تقدیم به: مسعود حق‌گو، حسین هاشمی، فرهاد میثمی و فرهاد ابولقاسمی، که هرکدام دریچه‌های تازه‌ای به زندگی من گشودند، و اگر نمی‌شناختم‌شان، این کتاب هرگز نوشته نمی‌شد.

مقدمهٔ مؤلفان

آخـــر بـــه چـــه گـــویـــم هست از خـــود خـــبـــرم چـــون نیست
وز بـــهـــر چـــه گـــویـــم نیست بـــا وی نـــظـــرم چـــون هست

می‌خواهم مقدمه را با این عکس آغاز کنم. تصویری که برای همهٔ ما آشناست. حال خودتان را در این لحظه به یاد آورید. دقیقن در همین ثانیه، چون یک ثانیهٔ بعد ما دیگر همان آدم‌های قبل نبودیم. یک ثانیهٔ بعد فقط حسرت بود و یک جام جهانی از دست رفته.

توی سایت فیفا در توضیح عکس نوشته شده: «فاصلهٔ بین صدرنشین شدن در گروه و صعود به مرحلهٔ بعد تا حذف‌شدن از مسابقه‌ها»

این تصویر دقیقن در لحظه‌ای گرفته شده که معلوم نیست توپ می‌رود توی دروازه یا اوت می‌شود.

در یک لحظه سناریو می‌توانست طور دیگری شکل بگیرد: توپ می‌رود توی دروازه، وقت اضافه تمام می‌شود. پرتغال نمی‌تواند گلی بزند، ما می‌رویم بالا، در یک‌هشتم نهایی روسیه را می‌بریم و در یک‌چهارم نهایی به کرواسی می‌بازیم. الان شاید مسخره به نظر برسد اما خودتان را برگردانید به همان ثانیه.

آیا یک لحظه از ذهنتان نگذشت که توپ گل می‌شود؟ آیا این شانس وجود نداشت که توپ برود توی دروازه؟ مثلن به این فکر کنید به جای طارمی، قوچان‌نژاد ضربه را زده بود. در آن صورت چه‌قدر احتمال می‌دادید توپ گل شود؟

اسم این کتاب «آمار و احتمال» است. در بحث احتمال، ما شانس رخ‌دادن پدیده‌های مختلف را به دست می‌آوریم. آیا تا به حال به این فکر کرده‌اید شانس و تصادف چه‌قدر در زندگی ما تأثیر دارد؛ برای مثال نشده با خودتان فکر کنید اگر فلان روز، فلان اتفاق نیفتاده بود، ممکن بود مسیر زندگیتان عوض شود؟ من گاهی که برمی‌گردم و به زندگی‌ام نگاه می‌کنم به این چیزها فکر می‌کنم.

همان‌طوری که دارید می‌بینید من مؤلف کتاب‌های ریاضی و معلم ریاضی‌ام. البته این یکی از کارهایی است که می‌کنم. پیش‌ترها کار مهندسی می‌کردم، گاهی هم نمایش‌نامه می‌نویسم و تئاتر کارگردانی می‌کنم! بله کمی عجیب و غریب است، خودم می‌دانم، اما الان می‌خواهم برای‌تان تعریف کنم چه شد من مؤلف کتاب‌های ریاضی شدم.

این کتابی که دارید می‌خوانید نمی‌دانم چندمین کتاب ریاضی است که نوشته‌ام؛ دوازدهمین؟ سیزدهمین؟ باید بنشینم حساب کنم. اما قصه‌اش این‌جوری شروع شد که من دانشجوی پلی‌تکنیک بودم و هفته‌ای یک‌بار می‌رفتم دانشگاه شریف تا در جلسه‌های دفتر مطالعات فرهنگی که در آن‌جا برگزار می‌شد و به نظر من موضوع جالبی داشت شرکت کنم.

آن‌جا یک آقایی بود که خیلی اهل مطالعه بود، در بحث‌ها مشارکت فعال می‌کرد و آدم خیلی جالبی به نظر می‌رسید. جلسه‌ها حدود ۷ عصر تمام می‌شد و بعد از آن من از میدان آزادی با مینی‌بوس برمی‌گشتم مرکز شهر که بروم خانه‌مان.

یکی از عصرها موقع برگشتن دیدم آن آقای جالب هم توی صف همان مینی‌بوسی است که من هم می‌خواهم سوار شوم.

بعد از سلام و احوال‌پرسی شروع کردیم به صحبت‌کردن و حرفمان کشیده شد به موضوع آن روز بحث که دربارهٔ یکی از فیلم‌های کیشلوفسکی بود. من فیلم را ندیده بودم و آن آقا که اسمش مسعود بود گفت که همهٔ فیلم‌های کیشلوفسکی را دارد و هفتهٔ بعد آن را برای من می‌آورد.

هم‌مسیر بودن من و مسعود و ماجرای این فیلم کیشلوفسکی باعث شد که ما آرام‌آرام با هم دوست شویم.

چند مدت که از دوستی‌مان گذشته بود، مسعود به من گفت که جمعه‌ها با چندتا از دوست‌هایش می‌روند کوه و اگر من هم دوست دارم بیایم.

توی یکی از این کوه رفتن‌ها بود که با یک آدم جالب دیگر آشنا شدم.

دکتری به اسم حسین که بیشتر از پزشکی دغدغهٔ فلسفه و ادبیات داشت. حالا نمی‌خواهم زیاد وارد جزئیات شوم اما بعد از مدتی با حسین هم حسابی دوست شدم. الان لابد می‌گویید خب این‌ها چه ربطی به تألیف کتاب ریاضی دارد؟

ربطش این بود که یک روز حسین وسط حرف‌هایش خیلی تصادفی گفت یکی از دوست‌هایش به اسم فرهاد میثمی یک انتشارات زده به اسم اندیشه‌سازان و دنبال مؤلف در زمینه‌های مختلف می‌گردد.

