



مقدمه ناشر

الان! همین الان وقتشه! الان می‌شه خیلی کارا کرد. می‌شه یه بستنی خورد؛ می‌شه یه فیلم دید؛ می‌شه رفت تو صفحات مجازی وقت گذروند؛ می‌شه تلفنی با یه نفر حرف زد؛ می‌شه خوابید؛ می‌شه رفت سر قرار؛ می‌شه هیچ کاری نکرد و به در و دیوار خیره شد؛ می‌شه مقدمه این کتاب رو خوند؛ می‌شه یه آهنگ باحال گوش کرد؛ می‌شه کارایی که باید انجام بدیم رو عقب نینداخت؛ می‌شه تست هندسه ۳ زد و هزارتا می‌شه دیگه.

بخش بزرگی از سرنوشت آدم‌ها به این بستگی داره که با الاناشون چی کار می‌کنن. هر الانی برای یک کاری مناسبه، اگر اونارو جابه‌جا کنی، همه چیز به هم می‌ریزه. مثلاً اگر وقت خواب بریم تو اینستا و تلگرام، وقت تست هندسه زدن خوابمون می‌گیره و ... فکر کنم فهمیدی چی می‌خوام بگم. پس الانتو بهت پس می‌دم که بری اون کاری که فکر می‌کنی درسته رو انجام بدی. کیوان صارمی و گروه مؤلفینش سعی کردن کتابی بنویسن که تو، هم از یادگرفتن هندسه لذت ببری و هم خیال خودت رو از بابت تست‌های این مبحث کنکور راحت کنی. کتابی که با خوندنش احساس خوبی خواهی داشت و می‌گی وقتم رو هدر ندادم. کیوان جان دم تو و گروه خوبت گرم.

برای رسیدن این کتاب خلیلیای دیگه هم زحمت کشیدن. خانم یگانه فلاحتی به عنوان مسئول پروژه تألیف و ویراستارای خوبمون خانم زهرا جالینوسی و ماهان فنی‌فر که در وقت تنگ و فشرده همه تلاششون رو کردن تا بهترین کتاب رو آماده کنن و اساتید بزرگوار آقایان امیرحسین ابومحبوب و فرشاد فرامرزی و امیرحسین غفوری با نظرات ارزشمند خود، به ما کمک زیادی کردند. همکاران پرتلاشمون در واحد تولید هم که مثل همیشه سنگ تموم گذاشتن. از ته دل، بچه‌ها متشکریم! مواظب خودتون و الاناتون باشید ...

مقدمه مؤلف

«۶ و ۱۲ فقط عدد نیستن»

تو دنیای هندسه، مفهومی هست به اسم «عدد بوسه». عددی که می‌گه چندتا کره (یا دایره) هم‌اندازه می‌تونن دور یک کره (یا دایره) مرکزی جمع بشن؛ بدون این‌که به هم فشار بیان یا جای هم رو بگیرن. تو فضای دوبعدی این عدد ۶ تا و تو فضای سه‌بعدی ۱۲ تا است. به نظرم ۶ و ۱۲ فقط عدد نیستن، یه جور نشونه‌ان؛ نشونه همدلی، همزیستی و اتحاد. این‌که ما می‌تونیم روی این کره مرکبیمون که اسمش زمینه، کنار هم زندگی کنیم بدون اینکه همدیگه رو تحت فشار بذاریم، جای هم رو بگیریم یا بدتر از همه! اینا، همدیگه رو حذف کنیم.

۶ و ۱۲ یادآور اینن که می‌تونیم با همه تفاوت‌هامون دور هم زندگی کنیم و به هم اجازه نفس کشیدن بدیم.

این دوتا عدد تو اوج سکوت هندسی‌شون، کلی حرف واسه گفتن دارن ...

بگذریم. بریم یه کم راجع به این کتاب حرف بزنیم. این کتاب سه تا بخش داره:

❖ **درس‌نامه:** اینجا سعی کردیم هر چیزی رو که لازمه بدونی، قدم‌به‌قدم و شفاف بهت یاد بدیم؛ از مفاهیم پایه‌ای گرفته تا نکته‌های کنکوری و ترفندهایی که کمک می‌کنن تست‌ها رو سریع‌تر و هوشمندانه حل کنی.

❖ **تست‌ها:** تستارو براتون دو قسمت کردیم:

❶ تستای طبقه‌بندی‌شده: اینجا تستارو براتون به صورت موضوعی طبقه‌بندی کردیم. تو هر موضوع تستارو از آسون به سخت چیده شدن؛ به همین خاطر بهتره تستارو به ترتیب حل کنی. کنار هر کدوم از تستای این بخش یه شکلک به فرم ☺ اومده. با توجه به تشخیص خودت از سختی سؤال، شکلکا رو به ☺ (آسون) یا ☹ (متوسط) یا ☹☹ (سخت) تبدیل کنی. با این کار نقطه‌ضعفات مشخص میشه و دوباره میای سراغشون تا بشن نقطه قوتت. بعضی از شکلکا رنگی‌ان، این تستارو لطفاً حتماً حل کنی.

❷ **مثال‌کنورهای سخت:** تو این چند سال کنکور سخت کم نداشتیم؛ به همین خاطر بعد از تستای طبقه‌بندی‌شده هر درس، یه سری تست با ایده جدید، خلاقانه، سخت و پرمحاسبه براتون آوردیم. لطفاً بعد از حل تستای طبقه‌بندی‌شده و بعد از مشورت با معلم یا مشاورت، سراغ این تستارو.

❖ **پاسخ‌های تشریحی:** پاسخ سؤال‌ها رو گام‌به‌گام و واقعاً تشریحی نوشتیم براتون. یه کار باحالی که انجام دادیم اینه که برای هر گام اسم گذاشتیم. اگه سؤالی رو نتونستی حل کنی، پاسخ رو کامل نخون؛ برو اسم گام اول رو بخون و سعی کن خودت گام اول رو بری، اگه نشد گام اول رو بخون و همین کار رو برای بقیه گام‌ها انجام بده.

یه کم هم در مورد آیکون‌ها براتون بگیم:

📌 **نکته:** یه مطلب مهم کنکوری که احتمال طرح تست ازش زیاده.

📌 **شفاف‌سازی:** قسمتی از صورت سؤال رو که مبهم یا غیرمستقیم حرف می‌زنه، اینجا براتون شفاف می‌کنیم.

📌 **تیزبازی:** یک تکنیک سریع حل تست یا روش خلاقانه حل یک سؤاله.

📌 **تله:** اشتباهی رو که ممکنه انجام بدی و به گزینه اشتباه برسی، اینجا توضیح می‌دیم.

📌 **حواستون باشه:** توضیح برای این‌که یه وقت اشتباه برداشت نکنی.

📌 **یه توصیه:** پیشنهادی که بهتره بهش گوش کنی.

برای این کتاب خیلیا زحمت کشیدن که جا داره ازشون تشکر کنیم:

🌟 مهندس سبزمیدانی، مدیر تألیف کتاب، که با آموزش‌ها و پیشنهادهای دقیق و مؤثر همراهمون بودن. مرسی بابت همه چیز.

🌟 ممنون از آقایان امیرحسین ابومحبوب، فرشاد فرامرزی، ماهان فنی‌فر و خانم زهرا جالینوسی که بسیار دقیق کتاب رو ویرایش کردن.

🌟 ممنون از خانم یگانه فلاحتی بابت پیگیری‌ها و صبوری‌هاش.

🌟 تعدادی از سؤالات کتاب، گلچینی از سؤالات آزمون‌های خیلی سبز؛ دم همه طراحای خفن آزمونمون گرم.

🌟 ممنون از تیم خفن تولیدمون که سنگ تموم گذاشتن.

در آخر درسته که خیلی از کتاب تعریف کردیم ولی هیچ چیز بی‌نقص نیست؛ پس اگر اشتباه یا غلطی دیدید یا نقد و پیشنهادی داشتید، ممنون می‌شیم بهمون بگید.

فهرست

تست	درس‌نامه	فصل اول: ماتریس و کاربردها
۲۹	۸	درس ۱: ماتریس و اعمال روی ماتریس‌ها
۶۰	۴۱	درس ۲: وارون و دترمینان ماتریس
		فصل دوم: آشنایی با مقاطع مخروطی
۸۰	۷۷	درس ۱: آشنایی با مقاطع مخروطی و مکان هندسی
۱۰۷	۸۳	درس ۲: دایره
۱۳۷	۱۱۷	درس ۳: بیضی و سهمی
		فصل سوم: بردارها
۱۶۵	۱۵۲	درس ۱: معرفی فضای $\mathbb{R}^3$
۱۸۸	۱۷۲	درس ۲: ضرب داخلی و خارجی بردارها
		پاسخ‌نامه
		پاسخ‌نامه تشریحی
		۱۹۹

ف فاکتورگیری: یاد گرفتیم که برای ماتریس‌های A ، B و C تساوی $A(B+C) = AB+AC$ برقرار است. اگر به این تساوی از راست به چپ نگاه کنیم می‌فهمیم که در دنیای ماتریس‌ها عمل فاکتورگیری برقرار است، فقط باید حواسمان باشد که از یک سمت فاکتور بگیریم. مثلاً در عبارت $AX+BX$ می‌توانیم از یک سمت راست فاکتور بگیریم و بنویسیم $(A+B)X$. ولی اگر عبارتمان به صورت $XA+XB$ باشد با این که یک X مشترک داریم ولی نمی‌توانیم از آن فاکتور بگیریم، چون یکی سمت راست و دیگری سمت چپ است. خوب است که فاکتورگیری‌های جدول زیر را ببینید:

فاکتورگرفتن	از چی می‌شه فاکتور گرفت؟	عبارت
$A(B+I)$	A از سمت چپ	$AB+A$
$(B+I)A$	A از سمت راست	$BA+A$
$A(X+Y)B$	A از سمت چپ و B از سمت راست	$AXB+AYB$
—	هیچی	$BXA+AYB$

تست: ماتریس‌های $A = \begin{bmatrix} -5 & -1 \\ 1 & -9 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 7 & 1 \\ -1 & 11 \end{bmatrix}$ مفروضه‌اند. اگر $XY = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$ باشد، بزرگ‌ترین درایهٔ ماتریس $XAY + XBY$ کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۶ ۴) ۸

پاسخ ۳: (ساده‌تر نوشتن عبارت سؤال) در عبارت $XAY + XBY$ می‌توانیم از یک X سمت چپ و یک Y سمت راست فاکتور بگیریم:

$$M = XAY + XBY = X(A+B)Y$$

گام ۱: (جای‌گذاری و محاسبهٔ خواستهٔ سؤال) حالا $A = \begin{bmatrix} -5 & -1 \\ 1 & -9 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 7 & 1 \\ -1 & 11 \end{bmatrix}$ را در تساوی بالا جای‌گذاری می‌کنیم:

$$M = X \left(\begin{bmatrix} -5 & -1 \\ 1 & -9 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 7 & 1 \\ -1 & 11 \end{bmatrix} \right) Y = X \left(\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \right) Y = 2XIY = 2XY$$

$$M = 2XY = 2 \times \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 6 & -4 \\ 4 & -4 \end{bmatrix}$$

به گفتهٔ سؤال $XY = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$ است؛ پس M می‌شود: که بزرگ‌ترین درایه‌اش ۶ است.

۵ ضرب ماتریس در تساوی ماتریسی: طرفین یک تساوی ماتریسی مثل $B=C$ را می‌توانیم از یک طرف در ماتریس دلخواه A ضرب کنیم. منظورمان از یک طرف این است که A را یا باید از سمت راست ضرب کنیم تا به تساوی $BA=CA$ و یا از سمت چپ ضرب کنیم تا به تساوی $AB=AC$ برسیم.

نکته ۱: برعکس ویژگی بالا برقرار نیست؛ یعنی در حالت کلی حق نداریم در تساوی $AB=AC$ ، ماتریس A را حذف کنیم. (این کار شرایط خودش را دارد که جلوتر در موردش حرف می‌زنیم.)

۲ اگر $A = \bar{O}$ یا $B = \bar{O}$ باشد، حتماً $AB = \bar{O}$ خواهد بود، اما عکس این موضوع برقرار نیست؛ یعنی ممکن است $AB = \bar{O}$ باشد ولی هم $A \neq \bar{O}$ باشد، هم $B \neq \bar{O}$ ؛ مثلاً اگر $A = \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}$ باشد، دقیقاً همین اتفاق می‌افتد:

$$AB = \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \bar{O}$$

تست: اگر $A-B=2I$ و $A+C=3I$ باشد، حاصل $AC+BA$ برابر کدام است؟

۱) $2B+3A$ ۲) $2A+3C$ ۳) $2C+3B$ ۴) $3C+2B$

پاسخ ۳: (انجام ضرب‌های مناسب) طرفین تساوی $A-B=2I$ را از سمت راست در C و طرفین تساوی $A+C=3I$ را از سمت چپ در B ضرب می‌کنیم:

$$\begin{cases} A-B=2I \xrightarrow{\times C} (A-B)C=(2I)C \Rightarrow AC-BC=2C & (1) \\ A+C=3I \xrightarrow{\times B} B(A+C)=B(3I) \Rightarrow BA+BC=3B & (2) \end{cases}$$

گام ۲: (پیدا کردن خواستهٔ سؤال) حالا طرفین تساوی‌های (۱) و (۲) را جمع می‌کنیم تا به خواستهٔ سؤال برسیم:

$$(AC-BC)+(BA+BC)=2C+3B \Rightarrow AC+BA=2C+3B$$

توان در ماتریس‌ها

اگر A یک ماتریس مربعی^۱ باشد، می‌توانیم آن را به توان اعداد طبیعی‌ای مثل ۲، ۳، ۴ و ... برسانیم. این توان‌ها را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$A^2 = A \times A, \quad A^3 = A^2 \times A \text{ یا } A \times A \times A, \quad A^4 = A^3 \times A \text{ یا } A^2 \times A^2, \quad \dots, \quad A^n = A^{n-1} \times A \text{ یا } \dots$$

۱- به این خاطر می‌گوییم مربعی، چون ضربی مثل $A_{m \times n} \times A_{m \times n}$ وقتی انجام‌پذیر است که $m=n$ باشد، این تساوی هم نتیجه‌اش مربعی بودن A است.

