\Delta m + 4$ و $\Delta m + 5$ بر a بخش‌پذیر باشند، ثابت کنید $a = \pm 1$.

خرداد ۱۴۰۲

۱۳۰- اگر $a | m + 7$ و $a | 2m + 3$ ، در این صورت چند مقدار صحیح و نامنفی برای a وجود دارد.

خرداد ۱۴۰۳

۱۳۱- اگر a عددی طبیعی باشد و $a | 7k + 1$ و $a | 4k + 3$ ، ثابت کنید $a = 1$ یا $a = 17$.

۱۳۲- فرض کنید a و m عددهای صحیح باشند و $a | 5m + 7$ و $a | 3m - 1$ ، ثابت کنید $a | 26$.

۱۳۳- اگر $a | 4n^3 + 6$ و $a | 2n + 1$ ، آنگاه a را به‌دست آورید.

۱۳۴- برای چند عدد طبیعی n ، رابطه $2n + 1 | 2n^2 - 3n + 3$ برقرار است.

۱۳۵- اعداد طبیعی را که در رابطه $n - 2 | n^4 - 2n^3 + n - 9$ صدق می‌کنند به‌دست آورید.

تمرین کتاب درسی - خرداد ۱۴۰۱

۱۳۶- اگر عددی مانند k در $\mathbb{Z}$ باشد به‌طوری که $\Delta k + 1$ ثابت کنید $25 | 16k^2 + 28k + 6$.

شهریور ۱۴۰۲

۱۳۷- اگر عددی مانند k در $\mathbb{Z}$ باشد، به‌طوری که $7 | 2k + 1$ ثابت کنید $49 | 4k^2 - 10k - 6$.

۱۳۸- اگر $7 | 6k + 1$ ، ثابت کنید $49 | 36k^2 + 54k + 8$.

۱۳۹- به‌ازای بعضی از مقادیر $n \in \mathbb{N}$ و α ، اگر $\alpha | 13n + 3$ و $\alpha | 7n + 4$ و $\alpha \neq 1$ ، آنگاه مجموع ارقام کوچک‌ترین عدد n ، چند است؟

۱۴۰- چند نقطه با مختصات صحیح روی تابع $y = \frac{x+3}{2x-1}$ قرار دارد؟

۱۴۱- نقاط (a, b) روی منحنی $y = \frac{3x-1}{x+2}$ قرار دارند، اگر $a, b \in \mathbb{Z}$ ، چند نقطه با این ویژگی روی منحنی قرار دارد.

۱۴۲- تمام n های طبیعی را بیابید که به‌ازای آنها حاصل کسر $\frac{2n^2 + 3n + 7}{n - 3}$ عددی صحیح باشد.

۱۴۳- روی منحنی $xy - y - 2x - 1 = 0$ چند نقطه با مختصات صحیح وجود دارد.

تمرین کتاب درسی

۱۴۴- ثابت کنید

الف) هر دو عدد صحیح و متوالی نسبت به هم اول‌اند. (راهنمایی: فرض کنید $(m, m+1) = d$ و ثابت کنید $d | 1$ و نتیجه بگیرید $d = 1$).

ب) هر دو عدد صحیح و فرد متوالی نسبت به هم اول‌اند.

تمرین کتاب درسی

۱۴۵- اگر $p \neq q$ و p, q هر دو اول باشند، ثابت کنید $(p, q) = 1$.

۱۴۶- ب.م.م دو عدد $12n + 7$ و $5n - 2$ را بیابید.

۱۴۷- اگر $d = (a - 5, a^2 - 6a + 3)$ و $a \in \mathbb{Z}$ ، آنگاه d را محاسبه کنید.

فصل اول
درس دوم

پاسخ تمرین‌های تشریحی

۶۵. ۸، -۹. توجه کنید که

$$-127 = -15 \times 8 - 7 \Rightarrow -127 = 15(-8) - 7$$

$$-127 = 15(-8) - 15 + 15 - 7 \Rightarrow -127 = 15(-9) + 8$$

بنابراین باقی‌مانده برابر ۸ و خارج قسمت برابر -۹ است.

۶۶. ۱. مربع هر عدد فرد را می‌توان به صورت $8k+1$ نوشت. پس باقی‌مانده

این تقسیم برابر ۱ است.

۶۷. ۱. بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک دو عدد متوالی برابر یک است. پس

$$(n, n+1) = 1$$

۶۸. $a \mid 2b$. می‌توان نوشت:

$$a \mid b+c, a \mid b-c \Rightarrow a \mid (b+c) + (b-c) \Rightarrow a \mid 2b$$

۶۹. $3! = 6$. حاصل ضرب دو عدد متوالی بر ۲ بخش‌پذیر است. پس

حاصل ضرب سه عدد متوالی هم بر ۲ بخش‌پذیر است. از طرف دیگر از بین سه عدد متوالی حتماً یکی به صورت $3k$ نوشته می‌شود. پس حاصل ضرب سه عدد متوالی هم بر ۲ و هم بر ۳ بخش‌پذیر است.

۷۰. $+1, -1$. اگر $a \mid$ آن‌گاه a برابر $+1$ یا -1 است.

۷۱. a, b . اگر $a \mid b$ آن‌گاه عدد a شمارنده عدد b است.

۷۲. صفر. اینکه صفر عدد صفر را می‌شمارد به عنوان یک قرارداد پذیرفته می‌شود.

۷۳. ۱. $a \mid p$. که p عددی اول است، پس a برابر است با p یا ۱.

۷۴. $b=0$. اگر $a \mid b$ و $a > |b|$ آن‌گاه $b=0$.

۷۵. $p \mid a, p \mid b$. اگر $p \mid ab$ (عددی اول باشد) آن‌گاه $p \mid a$ یا $p \mid b$.

۷۶. $a \mid mb$. اگر برای دو عدد صحیح a و b داشته باشیم $a \mid b$ برای هر

$$m \in \mathbb{Z} \text{ داریم } a \mid mb.$$

۷۷. اول. هر دو عدد اول متمایز نسبت به هم اول هستند.