من که از بچگی عاشق ریاضی بودم و در دورهٔ دبیرستان ریاضیم خیلی خوب بود، یک دوره‌ای هم برای المپیاد ریاضی می‌خواندم، پرسیدم: «مؤلف ریاضی هم می‌خواهند؟ البته هیچ سابقه‌ای ندارم‌ها، اما خیلی علاقه‌مندم و فکر کنم از پسش بر بیام»

آن زمان مثلن بیست‌ویکی‌دو سالم بود. سیستم همکاری با اندیشه‌سازان که آن زمان موسسهٔ نوپایی بود، این‌طوری بود که پروتکل شخصی داشتند و دو عنوان کتاب را مؤلف‌های مختلفی شروع می‌کردند به نوشتن و در نهایت مؤسسه بررسی می‌کرد که کیفیت کدام کتاب بهتر است و آن را چاپ می‌کرد.

من و دوستم فرهاد ابولقاسمی تصمیم گرفتیم که کتاب ریاضی ۱ را بنویسیم و خبردار شده بودیم هم‌زمان با ما یکی از مؤلف‌های سرشناس آن دوره نیز دارد همین عنوان را برای مؤسسه می‌نویسد و این ریسک وجود داشت که چندین ماه زحمت بکشیم و کتاب ما رد شود اما تصمیم گرفتیم به جای ناامیدشدن همهٔ تلاشمان را انجام دهیم تا بهترین کتابی را که می‌توانستیم، بنویسیم و همین کار را هم کردیم و در نهایت کتاب ما انتخاب شد و از همین‌جا بود که وارد دنیای تألیف و تدریس شدم.

بعدها به این فکر کردم که چه‌قدر اتفاق‌های مختلفی رخ داد که مسیر زندگی من به این صورتی که الان هست شکل بگیرد. اگر به جلسه‌های دفتر مطالعات فرهنگی نمی‌رفتم، اگر با مسعود هم‌مسیر نبودم، اگر دربارهٔ کیشلوفسکی حرف نمی زدیم، اگر با او دوست نمی‌شدم، اگر آن‌روز کوه نمی‌رفتم، اگر با حسین آشنا نمی‌شدم و اگر حسین تصادفن از اندیشه‌سازان حرف نزده بود، شاید من الان معلم و نویسندهٔ کتاب‌های ریاضی نبودم و برای مثال داشتم در یک شرکت یا کارخانه کار مهندسی می‌کردم.

همین کیشلوفسکی فیلمی دارد به نام «شانس کور» که در آن به طرز عمیقی به مسئلهٔ شانس پرداخته است. فیلم ماجرای یک دانشجوی پزشکی است که پس از درگیری با یکی از اساتید دانشگاه از تحصیل انصراف می‌دهد و ادامهٔ زندگی‌اش در سه حالت مختلف بررسی می‌شود. هر سه حالت بعد از یک اتفاق یکسان رخ می‌دهد. اتفاق این است که آیا او به یک قطار بین شهری می‌رسد یا نه. در حالت اول او به قطار می‌رسد، به شهر دیگری می‌رود، دوست سابقش را می‌بیند، وارد حزب کمونیست می‌شود، در کار حزبی پیشرفت می‌کند و پس از مدتی یکی از مسئولان رده بالای حزب می‌شود.

در حالت دوم او به قطار نمی‌رسد، از شدت عصبانیت می‌خواهد شیشهٔ ایستگاه را بشکند و به همین دلیل با پلیس درگیر و دادگاهی می‌شود. قاضی او را محکوم به انجام خدمات اجتماعی می‌کند . به همین خاطر او در شهرش می‌ماند. با یک کشیش آشنا می‌شود و این‌بار به جامهٔ خداپرستان در می‌آید و مسیر زندگی‌اش به کل با حالت اول تفاوت پیدا می‌کند. در حالت سوم نیز باز او به قطار نمی‌رسد اما دوست دخترش که به ایستگاه قطار رفته است او را راضی می‌کند که به دانشکدهٔ پزشکی بازگردد و این‌بار به یک پزشک سرشناس تبدیل می‌شود. پایان هر سه حالت البته یکی است. در هر سه حالت او در یک روز مشخص سوار هواپیما می‌شود و هواپیما سقوط می‌کند.

راستش را بخواهید بار اولی که من این فیلم را دیدم، ترسیدم. آیا واقعن این احتمال‌های ساده و این امکان‌های متفاوت می‌توانند این‌قدر در زندگی و سرنوشت تاثیرگذار باشند و مسیر آن را به کل عوض کنند؟ و آیا پایان همه‌چیز از قبل مشخص شده است؟ ترسناک نیست؟

به‌جز کیشلوفسکی آدم‌های دیگری نیز در سینما و ادبیات به این موضوع پرداخته‌اند. برای مثال در همین زمینه «امتیاز نهایی» وودی آلن را اگر ندیده‌اید پیشنهاد می‌کنم حتمن ببینید، همین‌طور « عشق سگی» الخاندرو گونزالس ایناریتو را.

اما اجازه دهید این مقدمه را با بخشی از کتاب بسیار درخشان «بار هستی» میلان کوندرا به پایان برسانم. بخشی که با این بحث بسیار مرتبط است:

«او کنار ترزا که به خواب رفته بود، از یک پهلو به پهلوی دیگر می‌غلتید و به آن‌چه که سال‌ها پیش ترزا به او گفته بود فکر می‌کرد. روزی از دوستش (ز) صحبت می‌کردند و ترزا گفته بود: « اگه تو رو ندیده بودم، مسلماً عاشق اون می‌شدم.»