نکته: با توجه به تساوی‌های بالا می‌توانیم برای توان‌های یک ماتریس ویژگی‌های زیر را بنویسیم:

ویژگی	مثال
$A^n \times A^m = A^m \times A^n = A^{m+n}$	$A^2 \times A^3 = A^3 \times A^2 = A^5$
$(kA)^n = k^n A^n$ عدد	$(2A)^5 = 2^5 A^5 = 32A^5$
$(A^m)^n = A^{mn}$	$(A^3)^2 = A^{3 \times 2} = A^6$

دو جور توان ممکن است در ماتریس‌ها ببینیم:

توان‌های کوچک برای یک ماتریس مثل A ، ماتریس‌های A^2 ، A^3 و A^4 توان‌های کوچک محسوب می‌شوند. توان‌های کوچک یک ماتریس را حداکثر در دو مرحله می‌توانیم به دست بیاوریم. برای درک بهتر این موضوع، تست‌های زیر را بررسی کنید.

تست: اگر $A = [a_{ij}]_{3 \times 3}$ به صورت $\begin{cases} -2 & |i-j| > 1 \\ 0 & |i-j| = 1 \\ 1 & |i-j| < 1 \end{cases}$ باشد، کدام عدد جزء درایه‌های ماتریس $A^2 - 3I$ نیست؟

۲ (۱) -۳ (۲) -۴ (۳) -۲ (۴)

پاسخ ۲: گام ۱ (محاسبه درایه‌های ماتریس A) اول فرم کلی ماتریس $A_{3 \times 3}$ را به صورت $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ می‌نویسیم. حالا در سه مرحله درایه‌ها را محاسبه می‌کنیم:

در درایه‌های a_{11} ، a_{22} ، a_{33} و a_{ii} است؛ پس همگی صفرند.

در درایه‌های a_{12} ، a_{21} و a_{23} و a_{32} است؛ پس همگی مساوی ۱ هستند.

در درایه‌های a_{13} و a_{31} رابطه $|i-j| > 1$ برقرار است؛ پس هر دو -۲ هستند.

ماتریس A به این صورت شد:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

گام ۲: (محاسبه A^2)

$$A^2 = A \times A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

گام ۳: (تشخیص گزینه درست) در آخر درایه‌های ماتریس $A^2 - 3I$ را حساب می‌کنیم:

$$A^2 - 3I = \begin{bmatrix} 5 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -4 \\ 0 & -2 & 0 \\ -4 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

عدد -۳ در گزینه (۲) جزء درایه‌های ماتریس بالا نیست.

تست: فرض کنید $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ اگر $C = \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}$ باشد، مجموع درایه‌های C^4 کدام است؟

۴۲ (۱) ۴۹ (۲) ۵۲ (۳) ۲۶ (۴)

پاسخ ۲: گام ۱ (تشخیص استراتژی حل) $C^4 = C^2 \times C^2$ است، پس اول C^2 را به دست می‌آوریم، بعد در خودش ضرب می‌کنیم تا به C^4 برسیم.

گام ۲: (محاسبه C^2) به جای A و B در $C = \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}$ ، درایه‌های ماتریس‌های A و B را جای‌گذاری می‌کنیم تا ماتریس C ساخته شود:

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

حالا C^2 را به دست می‌آوریم:

$$C^2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 2 & -2 \\ 1 & -2 & 6 \\ 3 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

گام ۳: (محاسبه خواسته سؤال) در آخر طبق گام اول، درایه‌های C^4 را پیدا می‌کنیم:

$$C^4 = C^2 \times C^2 \Rightarrow C^4 = \begin{bmatrix} -3 & 2 & -2 \\ 1 & -2 & 6 \\ 3 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 2 & -2 \\ 1 & -2 & 6 \\ 3 & 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -14 & 14 \\ 13 & 18 & -2 \\ -1 & 6 & 10 \end{bmatrix}$$

$$5 - 14 + 14 + 13 + 18 - 2 - 1 + 6 + 10 = 49$$

بنابراین مجموع درایه‌های ماتریس C^4 می‌شود:

$$A = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix} \Rightarrow A^n = \begin{bmatrix} a^n & 0 & 0 \\ 0 & b^n & 0 \\ 0 & 0 & c^n \end{bmatrix}$$

$I^n = I$

نکته: ۱ برای به توان رساندن یک ماتریس قطری، کافیه درایه‌های روی قطر اصلی‌اش را به توان برسانیم. بقیه درایه‌ها هم صفر می‌مانند، ببینید:

نکته: ۲ از نکته بالا نتیجه می‌گیریم که توان روی ماتریس همانی بی‌اثر است؛ یعنی:

تست: ماتریس‌های $A = \begin{bmatrix} a & b+1 \\ b & -2 \\ 5 & a \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & -1 \end{bmatrix}$ اگر $C = BA$ یک ماتریس قطری باشد، مجموع درایه‌های قطر اصلی ماتریس $(C^3 + I^3)^2$ کدام است؟

۶۵ (۱) ۱۳۰ (۲) ۶۷ (۳) ۱۴۲ (۴)

پاسخ: ۲ (گام ۱) (اعمال شرط قطری بودن) اول درایه‌های ماتریس $C = BA$ را برحسب a و b به دست می‌آوریم:

$$C = BA = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & -1 \\ 5 & a & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b+1 \\ b & -2 \\ 5 & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+2b-5 & (b+1)-2-a & 0 \\ 3a+4b-5 & (3b+3)-2-a & 0 \\ 5a & 5b-a & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+2b-5 & b-a-1 & 0 \\ 3a+4b-5 & 3b-a+1 & 0 \\ 5a & 5b-a & 0 \end{bmatrix}$$

ماتریس C به شرطی قطری است که درایه‌های بالا و پایین قطر اصلی‌اش (درایه‌های آبی‌رنگ بالا) صفر باشند:

$$\begin{cases} b-a-1=0 \Rightarrow b-a=1 \xrightarrow{+3} 3b-3a=3 \\ 3a+4b-5=0 \Rightarrow 3a+4b=5 \xrightarrow{\text{خودش}} \end{cases} \begin{cases} 3b-3a=3 \\ 3a+4b=5 \end{cases} \xrightarrow{+} 7b=8 \Rightarrow b=\frac{8}{7} \xrightarrow{\text{جای‌گذاری در } b-a=1} 2-a=1 \Rightarrow a=1$$

حالا مقدار a و b را در C جای‌گذاری می‌کنیم:

$$C = \begin{bmatrix} a+2b-5 & b-a-1 & 0 \\ 3a+4b-5 & 3b-a+1 & 0 \\ 5a & 5b-a & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

گام ۲ (محاسبه I^3 و C^3) چون $C = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ یک ماتریس قطری است، پس برای رسیدن به C^3 کافی است درایه‌های قطر اصلی‌اش را به توان ۳ برسانیم. صفرها هم که صفر می‌مانند:

از طرفی توان روی I بی‌اثر است، پس $I^3 = I$ می‌شود.

گام ۳ (محاسبه خواسته سؤال) حالا می‌توانیم $(C^3 + I^3)^2$ را به دست بیاوریم:

$$(C^3 + I^3)^2 = \left(\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right)^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

که مجموع درایه‌های قطر اصلی‌اش می‌شود $0+1+1=2$.

به سؤال مهمی رسیدیم، پاسخش را کامل و دقیق بخوانید.

تست: اگر $A = \begin{bmatrix} x & -y \\ y & -3 \end{bmatrix}$ و $A^2 = -7I$ باشد، مقدار xy کدام می‌تواند باشد؟

۱۶ (۱) ۱۲ (۲) ۹ (۳) ۶ (۴)

پاسخ: ۲ (گام ۱) (محاسبه A^2)

$$A^2 = \begin{bmatrix} x & -y \\ y & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & -y \\ y & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x^2-y^2 & -xy+3y \\ xy-3y & 9-y^2 \end{bmatrix}$$

گام ۲ (محاسبه خواسته سؤال) حالا ماتریس بالا را طبق میل سؤال مساوی $-7I = \begin{bmatrix} -7 & 0 \\ 0 & -7 \end{bmatrix}$ می‌گذاریم:

$$\begin{bmatrix} x^2-y^2 & -xy+3y \\ xy-3y & 9-y^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 & 0 \\ 0 & -7 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 9-y^2=-7 \Rightarrow y^2=16 \Rightarrow y=\pm 4 \\ -xy+3y=0 \xrightarrow{y \neq 0} -x+3=0 \Rightarrow x=3 \end{cases}$$

بنابراین $xy = (\pm 4)(3) = \pm 12$ می‌شود که فقط مقدار مثبتش در گزینه (۲) وجود دارد.

حالا رسیدیم به قسمت جذاب این سؤال، یعنی «تیزبازی»:

تیزبازی: قضیه کیلی - همیلتون: این قضیه می‌گوید مربع هر ماتریس 2×2 مثل $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ را می‌توانیم به صورت زیر برحسب خودش و I بنویسیم:

$$A^2 = (a+d)A - (ad-bc)I$$

مثلاً اگر $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 5 \end{bmatrix}$ باشد، در این صورت:

$$A^2 = (3+5)A - ((3)(5)-(2)(7))I = 8A - I$$

حالا بریم با این قضیه سؤال را سریع تر حل کنیم. طبق قضیه «کیلی - همیلتون» برای $A = \begin{bmatrix} x & -y \\ y & -x \end{bmatrix}$ ، داریم:

$$A^2 = (x - x)A - ((-x)(x) - (y)(-y))I \Rightarrow A^2 = (x - x)A + (x^2 - y^2)I \quad (*)$$

از مقایسه $A^2 = \begin{bmatrix} -y & I \\ A & -yI \end{bmatrix}$ با (*) نتیجه می گیریم که:

$$\begin{cases} x - x = 0 \Rightarrow x = x \\ x^2 - y^2 = -y \xrightarrow{x=x} x^2 - y^2 = -y \Rightarrow y^2 = 16 \Rightarrow y = \pm 4 \end{cases} \Rightarrow xy = \pm 12$$

توان های بزرگ از توان چهارم به بعد یک ماتریس، توان بزرگ محسوب می شود. برای محاسبه توان های بزرگ یک ماتریس مثل $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$ کارهای زیر را انجام می دهیم:

۱ توان های کوچک A ، یعنی A^2 ، A^3 و A^4 را به دست می آوریم، تا جایی که به یک ماتریس خاص برسیم. این ماتریس خاص به یکی از صورت های مقابل ظاهر می شود: ۱- ماتریس I یا kI ۲- ماتریس A یا kA ۳- ماتریس صفر

با A^2 شروع می کنیم:

$$A^2 = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow A^2 = I$$

خوشبختانه در همین A^2 به ماتریس خاص I رسیدیم.

۲ بعد از رسیدن به یک ماتریس خاص، می توانیم به کمک ضرب و توان رسانی مناسب، به توان بزرگی که می خواهیم برسیم. مثلاً اگر A^{23} را بخواهیم اول طرفین تساوی بالا را به توان ۱۱ می رسانیم:

بعد طرفین تساوی $A^{22} = I$ را از چپ یا راست در A ضرب می کنیم تا به A^{23} برسیم:

$$A^{22} \times A = I \times A \Rightarrow A^{23} = A$$

ممکن است بگویید «خیلی طول کشید تا از A^2 به A^{23} برسیم، راه ساده تری نیست؟» جوابتان را می توانید در «تیزبازی» زیر پیدا کنید.

تیزبازی: چند مورد خاص زیر را بلد باشید تا بعضی وقت ها سریع تر به جواب برسید:

۱ اگر $A^2 = \bar{O}$ شد، در این صورت:

۲ اگر $A^2 = I$ شد، در این صورت:

مثلاً در بالا چون $A^2 = I$ شد، سریعاً می توانستیم بگوییم $A^{23} = A$ می شود.

۳ اگر $A^2 = kA$ شد، در این صورت:

مثلاً اگر $A^2 = 2A$ بشود، $A^{20} = 2^{19}A$ می شود.