۷۸. نسبت به هم اول. توجه کنید که

$$(a, b) = d \Rightarrow \left(\frac{a}{d}, \frac{b}{d}\right) = 1$$

۷۹. ۱. توجه کنید که $(a^m, b^n) = 1 \xrightarrow{\forall m, n \in \mathbb{N}} (a, b) = 1$

$$(a, b) = 1 \Rightarrow (a^5, b^5) = 1$$

۸۰. $a \mid c$. اگر عددی حاصل ضرب دو عدد صحیح را بشمارد و نسبت به

یکی از آن‌ها اول باشد، آن‌گاه دیگری را می‌شمارد.

$$a \mid bc \xrightarrow{(a, b) = 1} a \mid c$$

۸۱. ۱۳۸. برای به دست آوردن ک.م.م. دو عدد ابتدا آن دو عدد را تجزیه، سپس

حاصل ضرب پایه‌های غیرمشترک و پایه‌های مشترک با توان بیشتر را می‌نویسیم.

$$[69, 46] = [2^3 \times 3, 2^2 \times 23] = 2^3 \times 3 \times 23 = 138$$

۸۲. b . توجه کنید که چون a, b و c اعداد طبیعی هستند، داریم

$$\left. \begin{aligned} a \mid b &\Rightarrow [a, b] = b \\ a \mid b, b \mid c &\Rightarrow a \mid c \Rightarrow [a, c] = c \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$([a, b], [a, c]) = (b, c) \xrightarrow{b \mid c} (b, c) = b$$

$$x^4 + y^4 \geq x^3y + xy^3 \Leftrightarrow x^4 + y^4 - x^3y - xy^3 \geq 0 \quad ۶۱$$

$$\Leftrightarrow x^3(x-y) + y^3(y-x) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow x^3(x-y) - y^3(x-y) \geq 0 \Leftrightarrow (x-y)(x^3 - y^3) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (x-y)(x-y)(x^2 + xy + y^2) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (x-y)^2(x^2 + xy + y^2) \geq 0$$

چون $x, y > 0$ ، پس رابطه فوق همواره درست است. در نتیجه تمام گزاره‌های قبل از آن هم همواره درست هستند، پس حکم مسئله اثبات می‌شود.

$$\frac{a}{b^2} + \frac{b}{a^2} \geq \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \Leftrightarrow \frac{a^3 + b^3}{a^2b^2} \geq \frac{a+b}{ab} \quad ۶۲$$

$$\xrightarrow{a, b > 0} a^3 + b^3 \geq ab(a+b) \Leftrightarrow a^3 + b^3 - a^2b - ab^2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow a^2(a-b) + b^2(b-a) \geq 0 \Leftrightarrow a^2(a-b) - b^2(a-b) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (a-b)(a^2 - b^2) \geq 0 \Leftrightarrow (a-b)(a-b)(a+b) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (a-b)^2(a+b) \geq 0$$

$a, b \in \mathbb{R}^+$ ، بنابراین رابطه آخر همواره درست است. و چون رابطه‌ها برگشت‌پذیر هستند، حکم مسئله نیز درست است.

$$\frac{1}{\sqrt{a}} + \frac{1}{\sqrt{b}} \geq \frac{4}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{\sqrt{a}\sqrt{b}} \geq \frac{4}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} \quad ۶۳$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 \geq 4\sqrt{ab} \Leftrightarrow a + b + 2\sqrt{ab} \geq 4\sqrt{ab}$$

$$\Leftrightarrow a + b - 2\sqrt{ab} \geq 0 \Leftrightarrow (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0$$
 گزاره همواره درست.

چون رابطه‌ها برگشت‌پذیر هستند، حکم مسئله نیز درست است.

$$x^3 \geq y^3 + xy(y-x) \Leftrightarrow x^3 - y^3 - xy(y-x) \geq 0 \quad ۶۴ \text{ الف}$$

$$\Leftrightarrow (x-y)(x^2 + xy + y^2 + xy) \geq 0 \Leftrightarrow (x-y)(x^2 + 2xy + y^2) \geq 0$$

$$\xrightarrow{x-y \geq 0} (x^2 + 2xy + y^2) \geq 0 \Rightarrow (x+y)^2 \geq 0$$
 گزاره همواره درست.

توجه کنید که چون حکم مسئله با یک گزاره همواره درست، هم‌ارز است، خودش هم درست است.

$$|a| - |b| \leq |a-b| \xrightarrow{\text{به توان ۲}} (|a| - |b|)^2 \leq (|a-b|)^2 \quad \text{ب}$$

$$\Leftrightarrow a^2 + b^2 - 2|ab| \leq a^2 + b^2 - 2ab$$

$$\Leftrightarrow 2ab \leq 2|ab| \Leftrightarrow ab \leq |ab|$$
 گزاره همواره درست

حکم با یک گزاره همواره درست هم‌ارز است، پس خودش هم همواره درست است.

$$(x-y)(z-t)(x+y)(z+t) \leq (xz-yt)^2 \quad \text{پ}$$

$$\Leftrightarrow (x^2 - y^2)(z^2 - t^2) \leq (xz - yt)^2$$

$$\Leftrightarrow x^2z^2 - x^2t^2 - y^2z^2 + y^2t^2 \leq x^2z^2 + y^2t^2 - 2xyzt$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq x^2t^2 + y^2z^2 - 2xyzt \Leftrightarrow (xt - yz)^2 \geq 0$$

گزاره آخر همواره درست است، پس تمام گزاره‌های قبل از آن هم همواره درست هستند.

$$\frac{1}{a^4} + \frac{1}{b^4} \geq \frac{4}{a^4 + b^4} \Leftrightarrow \frac{a^4 + b^4}{a^4b^4} \geq \frac{4}{a^4 + b^4} \quad \text{ت}$$

$$\Leftrightarrow (a^4 + b^4)^2 \geq 4a^4b^4 \Leftrightarrow a^8 + b^8 + 2a^4b^4 \geq 4a^4b^4$$

$$\Leftrightarrow a^8 + b^8 - 2a^4b^4 \geq 0 \Leftrightarrow (a^4 - b^4)^2 \geq 0$$

گزاره آخر همواره درست است، پس تمام گزاره‌های قبل از آن هم درست هستند.

۹۴ درست. فرض کنید $(a, b) = d$ ، در این صورت اگر a و b را بر d تقسیم

$$q = \frac{a}{d}, \quad q' = \frac{b}{d} \Rightarrow (q, q') = 1$$

$$[a, b] = [dq, dq'] = d[q, q'] = dq q' \Rightarrow c = dq q'$$

اکنون می‌توان نوشت

$$[a^n, b^n] = [d^n q^n, d^n q'^n] = d^n [q^n, q'^n] = d^n q^n q'^n = c^n$$

۹۵ درست.

۹۶ نادرست. زیرا $a|b$ آن‌گاه $(a, b) = |a|$.

۹۷ درست. $a|b \Rightarrow [a, b] = |b|$

۹۸ درست. بنابر تعریف ک.م.م. درست است.

۹۹ نادرست. زیرا بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک همواره مثبت است.