همان وقت هم این گفته، توما را در حزنی عمیق فرو برده بود. ناگهان پی برد که ترزا کاملاً تصادفی عاشق او شده و می‌توانسته جای او مجذوب دوستش شود. خارج از عشق تحقق‌یافتهٔ او نسبت به توما ـ در قلمرو احتمالات ـ به تعداد بی‌شمار هم عشق‌های محتمل به مردهای دیگر نیز وجود داشت... ماجرای عشقشان را مرور کرد:

هفت سال پیش «اتفاقاً » یک مورد سخت تورم نخاع در بیمارستان شهری که ترزا در آن کار می‌کرد ، پیش آمد. رییس بخش بیمارستان به فوریت برای مشاوره به آن‌جا خوانده شد. اما رییس بخش «اتفاقاً » از بیماری سیاتیک رنج می‌برد و چون قادر به حرکت نبود، توما را به جای خود به بیمارستان شهرستان فرستاد. از پنج مهمان‌خانهٔ شهر، او «اتفاقاً» به هتلی رفت که ترزا در آن کار می‌کرد. قبل از حرکت «اتفاقاً» فرصت داشت تا در کافه چیزی بنوشد! ترزا «اتفاقاً » وقت کارش بود و «اتفاقاً » مسئول میز او بود. بنابراین یک رشته «اتفاق» شش‌گانه لازم بود که او را به سوی ترزا بکشاند، گویی اگر به حال خود گذاشته شده بود ، به هیچ‌جا نمی‌رفت.

حالا او به خاطر ترزا به بوهم بازگشته بود. تصمیمی چنان مقدر بر عشقی به غایت «اتفاقی» استوار بود، عشقی که بدون بیماری سیاتیک رییس بخش، حتی وجود نمی‌داشت. اکنون این زن، تجسم «اتفاق مطلق» در کنارش خوابیده بود و در خواب نفس‌های عمیق می‌کشید...»

عطا صادقی
تیرماه ۹۷
Ata.sadeghi@gmail.com

تصور کنید شب قبل امتحان نوبت دوم، زنگ ساعت را روی ۶:۲۰ صبح تنظیم کرده‌اید، اما دلتان می‌خواهد چند دقیقه بیشتر زیر تو بمانید. می‌دانید امتحان رأس ساعت ۸ صبح شروع می‌شود و مسیر خانه تا مدرسه با اتوبوس حدود ۴۵ دقیقه طول می‌کشد. دو خط اتوبوس قرار است بین ساعت ۶:۳۰ تا ۷:۳۰ از ایستگاه نزدیک منزل شما عبور کنند، اما هیچ تابلو یا اپلیکیشنی، زمان دقیق حرکت‌شان را نشان نمی‌دهد.

در همین حال، چند سناریو در ذهنتان مرور می‌شود:

- اگر رأس ۶:۳۰ کنار ایستگاه باشید، عملاً مطمئن‌اید که یکی از دو اتوبوس را خواهید دید و رأس ساعت ۸ در جلسهٔ امتحان حضور دارید.
- اگر رأس ۶:۵ برسید، ۳۰ دقیقه زمان انتظار در اختیار دارید و از تجربه‌های قبلی می‌دانید احتمال به موقع رسیدن حدود ۸۰٪ است.
- اگر کمی بیشتر زیر پتو بمانید و رأس ۷:۰۰ کنار ایستگاه باشید، فقط ۱۵ دقیقه فرصت خواهید داشت. آن وقت احتمال رسیدن اتوبوس ۵۰٪ می‌شود.
- اگر باز هم بیشتر زیر پتو بمانید و رأس ۷:۱۰ دقیقه کنار ایستگاه باشید، فقط ۵ دقیقه وقت دارید و طبق تجربه‌ها تنها حدود ۱۰٪ شانس دارید به موقع سوار شوید و سر جلسهٔ امتحان حاضر شوید.

این سناریوها نشان می‌دهند که هر دقیقه تأخیر، چه‌قدر ریسک دیر رسیدن را افزایش می دهد و چه‌طور با استفاده از آمار و احتمال می‌توانید بین خواب بیشتر و اطمینان از رسیدن به موقع، انتخاب کنید.

تصمیم‌گیری لحظه‌ای و سنجش ریسک، یکی از کاربردهای آمار و احتمال در زندگی روزمره است که با استفاده از این کتاب، می‌توانید با مفاهیم پایه‌ای آن آشنا شوید.

طبق برنامه‌ریزی درسی مدراس و سازمان آموزش و پرورش، دانش‌آموزان حدود ۲۵ هفته در کلاس درسی شرکت می‌کنند، برای همین ما نیز مطالب کتاب آمار و احتمال را به ۲۵ جلسه تقسیم کردیم. در هر جلسه پس از درس‌نامه‌ای که نکات کلیدی را به زبانی روان و کاربردی بیان می‌کند، یک آزمون تشریحی برای تثبیت مفاهیم و یک آزمون تستی برای آمادگی شرکت در کنکور پیش‌بینی شده است. در پایان هر فصل مجموعه‌ای از آزمون‌های تشریحی و تستی آن فصل قرار گرفته، تا دانش‌آموزان به طور کامل آمادگی شرکت در آزمون‌های تشریحی و تستی را پیدا کنند.