تست: اگر $A = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$ باشد، ماتریس $A^{20} - A^{22}$ کدام است؟

$$\begin{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{(1)} & \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}^{(2)} & \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}^{(3)} & \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}^{(4)} \end{matrix}$$

پاسخ ۴: (محاسبه توان های کوچک A با محاسبه A^2 شروع می کنیم:

$$A^2 = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow A^2 = -I$$

(محاسبه خواسته سؤال) حالا با ضرب و توان رسانی مناسب، به ماتریس های A^{20} و A^{22} می رسیم:

$$A^2 = -I \xrightarrow{\text{توان } 10} (A^2)^{10} = (-I)^{10} \Rightarrow A^{20} = I$$

$$\xrightarrow{\text{توان } 11} (A^2)^{11} = (-I)^{11} \Rightarrow A^{22} = -I$$

$$A^{20} - A^{22} = I - (-I) = 2I = 2 \times \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

بنابراین $A^{20} - A^{22}$ می شود:

تست: اگر $A = \begin{bmatrix} 8 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & 4 \\ -2 & 4 & 5 \end{bmatrix}$ باشد، مجموع درایه های ماتریس A^{100} چند برابر مجموع درایه های ماتریس A است؟

$$999 \quad (4)$$

$$898 \quad (3)$$

$$9100 \quad (2)$$

$$8100 \quad (1)$$

پاسخ ۴: نام (محاسبه توان‌های کوچک A) با A^2 شروع می‌کنیم:

$$A^2 = \begin{bmatrix} 8 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & 4 \\ -2 & 4 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & 4 \\ -2 & 4 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 72 & 18 & -18 \\ 18 & 45 & 36 \\ -18 & 36 & 45 \end{bmatrix} = 9 \times \underbrace{\begin{bmatrix} 8 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & 4 \\ -2 & 4 & 5 \end{bmatrix}}_A \Rightarrow A^2 = 9A$$

ماتریس خاص

نام (محاسبه A^{100}) طرفین تساوی $A^2 = 9A$ را در A ضرب می‌کنیم تا به A^3 برسیم:

در تساوی بالا جای A^2 می‌توانیم بنویسیم $9A$:

$$A^3 = 9(9A) \Rightarrow A^3 = 9^2 A$$

در ادامه طرفین تساوی $A^3 = 9^2 A$ را در A ضرب می‌کنیم تا A^4 به دست بیاید:

$$A^4 = 9^2 A \xrightarrow{\times A} A^4 = 9^2 A^2$$

باز هم جای A^2 می‌نویسیم $9A$:

$$A^4 = 9^2(9A) \Rightarrow A^4 = 9^3 A$$

اگر همین جوری ادامه بدهیم، می‌فهمیم که $A^{100} = 9^{99} A$ است، نگاه کنید:

$$A^1 = 9^0 A, A^2 = 9^1 A, A^3 = 9^2 A, \dots, A^{100} = 9^{99} A$$

یکی کمتر یکی کمتر یکی کمتر یکی کمتر

نام (محاسبه خواسته سؤال) $A^{100} = 9^{99} A$ شد، پس می‌توانیم مجموع درایه‌های ماتریس A^{100} ، 9^{99} برابر مجموع درایه‌های ماتریس A است.

نیازی: می‌توانستیم بعد از رسیدن به تساوی $A^2 = 9A$ ، خیلی سریع بگوییم $A = 9^{99} A^{100} = 9^{100-1} A^{100}$ است و ...

نکته: بعضی وقت‌ها در هیچ‌کدام از توان‌های کوچک، ماتریس خاصی ظاهر نمی‌شود، این‌جور وقت‌ها باید از روی الگویی که درایه‌های ماتریس‌های A, A^2, A^3, A^4 دارند، درایه‌های A^n را حدس بزنیم.

تست: اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ باشد، مجموع درایه‌های ماتریس A^{1001} کدام است؟

۱۰۰۳ (۴)

۱۰۰۱ (۳)

۲ (۲)

۳ (۱)

پاسخ ۴: نام (محاسبه توان‌های کوچک A) اول A^2 را پیدا می‌کنیم:

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ماتریس خاصی ظاهر نشد، A^3 را هم به دست می‌آوریم:

$$A^3 = A^2 \times A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

باز هم به در بسته خوردیم، پس A^4 را هم حساب می‌کنیم:

$$A^4 = A^3 \times A \Rightarrow A^4 = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

در توان‌های کوچک به ماتریس خاصی نرسیدیم؛ پس باید الگوی درایه‌ها را پیدا کنیم.

نام (الگویابی درایه‌ها و محاسبه خواسته سؤال) بیاید ماتریس‌های A تا A^4 را کنار هم ببینیم:

$$A^1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, A^3 = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, A^4 = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^{1001} = \begin{bmatrix} 1 & 1001 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

در همه توان‌های A، درایه‌های قرمز ثابت و درایه‌های آبی مساوی توان A هستند؛ پس A^{1001} می‌شود:

که مجموع درایه‌هایش $1001 + 1 + 1 + 1 = 1003$ است.

اتحادهای جبری در ماتریس‌ها

در تساوی جبری $(a-b)(a+b) = a^2 + ab - ba - b^2$ ، چون ab و ba برابرند، حق داریم ab و $-ba$ را با هم بزنیم تا به اتحاد مزدوج، یعنی $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$ برسیم، اما در تساوی ماتریسی $(A+B)(A-B) = A^2 - AB + BA - B^2$ ، حق انجام این کار را نداریم، چون در ماتریس‌ها، AB و BA لزوماً برابر نیستند؛ بنابراین در دنیای ماتریس‌ها اتحادهای جبری مثل مربع دو جمله‌ای، مزدوج و ... برقرار نیست. مثلاً برای

ماتریس‌های A و B به جای $(A \pm B)^2 = A^2 \pm 2AB + B^2$ باید بنویسیم:

$$\begin{cases} (A+B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2 \\ (A-B)^2 = A^2 - AB - BA + B^2 \end{cases}$$

شرط برقراری اتحادها در ماتریس‌ها اتحادهای جبری بین دو ماتریس A و B به شرطی برقرارند که آن‌ها خاصیت جابه‌جایی داشته باشند؛ یعنی

$AB = BA$ باشد.

۷۱- فرض کنید $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ n-1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ n & 1 \end{bmatrix}$. اگر مجموع درایه‌های ماتریس $A + I$ برابر ۳۲ باشد، مجموع درایه‌های قطر اصلی ماتریس $A + nI$ کدام است؟

- ۳۸ (۱) ۴۰ (۲) ۴۲ (۳) ۴۴ (۴)

ویژگی‌های ضرب ماتریس‌ها: توزیع پذیری

۷۲- می‌دانیم A, B و C ماتریس‌های مربعی و هم مرتبه هستند. چه تعداد از گزاره‌های زیر، درست است؟

- (الف) $AB = BA$
(ب) اگر $AB = AC$ ، آن‌گاه $B = C$.
(ت) اگر $AB = AC$ ، آن‌گاه $A = \bar{O}$ یا $B = C$.
(پ) $(AB)C = A(BC)$
- ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) صفر

۷۳- اگر $AC = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ ، $BC = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$ و $(A + 2B)(C + I) = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$ باشد، ماتریس $A + 2B$ کدام درایه را ندارد؟

۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵ (۵)

ویژگی‌های ضرب ماتریس‌ها: فاکتورگیری و ضرب ماتریس در یک تساوی ماتریسی

۷۴- اگر A و B دو ماتریس مربعی مرتبه ۲ و $AB = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ باشد، حاصل ضرب درایه‌های غیرواقع بر قطر اصلی ماتریس $A \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ -6 & -1 \end{bmatrix} B - \frac{3}{2} A \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -4 & 4 \end{bmatrix} B$ کدام است؟

۳ (۱) ۳ (۲) ۹ (۳) ۹ (۴) -۹ (۴)

(ریاضی ۱۴۰۳)

۷۵- ماتریس‌های $A_{3 \times 3}$ ، $B_{3 \times 3}$ و $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ مفروض‌اند. اگر $B + A \begin{bmatrix} -1 & x & 2 \\ y & 1 & 3 \\ y & -x & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -3 & -4 & -1 \\ 5 & 7 & 1 \end{bmatrix}$ باشد، مجموع

(مثل کنگور)

درایه‌های واقع بر قطر اصلی ماتریس CAB کدام است؟

- ۵ (۱) ۶ (۲) ۷ (۳) ۳ (۴)

۷۶- فرض کنید $A - B = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 10 & 4 \end{bmatrix}$ و $A + C = \begin{bmatrix} 6 & -2 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}$. اگر $A + C = \beta C + \alpha B$ باشد، مقدار $\frac{\beta}{\alpha}$ کدام است؟

۲ (۱) $\frac{2}{3}$ (۲) $\frac{1}{3}$ (۳) $\frac{3}{2}$ (۴) ۲ (۴)

توان در ماتریس‌ها

با توان‌های کوچک شروع می‌کنیم.

۷۷- اگر ماتریس $A = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -6 & 4 \end{bmatrix}$ باشد، آن‌گاه $A^2 - A$ کدام است؟

- ۱ (۱) $\begin{bmatrix} 38 & 24 \\ 36 & 38 \end{bmatrix}$ (۲) $\begin{bmatrix} 38 & -24 \\ -48 & 38 \end{bmatrix}$ (۳) $\begin{bmatrix} 43 & -27 \\ 54 & 30 \end{bmatrix}$ (۴) $\begin{bmatrix} 38 & -24 \\ -48 & 30 \end{bmatrix}$

۷۸- اگر $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ ، آن‌گاه کدام گزینه درست است؟

- $B^2 A = A$ (۱) $BA = I$ (۲) $BA = AB$ (۳) $B^2 A = I$ (۴)

(ریاضی ۱۴۰۳)

۷۹- اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ باشد، مجموع درایه‌های A^2 چند برابر مجموع درایه‌های A است؟

۱ (۱) ۱ (۲) -۱ (۳) ۳ (۴) ۳

(ریاضی خارج ۹۶)

۸۰- ماتریس $A = [a_{ij}]_{3 \times 3}$ به صورت $a_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 2 & i \neq j \end{cases}$ تعریف شده است. مجموع درایه‌های ماتریس $A^2 - 4A$ کدام است؟

۱۲ (۱) ۱۵ (۲) ۱۸ (۳) ۲۱ (۴)

۸۱- اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ باشد، حاصل ضرب درایه‌های A چند برابر حاصل ضرب درایه‌های A^2 است؟ (ریاضی خارج ۱۴۰۳)

۱ (۴) -۱ (۳) ۳ (۲) -۳ (۱)

۸۲- اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 6 & 24 \\ 1 & 1 & 2 & 8 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & 1 & 4 \\ \frac{1}{24} & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & 1 \end{bmatrix}$ باشند، مجموع درایه‌های قطر اصلی ماتریس C^2 کدام است؟ (ریاضی ۹۷)

۲۴ (۴) ۲۰ (۳) ۱۸ (۲) ۱۶ (۱)

از این‌جا به بعد به کم سؤال خاص‌تر می‌شن.

۸۳- اگر $A = \begin{bmatrix} -1 & y \\ x & -x \end{bmatrix}$ و $A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 2x \\ 2y & 0 \end{bmatrix}$ ، آن‌گاه $x + y$ کدام است؟ (آزمون‌های آزمایشی خیلی‌سبز)

۲ (۴) -۲ (۳) ۱ (۲) صفر (۱)

۸۴- اگر A, B و C سه ماتریس 2×2 باشند، به طوری که $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$ و $BC = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ ، آن‌گاه ماتریس $(AB + 2B)(2CA - C)$ کدام است؟ (مثل‌کنکور)

$\begin{bmatrix} -18 & 52 \\ -78 & 60 \end{bmatrix}$ (۴) $\begin{bmatrix} -18 & 52 \\ -68 & 60 \end{bmatrix}$ (۳) $\begin{bmatrix} -20 & 52 \\ -33 & 30 \end{bmatrix}$ (۲) $\begin{bmatrix} -18 & 40 \\ -78 & 60 \end{bmatrix}$ (۱)

۸۵- اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & y \\ 0 & x & 0 \\ 1 & 0 & z \end{bmatrix}$ و A^2 ماتریس اسکالر باشد، حاصل $x^2 - y + z$ کدام است؟ (کنکور مجدد ریاضی ۱۴۰۱)

صفر (۴) -۶ (۳) -۲ (۲) ۳ (۱)

۸۶- اگر A و B دو ماتریس 2×2 باشند، به طوری که $2AB = 3BA$ ، آن‌گاه در تساوی ماتریسی $A^2 B^2 = k B^2 A^2$ ، مقدار k کدام است؟

$\frac{16}{27}$ (۴) $\frac{81}{16}$ (۳) $\frac{27}{16}$ (۲) $\frac{9}{4}$ (۱)

حالا نوبت تواری سوم به ماتریسه.