۱۰۰ درست.

$$\begin{aligned} x_1 &= 4k_1 + 3 \\ x_2 &= 4k_2 + 3 \end{aligned} \Rightarrow x_1 - x_2 = 4(k_1 - k_2) + (3 - 3) = 4k' \quad k' = k_1 - k_2$$

یعنی تفاضل هر دو عدد از مجموعه A مضرب ۴ است.

۱۰۱ نادرست. چون $(-12, -18) = 36 \Rightarrow (36, 30) = 6$

۱۰۲ درست.

$$[m^y, (m^z, m^d)] = [m^y, m^z] = m^y$$

$$\xrightarrow{m \in \mathbb{Z}^+ - \{0\}} [m^y, (m^z, m^d)] = m^y$$

$$ab = cd \Rightarrow a|cd, b|cd, c|ab, d|ab, ab|cd \quad 103$$

۱۰۴ الف)

$$a|b \Rightarrow b = aq \xrightarrow{(-1) \times} -b = -aq \Rightarrow -b = a(-q) \quad q'$$

$$-b = aq' \Rightarrow a|-b$$

$$a|b \Rightarrow b = aq \xrightarrow{q = -q'} b = a(-q') \Rightarrow b = -aq' \Rightarrow -a|b \quad (ب)$$

$$a|b \Rightarrow b = aq \xrightarrow{(-1) \times} -b = -aq \Rightarrow -a|-b \quad (پ)$$

۱۰۵ خیر. مثلاً فرض کنید $a = 3, b = 6, c = 2, d = 8$. در این صورت

$$a + c | b + d \text{ و } c | d, a | b \text{ توجه کنید که } 3 + 2 | 6 + 8 \text{ (چون } 5 | 14).$$

۱۰۶

$$a|b \xrightarrow{q \in \mathbb{Z}} b = aq \xrightarrow{\text{به توان } n} b^n = a^n q^n$$

$$b^n = a^m \cdot a^{n-m} q^n \Rightarrow b^n = a^m (a^{n-m} q^n) \Rightarrow b^n = a^m q' \quad q' = a^{n-m} q^n$$

$$\Rightarrow a^m | b^n$$

۱۰۷ درست. زیرا اگر a عددی را بشمارد هر مضربی از آن را می‌شمارد.

$$a|b \xrightarrow{m \in \mathbb{Z}} a|mb, \quad a|19 \Rightarrow a|5 \times 19 \Rightarrow a|95$$

۱۰۸ درست. زیرا $a|b \xrightarrow{m \in \mathbb{Z}} ma|mb$

$$a|23 \xrightarrow{\times 7} 7a|23 \times 7 \Rightarrow 7a|161$$

۱۰۹ نادرست. به عنوان مثال نقض فرض کنید $a = 12$. در این صورت

$$12 | 12 \text{ ولی } 12 \nmid 16 \text{ و } 12 \nmid 36$$

۸۳ ۴. می‌توان نوشت

$$\begin{aligned} a &= 19k - 300 \Rightarrow a = 19k - (19 \times 15 + 15) = 19(k - 15) - 15 = 19k' - 15 \\ &= 19k' - 15 + 19 - 19 = 19k' - 19 + 4 = 19(k' - 1) + 4 = 19k'' + 4 \quad k'' = k' - 1 \end{aligned}$$

باقی‌مانده برابر ۴ است.

۸۴ $|m^{2k+1}|$. توجه کنید که

$$2k < 2k+1 \Rightarrow m^{2k} | m^{2k+1}$$

$$[m^{2k}, m^{2k+1}] = m^{2k+1}$$

از طرف دیگر، چون $2k+1 < 2k+3$ داریم:

$$[m^{2k+1}, m^{2k+3}] = m^{2k+3}$$

۸۵ $|2m|$. توجه کنید که چون $2m, 6m^3$ را می‌شمارد حاصل عبارت

مورد نظر برابر است با $|2m|$.

۸۶ عبارت به صورت زیر کامل می‌شود:

$$1) a|c, b|c, \quad 2) \forall m > 0, a|m, b|m \Rightarrow c \leq m$$

۸۷ $|a|$. اگر a, b را عدد آن‌گاه ب.م.م. دو عدد a و b برابر $|a|$ است.

۸۸ 5040 . توجه کنید که دو عدد را تجزیه می‌کنیم، سپس حاصل ضرب

پایه‌های غیرمشترک و پایه‌های مشترک با توان بیشتر را می‌نویسیم:

$$[720, 5040] = [2^4 \times 3^2 \times 5, 2^4 \times 3^2 \times 5 \times 7] = 2^4 \times 3^2 \times 5 \times 7 = 5040$$

۸۹ ۱.

۹۰ ۳. توجه کنید که

$$\begin{cases} 27 = bq \\ b = 9aq' \end{cases} \Rightarrow 27 = 9aqq' \Rightarrow 3 = a \frac{qq'}{k} \Rightarrow 3 = ak$$

$$a|3 \xrightarrow{a>1} a=3$$

۹۱ نادرست. مثال نقض:

$$(4, 6) = 2 \Rightarrow (4^2, 6^2) = (16, 36) = 4$$

۹۲ درست. اگر دو عدد صحیح نسبت به هم اول باشند، آن‌گاه شمارنده‌های

آن‌ها نیز نسبت به هم اول‌اند.

$$(a, b) = 1 \xrightarrow{\frac{c|a}{d|b}} (c, d) = 1$$

می‌توانیم گزاره بالا را با برهان خلف ثابت کنیم. فرض کنید

$$(c, d) = m, m \neq 1 \Rightarrow \begin{cases} m|c \Rightarrow m|a \\ m|d \Rightarrow m|b \end{cases} \Rightarrow m|a, m|b, m \neq 1$$

که خلاف فرض $(a, b) = 1$ است، زیرا a و b دارای مقسوم‌علیه مشترک مخالف یک (m) نیستند.

۹۳ درست. $(a, b) = 1, (a, c) = 1 \Leftrightarrow (a, bc) = 1$

برای اثبات ابتدا فرض کنید $(a, b) = 1, (a, c) = 1$ و $(a, bc) = d$. پس داریم

$$\begin{cases} d|a \\ d|bc \Rightarrow (d|b \vee d|c) \end{cases} \Rightarrow d|(a, b) \text{ یا } d|(a, c) \Rightarrow d|1$$

در نتیجه $d = 1$. اکنون فرض می‌کنیم $(a, bc) = 1$ ، از آنجا که اگر

$(a, b) = d$ ، آن‌گاه $d|a$ و $d|b$ ، پس باید $d|bc$ ، پس باید $d = 1$ ، به همین

صورت $(a, c) = 1$ نیز ثابت می‌شود.