با این ساختار منسجم و گام‌به‌گام، شما هم مثل لحظهٔ انتخاب بین خواب بیشتر و رسیدن به موقع، می‌آموزید چگونه با داده‌ها و سناریوهای واقعی روبه‌رو شوید و تصمیم بگیرید، و به علاوه در کنکور سراسری و آزمون‌های تشریحی، با اعتماد به نفس کامل حاضر شوید.

مسعود شفیعی، تیر ۱۴۰۴

این کتاب شامل محتوای تکمیلی است.

با اسکن QR CODE پشت جلد، می‌تونی آزمون‌های تشریحی شبیه‌ساز نوبت اول، آزمون‌های تشریحی شبیه‌ساز نوبت دوم و آزمون‌های جامع تستی از کل کتاب رو ببینی.

فهرست

فصل ۱: آشنایی با مبانی ریاضیات

جلسهٔ اول: گزاره و گزاره‌نما ۸
جلسهٔ دوم: ترکیب گزاره‌ها ۱۵
جلسهٔ سوم: هم‌ارزی‌های منطقی ۲۲
جلسهٔ چهارم: سورها ۲۶
جلسهٔ پنجم: مفاهیم مقدماتی مجموعه‌ها/ زیرمجموعه‌ها ۳۲
جلسهٔ ششم: تعریف زیرمجموعه به کمک ... ۳۸
جلسهٔ هفتم: جبر مجموعه‌ها ۴۲
جلسهٔ هشتم: ضرب دکارتی ۵۰
سؤالات تشریحی و تستی فصل اول ۵۷
پاسخ‌نامهٔ فصل اول ۶۲

فصل ۲: احتمال

جلسهٔ نهم: مبانی احتمال ۸۶
جلسهٔ دهم: پیداکردن احتمال ۹۴
جلسهٔ یازدهم: احتمال غیرهم‌شانس ۱۰۵
جلسهٔ دوازدهم: احتمال شرطی ۱۱۲
جلسهٔ سیزدهم: قانون ضرب احتمال ۱۲۲
جلسهٔ چهاردهم: قانون احتمال کل و بیز ۱۲۵
جلسهٔ پانزدهم: پیشامدهای مستقل و وابسته ۱۳۳
سؤالات تشریحی و تستی فصل دوم ۱۴۳
پاسخ‌نامهٔ فصل دوم ۱۴۹

فصل ۳: آمار توصیفی

جلسهٔ شانزدهم: مفاهیم مقدماتی آمار توصیفی ۱۸۱
جلسهٔ هفدهم: نمایش داده‌ها به کمک نمودار ۱۸۶
جلسهٔ هجدهم: شاخص‌های گرایش به مرکز (میانگین) ۱۹۲
جلسهٔ نوزدهم: شاخص‌های گرایش به مرکز (میانه، ...) ۱۹۸
جلسهٔ بیستم: شاخص‌های پراکندگی (واریانس ...) ۲۰۳
جلسهٔ بیست و یکم: شاخص‌های پراکندگی (ضریب ...) ۲۱۱
سؤالات تشریحی و تستی فصل سوم ۲۱۷
پاسخ‌نامهٔ فصل سوم ۲۲۱

فصل ۴: آمار استنباطی

جلسهٔ بیست و دوم: گردآوری داده‌ها (قسمت اول) ۲۴۵
جلسهٔ بیست و سوم: گردآوری داده‌ها (قسمت دوم) ۲۵۳
جلسهٔ بیست و چهارم: برآورد نقطه‌ای ۲۵۷
جلسهٔ بیست و پنجم: برآورد بازه‌ای ۲۶۳
سؤالات تشریحی و تستی فصل چهارم ۲۷۰
پاسخ‌نامهٔ فصل چهارم ۲۷۳

سؤالات امتحان نهایی درس: آمار و احتمال	امتحان تشریحی جلسهٔ ۳	تعداد سؤال:
پایهٔ یازدهم: دورهٔ دوم متوسطه	رشته: ریاضی	مدت امتحان:

۱۹	ثابت کنید ارزش گزارهٔ $p \Rightarrow ((q \Rightarrow r) \Rightarrow p)$ همواره درست است.	۱/۵
۲۰	بررسی کنید آیا دو گزارهٔ $(p \Rightarrow q) \Rightarrow r$ و $p \Rightarrow (q \Rightarrow r)$ هم‌ارزش هستند یا خیر؟	۲
۲۱	اثبات کنید اگر $a \in \mathbb{Z}$ و a^2 فرد باشد، آن‌گاه a عددی فرد است.	۱/۵
۲۲	ارزش گزارهٔ $[(p \wedge (p \vee q)) \Rightarrow p] \wedge (\sim (p \Rightarrow q) \wedge r)$ در چند حالت از جدول ارزش گزاره‌ها درست است؟	۱/۵

آزمونک تستی جلسهٔ ۳

۱- ارزش گزارهٔ $\sim (\sim r \wedge (p \vee \sim q))$ با کدام‌یک از گزاره‌های زیر یکسان است؟

۱) $r \vee (\sim p \vee q)$ ۲) $r \vee (\sim p \wedge q)$ ۳) $\sim r \vee (p \vee \sim q)$ ۴) $\sim r \vee (p \wedge \sim q)$

۲- گزارهٔ «$A \subset B$ است یا $a \in A$» با کدام‌یک از گزاره‌های شرطی زیر معادل است؟

۱) اگر $a \in A$ آن‌گاه $A \subset B$ ۲) اگر $A \subset B$ آن‌گاه $a \in A$ ۳) اگر $a \notin A$ آن‌گاه $A \subset B$ ۴) اگر $A \not\subset B$ آن‌گاه $a \notin A$

۳- ارزش گزارهٔ $(\sim (p \Rightarrow q)) \Rightarrow \sim q$ با ارزش کدام‌یک از گزاره‌های زیر همواره برابر است؟