۸۷- اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ باشد، سطر سوم ماتریس A^3 کدام است؟ (ریاضی ۱۴۰۳ و مشابه ریاضی خارج ۱۴۰۱)

$[7 \ 5 \ -2]$ (۴) $[7 \ 5 \ -5]$ (۳) $[-1 \ 0 \ 1 \ 7]$ (۲) $[-1 \ 0 \ 1 \ 5]$ (۱)

۸۸- اگر $A = [a_{ij}]_{r \times r}$ به طوری که $a_{ij} = \begin{cases} j-i & i \geq j \\ j+i & i < j \end{cases}$ ، آن‌گاه درایه سطر دوم و ستون دوم ماتریس A^3 کدام است؟ (آزمون‌های آزمایشی خیلی‌سبز)

۲۶ (۴) -۲۶ (۳) -۳۴ (۲) ۳۴ (۱)

۸۹- هر درایه ماتریس $A_{3 \times 3}$ برابر با مجموع شماره سطر و شماره ستون آن است. درایه سطر دوم و ستون دوم ماتریس $(A - 4I)^3$ کدام است؟ (مثل‌کنکور)

۱۵۶ (۴) ۱۵۴ (۳) ۱۵۲ (۲) ۱۵۰ (۱)

۹۰- اگر $A = [a_{ij}]_{r \times r}$ به طوری که $a_{ij} = \begin{cases} 2i-j & i \leq j \\ 0 & i > j \end{cases}$ ، $B = A^3 = [b_{ij}]$ و آن‌گاه مجموع درایه‌های b_{ij} به طوری که $i + j = 4$ کدام است؟

۳۶ (۴) -۳۴ (۳) -۵ (۲) ۴ (۱)

۹۱- اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ d & 2 \end{bmatrix}$ ، آن‌گاه $A^2 = \begin{bmatrix} a & b \\ -1 & c \end{bmatrix}$ ، حاصل $a + b + c$ به ازای مقدار بزرگ‌تر d کدام است؟

۱۸ (۴) ۱۷ (۳) ۱۶ (۲) ۱۵ (۱)

و در آخر، تواری چهارم

۹۲- اگر $A = \begin{bmatrix} 3 & -3 & 4 \\ 2 & -3 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ باشد، درایه‌های سطر اول ماتریس A^4 کدام است؟ (ریاضی خارج ۹۹)

$[1 \ 0 \ 1]$ (۴) $[0 \ 0 \ 1]$ (۳) $[1 \ 0 \ 0]$ (۲) $[0 \ 1 \ 0]$ (۱)

(ریاضی خارج ۹۲ با کمی تغییر)

۹۳- اگر $A = \begin{bmatrix} 3 & -3 & 4 \\ 2 & -3 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ ، ماتریس A^4 چگونه است؟

- (۱) فقط درایه‌های پایین قطر اصلی آن صفر است.
(۲) فقط درایه‌های بالای قطر اصلی آن صفر است.
(۳) قطری غیرهمانی است.
(۴) همانی است.

توان رسانی ماتریس‌های خاص

۹۴- اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ باشد، مجموع درایه‌های قطر اصلی ماتریس $A^3 + B^3 + I^3$ کدام است؟

- (۱) ۵۵ (۲) ۵۷ (۳) ۵۹ (۴) ۶۱

اگر درس‌نامه رو خوب خونده باشی، چهارتا سؤال بعدی رو سریع حل می‌کنی.

(ق.م)

۹۵- اگر ماتریس $A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$ و $A^2 = \alpha A + \beta I_2$ ، دوتایی (α, β) کدام است؟

- (۱) (۱, ۲) (۲) (۲, ۱۳) (۳) (۴, ۱۱) (۴) (۴, ۱۳)

۹۶- اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 7 & 1 \end{bmatrix}$ ، آن‌گاه $A^2 - A + I$ با کدام گزینه برابر است؟

- (۱) $2(A + 1 \cdot I)$ (۲) $2(9A + 2I)$ (۳) $2(A + 9I)$ (۴) $2(1 \cdot I - A)$

(آزمون‌های آزمایشی خیلی سبز)

۹۷- اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ و $A^3 - A^2 = mA + nI$ ، آن‌گاه دوتایی مرتب (m, n) کدام است؟

- (۱) (۱۹, ۵) (۲) (۱۳, ۳) (۳) (۱۹, -۵) (۴) (۱۳, -۳)

۹۸- اگر $A = \begin{bmatrix} a+4 & a+3 \\ -a & 1-a \end{bmatrix}$ ، آن‌گاه $(A - I)^3$ برابر با کدام است؟

- (۱) $9A + 7I$ (۲) $9A - 7I$ (۳) $9(A - I)$ (۴) $1 \cdot A - 9I$

۹۹- اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 3 & 6 & -2 \\ 3 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ و $A^2 = \alpha A - \beta I$ باشد، مقدار $\frac{\beta}{\alpha}$ کدام است؟

- (۱) $0/4$ (۲) $0/6$ (۳) $0/8$ (۴) $0/2$

از این‌جا به بعد می‌توانی سراغ سؤال‌های بزرگ.

(ق.م)

۱۰۰- اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$ باشد، ماتریس $A^7 - A^4$ کدام است؟

- (۱) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ (۲) $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -3 \end{bmatrix}$ (۳) $\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -3 \end{bmatrix}$ (۴) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$

۱۰۱- اگر $A = \begin{bmatrix} a & 1-a \\ a & -a \end{bmatrix}$ ، آن‌گاه چند مقدار برای a وجود دارد به طوری که $A^4 = 16I$ ؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) بی‌شمار

۱۰۲- اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ باشد، مجموع درایه‌های ماتریس $A^{20} - B^{22}$ چند برابر مجموع درایه‌های ماتریس $A + B$ است؟

- (۱) ۱ (۲) $1/5$ (۳) $0/75$ (۴) $0/5$

۱۰۳- اگر $A = \begin{bmatrix} 0/5 & 1 \\ 0/25 & 0/5 \end{bmatrix}$ ، آن‌گاه مجموع درایه‌های قطر اصلی ماتریس $A^{10} + A^9 + \dots + A + I$ کدام است؟

- (۱) $1 \cdot 0$ (۲) ۱۱ (۳) ۱۲ (۴) ۱۳

(آزمون‌های آزمایشی خیلی سبز)

۱۰۴- اگر $A = \begin{bmatrix} 4 \\ 7 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \end{bmatrix}$ ، آن‌گاه ماتریس $(AB)^{1401}$ با کدام ماتریس برابر است؟

- (۱) I (۲) AB (۳) $\bar{O}$ (۴) BA



(آزمون‌های آزمایشی خیلی سبز)

۱۰۵- اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ ، آن گاه مجموع درایه‌های ماتریس $A^6 + A^4 + A^2$ کدام است؟
 ۱۶ (۱) ۲۸ (۲) ۳۲ (۳) ۵۶ (۴)

۱۰۶- اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ ، آن گاه $(A + I)^6 = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ ، حاصل $a - b$ کدام است؟
 ۱ (۱) ۲ (۲) صفر (۳) -۱ (۴) -۲ (۴)

۱۰۷- اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ باشد، مجموع درایه‌های قطر اصلی ماتریس A^{100} چند برابر مجموع درایه‌های قطر اصلی ماتریس A است؟
 ۳۴۹ (۱) ۳۵۰ (۲) ۳۹۸ (۳) ۳۹۹ (۴)

۱۰۸- اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ ، آن گاه مجموع درایه‌های ماتریس A^{10} کدام است؟
 ۲۱۸ (۱) ۲۲۱ (۲) ۲۲۲ (۳) ۲۲۳ (۴)

اتحادهای جبری در ماتریس‌ها

۱۰۹- اگر A و B دو ماتریس مربعی هم‌مرتبه باشند، به طوری که $(A - B)(A + B) = A^2 - B^2$ ، آن گاه کدام گزینه لزوماً درست است؟

۱) $AB = -BA$ ۲) $AB = BA$ ۳) $A = \bar{O}$ یا $B = \bar{O}$ ۴) $A = I$ یا $B = I$

۱۱۰- اگر برای دو ماتریس $A = \begin{bmatrix} a & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} -1 & b \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$ ، تساوی $A^2 + B^2 = (A - B)^2 + 2AB$ برقرار باشد، حاصل $a + b$ کدام است؟

۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) (آزمون‌های آزمایشی خیلی سبز)

۱۱۱- اگر A ، B و C ماتریس مربعی هم‌مرتبه باشند، به طوری که $A = B + C$ ، آن گاه حاصل $A^2 + B^2 - 2AB$ کدام است؟

۱) C^2 ۲) $C^2 + BA - AB$ ۳) $\bar{O}$ ۴) $C^2 - AB$

۱۱۲- اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & -2 \\ 0 & -3 & 4 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \end{bmatrix}$ باشد، مجموع درایه‌های ماتریس $A^2 + B^2 + AB + BA$ کدام است؟

۶ (۱) ۱۸ (۲) -۱۸ (۳) ۲۷ (۴)

۱۱۳- اگر A و B دو ماتریس باشند، به طوری که $A - B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} + 2I$ و $AB + BA = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} + I$ ، آن گاه مجموع درایه‌های ماتریس $A^2 + B^2$ کدام است؟

(آزمون‌های آزمایشی خیلی سبز)

۳۴ (۱) ۳۰ (۲) ۱۷ (۳) ۱۵ (۴)

۱۱۴- اگر A یک ماتریس مربعی باشد، به طوری که $A^2 = I + A$ ، آن گاه حاصل $A(2A + I)^2$ برابر با کدام است؟

۱) $13A - 8A$ ۲) $AI - 13A$ ۳) $8I + 13A$ ۴) $13I + 8A$

(آزمون‌های آزمایشی خیلی سبز)

۱۱۵- اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ ، آن گاه مجموع درایه‌های ماتریس $I + (A - I)(I + A + A^2)$ کدام است؟

۴ (۱) -۴ (۲) ۶ (۳) -۶ (۴)

۱۱۶- اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 2 \end{bmatrix}$ ، آن گاه درایه سطر سوم و ستون سوم ماتریس $A^2 - 3A + 2I$ کدام است؟
 ۱۷ (۱) ۱۸ (۲) ۱۰ (۳) ۱۲ (۴)

مثل‌نگوهرهای سخت

برای حل این تست‌ها حتماً با معلم یا مشاورتان مشورت کنید!

۱۱۷- ماتریس‌های $A = [a_{ij}]_{3 \times 3}$ و $B = [b_{ij}]_{3 \times 3}$ با درایه‌های $a_{ij} = \begin{cases} \lfloor \frac{i}{j} \rfloor & |i - j| \leq 1 \\ \lfloor \frac{i}{j} \rfloor + 1 & |i - j| > 1 \end{cases}$ و $b_{ij} = \begin{cases} i - j & |\frac{i}{j}| \geq 1 \\ m & |\frac{i}{j}| < 1 \end{cases}$ مفروض‌اند. به ازای کدام مقدار m مجموع درایه‌های قطر اصلی ماتریس AB با مجموع درایه‌های سطر اول ماتریس B برابر است؟

-۱/۷۵ (۱) -۷ (۲) -۶ (۳) -۲/۷۵ (۴)

پس $A^T - 4A$ برابر است با:

$$A^T - 4A = \begin{bmatrix} 9 & 8 & 8 \\ 8 & 9 & 8 \\ 8 & 8 & 9 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 & 8 & 8 \\ 8 & 4 & 8 \\ 8 & 8 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

مجموع درایه‌های ماتریس بالا می‌شود $3 \times 5 = 15$.

۴. ۸۱. (محاسبه A^T)

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A^T = A$$

(محاسبه خواسته سؤال) A^T و A مساوی شدند، پس ضرب درایه‌هایشان هم مساوی است؛ یعنی نسبت ضرب درایه‌هایشان می‌شود ۱.

تیزبازی: اول نکته زیر را بخوانید:

نکته: هر وقت یک سطر از ماتریسی مثل A انتخاب کردید و دیدید تمام سطرهای دیگر A ضربی از آن سطر هستند، می‌توانید A^T را خیلی سریع به این صورت محاسبه کنید: $A^T = (A \text{ مجموع درایه‌های قطر اصلی}) \times A$. اگر اتفاق بالا برای ستون‌های یک ماتریس هم افتاد، باز هم می‌توانید رابطه بالا را بنویسید.

یک لحظه سطر سوم و ارتباطش با بقیه سطرهای A را ببینید:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

تمام سطرهای A ضربی از سطر سوم هستند، پس طبق نکته بالا $A^T = A$ می‌شود: $A^T = (A \text{ مجموع درایه‌های قطر اصلی}) \times A$. ادامه حل هم مثل روش قبل است.

۸۲. ۱. (ساخت ماتریس C) در ماتریس $C = \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}$ به جای A درایه‌های $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 6 & 24 \\ \frac{1}{3} & 1 & 2 & 8 \end{bmatrix}$ و به جای B درایه‌های

$$B = \begin{bmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & 1 & 4 \\ \frac{1}{24} & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & 1 \end{bmatrix}$$

را می‌نویسیم تا به درایه‌های C برسیم:

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 6 & 24 \\ \frac{1}{3} & 1 & 2 & 8 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & 1 & 4 \\ \frac{1}{24} & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & 1 \end{bmatrix}$$

(محاسبه خواسته سؤال) حالا به کمک ضرب هوشمندانه، درایه‌های قطر اصلی ماتریس C^T را به دست می‌آوریم:

$$C^T = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 6 & 24 \\ \frac{1}{3} & 1 & 2 & 8 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & 1 & 4 \\ \frac{1}{24} & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 6 & 24 \\ \frac{1}{3} & 1 & 2 & 8 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & 1 & 4 \\ \frac{1}{24} & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & & & \\ & 4 & & \\ & & 4 & \\ & & & 4 \end{bmatrix}$$

که مجموعشان می‌شود $4 \times 4 = 16$.