۱۲۱. گزینه (ج) یا ۳. چون ب.م.م. دو عدد ۳a و ۴۹ برابر a شده است، پس a مثبت است و

$$\begin{cases} a|3a \\ a|49 \Rightarrow a=1, 7, 49 \end{cases}$$

۱۲۲. گزینه (ج) یا ۵. فرض کنید $d = (\Delta n + 9, 30)$ ، در این صورت

$$d|30, \quad d|\Delta n + 9$$

توجه کنید که $\Delta n + 9$ بر ۵ بخش پذیر نیست چون اگر $\Delta n + 9$ ، چون Δn باید ۵|۹ که تناقض است. البته $(\Delta n + 9, 30)$ برابر هر یک از موارد دیگر می‌تواند باشد.

گزینه (الف) $(\Delta n + 9, 30) = (14, 30) = 2$: $n=1$

گزینه (د) $(\Delta n + 9, 30) = (19, 30) = 1$: $n=2$

گزینه (ب) $(\Delta n + 9, 30) = (24, 30) = 6$: $n=3$

۱۲۳. گزینه (ب) یا ۷. فرض کنید $d = (\Delta p + 7, p)$ ، در این صورت

$$\begin{cases} d|p \Rightarrow d|\Delta p \\ d|\Delta p + 7 \Rightarrow d|\Delta p + 7 - \Delta p \Rightarrow d|7 \Rightarrow d=1 \text{ یا } d=7 \end{cases}$$

۱۲۴. گزینه (ب) یا ۱۸۰. می‌دانیم ک.م.م. دو عدد بر هر دو عدد بخش پذیر است. بنابراین اگر $[5a, 36] = c$ ، آنگاه باید c بر ۳۶ و ۵a بخش پذیر باشد:

$$36|c, \quad 5a|c \xrightarrow{q \in \mathbb{Z}} c = 5aq \Rightarrow 5|c$$

از میان موارد داده شده فقط مورد (ب) یعنی ۱۸۰ هم بر ۳۶ و هم بر ۵ بخش پذیر است.

۱۲۵. گزینه (ج) یا m^2 . چون ک.م.م. دو عدد بر آن دو عدد بخش پذیر است.

$$\begin{cases} \Delta m | nm^2 \xrightarrow{m \neq 0} \Delta | nm \Rightarrow \Delta | n \text{ یا } \Delta | m \\ n^2 | nm^2 \xrightarrow{n \neq 0} n | m^2 \end{cases}$$

توجه کنید که $\Delta | m$ یا $\Delta | n$ به معنی این نیست که لزوماً $\Delta | m$.

توجه کنید که $\Delta | m$ یا $\Delta | n$ به معنی این نیست که لزوماً $\Delta | n$.

۱۲۶. روش اول: توجه کنید که

$$\begin{cases} a|6k+14 \xrightarrow{\times 2} a|2(6k+14) \Rightarrow a|12k+28 \\ a|4k+9 \xrightarrow{\times 3} a|3(4k+9) \Rightarrow a|12k+27 \end{cases}$$

$$\xrightarrow[\text{عاد کردن}]{\text{ویژگی (۳) رابطه}} a|(12k+28) - (12k+27) \Rightarrow a|1$$

اکنون توجه کنید که چون $a > 1$ این رابطه نمی‌تواند درست باشد (توجه کنید که چون $a|1$ پس $a=1$ یا $a=-1$)، بنابراین عددی طبیعی مانند a با ویژگی‌های مورد نظر وجود ندارد.

روش دوم: در روش اول، $6k+14$ را در ۲ و $4k+9$ را در ۳ ضرب کردیم؛ یعنی هر کدام را در کوچک‌ترین عددی ضرب کردیم که ضرایب k در $6k+14$ و $4k+9$ مساوی شود. اگر به صورت زیر عمل کنیم به دست می‌آید:

$$\begin{cases} a|6k+14 \xrightarrow{\times 4} a|24k+56 \\ a|4k+9 \xrightarrow{\times 6} a|24k+54 \end{cases} \Rightarrow a|2 \xrightarrow{a>1} a=2$$

اما توجه کنید که اگر $a=2$ ، چون $a|4k+9$ ، پس:

$$2|4k+9 \xrightarrow{2|4k} 2|9$$

که درست نیست، پس عددی طبیعی مانند a با ویژگی مورد نظر وجود ندارد.

۱۱۰. درست. توجه کنید که دو طرف دورابطه عاد کردن را می‌توان نظیر به نظیر در یکدیگر ضرب کرد.

$$\begin{cases} a|b \\ c|d \end{cases} \Rightarrow ac|bd, \quad ab|c \Rightarrow (a|c \wedge b|c)$$

$$\begin{cases} 4|b \\ 6|a \end{cases} \Rightarrow 24|ab \Rightarrow 2 \times 12|ab \Rightarrow (2|ab \wedge 12|ab)$$

$$12|ab \xrightarrow{\times 3} 36|3ab$$

۱۱۱. نادرست. به عنوان مثال نقض $b=12$ و $a=30$ (توجه کنید که $4|12$ و $30|30$)، ولی $10|30+12$ چون 10 شمارنده ۴۲ نیست.

۱۱۲. نادرست. مثال نقض: اگر $a=2$ و $b=8$ آن‌گاه $a|b$ ، $(2|8-8)$ ولی $(2+8|2) a+b|a$.

۱۱۳. نادرست. مثال نقض: فرض کنید $a=10$ ، $b=6$ و $c=14$ ، در این صورت $a|b+c$ ، $a|b$ و $a|c$ ولی $(10|6+14) a|b+c$.

۱۱۴. نادرست. زیرا طبق ویژگی عاد کردن اگر $a|b$ و $b \neq 0$ ، آن‌گاه $|a| \leq |b|$. درست.

$$12|a \xrightarrow{q \in \mathbb{Z}} a = 12q, \quad a|36 \Rightarrow 12q|36$$

بنابراین برای q چهار مقدار صحیح وجود دارد. $q = \pm 1, q = \pm 3$ در نتیجه برای a نیز چهار مقدار صحیح وجود دارد.