۱) p ۲) q ۳) $\sim q$ ۴) T

۴- ارزش گزارهٔ $(p \vee q) \wedge \sim p$ با کدام‌یک از گزاره‌های زیر برابر است؟

۱) $\sim (p \Rightarrow q)$ ۲) $\sim (q \Rightarrow p)$ ۳) $\sim (p \Rightarrow \sim q)$ ۴) $\sim (\sim q \Rightarrow p)$

۵- کدام گزارهٔ زیر هم‌ارز منطقی گزارهٔ $(\sim p \vee q) \Leftrightarrow q$ است؟ *(ریاضی ۱۴۰۱)*

۱) p ۲) $p \vee q$ ۳) q ۴) $\sim p \Leftrightarrow q$

جلسهٔ چهارم: سورها

صفحهٔ ۱۱ از ابتدای سورها تا انتهای صفحهٔ ۱۵

گزاره‌نماهای زیر را در نظر بگیرید.

- x عددی اول است. (با دامنهٔ عددهای زوج)
- $x^2 + 1$ بزرگ‌تر از صفر است. (با دامنهٔ عددهای حقیقی)

به نظر شما در گزاره‌نمای اول مجموعه جواب متغیر کدام است؟ به عبارت دیگر به ازای چه مقدار یا مقادیری از x گزاره‌نما تبدیل به گزاره‌ای درست می‌شود؟ بله! فقط به ازای عدد ۲. به همین خاطر می‌توان گفت:

بعضی از عددهای زوج، اول‌اند.

حالا به مجموعه جواب گزاره‌نمای «$x^2 + 1$ بزرگ‌تر از صفر است.» در میان عددهای حقیقی فکر کنید. به نظر شما به ازای چه مقادیری از $x \in \mathbb{R}$ این رابطه برقرار است؟ پاسخ روشن است به ازای همهٔ عددهای حقیقی x، عبارت $x^2 + 1$ بزرگ‌تر از صفر است. بنابراین می‌توان گفت:

به ازای هر عدد حقیقی مثل x، عبارت $x^2 + 1$ بزرگ‌تر از صفر است.

به جملاتی مانند این دو جمله بارها برخورده‌ایم:

۱) همهٔ بازیکن‌های تیم ملی والیبال ایرانی قدی بالای ۱۷۰cm دارند.

۲) بعضی از تهرانی‌ها برای سفرهای دورن شهری از خودروی شخصی‌شان استفاده می‌کنند.

۳) همهٔ مربع‌ها مستطیل‌اند.

۴) بعضی از مضارب ۳ مربع کامل‌اند.

- عبارت‌هایی مانند «هر»، «به ازای هر» و «به ازای بعضی مقادیر» به **سور** معروف‌اند.
- گزاره یا گزاره‌نماهایی که شامل عبارت‌های سوری باشند، به گزاره‌های سوری معروف‌اند.
- در هر گزارهٔ سوری که شامل متغیر باشد، دامنهٔ متغیر باید مشخص باشد.

سور عمومی

به نماد $\forall$ که به معنای «به ازای هر» یا «به ازای همهٔ مقادیر» است و پیش از بعضی گزاره‌نماها قرار می‌گیرد، سور عمومی می‌گویند. ($\forall$ از کلمهٔ All گرفته شده است.)

$\forall x ; P(x)$ همهٔ مقادیر x ویژگی P دارند.

برای مثال گزاره: $\forall x \in \mathbb{R} ; |x| \geq ۰$

خوانده می‌شود: «به ازای همهٔ مقادیر حقیقی x، قدرمطلق x بزرگ‌تر یا مساوی صفر است.» یک سور عمومی با ارزش درست است.

تست **کدام‌یک از گزاره‌های سوری زیر ارزش درست دارد؟ (P مجموعهٔ اعداد اول و E مجموعهٔ اعداد زوج است.)**

۱) $\forall x \in \mathbb{R} ; x^۲ + ۴x + ۳ \geq ۰$

۲) $\forall x \in \mathbb{R} ; \frac{x^۲}{|x|} = |x|$

۳) $\forall x \in \mathbb{N} ; n^۳ + ۱ \notin P$

۴) $\forall x \in \mathbb{N} ; ۳^n + ۴^n + ۵^n \in E$

پاسخ گزینهٔ ۴

$x^۲ + ۴x + ۳ = (x+۱)(x+۳)$

بنابراین به ازای مقادیر بین دو ریشه رابطه نادرست است. برای مثال: $x = -۲ \Rightarrow ۴ - ۸ + ۳ = -۱ < ۰$

پس گزینهٔ (۱) نادرست است.

$x = ۰$ مثال نقض گزینهٔ (۲) است.

به ازای $n = ۱$ عبارت $n^۳ + ۱ = ۲$ می‌شود که عددی اول است پس گزینهٔ (۳) درست نیست.

اما با توجه به این‌که ۳^n همواره فرد، ۴^n همواره زوج و ۵^n نیز همواره فرد است و زوج = فرد + زوج + فرد

بنابراین گزینهٔ (۴) درست است.

سور وجودی

به نماد $\exists$ که به معنای «وجود دارد» یا «به ازای بعضی از مقادیر» است و پیش از بعضی گزاره‌نماها قرار می‌گیرد، سور وجودی می‌گویند. ($\exists$ از کلمهٔ Exist گرفته شده است.)

$\exists x ; P(x)$ به ازای بعضی مقادیر x، x ویژگی P را دارد.