گام ۱ (محاسبه خواسته سؤال) الان باید به کمک تساوی‌های قبل $AC + BA$ بسازیم. برای این کار اول طرفین تساوی $A - B = 2I$ را از سمت راست در C و طرفین تساوی $A + C = 3I$ را از سمت چپ در B ضرب می‌کنیم:

$$\begin{cases} A - B = 2I \xrightarrow{\times C} (A - B)C = (2I)C \\ \Rightarrow AC - BC = 2C \quad (1) \\ A + C = 3I \xrightarrow{\times B} B(A + C) = B(3I) \\ \Rightarrow BA + BC = 3B \quad (2) \end{cases}$$

حالا طرفین تساوی‌های (۱) و (۲) را با هم جمع می‌کنیم:

$$(AC - BC) + (BA + BC) = 2C + 3B$$

$$\Rightarrow AC + BA = 2C + 3B \quad (*)$$

از مقایسه تساوی $AC + BA = \beta C + \alpha B$ با (*) نتیجه می‌گیریم که $\beta = 2$ و $\alpha = 3$ و در نتیجه $\frac{\beta}{\alpha} = \frac{2}{3}$ می‌شود.

۷۷. ۴. (محاسبه A^T) اول A را در خودش ضرب می‌کنیم تا به A^T برسیم:

$$A^T = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -6 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -6 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 43 & -27 \\ -54 & 34 \end{bmatrix}$$

(محاسبه خواسته سؤال) پس $A^T - A$ می‌شود:

$$A^T - A = \begin{bmatrix} 43 & -27 \\ -54 & 34 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -6 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 38 & -24 \\ -48 & 30 \end{bmatrix}$$

۷۸. ۱. (محاسبه B^T) B را در خودش ضرب می‌کنیم تا به B^T برسیم:

$$B^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow B^T = I$$

(تشخیص گزینه درست) $B^T = I$ شد، پس $B^T A = IA = A$ می‌شود؛ بنابراین ۱ جواب است.

۷۹. ۴. (محاسبه A^T)

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(محاسبه خواسته سؤال) مجموع درایه‌های A^T برابر $6 = 1 + 1 + 2 + 1 + 1 + 1$ است، پس نسبتشان می‌شود $\frac{6}{3} = 2$.

۸۰. ۲. (محاسبه درایه‌های A) اول فرم کلی ماتریس $A_{3 \times 3}$ را

می‌نویسیم، بعد به کمک فرمول $a_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 2 & i \neq j \end{cases}$ درایه‌هایش را حساب می‌کنیم:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

(محاسبه خواسته سؤال) حالا A^T و $4A$ را به دست می‌آوریم:

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 8 & 8 \\ 8 & 9 & 8 \\ 8 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

$$4A = \begin{bmatrix} 4 & 8 & 8 \\ 8 & 4 & 8 \\ 8 & 8 & 4 \end{bmatrix}$$

تیزبازی: یک لحظه سطر چهارم و ارتباطش با بقیه سطرها را ببینید:

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 6 & 24 \\ \frac{1}{3} & 1 & 2 & 8 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & 1 & 4 \\ \frac{1}{24} & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & 1 \end{bmatrix}$$

بنابراین برای محاسبه M ، A^2 را لازم داریم.

تمام سطرها C ، ضربی از سطر چهارم هستند؛ پس طبق نکته سؤال قبلی، C^2 می‌شود:

$$C^2 = (C \text{ مجموع درایه‌های قطر اصلی}) = 4 \times \begin{bmatrix} 1 & 3 & 6 & 24 \\ \frac{1}{3} & 1 & 2 & 8 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & 1 & 4 \\ \frac{1}{24} & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & & & \\ & 4 & & \\ & & 4 & \\ & & & 4 \end{bmatrix}$$

و باز هم مجموع درایه‌های قطر اصلی C^2 می‌شود ۱۶.

۸۳. ۱ (محاسبه A^2 از روی A)

$$A^2 = \begin{bmatrix} -1 & y \\ x & -x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & y \\ x & -x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+xy & -y-xy \\ -x-x^2 & xy+x^2 \end{bmatrix}$$

تیزبازی: (محاسبه خواسته سؤال) از مقایسه A^2 بالا با $A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 2x \\ 2y & 0 \end{bmatrix}$ نتیجه می‌گیریم که:

$$\begin{cases} 1+xy=0 \Rightarrow xy=-1 \quad (1) \\ -y-xy=2x \xrightarrow{xy=-1} \Rightarrow y+2x=1 \quad (2) \\ -x-x^2=2y \quad (3) \\ xy+x^2=0 \xrightarrow{xy=-1} \Rightarrow x^2=1 \Rightarrow x=\pm 1 \end{cases}$$

$x=\pm 1$ را در تساوی (۲) جای‌گذاری می‌کنیم تا مقادیر y هم به دست بیاید:

$$\begin{cases} x=1 \Rightarrow y+2(1)=1 \Rightarrow y=-1 \\ x=-1 \Rightarrow y+2(-1)=1 \Rightarrow y=3 \end{cases}$$

$y=3$ قابل قبول نیست، چون در این حالت $xy=-3$ می‌شود، در صورتی که طبق رابطه (۱) باید برابر ۱- بشود.

پس $x=1$ ، $y=-1$ و در نتیجه $x+y=0$ می‌شود. همان‌طور که می‌بینید دیگر کار به استفاده از رابطه (۳) نکشید، البته می‌توانید برای این‌که خیالتان راحت شود، $x=1$ و $y=-1$ را در آن جای‌گذاری کنید و ببینید که در آن صدق می‌کنند.

تیزبازی: می‌توانستیم بدون محاسبه خود x و y مقدار $x+y$ را حساب

کنیم. بیایید تساوی $xy+x^2=0$ را به صورت $x(x+y)=0$ بنویسیم، این‌جوری یا باید $x=0$ باشد یا $x+y=0$. اولی امکان ندارد، چون به ازای $x=0$ ، مقدار xy ، صفر می‌شود نه ۱-؛ بنابراین $x+y=0$ است.

۸۴. ۴ (تحلیل خواسته سؤال) سؤال به دنبال ماتریس

$M = (AB + 2B)(2CA - C)$ است، اما به جای این‌که خود ماتریس‌های B

و C را بدهد، ماتریس $BC = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ را داده که همان $2I$ است؛ پس باید

$$M = (AB + 2B)(2CA - C) = 2ABCA - ABC + 4BCA - 2BC$$

حالا در M به جای BC می‌نویسیم $2I$:

$$M = 2A(BC)A - A(BC) + 4(BC)A - 2(BC)$$

$$= 4A^2 - 2A + 8A - 4I \Rightarrow M = 4A^2 + 6A - 4I \quad (*)$$

بنابراین برای محاسبه M ، A^2 را لازم داریم.

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 10 \\ -15 & 10 \end{bmatrix} \quad (\text{محاسبه } A^2)$$

$$A^2 = \begin{bmatrix} -5 & 10 \\ -15 & 10 \end{bmatrix} \quad (\text{محاسبه خواسته سؤال}) \text{ در آخر ماتریس‌های } A \text{ و } I \text{ را در } (*) \text{ جای‌گذاری می‌کنیم تا به ماتریس } M \text{ برسیم:}$$

$$M = 4 \begin{bmatrix} -5 & 10 \\ -15 & 10 \end{bmatrix} + 6 \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} - 4 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -20 & 40 \\ -60 & 40 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 & 12 \\ -18 & 24 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -18 & 52 \\ -78 & 60 \end{bmatrix}$$

۸۵. ۴ (محاسبه درایه‌های A^2)

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & y \\ 0 & x & 0 \\ 1 & 0 & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & y \\ 0 & x & 0 \\ 1 & 0 & z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+y & 0 & y+yz \\ 0 & x^2 & 0 \\ 1+z & 0 & y+z^2 \end{bmatrix}$$

(اعمال شرط اسکالربودن و محاسبه خواسته سؤال) ماتریس بالا به شرطی اسکالر است که درایه‌های قطر اصلی‌اش مساوی و بقیه درایه‌هایش صفر باشند. بیایید کورکورانه این شرایط را اعمال نکنیم. سؤال مقدار $x^2 - y + z$ را می‌خواهد. z که با مساوی صفرگذاشتن $1+z$ به دست می‌آید:

$$z+1=0 \Rightarrow z=-1$$

$$x^2 - y \text{ هم با مساوی گذاشتن درایه‌های } x^2 \text{ و } 1+y \text{ پیدا می‌شود:}$$

$$x^2 = 1+y \Rightarrow x^2 - y = 1$$

$$x^2 - y + z = 1 - 1 = 0$$

پس خواسته سؤال می‌شود:

۸۶. ۳ (محاسبه AB برحسب BA)

$$2AB = 3BA \Rightarrow AB = \frac{3}{2}BA \quad (1)$$

(ساخت حداکثری AB) در عبارت $M = A^2B^2$ ، جای A^2

می‌نویسیم AA ، جای B^2 هم می‌نویسیم BB تا بتوانیم AB بسازیم:

$$M = A^2B^2 = AAB B = A(AB)B$$

(*)

طبق رابطه (۱) می‌توانیم جای AB بنویسیم $\frac{3}{2}BA$:

$$M = A(\frac{3}{2}BA)B = \frac{3}{2}A(AB)B$$

در تساوی بالا هم جای AB می‌نویسیم $\frac{3}{2}BA$:

$$M = \frac{3}{2}(\frac{3}{2}BA)(\frac{3}{2}BA) = \frac{27}{8}B(AB)A$$

باز هم جای AB می‌نویسیم $\frac{3}{2}BA$:

$$M = \frac{27}{8}B(\frac{3}{2}BA)A = \frac{81}{16}(BB)(AA) = \frac{81}{16}B^2A^2 \quad (**)$$

(محاسبه خواسته سؤال) طبق رابطه (*، می‌توانیم در (**)) جای M

$$A^2B^2 = \frac{81}{16}B^2A^2 \quad \text{بنویسیم } A^2B^2:$$

از مقایسه تساوی $A^2B^2 = kB^2A^2$ با رابطه بالا نتیجه می‌گیریم که $k = \frac{81}{16}$ است.

$$= [-1 \ 0 \ 5] \begin{bmatrix} 0 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & 5 \\ -2 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = [-10 \ -8 \ -4] \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$= -30 - 0 + 4 = -26$$

۲. ۸۹

شفاف‌سازی: هر درایه ماتریس $A_{3 \times 3}$ برابر با مجموع شماره سطر و ستون آن است؛ یعنی در این ماتریس $a_{ij} = i + j$ است.

گام ۱ (محاسبه درایه‌های « $A - 4I$ »): اول فرم کلی $A_{3 \times 3}$ را می‌نویسیم، بعد به کمک فرمول $a_{ij} = i + j$ ، درایه‌های A را حساب می‌کنیم:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+1 & 1+2 & 1+3 \\ 2+1 & 2+2 & 2+3 \\ 3+1 & 3+2 & 3+3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

حالا می‌توانیم « $A - 4I$ » را هم به دست بیاوریم:

$$A - 4I = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 4 \\ 3 & 0 & 5 \\ 4 & 5 & 2 \end{bmatrix}$$

گام ۲ (محاسبه خواسته سؤال): حالا درایه سطر دوم و ستون دوم

$$(A - 4I)^T = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 4 \\ 3 & 0 & 5 \\ 4 & 5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 3 & 4 \\ 3 & 0 & 5 \\ 4 & 5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 3 & 4 \\ 3 & 0 & 5 \\ 4 & 5 & 2 \end{bmatrix}$$

اولی وسطی آخری

به دست می‌آوریم:

$$(A - 4I)^T = \begin{bmatrix} \text{ستون} \\ \text{از (۲)} \\ \text{آخری} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \text{سطر (۲) از اولی} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \text{کل وسطی} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -2 & 3 & 4 \\ 3 & 0 & 5 \\ 4 & 5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & 34 & 22 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$= 42 + 0 + 10 = 52$$

۲. ۹۰ (محاسبه درایه‌های A): اول فرم کلی ماتریس $A_{3 \times 3}$ را

می‌نویسیم، بعد به کمک $a_{ij} = \begin{cases} 2i - j & i \leq j \\ 0 & i > j \end{cases}$ ، درایه‌های A را حساب می‌کنیم:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2(1) - 1 & 2(1) - 2 & 2(1) - 3 \\ 0 & 2(2) - 2 & 2(2) - 3 \\ 0 & 0 & 2(3) - 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

گام ۳ (تحلیل خواسته سؤال): همان‌طور که در ماتریس زیر می‌بینید؛ منظور

از درایه‌هایی که « $i + j = 4$ » شان ۴ است، درایه‌های روی قطر فرعی B هستند؛ پس از ماتریس A^T فقط همین درایه‌ها را حساب می‌کنیم.

$$A^T = B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix}$$

۸۷. ۲ (تشخیص استراتژی حل): از ماتریس $A^T = A^2 \times A$ فقط سطر سومش را می‌خواهیم؛ پس سطر سوم A^2 را پیدا می‌کنیم و در کل A ضرب می‌کنیم.

گام ۱ (محاسبه سطر سوم A^2): به کمک ضرب هوشمندانه، سطر سوم

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

اولی دومی

کل دومی $\times$ (سطر ۳ از اولی) = سطر سوم A^2

$$= [-2 \ 1 \ 1] \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix} = [-4 \ 1 \ 3]$$

گام ۲ (محاسبه خواسته سؤال): حالا طبق گام (۱)، سطر سوم A^2 را در کل

A ضرب می‌کنیم تا به سطر سوم A^3 برسیم:

$$A^3 = [-4 \ 1 \ 3] \times \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix} = [-10 \ 1 \ 7]$$

تیزبازی: خوب به گزینه‌ها نگاه کنید. سطر سوم و ستون سوم گزینه‌ها

متفاوت‌اند، پس می‌توانیم با محاسبه همین درایه سؤال را حل کنیم. حالا خیلی سریع از ضرب $A \times A \times A$ ، درایه سطر سوم و ستون سومش را حساب می‌کنیم:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

درایه سطر سوم و ستون سوم ماتریس AAA

$$= [-4 \ 1 \ 3] \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = -4 + 0 + 3 = -1$$

تنها ماتریسی که سطر سوم و ستون سومش ۷ است، ماتریس $\begin{bmatrix} -10 & 1 & 7 \end{bmatrix}$ در ۲ است.