۱۱۶. درست. زیرا

$$a^3|b \Rightarrow a^3|2b, \quad 2b|c^2 \Rightarrow a^3|c^2$$

۱۱۷. درست. فرض می‌کنیم $a^3|b^4$ ، در این صورت داریم:

$$\begin{aligned} a^3|b^4 \xrightarrow{q \in \mathbb{Z}} b^4 &= qa^3 \Rightarrow b^4 = (qa)a^2 \\ b^4 &= qa^2 \xrightarrow{\times b} b^5 = (qb)a^2 \Rightarrow b^5 = qa^2 \Rightarrow a^2|b^5 \end{aligned}$$

۱۱۸. نادرست. توجه کنید که اگر b نیز فرد باشد این جمله درست است، اما در حالت کلی درست نیست. مثلاً فرض کنید $a=1$ و $b=0$ ، در این صورت $a^2+b^2+3=4$ و باقی‌مانده ۴ بر ۸ برابر ۴ است نه ۵.

۱۱۹. نادرست. به عنوان مثال نقض فرض کنید $a=8$ و $b=12$ ، در این صورت a^2 ، b^4 را می‌شمارد ولی a، b را نمی‌شمارد.

۱۲۰. گزینه (د). گزینه (الف) درست است، زیرا

$$\begin{cases} 3|6 \Rightarrow 3|6a \\ 3|15 \Rightarrow 3|15b \end{cases} \Rightarrow 3|6a+15b$$

گزینه (ب) درست است، زیرا حاصل ضرب دو عدد صحیح متوالی مضرب ۲ است، پس داریم

$$\begin{cases} 2|a(a+1) \\ 2|4 \end{cases} \Rightarrow 2|a(a+1)+4$$

گزینه (ج) درست است، زیرا حاصل ضرب سه عدد صحیح متوالی مضرب ۳ است، پس

$$\begin{cases} 3|a(a+1)(a+2) \\ 3|6 \end{cases} \Rightarrow 3|a(a+1)(a+2)+6$$

گزینه (د) نادرست است. به عنوان مثال نقض فرض کنید $n=1$ ، در این صورت به دست می‌آید $3|32$ که نادرست است.

خلاصه فصل اول

درس اول:

استدلال مستقیم: در این استدلال، مستقیماً از فرض به حکم می‌رسیم.

مثلاً با استدلال مستقیم ثابت می‌کنیم مجموع سه عدد متوالی، عددی است مضرب ۳:

$$n + (n+1) + (n+2) = 3n + 3 = 3(n+1) = 3k$$

مضرب ۳ است.

مثال نقض: وقتی با یک مثال، یک حکم کلی را رد می‌کنیم. به آن مثال،

مثال نقض می‌گوییم. مثلاً حکم کلی «برای هر دو عدد حقیقی x و y ، $\sqrt{x+y} = \sqrt{x} + \sqrt{y}$ » با مثال نقض $x=1$ و $y=4$ رد می‌شود. چون $\sqrt{1+4} \neq \sqrt{1} + \sqrt{4}$

اثبات با در نظر گرفتن همه حالت‌های ممکن: در این نوع اثبات

همه موارد ممکن (همه فرض‌های مسئله) را در نظر می‌گیریم و با هر کدام از آن‌ها به حکم می‌رسیم. توضیح منطقی این مطلب چنین است: اگر حکم مسئله گزاره r باشد و همه فرض‌های مسئله p و q باشند،

$$(p \vee q) \Rightarrow r \equiv (p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r)$$

مثلاً برای اثبات فرد بودن $n^2 - 5n + 7$ ، که n عددی طبیعی است، همه فرض‌های ممکن عبارت است از $n = 2k$ یا $n = 2k + 1$ (زوج یا فرد بودن n) و با هر کدام، فرد بودن $n^2 - 5n + 7$ را اثبات می‌کنیم:

$$n = 2k \Rightarrow n^2 - 5n + 7 = 4k^2 - 10k + 7$$

$$= 2(\underbrace{2k^2 - 5k + 3}_q) + 1 = 2q + 1$$

عدد فرد $2q + 1$

$$n = 2k + 1 \Rightarrow n^2 - 5n + 7 = 4k^2 + 4k + 1 - 10k - 5 + 7$$

$$= 4k^2 - 6k + 3 = 2(\underbrace{2k^2 - 3k + 1}_q) + 1 = 2q + 1$$

عدد فرد $2q + 1$

اثبات غیرمستقیم (برهان خلف): در اثبات بعضی مسائل، فرض

می‌کنیم، حکم برقرار نباشد (نقیض حکم برقرار باشد) و با این فرض و با استدلال درست، به نتیجه‌ای غیرممکن یا نتیجه‌ای متناقض با فرض مسئله می‌رسیم و از این‌جا نتیجه می‌گیریم که فرض برقرار نبودن حکم (فرض خلف)، باطل و حکم برقرار است! **مثلاً** با برهان خلف ثابت می‌کنیم جمع یک عدد گویا با عددی گنگ، عددی گنگ است:

عدد گویا r ، عددی گنگ x

$$\xrightarrow[\text{ثابت می‌کنیم}]{\text{با برهان خلف}} x + r = \text{عدد گنگ}$$

$$\Rightarrow x = a - r \quad (\text{عدد گویا}) \quad x + r = a: \text{فرض خلف}$$

$$\xrightarrow{\text{عدد گویا} = \text{عدد گویا} - \text{عدد گویا}} x = \text{عدد گویا}$$

که این، با فرض گنگ بودن x در تناقض است: پس فرض خلف باطل و حکم درست است، یعنی $x + r$ ، عددی گویا نیست، بلکه عددی گنگ است!

اثبات‌های بازگشتی / گزاره‌های هم‌ارز: با استفاده از این روش، حکم

را یک یا چند مرحله ساده می‌کنیم و در روند ساده کردن از ترکیب‌های دوشرطی استفاده می‌کنیم تا به یک گزاره همواره درست برسیم. **مثلاً**

برای اثبات نامساوی $a + \frac{1}{a} \geq 2$ به ازای $a > 0$ ، داریم:

$$a + \frac{1}{a} \geq 2 \xleftrightarrow{a \neq 0} a^2 + 1 \geq 2a \Leftrightarrow a^2 + 1 - 2a \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (a-1)^2 \geq 0$$

که این گزاره آخر همواره درست است؛ بنابراین چون تمام روابط دوطرفه هستند، تمام گزاره‌های قبل از آن هم همواره درست هستند. پس اگر

$a > 0$ آن‌گاه $a + \frac{1}{a} \geq 2$ همواره درست است.

درس دوم:

رابطه عاد کردن: $a|b$ ، نمادی است که خوانده می‌شود a عاد می‌کند

(می‌شمارد) b را؛ با این شرط که a و b اعداد صحیح هستند و $a \neq 0$.