برای مثال گزارهٔ $\exists x \in \mathbb{N} ; ۵n + ۴ \in P$

خوانده می‌شود: «به ازای بعضی از مقادیر n، عبارت $۵n + ۴$ عددی اول است.» یک گزارهٔ سوری درست است. برای مثال اگر $n = ۳$ باشد داریم:

$۵ \times ۳ + ۴ = ۱۹ \in P$

مثال **درستی یا نادرستی هر یک از سورهای زیر را مشخص کنید.**

الف) $\forall x \in \mathbb{R} ; \frac{x^۲ - ۱}{x + ۱} = x - ۱$

ب) $\exists x \in \mathbb{W} ; x^۲ < x$

ج) $\exists x \in E ; x \notin P$

د) $\forall x \in \mathbb{R} ; \sin^۲ x + \cos^۲ x = ۱$

هـ) $\exists x \in \mathbb{Z} ; x^۲ - ۱ < ۰$

حل

الف) هر چند که $x^۲ - ۱ = (x-۱)(x+۱)$ و در نتیجه: $\frac{x^۲ - ۱}{x + ۱} = \frac{(x-۱)(x+۱)}{(x+۱)} = x - ۱$

اما این رابطه به ازای $x = -۱$ برقرار نیست و داشتن حتی یک مثال نقض برای رد یک سور عمومی کافی است، پس این سور درست نیست.

ب) می‌دانیم $\mathbb{W}$ مجموعهٔ اعداد حسابی است یعنی: $\mathbb{W} = \{۰, ۱, ۲, ۳, ۴, \ldots\}$. در همهٔ این عددها مربع عدد بزرگ‌تر یا مساوی خود عدد است و بنابراین این سور نادرست است.

ج) این سور درست است. E مجموعهٔ اعداد زوج است و P مجموعهٔ عددهای اول است. تعبیر فارسی این سور این‌گونه است که آیا عدد زوجی وجود دارد که اول نباشد؟ که پاسخ در واقع همهٔ عددهای طبیعی زوج به‌جز ۲ است.

د) این سور عمومی نیز درست است و رابطهٔ $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ به ازای همهٔ اعداد حقیقی برقرار است.

هـ) اگر $x \in \mathbb{Z}$ باشد، تنها به ازای $x = 0$ عبارت $x^2 - 1$ برابر -1 و عددی کوچک‌تر از صفر خواهد شد. اما چون سور داده‌شده، وجودی است، بنابراین درست خواهد بود.

تست **کدام‌یک از گزاره‌های سوری زیر نادرست است؟**

۱) در فضای نمونه‌ای S، پیشامدی مانند A وجود دارد به طوری که $P(A) = 1$.

۲) هر عدد زوج دورقمی غیراول است.

۳) اگر p عددی اول باشد، به ازای بعضی از مقادیر p عبارت $p^2 + 2$ نیز اول است.

۴) همهٔ عددهایی که بر ۴ و ۶ بخش‌پذیرند بر ۲۴ بخش‌پذیرند.

پاسخ **گزینهٔ ۴** گزینهٔ (۱) درست است: می‌دانیم هر پیشامد زیرمجموعه‌ای از فضای نمونه‌ای است. بنابراین S نیز یک پیشامد است که احتمال رخ‌دادن آن برابر ۱ است.

گزینهٔ (۲) درست است: چون تنها عدد اول زوج عدد ۲ است و مشخص است که عددهای زوج بزرگ‌تر از ۲ نمی‌توانند اول باشند.

گزینهٔ (۳) نیز درست است. خوشبختانه با بررسی چند عدد اول ابتدایی، مقداری از p را پیدا می‌کنیم که به ازای آن $p^2 + 2$ نیز عددی اول خواهد شد.

$p = 3 \rightarrow p^2 + 2 = 9 + 2 = 11$ اول است. $\qquad$ $p = 2 \rightarrow p^2 + 2 = 4 + 2 = 6$ اول نیست.

(اگر بعدها با مبحث نظریهٔ اعداد بیشتر آشنا شوید، متوجه خواهید شد که فقط به ازای همین مقدار $p = 3$ عبارت $p^2 + 2$ عددی اول خواهد شد.)

ولی گزینهٔ (۴) درست نیست؛ بنابراین پاسخ سؤال است. به عنوان مثال عددی مثل ۱۲ هم بر ۴ بخش‌پذیر است و هم بر ۶ ولی بر ۲۴ بخش‌پذیر نیست.

نقیض سورها

۱) برای نقیض‌کردن یک گزارهٔ سور عمومی کافی است $\forall$ را به $\exists$ و $P(x)$ را به $\sim P(x)$ تبدیل کنیم: $\sim (\forall(x) ; P(x)) \equiv \exists x ; \sim P(x)$

برای مثال نقیض گزارهٔ «همهٔ گربه‌ها در شبانه‌روز، بیشتر از ۱۵ ساعت می‌خوابند.»، گزارهٔ «بعضی از گربه‌ها وجود دارند که کم‌تر از ۱۵ ساعت در شبانه‌روز می‌خوابند.» می‌شود. هم‌چنین نقیض گزارهٔ $\forall x \in \mathbb{R} ; x^2 - x + 1 \geq 0$ می‌شود:

$$\sim [\forall x \in \mathbb{R} ; x^2 - x + 1 \geq 0] \equiv \exists x \in \mathbb{R} ; x^2 - x + 1 < 0$$

۲) برای نقیض‌کردن یک گزارهٔ سور وجودی کافی است $\exists$ را به $\forall$ و $P(x)$ را به $\sim P(x)$ تبدیل کنیم: $\sim (\exists(x) ; P(x)) \equiv \forall x ; \sim P(x)$

برای مثال نقیض گزارهٔ «بعضی از مضارب ۳، مربع کامل‌اند.» می‌شود: «همهٔ مضارب ۳، مربع کامل نیستند.»