۸۸. ۳ (محاسبه درایه‌های A): اول فرم کلی ماتریس $A_{3 \times 3}$ را

می‌نویسیم، بعد به کمک فرمول $a_{ij} = \begin{cases} j - i & i \geq j \\ j + i & i < j \end{cases}$ ، درایه‌هایش را حساب می‌کنیم:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-1 & 1+2 & 1+3 \\ 1-2 & 2-2 & 2+3 \\ 1-3 & 2-3 & 3-3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & 5 \\ -2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

گام ۱ (محاسبه خواسته سؤال): از $A^T = A \times A \times A$ فقط درایه سطر

اولی وسطی آخری

دوم و ستون دومش را می‌خواهیم که یاد گرفتیم این‌جوری هوشمندانه حسابش کنیم:

$$\begin{bmatrix} \text{ستون} \\ \text{از (۲)} \\ \text{آخری} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \text{سطر (۲) از اولی} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \text{درایه سطر دوم و ستون دوم} \end{bmatrix}$$

گام ۱ (محاسبه خواسته سؤال) اول A را در خودش ضرب می‌کنیم تا

به A^2 برسیم:

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}$$

در ادامه به کمک ضرب هوشمندانه درایه‌های قطر فرعی $A^2 \times A = A^3$ را به دست می‌آوریم:

$$B = A^3 = A^2 \times A \Rightarrow B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -13 & & \\ & 8 & \\ & & 0 \end{bmatrix}$$

بنابراین مجموع درایه‌های قطر فرعی ماتریس بالا می‌شود $-5 = -13 + 8 + 0$.

تله: اگر به اشتباه به جای درایه‌های فرعی، درایه‌های قطر اصلی B را به دست می‌آوریم، به تساوی مقابل می‌رسیدیم. این جوری مجموع درایه‌ها می‌شد ۳۶ که در **F** به عنوان تله حضور داشت.

$$B = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 8 & \\ & & 27 \end{bmatrix}$$

۹۱. گام ۱ (محاسبه مقدار d) به گفته سؤال $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ d & 2 \end{bmatrix}$ و

$A^3 = \begin{bmatrix} a & b \\ -11 & c \end{bmatrix}$ است، پس می‌توانیم بنویسیم:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ d & 2 \end{bmatrix}}_{\text{اولی}} \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ d & 2 \end{bmatrix}}_{\text{وسطی}} \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ d & 2 \end{bmatrix}}_{\text{آخری}} = \begin{bmatrix} a & b \\ -11 & c \end{bmatrix} \quad (*)$$

حالا خوب به درایه رنگی ماتریس بالا نگاه کنید. درایه سطر دوم و ستون اول حاصل از ضرب سه ماتریس سمت چپ شده -11 ، پس طبق «ضرب هوشمندانه» می‌توانیم بنویسیم:

$$\begin{bmatrix} \text{ستون} \\ (1) \text{ از} \\ \text{آخری} \end{bmatrix} \times \text{کل وسطی} \times \begin{bmatrix} \text{سطر} (2) \text{ از} \\ \text{اولی} \end{bmatrix} = -11$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ d & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ d \end{bmatrix} = -11$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 4d & d+4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ d \end{bmatrix} = -11 \Rightarrow \underbrace{2(4d)}_{\lambda d} + \underbrace{d(d+4)}_{d^2 + 4d} = -11$$

$$\Rightarrow \underbrace{1d^2}_A + \underbrace{12d}_B + \underbrace{11}_C = 0 \xrightarrow{A+C=B} d = -1$$

$$d = -\frac{C}{A} = -11$$

سؤال d بزرگ‌تر را می‌خواهد، پس $d = -1$ را انتخاب می‌کنیم.

گام ۲ (محاسبه خواسته سؤال) حالا $d = -1$ را در تساوی $(*)$ جای‌گذاری می‌کنیم:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ -11 & c \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 11 \\ -11 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ -11 & c \end{bmatrix}$$

از مقایسه درایه‌های رنگی بالا می‌فهمیم که $a = 2, b = 11, c = 2$ است؛ پس: $a + b + c = 2 + 11 + 2 = 15$

۹۲. گام ۲ (تشخیص استراتژی حل) از $A^4 = A^2 \times A^2$ ، فقط

سطر اولش را می‌خواهیم؛ پس از ماتریس اول، سطر اولش را به دست می‌آوریم

و در کل ماتریس دوم که باز هم همان A^2 است، ضرب می‌کنیم.

گام ۳ (محاسبه درایه‌های A^2)

$$A^2 = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 2 & -3 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 2 & -3 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 4 \\ 0 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & -3 \end{bmatrix}$$

گام ۴ (محاسبه خواسته سؤال) حالا طبق گام (۱)، سطر اول A^2 را در خود A^2 ضرب می‌کنیم تا به سطر اول A^4 برسیم:

$$A^4 \text{ سطر اول} = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 4 \\ 0 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -4 & 4 \\ 0 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -4 & 4 \\ 0 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & -3 \end{bmatrix}$$

۹۳. گام ۴ (محاسبه درایه‌های A^2)

$$A^2 = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 2 & -3 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 2 & -3 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 4 \\ 0 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & -3 \end{bmatrix}$$

گام ۵ (تشخیص گزینه درست) حالا A^2 را در خودش ضرب می‌کنیم تا به A^4 برسیم:

$$A^4 = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 4 \\ 0 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -4 & 4 \\ 0 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

پس A^4 همانی است.

۹۴. گام ۴ (محاسبه درایه‌های A)

$$A = \begin{bmatrix} 2 & \frac{1}{2} & 2 \\ 2 & 0 & 4 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 4 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

گام ۵ (محاسبه درایه‌های قطر اصلی A^3 و B^3 و I^3) که همان I است.

A هم یک ماتریس اسکالر است، پس برای محاسبه A^3 ، درایه‌های قطر اصلی A را به توان ۳ می‌رسانیم:

$$A^3 = \begin{bmatrix} 2^3 & 0 & 0 \\ 0 & 2^3 & 0 \\ 0 & 0 & 2^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}, I^3 = I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

اما برای محاسبه درایه‌های قطر اصلی B^3 اول باید نکته زیر را یاد بگیرید:

نکته: ماتریس‌های $A = \begin{bmatrix} a & x & y \\ 0 & b & z \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}$ یا $B = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ x & b & 0 \\ y & z & c \end{bmatrix}$ را ببینید.

این ماتریس‌ها تمام درایه‌های بالا یا پایین قطر اصلی‌شان صفرند، به همین خاطر می‌توانیم به کمک رابطه‌های زیر بعضی از درایه‌های A^n و B^n را خیلی سریع حساب کنیم:

$$\begin{bmatrix} a & x & y \\ 0 & b & z \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} a^n & \bullet & \bullet \\ 0 & b^n & \bullet \\ 0 & 0 & c^n \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a & 0 & y \\ x & b & 0 \\ y & z & c \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} a^n & 0 & \bullet \\ \bullet & b^n & \bullet \\ \bullet & \bullet & c^n \end{bmatrix}$$

همان‌طور که در رابطه‌های بالا می‌بینید؛ توان n روی درایه‌های قطر اصلی می‌نشیند و صفرهای بالا یا پایین قطر اصلی هم صفر می‌مانند.



گام ۱ (تشخیص گزینۀ درست) طبق رابطه (*) می‌توانیم در عبارت

$$A^2 - A + I, \text{ به جای } A^2 \text{ بنویسیم } 3A + 19I:$$

$$(3A + 19I) - A + I = 2A + 20I = 2(A + 10I)$$

۹۷. **گام ۲** (تشخیص استراتژی حل) یک ماتریس 2×2 داریم و

بقیه چیزها برحسب A و I هستند، پس از «کیلی - همیلتون» استفاده می‌کنیم.

گام ۳ (نوشتن A^2 برحسب A و I)

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow A^2 = (2+2)A - ((2)(2) - (1)(5))I$$

$$\Rightarrow A^2 = 4A + I \quad (1)$$

گام ۴ (محاسبه ماتریس A^3 برحسب A و I) حالا طرفین تساوی

$$A^2 = 4A + I \text{ را در } A \text{ ضرب می‌کنیم (یا از راست یا از چپ) تا ماتریس } A^3$$

هم برحسب A و I پیدا بشود:

$$A^2 = 4A + I \xrightarrow{Ax} A(A^2) = A(4A + I) \Rightarrow A^3 = 4A^2 + A$$

طبق رابطه (۱) می‌توانیم در تساوی بالا به جای A^2 بنویسیم $4A + I$:

$$A^3 = 4(4A + I) + A = 17A + 4I \quad (2)$$

گام ۵ (پیدا کردن خواسته سؤال) حالا رابطه‌های (۱) و (۲) را در تساوی

$$A^3 - A^2 = mA + nI \text{ جای‌گذاری می‌کنیم تا به } m \text{ و } n \text{ برسیم:}$$

$$(17A + 4I) - (4A + I) = mA + nI \Rightarrow 13A + 3I = mA + nI$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m = 13 \\ n = 3 \end{cases} \Rightarrow (m, n) = (13, 3)$$

۹۸. **گام ۳** (محاسبه درایه‌های $A - I$) فرض می‌کنیم $B = A - I$

باشد، در این صورت می‌توانیم بنویسیم:

$$B = A - I = \begin{bmatrix} a+4 & a+3 \\ -a & 1-a \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+3 & a+3 \\ -a & -a \end{bmatrix}$$

گام ۴ (محاسبه خواسته سؤال) برای محاسبه B^3 ، اول B^2 را به کمک

قضیه «کیلی - همیلتون» به دست می‌آوریم:

$$B = \begin{bmatrix} a+3 & a+3 \\ -a & -a \end{bmatrix} \Rightarrow B^2 = ((a+3) + (-a))B$$

$$-((a+3)(-a) - (a+3)(-a))I \Rightarrow B^2 = 3B$$

یاد گرفتیم اگر $B^2 = kB$ باشد، $B^n = k^{n-1}B$ می‌شود. این‌جا چون

$B^2 = 3B$ شده، پس $B^3 = 3^2B$ است. در این تساوی طبق فرضی که در

گام (۱) کردیم، می‌توانیم جای B بنویسیم $A - I$.

$$B^3 = 3^2B \Rightarrow (A - I)^3 = 9(A - I)$$

۹۹. **گام ۳** (تشخیص استراتژی حل) برای محاسبه دو مجهول α و β ،

دوتا معادله لازم داریم؛ پس از ماتریس A^2 دوتا درایه به دست می‌آوریم.

گام ۴ (محاسبه درایه‌های مورد نیاز) دوتا از درایه‌های سطر اول A^2 را به

دست می‌آوریم:

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 3 & 6 & -2 \\ 3 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 3 & 6 & -2 \\ 3 & 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -10 & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet \end{bmatrix}$$

$$\text{درایه‌های پایین قطر اصلی ماتریس } B = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \text{ صفرند، پس طبق}$$

نکته قبل برای B^3 می‌توانیم بنویسیم:

$$B^3 = \begin{bmatrix} 3^3 & \bullet & \bullet \\ 0 & 2^3 & \bullet \\ 0 & 0 & (-1)^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 27 & \bullet & \bullet \\ 0 & 8 & \bullet \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

گام ۵ (محاسبه خواسته سؤال) حالا می‌توانیم درایه‌های قطر اصلی ماتریس

$$A^2 + B^3 + I^3 \text{ را به دست بیاوریم:}$$

$$A^2 + B^3 + I^3 = \begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 27 & \bullet & \bullet \\ 0 & 8 & \bullet \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 36 & \bullet & \bullet \\ \bullet & 17 & \bullet \\ \bullet & \bullet & 8 \end{bmatrix}$$

سؤال مجموع درایه‌های قطر اصلی ماتریس بالا را می‌خواهد که می‌شود

$$36 + 17 + 8 = 61$$

۹۵. **گام ۲** (محاسبه A^2)

$$A^2 = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 5 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 5 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 2 \\ 10 & 21 \end{bmatrix}$$

گام ۳ (محاسبه خواسته سؤال) حالا ماتریس‌های A^2 و

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 5 & 4 \end{bmatrix} \text{ را در تساوی } A^2 = \alpha A + \beta I \text{ جای‌گذاری می‌کنیم:}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 9 & 2 \\ 10 & 21 \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 5 & 4 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 9 & 2 \\ 10 & 21 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta - 2\alpha & \alpha \\ 5\alpha & \beta + 4\alpha \end{bmatrix}$$

در آخر درایه‌های رنگی بالا را مساوی هم می‌گذاریم تا α و β پیدا بشوند:

$$\begin{cases} \alpha = 2 \\ \beta - 2\alpha = 9 \end{cases} \xrightarrow{\alpha=2} \beta - 2(2) = 9 \Rightarrow \beta = 13$$

گام ۴ (نوشتن A^2 برحسب A و I) به کمک قضیه «کیلی - همیلتون»،

A^2 را برحسب A و I می‌نویسیم:

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 5 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow A^2 = (-2+4)A - ((-2)(4) - (1)(5))I$$

$$\Rightarrow A^2 = 2A + 13I \quad (*)$$

گام ۵ (محاسبه خواسته سؤال) از مقایسه رابطه $A^2 = \alpha A + \beta I$ با (*)،

نتیجه می‌گیریم که $(\alpha, \beta) = (2, 13)$ است.