همچنین داریم: $a|b \xleftrightarrow{k \in \mathbb{Z}} b = ka$. **مثلاً** چون $6 = 2 \times 3$ ،

پس می‌توان نتیجه گرفت $2|6$ و $3|6$. همچنین چون $6 = 1 \times 6$

نتیجه‌گیری $1|6$ و $6|6$ نیز درست است.

توجه: هر عدد دلخواهی صفر را می‌شمارد و صفر فقط صفر را می‌شمارد.

$$1) a|b \xrightarrow{m \in \mathbb{Z}} a|mb$$

ویژگی‌ها:

$$2) a|b \wedge b|c \Rightarrow a|c \quad (\text{خاصیت تعدی})$$

$$3) a|b \wedge a|c \Rightarrow a|b \pm c$$

$$4) a|b \xrightarrow{b \neq 0} |a| \leq |b|$$

بزرگ‌ترین مقسوم علیه مشترک (ب.م.م.): ب.م.م. دو عدد a و b را

(که a و b هر دو با هم صفر نیستند)، با نماد (a, b) نمایش می‌دهیم و با

فرض $(a, b) = d$ (عدد طبیعی) داریم:

$$\text{الف) } d|a, \quad d|b$$

$$\text{ب) } \forall m > 0: m|a, \quad m|b \Rightarrow m \leq d$$

$$a|b \Rightarrow (a, b) = |a|, \quad (0, a) = |a|$$

توجه:

کوچک‌ترین مضرب مشترک (ک.م.م.): ک.م.م. دو عدد a و b را

(که a و b هیچ کدام صفر نیستند)، با نماد $[a, b]$ نمایش می‌دهیم و با

فرض $[a, b] = c$ (عدد طبیعی) داریم:

$$\text{الف) } a|c, \quad b|c$$

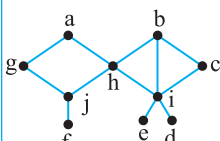
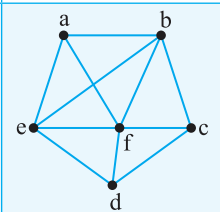
$$\text{ب) } \forall m > 0: a|m, \quad b|m \Rightarrow c \leq m$$

$$a|b \Rightarrow [a, b] = |b|$$

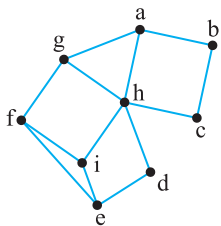
توجه: به خاطر داشته باشیم که d و c (ب.م.م. و ک.م.م.) اعدادی طبیعی

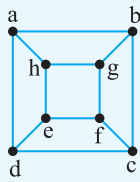
(مثبت) هستند.

امتحان میان سال (۱)

امتحان: ریاضیات گسسته		رشته: ریاضی و فیزیک		تألیفی		مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه	
ردیف	سؤالات						نمره
۱	جاهای خالی را با عبارت مناسب کامل کنید. الف) یک گراف کامل ۱۰ رأسی یال دارد. ب) مربع هر عدد فرد در تقسیم بر ۸ باقی مانده‌ای برابر دارد.						۰/۵
۲	درست یا نادرست بودن گزاره‌های زیر را تعیین کنید. الف) برای هر دو عدد حقیقی و غیر صفر x داریم: $x + \frac{1}{x} \geq 2$. ب) اگر a و b اعداد صحیح باشند و $(a, b) = 1$ ، آن گاه $[a, b] = ab $. پ) حاصل ضرب هر عدد حقیقی در یک عدد گنگ، عددی گنگ است. ت) معادله هم‌نهشتی $3x \equiv 4 \pmod{9}$ دارای جواب نیست.						۱
۳	اگر α و β دو عدد گنگ باشند، ولی $\alpha + 2\beta$ گویا باشد، به کمک برهان خلف ثابت کنید $\alpha - 2\beta$ عددی گنگ است.						۱/۵
۴	ثابت کنید اگر a و b دو عدد حقیقی باشند، آن گاه $2a^2 + ab + 3b^2$ همواره نامنفی است.						۱/۵
۵	اگر a عددی صحیح باشد، $a \mid 15k + 4$ و $a \mid 25k + 7$ ، آن گاه تمام مقادیر ممکن برای a را به دست آورید.						۱/۵
۶	اگر باقی‌مانده تقسیم a بر b برابر ۱۵ باشد، آن گاه باقی‌مانده تقسیم $2a - 3b$ را بر ۵ محاسبه کنید.						۱/۵
۷	اگر $(a, b) = 1$ ، آن گاه مطلوب است محاسبه $(a+b, a-b)$.						۱/۵
۸	به چند طریق می‌توان با ۳۵۰۰۰۰ تومان، تعدادی کالای ۷۰۰۰۰ تومانی و تعدادی کالای ۸۰۰۰۰ تومانی خریداری کرد؟						۱/۷۵
۹	معادله هم‌نهشتی $12x \equiv 386 \pmod{7}$ را حل کرده و جواب عمومی آن را به دست آورید.						۱/۵
۱۰	اگر ۲۵ آبان، روز پنج‌شنبه باشد، ۱۴ اسفند همان سال چه روزی از هفته است؟						۱/۲۵
۱۱	معادله $mx + 4y = 14$ ، به ازای چند عدد طبیعی یک‌رقمی m جواب ندارد؟						۱/۵
۱۲	گراف G را مطابق شکل، در نظر بگیرید. الف) مجموعه‌های $V(G)$ و $E(G)$ را بنویسید. ب) $\Delta(G)$ و $\delta(G)$ را مشخص کنید. پ) $N_G(a)$ و $N_G[i]$ را بنویسید. ت) اگر $N_G(x) = \{a, b, i, j\}$، آن گاه x کدام رأس است؟ ث) تعداد یال‌های گراف $\bar{G}$ را مشخص کنید. 						۲/۵
۱۳	در گراف رسم شده G: الف) یک مسیر به طول ۴ مشخص کنید. ب) یک دور به طول ۳ مشخص کنید. پ) درجه رأس f در گراف $\bar{G}$ را مشخص کنید. 						۱
۱۴	در گراف G با اندازه ۱۰، سه رأس تنها داریم. الف) گرافی رسم کنید که حداکثر تعداد رأس را داشته باشد. ب) گرافی رسم کنید که حداقل تعداد رأس را داشته باشد.						۱
۱۵	حاصل ضرب مرتبه و اندازه گراف P_n برابر ۳۰ است. n را به دست آورید.						۰/۵
جمع نمره		موفق و سربلند باشید.					۲۰

امتحان جامع (۲)