هم‌چنین نقیض گزارهٔ $\exists x \in \mathbb{R} ; |x + 1| \leq 1 - x^2$ می‌شود: $\sim (\exists x \in \mathbb{R} ; |x + 1| \leq 1 - x^2) \equiv \forall x \in \mathbb{R} ; |x + 1| > 1 - x^2$

تست **نقیض گزارهٔ «همهٔ دانش‌آموزهای کلاس شیمی از رشتهٔ ریاضی‌اند.» کدام است؟**

۱) همهٔ دانش‌آموزهای کلاس شیمی از رشتهٔ ریاضی نیستند.

۲) بعضی از دانش‌آموزهای کلاس شیمی از رشتهٔ ریاضی‌اند.

۳) هیچ دانش‌آموزی از کلاس شیمی از رشتهٔ ریاضی نیست.

۴) بعضی از دانش‌آموزهای کلاس شیمی از رشتهٔ ریاضی نیستند.

پاسخ **گزینهٔ ۴**

اگر A را مجموعهٔ دانش‌آموزهای کلاس شیمی و از رشتهٔ ریاضی بودن دانش‌آموز x را با $p(x)$ نشان دهیم، گزارهٔ «همهٔ دانش‌آموزهای کلاس شیمی از رشتهٔ ریاضی‌اند.»، را به صورت: $\forall x \in A ; p(x)$ می‌توان نوشت.

اما نقیض گزارهٔ $\forall x \in A ; P(x)$ به صورت مقابل است: $\exists x \in A ; \sim P(x)$

در این سؤال اگر بدانیم همهٔ دانش‌آموزان از رشتهٔ ریاضی نیستند، دلیل ندارد همهٔ آن‌ها از رشتهٔ دیگری باشند، بلکه معنای نقیض این گزاره آن است که «این‌طور نیست همهٔ آن‌ها از رشتهٔ ریاضی باشند.» یا به بیان دیگر «دست‌کم بعضی از آن‌ها از رشتهٔ ریاضی نیستند.» بنابراین گزینهٔ (۴) درست است.

مثال نقیض هر یک از گزاره‌های زیر را بنویسید و ارزش آن را مشخص کنید.

الف $\exists x \in \mathbb{R};\ «x^2 < 4 \wedge x > -1»$

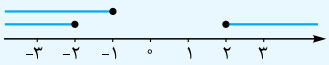
ب $\forall a \in P;\ «a > 2 \Rightarrow a \in O»$

حل **الف** با توجه به آن‌که $\sim(\exists x; P(x)) \equiv \forall x; \sim P(x)$ داریم:

$$\sim(\exists x \in \mathbb{R};\ «x^2 < 4 \wedge x > -1») \equiv \forall x \in \mathbb{R};\ x^2 \geq 4 \vee x \leq -1$$

$x^2 \geq 4 \Rightarrow x \geq 2$ یا $x \leq -2 \bigcup x \leq -1$

با توجه به محور مختصات روبه‌رو:



می‌بینید که همهٔ عددهای حقیقی در این بازه نیستند پس ارزش این سور نیز نادرست است.

ب می‌دانیم $\sim(p \Rightarrow q) \equiv p \wedge \sim q$ بنابراین:

$$\sim(\forall a \in P;\ «a > 2 \Rightarrow a \in O»)$$

$$\equiv \exists a \in P;\ a > 2 \wedge a \notin O$$

یعنی عدد اولی وجود دارد که از ۲ بزرگ‌تر است و فرد نیست که چنین چیزی امکان‌پذیر نیست، در نتیجه ارزش آن نادرست است.

گزاره‌های سوری با دو متغیر

گزاره‌های سوری می‌توانند بیشتر از یک متغیر داشته باشند. برای مثال گزاره‌های سوری با دو متغیر را به حالت‌های زیر می‌توان طبقه‌بندی کرد:

شماره	گزاره‌نمای سوری	معادل فارسی
۱	$\forall x \forall y;\ P(x,y)$	به ازای هر x و به ازای هر y رابطهٔ P برقرار است.
۲	$\forall x \exists y;\ P(x,y)$	به ازای هر x مقادیری از y وجود دارند که رابطهٔ P را برقرار می‌کند.
۳	$\exists x \forall y;\ P(x,y)$	مقادیری از x وجود دارد که به ازای همهٔ مقادیر y رابطهٔ P را برقرار کند.
۴	$\exists x \exists y;\ P(x,y)$	مقادیری از x وجود دارد که به ازای بعضی از مقادیر y رابطهٔ P را برقرار می‌کند.

حواستون باشه برای نقیض‌کردن یک عبارت سوری با چند متغیر هرجا $\forall$ دیدید تبدیل کنید به $\exists$ و هرجا $\exists$ دیدید تبدیل کنید به $\forall$ و $P(x,y)$ را تبدیل کنید به $\sim P(x,y)$.

تست نقیض گزارهٔ $\forall x \exists y;\ x - y \geq 1$ کدام است؟

۱) به ازای همهٔ مقادیر x، مقادیری از y وجود دارد که $x - y < 1$ است.

۲) به ازای همهٔ مقادیر x و همهٔ مقادیر y، $x - y < 1$ است.

۳) مقادیری از x وجود دارد که به ازای همهٔ مقادیر y رابطهٔ $x - y < 1$ برقرار است.

۴) مقادیری از x وجود دارد که دست‌کم به ازای یک مقدار y رابطهٔ $x - y < 1$ برقرار است.