۹۶. **گام ۱** (تشخیص استراتژی حل) یک روش، محاسبه مستقیم

A^2 و جای‌گذاری‌اش در عبارت $A^2 - A + I$ است، تازه بعد از آن باید گزینه‌ها

را هم چک کنید. اما اگر دقت کنید در این سؤال ماتریس مربعی $A_{2 \times 2}$ را داریم

و همه چیز برحسب A و I است، پس «کیلی - همیلتون» بهترین انتخاب است.

گام ۲ (محاسبه A^2 برحسب A و I) به کمک «قضیه کیلی - همیلتون»،

ماتریس A را برحسب A و I می‌نویسیم:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 7 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow A^2 = (2+1)A - ((2)(1) - (3)(7))I$$

$$\Rightarrow A^2 = 3A + 19I \quad (*)$$

گام ۱ (جای‌گذاری مناسب) حالا ماتریس‌های A و A^2 را در تساوی $A^2 = \alpha A - \beta I$ جای‌گذاری می‌کنیم:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \beta \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha - \beta & -2\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

گام ۲ (محاسبه خواسته سؤال) حالا درایه‌های رنگی بالا را مساوی هم می‌گذاریم:

$$\begin{cases} -2\alpha = -1 \Rightarrow \alpha = \frac{1}{2} \\ \alpha - \beta = 0 \Rightarrow \beta = \frac{1}{2} \end{cases}$$

پس $\frac{\beta}{\alpha} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = 1$

گام ۳ (محاسبه توان‌های کوچک A) با A^2 شروع می‌کنیم:

$$A^2 = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow A^2 = I$$

ماتریس خاص

گام ۴ (محاسبه خواسته سؤال) یاد گرفتیم وقتی $A^2 = I$ باشد، سریعاً می‌توانیم بگوییم $A = A^{-1}$ و $A^0 = I$ می‌شود؛ پس این‌جا $A^4 = A^2 = I$ است؛ بنابراین $A^4 - A^2 = 0$ می‌شود:

گام ۵ (محاسبه توان‌های کوچک A) با A^2 شروع می‌کنیم:

$$A^4 - A^2 = A^2 - I = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -3 \end{bmatrix}$$

گام ۶ (محاسبه خواسته سؤال) طرفین تساوی $A^2 = aI$ را به توان ۴ می‌رسانیم تا ماتریس A^8 به دست بیاید:

$$(A^2)^4 = (aI)^4 \Rightarrow A^8 = a^4 I^4 \xrightarrow{I^4=I} A^8 = a^4 I \quad (*)$$

به گفته سؤال $A^8 = 16I$ است. از مقایسه این تساوی با $(*)$ نتیجه می‌گیریم که:

$$a^4 = 16 \Rightarrow a = \pm 2$$

پس به ازای دو مقدار a ، خواسته سؤال برآورده می‌شود.

گام ۷ (محاسبه توان‌های کوچک A و B) با محاسبه A^2 و B^2 شروع می‌کنیم:

$$A^2 = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow A^2 = \bar{O}$$

$$B^2 = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = -I \Rightarrow B^2 = -I$$

در همین توان دوم‌ها به ماتریس‌های خاص رسیدیم، پس دیگر ادامه نمی‌دهیم.

گام ۸ (محاسبه درایه‌های A^0 و B^0) حالا A^0 و B^0 را به دست می‌آوریم:

محاسبه A^0 : چون $A^2 = \bar{O}$ شد، پس بقیه توان‌های A هم مساوی $\bar{O}$ هستند؛ یعنی: $A^0 = \bar{O}$

محاسبه B^0 : طرفین تساوی $B^2 = -I$ را به توان ۱ می‌رسانیم تا B^0 به دست بیاید:

$$(B^2)^1 = (-I)^1 \Rightarrow B^0 = -I$$

محاسبه B^2 : طرفین تساوی $B^2 = -I$ را به توان ۱ می‌رسانیم تا به B^0 برسیم:

$$(B^2)^1 = (-I)^1 \Rightarrow B^0 = -I \xrightarrow{I^1=I} B^0 = -I$$

گام ۹ (محاسبه خواسته سؤال) الان می‌توانیم ماتریس $A^2 - B^2$ را به دست بیاوریم:

$$A^2 - B^2 = \bar{O} - (-I) = I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

محاسبه $A + B$ هم که کاری ندارد:

$A + B = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

مجموع درایه‌های ماتریس $A^2 - B^2$ برابر ۲ و مجموع درایه‌های ماتریس $A + B$ هم برابر ۲ است، پس نسبتشان می‌شود $\frac{2}{2} = 1$.

گام ۱۰ (محاسبه توان‌های کوچک A) مثل همیشه با A^2 شروع می‌کنیم، ولی قبلش برای راحتی، درایه‌های اعشاری A را کسری می‌نویسیم:

$$A = \begin{bmatrix} 0/5 & 1 \\ 0/25 & 0/5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & 1 \\ \frac{1}{25} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$$

حالا می‌رویم سراغ A^2 :

$$A^2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & 1 \\ \frac{1}{25} & \frac{1}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & 1 \\ \frac{1}{25} & \frac{1}{5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{25} + \frac{1}{5} & \frac{1}{5} + \frac{1}{5} \\ \frac{1}{625} + \frac{1}{25} & \frac{1}{25} + \frac{1}{25} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{25} & \frac{2}{5} \\ \frac{1}{625} & \frac{2}{25} \end{bmatrix}$$

ماتریس خاص $A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

گام ۱۱ (محاسبه خواسته سؤال) یاد گرفتیم وقتی $A^2 = A$ باشد، بقیه توان‌های A هم مساوی A می‌شوند؛ پس:

$$A^1 = A^0 = \dots = A^2 = A$$

بنابراین در عبارت $M = A^1 + A^0 + \dots + A + I$ می‌توانیم به جای همه توان‌های A خود A را بنویسیم:

$$M = \underbrace{A + A + \dots + A}_{10 \text{ تا}} + I = 10A + I = 10 \begin{bmatrix} 0/5 & 1 \\ 0/25 & 0/5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

قطر اصلی

$$+ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 10 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

سؤال مجموع درایه‌های قطر اصلی ماتریس بالا را می‌خواهد که می‌شود $2 + 2 = 4$.

گام ۱۲ (محاسبه درایه‌های AB) فرض می‌کنیم $C = AB$ باشد، این جوری C می‌شود:

$$C = AB \Rightarrow C = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 7 & -7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 & -4 \\ 14 & -7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 64 - 56 & -32 + 28 \\ 112 - 98 & -56 + 49 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & -4 \\ 14 & -7 \end{bmatrix}$$

گام ۱۳ (محاسبه توان‌های کوچک C) به دنبال $C^{1401} = (AB)^{1401}$ هستیم، پس اول باید توان‌های کوچکش را محاسبه کنیم. با C^2 شروع می‌کنیم:

$$C^2 = \begin{bmatrix} 8 & -4 \\ 14 & -7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 & -4 \\ 14 & -7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 64 - 56 & -32 + 28 \\ 112 - 98 & -56 + 49 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & -4 \\ 14 & -7 \end{bmatrix}$$

ماتریس خاص $C^2 = C$

گام ۱۴ (محاسبه خواسته سؤال) یاد گرفتیم وقتی $C^2 = C$ باشد، توان‌های دیگر C هم مساوی C می‌شوند، پس:

$$C^{1401} = C \xrightarrow{C=AB} (AB)^{1401} = AB$$

گام ۱۵ (محاسبه توان‌های کوچک A) با A^2 شروع می‌کنیم:

$$A^2 = A \times A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

گام ۴ (محاسبه A^{99}) یاد گرفتیم وقتی $A^2 = kA$ باشد، $A^n = k^{n-1}A$ می‌شود؛ پس این‌جا $A^{100} = 3^{99}A$ است.

گام ۵ (محاسبه خواسته سؤال) چون A^{100} ، 3^{99} برابر A شد، پس مجموع درایه‌های قطر اصلی A^{100} هم 3^{99} برابر مجموع درایه‌های قطر اصلی A می‌شود.

۱۰۸. ۳ گام ۶ (محاسبه توان‌های کوچک A) مثل همیشه با محاسبه A^2 شروع می‌کنیم:

$$A^2 = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 8 & 8 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 8 & 8 & 8 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A^2 = 4 \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow A^2 = 4A \rightarrow \text{ماتریس خاص}$$

گام ۷ (محاسبه A^{10}) وقتی $A^2 = kA$ باشد، $A^n = k^{n-1}A$ می‌شود، پس این‌جا $A^{10} = 4^9A$ است.

گام ۸ (محاسبه خواسته سؤال) چون A^{10} ، 4^9 برابر ماتریس A شد، پس مجموع درایه‌هایش هم 4^9 برابر ماتریس A می‌شود؛ یعنی:

$$A^{10} = 4^9(A) = 4^9(8 \times 2) = 4^9 \times 16 = 2^{22}$$

۱۰۹. ۲ به گفته سؤال برای دو ماتریس A و B اتحاد مزدوج، یعنی $A^2 - B^2 = (A+B)(A-B)$ برقرار است.

یاد گرفتیم برای دوتا ماتریس مربعی مثل A و B وقتی اتحادها برقرار است که $AB = BA$ خاصیت جابه‌جایی داشته باشند؛ یعنی $AB = BA$ باشد.

۱۱۰. ۳

شفاف‌سازی: «تساوی $A^2 + B^2 = (A-B)^2 + 2AB$ برقرار است»، یعنی برای ماتریس‌های A و B اتحاد برقرار است؛ بنابراین $AB = BA$ می‌شود.

گام ۱ (اعمال شرط $AB = BA$) طبق «شفاف‌سازی»، باید AB را مساوی BA بگذاریم:

$$AB = BA \Rightarrow \begin{bmatrix} a & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & b \\ -1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & b \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} -a-2 & ab-4 \\ 1 & -b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a-b & -2 \\ -a+2 & -2 \end{bmatrix}$$

گام ۲ (محاسبه خواسته سؤال) حالا درایه‌های رنگی بالا را مساوی هم می‌گذاریم تا با محاسبات کم‌تری به a و b برسیم:

$$\begin{cases} -a+2=1 \Rightarrow a=1 \\ -b=-2 \Rightarrow b=2 \end{cases}$$

بنابراین $a+b=3$ می‌شود.

به ماتریس خاص نرسیدیم، پس سراغ A^3 می‌رویم:

$$A^3 = A^2 \times A = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$$

باز هم به در بسته خوردیم، A^4 را هم حساب می‌کنیم:

$$A^4 = A^3 \times A = \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix} = -4I$$

بالاخره به ماتریس خاص $-4I$ رسیدیم.

گام ۳ (محاسبه ماتریس‌های A^6 ، A^8 و A^{10}) حالا به کمک ضرب و توان‌رسانی مناسب، ماتریس‌های A^6 ، A^8 و A^{10} را می‌سازیم:

$$A^6 = -4I \xrightarrow{A^2 \times} A^2(A^4) = A^2(-4I)$$

$$\Rightarrow A^6 = -4A^2 = -4 \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 8 \\ -8 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A^8 = -4I \xrightarrow{\text{توان } 2} (A^4)^2 = (-4I)^2 \Rightarrow A^8 = 16I^2$$

$$\Rightarrow A^8 = 16I = \begin{bmatrix} 16 & 0 \\ 0 & 16 \end{bmatrix}$$

گام ۴ برای محاسبه A^{10} هم A^8 را در A^2 ضرب می‌کنیم که جفتشان را داریم:

$$A^{10} = A^8 \times A^2 = \begin{bmatrix} 16 & 0 \\ 0 & 16 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -32 \\ 32 & 0 \end{bmatrix}$$

گام ۵ (محاسبه خواسته سؤال) حالا می‌توانیم ماتریس $A^6 + A^8 + A^{10}$ را به دست بیاوریم:

$$A^6 + A^8 + A^{10} = \begin{bmatrix} 0 & 8 \\ -8 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 16 & 0 \\ 0 & 16 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -32 \\ 32 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 & -24 \\ 24 & 16 \end{bmatrix}$$

سؤال مجموع درایه‌های ماتریس بالا را می‌خواهد که می‌شود $16 + 16 - 24 + 24 = 32$.

۱۱۰. ۱ گام ۶ (محاسبه توان‌های کوچک) اول $A + I$ را به دست می‌آوریم:

$$A + I = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

حالا به سراغ $(A + I)^2$ می‌رویم:

$$(A + I)^2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$$

به ماتریس خاصی نرسیدیم، پس $(A + I)^3$ را هم به دست می‌آوریم:

$$(A + I)^3 = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & 13 \\ 13 & 14 \end{bmatrix}$$

گام ۷ (محاسبه خواسته سؤال) باز هم به ماتریس خاصی نرسیدیم، پس $(A + I)^4$ را در خودش ضرب می‌کنیم تا به $(A + I)^6$ برسیم:

$$(A + I)^6 = (A + I)^3 (A + I)^3 = \begin{bmatrix} 14 & 13 \\ 13 & 14 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 14 & 13 \\ 13 & 14 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 365 & 364 \\ 364 & 365 \end{bmatrix}$$

پس $a - b = 365 - 364 = 1$ می‌شود.