ردیف	سؤالات	رشته: ریاضی و فیزیک	تألیفی	مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه
۱	جاهای خالی را با عبارات مناسب پر کنید. الف) عدد احاطه‌گری گرافی ۶ رأسی با $\Delta = 3$ ، بزرگ‌تر یا مساوی است. ب) در بین ۲۲ نفر، حداقل نفر در یک روز هفته متولد شده‌اند. پ) تعداد تابع‌های یک‌به‌یک از مجموعه‌ای ۴ عضوی به مجموعه‌ای ۸ عضوی برابر است با ت) در بین ۴ عدد طبیعی دلخواه، حداقل عدد یافت می‌شود که به پیمانه ۳ هم‌نهیست هستند.			نمره
۲	درستی یا نادرستی جملات زیر را مشخص کنید. الف) ک.م.م. دو عدد طبیعی نسبت به هم اول، برابر است با حاصل ضرب آن دو عدد. ب) عدد احاطه‌گری C_n برابر است با $\left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor$. پ) دو مربع لاتین متعامد دو در دو وجود ندارد. ت) تعداد توابع از مجموعه‌ای ۳ عضوی به مجموعه‌ای ۴ عضوی برابر با 3^4 است.			۱
۳	به کمک گزاره‌های هم‌ارز ثابت کنید اگر x و y اعدادی حقیقی باشند آن‌گاه: $x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 2xy - 2xz - 4yz \geq 0$.			۱
۴	به کمک برهان خلف ثابت کنید، اگر $\sqrt{3}$ عددی گنگ باشد آن‌گاه $\sqrt{\sqrt{3}+1}$ نیز عددی گنگ است.			۱
۵	اگر باقی‌مانده تقسیم عدد صحیح a بر عدد طبیعی b برابر ۱ باشد، ثابت کنید: $(a, b) = 1$.			۱
۶	معادلات هم‌نهشتی زیر را در صورت امکان حل کنید. الف) $3x \equiv 7201 \pmod{17}$ ب) $-x \equiv 16 - 4x \pmod{7}$			۲
۷	اگر دو عدد $11-5x$ و $1+x$ رقم یکسان داشته باشند، رقم یکان x چه عدد یا اعدادی می‌تواند باشد؟			۱
۸	گراف G با مجموعه رئوس $V(G) = \{a, b, c, d, e, f\}$ مفروض است. اگر $N_G(a) = \{b, c\}$ ، $N_G(b) = \{a, c\}$ ، $N_G(c) = \{a, b, d\}$ ، $N_G(d) = \{c, e, f\}$ و $N_G(e) = \{d, f\}$ ، آن‌گاه الف) گراف G را رسم کنید. ب) اندازه گراف G را به دست آورید. پ) $N_G[f]$ را بنویسید.			۱
۹	گرافی ۷ رأسی، غیرتهی و k -منتظم بکشید که k کمترین مقدار ممکن باشد. (گراف را همبند در نظر بگیرید)			۵/۰
۱۰	برای گراف G (گراف زیر)، عدد احاطه‌گری را به دست آورید. (با ذکر دلیل) 			۱

ردیف	سؤالات	نمره
۱۱	برای گراف رسم شده،  الف) دو مجموعهٔ احاطه گر مینیمال غیرمینیمم معرفی کنید. ب) یک γ-مجموعه مشخص کنید.	۱/۲۵
۱۲	در گراف همبند ۶ رأسی G ، $\gamma(G)=2$ ، کمترین و بیشترین مقدار برای اندازهٔ گراف را به دست آورید.	۱/۵
۱۳	فرض کنید G گراف P_7 باشد. الف) $q(\bar{G})$ را به دست آورید. ب) مجموع درجه‌های گراف $\bar{G}$ را به دست آورید.	۱
۱۴	۱۱ نفر را به چند طریق می‌توان در اتاق‌های ۲، ۵ و ۴ نفره اسکان داد؟	۱
۱۵	معادلهٔ $x_1 + x_2 + \dots + x_5 = 14$ ، چند جواب صحیح و نامنفی دارد به شرط آنکه $x_1 > 1$ و $x_3 > 3$ ؟	۱/۵
۱۶	قرار است ۵ مدرس $T_1, T_2, \dots, T_5$ ، در پنج جلسهٔ متوالی، در پنج کلاس $C_1, C_2, \dots, C_5$ به گونه‌ای تدریس کنند که هر مدرس در هر کلاس دقیقاً یک جلسه تدریس کند. برای این مسئله برنامه‌ریزی کنید.	۵/۷۵
۱۷	در بین اعداد ۱ تا ۱۰۰ ($1 \leq n \leq 100$)، چند عدد وجود دارد که بر ۲ یا ۵ بخش‌پذیر باشند، ولی بر ۲۰ بخش‌پذیر نباشند؟	۱/۵
۱۸	نشان دهید در بین ۷۳۳ نفر حداقل ۳ نفر، تاریخ تولدشان یکسان است.	۱
	موفق و سربلند باشید.	جمع نمره ۲۰

امتحان جامع (۳)

امتحان: ریاضیات گسسته		رشته: ریاضی و فیزیک		تألیفی		مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه	
ردیف	سؤالات						نمره
۱	جاهای خالی را با عبارات مناسب پر کنید. الف) اگر $k.m$ دو عدد برابر قدرمطلق حاصل ضرب آنها باشد، آن گاه $b.m$ آن دو عدد برابر است با ب) تعداد توابع یک‌به‌یک از مجموعهٔ ۴ عضوی به مجموعهٔ ۴ عضوی برابر است با پ) اگر نقطه درون یک مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع ۲ واحد بگذاریم، فاصلهٔ حداقل دو تا از آنها کمتر از ۱ واحد است. ت) اگر A و B دو مجموعهٔ جدا از هم در مجموعهٔ S باشند؛ تعداد اعضای $A \cup B$ برابر است با						۱
۲	درستی یا نادرستی جملات زیر را تعیین کنید. الف) از $a b$ و $c d$ ، همواره می‌توان نتیجه گرفت که $a+c b+d$. ب) معادلهٔ هم‌نهشتی $14x - 1 \equiv 6 \pmod{16}$ دارای جواب نیست. پ) هر مربع لاتین دلخواه، حداقل یک مربع لاتین متعامد دارد. ت) اگر مربع‌های لاتین A و B متعامد باشند، با جابه‌جایی دو سطر از B ، مربع جدید و A باز هم متعامدند.						۱

معادله جواب دارد. $\Rightarrow 1|7201 = (3, 17)$

$$\begin{array}{r} 7201 \\ - 68 \\ \hline 40 \\ - 34 \\ \hline 61 \\ - 51 \\ \hline 10 \end{array} \quad \begin{array}{l} 17 \\ 423 \Rightarrow 7201 \equiv 10 \end{array}$$