۱۱۰. ۴ گام ۸ (محاسبه توان‌های کوچک A) با A^2 شروع می‌کنیم:

$$A^2 = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & -3 & -3 \\ -3 & 6 & -3 \\ -3 & -3 & 6 \end{bmatrix}$$

$$= 3 \times \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow A^2 = 3A \rightarrow \text{ماتریس خاص}$$

تجزیه‌بازی: قبلاً یاد گرفتیم برای ماتریس‌های $A = \begin{bmatrix} a & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} -1 & b \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$ وقتی $AB = BA$ می‌شود که تناسب زیر برقرار باشد:

$$\frac{-1}{-1} = \frac{2}{b} = \frac{a-0}{-1-(-2)} \Rightarrow \begin{cases} \frac{2}{b} = \frac{1}{1} \Rightarrow b = 2 \\ \frac{1}{1} = \frac{a}{1} \Rightarrow a = 1 \end{cases}$$

که باز هم $a + b = 3$ می‌شود.

۱۱۱. ۲ گام (تشخیص استراتژی حل) سؤال حاصل $A^2 + B^2 - 2AB$ را می‌خواهد. بخشی از این عبارت را در اتحاد ماتریسی می‌توانیم ببینیم؛ پس در تساوی $(A - B)^2 = A^2 + B^2 - AB - BA$ اول $A - B$ را می‌سازیم، بعد طرفینش را به توان ۲ می‌رسانیم. (اجرای استراتژی) تساوی $A = B + C$ را به صورت $A - B = C$ می‌نویسیم، حالا طرفینش را به توان ۲ می‌رسانیم:

$$(A - B)^2 = C^2 \Rightarrow A^2 + B^2 - AB - BA = C^2$$

$$\Rightarrow A^2 + B^2 - AB = C^2 + BA \quad (*)$$

۱۱۲. ۴ گام (پیدا کردن خواسته سؤال) از طرفین تساوی (*) یک AB کم می‌کنیم تا به خواسته سؤال برسیم:

$$A^2 + B^2 - AB - AB = C^2 + BA - AB$$

$$\Rightarrow A^2 + B^2 - 2AB = C^2 + BA - AB$$

۱۱۳. ۱ گام (تحلیل خواسته سؤال) همان $(A + B)^2$ است.

۱۱۴. ۱ گام (محاسبه خواسته سؤال) با توجه به گام (۱) باید بنویسیم:

$$(A + B)^2 = \left(\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & -2 \\ 0 & -3 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \end{bmatrix} \right)^2$$

$$= \left(\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \right)^2 = \begin{bmatrix} 3^2 & 0 & 0 \\ 0 & 3^2 & 0 \\ 0 & 0 & 3^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}$$

بنابراین مجموع درایه‌های ماتریس بالا می‌شود $3 \times 9 = 27$.

۱۱۳. ۱ گام (تشخیص استراتژی حل) سؤال $A - B$ و $AB + BA$ را داده و $A^2 + B^2$ را می‌خواهد. در اتحاد ماتریسی $(A - B)^2 = A^2 - AB - BA + B^2$ همه این چیزها را می‌بینیم؛ پس طرفین تساوی‌ای را که $A - B$ دارد، به توان ۲ می‌رسانیم.

۱۱۳. ۱ گام (اجرای استراتژی) سمت راست تساوی $A - B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} + 2I$ را ساده‌تر می‌نویسیم، بعد طرفینش را به توان ۲ می‌رسانیم:

$$A - B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow A - B = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{توان ۲}} (A - B)^2 = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 & -6 \\ 18 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A^2 - AB - BA + B^2 = \begin{bmatrix} 13 & -6 \\ 18 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A^2 + B^2 = \begin{bmatrix} 13 & -6 \\ 18 & 1 \end{bmatrix} + AB + BA \quad (*)$$

۱۱۴. ۳ گام (محاسبه خواسته سؤال) اول از تساوی $AB + BA = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} + I$ ماتریس $AB + BA$ را به دست می‌آوریم:

$$AB + BA = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow AB + BA = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$$

حالا در تساوی (*) به جای $AB + BA$ ، ماتریس $\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$ را می‌نویسیم:

$$A^2 + B^2 = \begin{bmatrix} 13 & -6 \\ 18 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 & -4 \\ 17 & 6 \end{bmatrix}$$

سؤال مجموع درایه‌های ماتریس $A^2 + B^2$ را می‌خواهد که می‌شود $15 + 6 - 4 + 17 = 34$.

۱۱۴. ۳ گام برای ماتریس‌های مربعی $2A$ و I اتحادها برقرار است، پس می‌توانیم $(2A + I)^2$ در $M = A(2A + I)^2$ را به کمک اتحاد مربع دو جمله‌ای باز کنیم:

$$M = A(2A + I)^2 = A((2A)^2 + I^2 + 2(2A)(I)) = A(4A^2 + 4A + I)$$

همه گزینه‌ها برحسب A و I هستند، پس باید A^2 را حذف کنیم. برای این کار از تساوی $A^2 = I + A$ که خود سؤال داده استفاده می‌کنیم. طبق این تساوی می‌توانیم به جای A^2 در تساوی بالا بنویسیم $I + A$:

$$M = A(4(I + A) + 4A + I) = A(8A + 5I) = 8A^2 + 5A$$

باز هم جای A^2 می‌نویسیم $I + A$: $M = 8(I + A) + 5A = 8I + 13A$

۱۱۵. ۲ گام (ساده کردن خواسته سؤال) برای ماتریس‌های مربعی A و I اتحاد برقرار است؛ پس برای محاسبه $(A - I)(I + A + A^2)$ حق داریم از اتحاد چاق و لاغر استفاده کنیم:

$$M = I + (A - I)(I + A + A^2) = I + (A^3 - I^3) = A^3$$

۱۱۶. ۲ گام (محاسبه خواسته سؤال) برای محاسبه A^3 ، A^2 را لازم داریم؛ پس اول A را در خودش ضرب می‌کنیم تا به A^2 برسیم:

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 6 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$$

حالا A^2 را در A ضرب می‌کنیم تا به A^3 برسیم:

$$A^3 = A^2 \times A = \begin{bmatrix} -1 & 6 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 & 10 \\ -5 & -2 \end{bmatrix}$$

بنابراین مجموع درایه‌های ماتریس A^3 می‌شود $-7 - 5 - 2 + 10 = -4$.

۱۱۶. ۲ گام (استفاده از اتحادها) برای A و I اتحادها برقرار است، پس حق داریم $A^2 - 3A + 2I$ را تجزیه کنیم:

$$M = A^2 - 3A + 2I = (A - I)(A - 2I) \quad (*)$$

۱۱۶. ۲ گام (محاسبه ماتریس‌های مورد نیاز) حالا $A - I$ و $A - 2I$ را به دست می‌آوریم:

$$A - I = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A - 2I = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 3 \\ 3 & 0 & 3 \\ 3 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

۱۱۶. ۳ گام (محاسبه خواسته سؤال) ماتریس‌های بالا را در (*) جای‌گذاری می‌کنیم:

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 3 & 3 \\ 3 & 0 & 3 \\ 3 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

ماتریس دوم ماتریس اول



۱۱۸. **فام ۴** (محاسبه درایه‌های A^n) در تساوی $A^n = 5I - 8A$ ،

ماتریس $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -3 \end{bmatrix}$ را جای گذاری می‌کنیم:

$$A^n = 5 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - 8 \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 16 & -8 \\ 40 & -24 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A^n = \begin{bmatrix} -11 & 8 \\ -40 & 29 \end{bmatrix}$$

فام ۵ (محاسبه n) حالا توان‌های مختلف $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -3 \end{bmatrix}$ را به دست

می‌آوریم تا ببینیم در کدام توان به ماتریس می‌رسیم. با A^2 شروع می‌کنیم:

$$A^2 = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -5 & 4 \end{bmatrix}$$

A^2 که نشد، پس سراغ A^3 می‌رویم:

$$A^3 = A^2 \times A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -5 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 10 & -7 \end{bmatrix}$$

A^4 را هم باید حساب کنیم:

$$A^4 = A^3 \times A^2 = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -5 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -5 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 3 \\ -15 & 11 \end{bmatrix}$$

باز هم نشد، پس می‌رویم سراغ A^5 :

$$A^5 = A^4 \times A = \begin{bmatrix} -4 & 3 \\ -15 & 11 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & -5 \\ 25 & -18 \end{bmatrix}$$

$$A^6 = A^5 \times A = \begin{bmatrix} 7 & -5 \\ 25 & -18 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -11 & 8 \\ -40 & 29 \end{bmatrix} \quad \text{و } A^6:$$

بالاخره در A^6 به ماتریس رسیدیم، پس $n = 6$ است.

۱۱۹. **فام ۲** (محاسبه ماتریس‌های مورد نیاز) در تساوی‌های داده‌شده، ماتریس‌های $(A+B)^2$ و A^2 را داریم که باید محاسبه‌شان

کنیم. $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & \alpha \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} \beta & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ است، پس $A+B$ می‌شود:

$$A+B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & \alpha \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+\beta & 0 \\ 3 & \alpha \end{bmatrix}$$

در نتیجه $(A+B)^2$ برابر است با:

$$(A+B)^2 = \begin{bmatrix} 1+\beta & 0 \\ 3 & \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1+\beta & 0 \\ 3 & \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1+\beta)^2 & 0 \\ 3\beta+3\alpha+3 & \alpha^2 \end{bmatrix}$$

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1-\alpha \\ 2+2\alpha & \alpha^2-2 \end{bmatrix} \quad \text{هم می‌شود:}$$

فام ۳ (محاسبه α) ماتریس‌های $(A+B)^2$ و A^2 را در تساوی

$$(A+B)^2 = A^2 + \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{جای گذاری می‌کنیم:}$$

$$\begin{bmatrix} (1+\beta)^2 & 0 \\ 3\beta+3\alpha+3 & \alpha^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1-\alpha \\ 2+2\alpha & \alpha^2-2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} (1+\beta)^2 & 0 \\ 3\beta+3\alpha+3 & \alpha^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1-\alpha \\ 4+2\alpha & \alpha^2 \end{bmatrix}$$

درایه سطر سوم و ستون سوم ماتریس قبل را هوشمندانه به دست می‌آوریم:

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{ستون (۳) از ماتریس} \times \text{سطر (۳) از ماتریس اول}$$

$$= 9 + 9 + 0 = 18$$

۱۱۷. **فام ۲** (محاسبه درایه‌های A) همان‌طور که در ماتریس مقابل

می‌بینید در درایه‌های آبی، $|i-j| \leq 1$ و در درایه‌های قرمز $|i-j| > 1$ است؛ پس با توجه

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \quad \text{به فرمول} \quad a_{ij} = \begin{cases} \begin{bmatrix} i \\ j \end{bmatrix} & |i-j| \leq 1 \\ \begin{bmatrix} i \\ j \end{bmatrix} + 1 & |i-j| > 1 \end{cases}$$

درایه‌های قرمز را از $a_{ij} = \begin{bmatrix} i \\ j \end{bmatrix} + 1$ حساب می‌کنیم:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} + 1 \\ \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} + 1 & \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

فام ۳ (محاسبه درایه‌های B) از روی مقدار $\begin{bmatrix} i \\ j \end{bmatrix}$ باید تصمیم بگیریم برای

$$b_{ij} = \begin{cases} i-j & \begin{bmatrix} i \\ j \end{bmatrix} \geq 1 \\ m & \begin{bmatrix} i \\ j \end{bmatrix} < 1 \end{cases} \quad \text{محاسبه هر درایه از کدام یک از ضابطه‌های استفاده کنیم. مقدار} \begin{bmatrix} i \\ j \end{bmatrix} \text{ را در سطرهای مختلف به دست می‌آوریم:}$$

$$\text{سطر اول: } \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 0 < 1 \quad \text{سطر دوم: } \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} = 1 \geq 1$$

$$\text{سطر سوم: } \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix} = 1 \geq 1$$

از محاسبات بالا می‌فهمیم که برای محاسبه درایه‌های سطر اول باید از $b_{ij} = m$ و برای محاسبه بقیه سطرها باید از $b_{ij} = i - j$ استفاده کنیم:

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m & m & m \\ 2-1 & 2-2 & 2-3 \\ 3-1 & 3-2 & 3-3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} m & m & m \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

فام ۴ (محاسبه درایه‌های مورد نیاز از AB) حالا می‌توانیم به کمک ضرب

هوشمندانه درایه‌های قطر اصلی AB را پیدا کنیم:

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m & m & m \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m+8 & \bullet & \bullet \\ \bullet & 2m & \bullet \\ \bullet & \bullet & m-1 \end{bmatrix}$$

فام ۵ (محاسبه خواسته سؤال) در آخر طبق میل سؤال مجموع درایه‌های

قطر اصلی AB را مساوی مجموع درایه‌های سطر اول B می‌گذاریم:

$$(m+8) + 2m + (m-1) = \underbrace{m+m+m}_{3m} \Rightarrow 4m+7 = 3m \Rightarrow m = -7$$