۶ الف

در نتیجه

$$3x \equiv 7201 \Rightarrow 3x \equiv 10 \pmod{17} \Rightarrow 3x \equiv 17+10 \pmod{17} \Rightarrow 3x \equiv 27$$

$$\xrightarrow{\div 3} x \equiv 9 \pmod{17} \Rightarrow x = 17k + 9 \pmod{17}$$

ب) ابتدا معادله را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$-x \equiv 16 - 4x \Rightarrow 4x - x \equiv 16 \Rightarrow 3x \equiv 16 \pmod{17}$$

چون $(3, 17) = 1$ و $1|16$ ، این معادله دارای جواب است. بنابراین

$$3x \equiv 16 \xrightarrow{16 \equiv 2} 3x \equiv 2 \Rightarrow 3x \equiv 17+2 \pmod{17}$$

$$3x \equiv 2 \xrightarrow{\div 3} x \equiv 3 \pmod{17}$$

$$x = 17k + 3 \pmod{17}$$

۷ دو عدد زمانی رقم یکان یکسان دارند که به پیمانه 10 با هم هم‌نهشت باشند: بنابراین

$$5x - 11 \equiv 7x + 1 \pmod{10} \Rightarrow 2x \equiv -12 \xrightarrow{\div 2} x \equiv -6 \pmod{10}$$

$$x \equiv -6 \Rightarrow x \equiv 4 \pmod{10} \Rightarrow x \equiv 4 \pmod{10} \Rightarrow x = 10k + 4$$

k می‌تواند زوج یا فرد باشد. بنابراین دو حالت در نظر می‌گیریم:

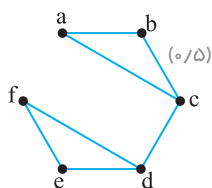
$$k = 2q \Rightarrow x = 10(2q) + 4 \Rightarrow x = 20q + 4 \Rightarrow x \equiv 4 \pmod{10}$$

رقم یکان x می‌تواند 4 باشد.

$$k = 2q + 1 \Rightarrow x = 10(2q + 1) + 4 \Rightarrow x = 20q + 14 \Rightarrow x \equiv 4 \pmod{10}$$

رقم یکان x می‌تواند 4 باشد.

توجه کنید که اگر $k = 1$ ، $k = 2$ و ... به دست آورید باز هم به همین نتیجه می‌رسید.



۸ الف) $N_G(a) = \{b, c\}$ ، یعنی از a

به b و c یال وجود دارد. $N_G(b) = \{a, c\}$ ، یعنی از b به a و c یال وجود دارد. به همین صورت ادامه می‌دهیم و گراف به صورت مقابل رسم می‌شود.

$$q = 7 \pmod{10} = \text{تعداد یال اندازه}$$

ب)

$$N_G[f] = \{f, e, d\} \pmod{10}$$

پ)

۱۵

پایه
 $m = ?$ = تعداد کبوترها، $n = 3 \times 3 = 9 \pmod{5}$ ، تعداد لانه‌ها
 فوتال/والیبال/هیچ کدام

$$k+1=30 \Rightarrow k=29 \pmod{5}$$

بنا بر تعمیم اصل لانه کبوتری، m حداقل باید برابر $kn+1$ باشد، پس
 $m = kn+1 \Rightarrow m = 29 \times 9 + 1 \Rightarrow m = 262 \pmod{5}$

پس باید حداقل ۲۶۲ دانش‌آموز وجود داشته باشد.

پاسخنامه امتحان جامع (۲)

$$\gamma(G) \geq \left\lceil \frac{n}{\Delta+1} \right\rceil = \left\lceil \frac{6}{3+1} \right\rceil = 2 \quad \text{۱ الف) ۲. } \pmod{5}$$

ب) ۴. $\pmod{5}$ بنا بر تعمیم اصل لانه کبوتری، تعداد کبوترها حداقل می‌بایست $nk+1$ باشد، پس

$$m = nk+1 \xrightarrow{\frac{m=22}{n=7}} 22 = 7k+1 \Rightarrow k=3 \Rightarrow k+1=4$$

در نتیجه حداقل ۴ نفر در یک روز هفته به دنیا آمده‌اند.

پ) $\frac{8!}{4!} = 8 \times 7 \times 6 \times 5 \pmod{5}$ توجه کنید که تعداد توابع یک‌به‌یک از

مجموعه m عضو به مجموعه k عضو ($m \leq k$) برابر است با:

$$(k)_m = \frac{k!}{(k-m)!}$$

ت) ۲. $\pmod{5}$ هر عدد به پیمانه ۳ یا هم‌نهشت صفر است یا هم‌نهشت ۱ و یا هم‌نهشت ۲، بنابراین تعداد لانه‌ها را $n=3$ در نظر می‌گیریم. بنابر اصل لانه

کبوتری داریم: $m = nk+1 \xrightarrow{\frac{n=3}{m=4}} 4 = 3k+1 \Rightarrow k=1 \Rightarrow k+1=2$

۲ الف) درست. ب) درست. پ) درست. $\pmod{5}$

ت) نادرست. $\pmod{5}$ توجه کنید که تعداد توابع از یک مجموعه ۳ عضو به یک مجموعه ۴ عضو برابر است با 4^3 .

۳

$$x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 2xy - 2xz - 4yz \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \underline{x^2} + \underline{y^2} + \underline{z^2} + \underline{2xy} - \underline{2xz} - \underline{2yz} \geq 0 \pmod{5}$$

$$\Leftrightarrow (x+y-z)^2 + (y-z)^2 \geq 0 \pmod{5}$$

پس گزاره اولیه هم، همواره درست است.

۴ فرض می‌کنیم $\sqrt{3+1}$ عددی گویا باشد:

$$\sqrt{3+1} = r^2 \xrightarrow{\text{توان ۲}} \sqrt{3+1} = r^2 \pmod{5} \text{ (عددی گویا)}$$

(توان دوم عدد گویا (r^2) گویاست). $\sqrt{3} = r^2 - 1$ (عددی گویا) که با فرض گنگ بودن $\sqrt{3}$ در تناقض است. پس فرض خلف باطل و حکم اثبات می‌شود. $\pmod{5}$

۵ توجه کنید که

$$a = bq + 1 \pmod{5} \Rightarrow \begin{cases} d|a \Rightarrow d|bq+1 \pmod{5} \\ d|b \Rightarrow d|bq \pmod{5} \end{cases} \Rightarrow d|bq+1-bq$$

$$d|1 \Rightarrow d=1 \pmod{5}$$