پاسخ گزینهٔ ۳ با توجه به این‌که $\sim(\forall x \exists y;\ P(x,y)) \equiv \exists x \forall y;\ \sim P(x,y)$ پس: $\sim(\forall x \exists y;\ x - y \geq 1) \equiv \exists x \forall y;\ x - y < 1$

بنابراین پاسخ در گزینهٔ (۳) آمده است.

سؤالات امتحان نهایی درس: آمار و احتمال	امتحان تشریحی جلسهٔ ۴	تعداد سؤال:
پایهٔ یازدهم: دورهٔ دوم متوسطه	رشته: ریاضی	مدت امتحان:

درست یا نادرست بودن جمله‌های زیر را مشخص کنید و در صورت نادرست بودن، جمله را طوری تغییر دهید که درست شود. ۰/۵

۱ گزاره‌نمای شامل متغیر x که با سور عمومی همراه می‌شود، وقتی به یک گزارهٔ درست تبدیل می‌شود که هر عضو از دامنهٔ متغیر در گزاره‌نما صدق کند، به عبارت دیگر هیچ مثال نقضی نداشته باشد.

۲ گزاره‌نمای شامل متغیر x که با سور وجودی همراه می‌شود، وقتی درست است که مجموعه جواب آن ناتهی باشد.

جاهای خالی را با کلمات مناسب پر کنید. ۱

۳ برای بیان عبارت‌ها با استفاده از نمادهای ریاضی به جای «به ازای هر» یا «به ازای جمیع مقادیر» از نماد ..... و به جای «وجود دارد» یا «به ازای بعضی مقادیر»، از نماد ..... استفاده می‌کنیم.

۴ نماد ..... سور عمومی و نماد ..... سور وجودی نام دارد.

۵ جدول زیر را کامل کنید. (در این جدول مجموعهٔ اعداد زوج را با E، مجموعهٔ اعداد فرد را با O و مجموعهٔ اعداد اول را با P نمایش داده‌ایم.) ۲

عبارت با زبان طبیعی	عبارت با زبان ریاضی
برای هر عدد حقیقی x داریم: $x^2 \geq 0$	
	$\forall a \in E ; a = 2k \ (k \in \mathbb{Z})$
	$\exists p \in P ; p = 2k \ (k \in \mathbb{Z})$
بعضی از اعداد فرد، عدد اول هستند.	

درستی یا نادرستی گزاره‌های سوری زیر را با ذکر دلیل مشخص کنید. ۳

۶ هر عدد اول فرد است.

۷ $\exists x \in \mathbb{N} ; 2x^2 + 3x + 1 = 0$

۸ $\forall x \in \mathbb{Z} ; \frac{x(x+1)}{2} \in \mathbb{Z}$

۹ $\forall x \in \mathbb{R} ; \tan x \times \cot x = 1$

۱۰ $\exists x \in \mathbb{Z} ; |x| - 1 < 0$

۱۱ $\exists x \in \mathbb{Q}' ; x^2 \in \mathbb{Q}$

هر یک از گزاره‌های زیر را با استفاده از نمادهای ∀ و ∃ بنویسید و ارزش هر یک را مشخص کنید. ۳

۱۲ برای بعضی از مقادیر a در مجموعهٔ اعداد صحیح داریم: $a^2 + a = -1$

۱۳ عدد حقیقی مثبت مانند x وجود دارد به طوری که مکعب آن از خود عدد کوچک‌تر باشد.

۱۴ حاصل جمع هر عدد حقیقی ناصفر با معکوسش همواره بزرگ‌تر یا مساوی ۲ است.

سؤالات امتحان نهایی درس: آمار و احتمال	امتحان تشریحی جلسهٔ ۴	تعداد سؤال:
پایهٔ یازدهم: دورهٔ دوم متوسطه	رشته: ریاضی	مدت امتحان:

	ارزش گزاره‌های سوری زیر را تعیین کنید، سپس نقیض هر یک را بنویسید.	۴
۱۵	$\forall x \in \mathbb{R}\,;\, x^{۲} > ۰$	
۱۶	$\exists y \in \mathbb{R}\,;\, ((y < ۰) \wedge (y^{۲} \leq ۱))$	
۱۷	$\forall x \in \mathbb{R}\,;\, \frac{x^{۲}-۱}{x-۱} = x+۱$	
۱۸	$\forall n \in \mathbb{N}\,;\, (۲^{n}+۱) \in P$	
	نقیض گزاره‌های سوری زیر را بنویسید و سپس ارزش هر یک را مشخص کنید.	۳
۱۹	$\exists x \in (-\infty, ۰)\,;\, x - \frac{۱}{x} > -۲$	
۲۰	$\forall y \in \mathbb{R}\,;\, \frac{y-۳}{۵} \neq ۰$	
۲۱	$\exists x \in (-\infty, ۰)\,;\, \frac{۲\|x\|+۲}{x-۱} \neq -۲$	
	ارزش گزاره‌های سوری زیر را تعیین کنید.	۳
۲۲	$\forall x \in \mathbb{Z}, \exists y \in \mathbb{N}\,;\, x+y \leq ۵$	
۲۳	$\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}\,;\, \frac{x-\sqrt{۲}}{y^{۲}+۱} = ۰$	
	نقیض گزارهٔ زیر را بنویسید.	۰/۵
۲۴	**متوازی‌الاضلاعی وجود دارد که ذوزنقه نیست.**	

آزمونک تستی جلسهٔ ۴

۱- کدام‌یک از سورهای زیر درست است؟

۱) $\exists x \in \mathbb{N}; x^{۲} + x = ۰$ ۲) $\forall x \in \mathbb{Z}; ۲x^{۲} + ۳x + ۱ > ۰$ ۳) $\exists x \in E; x^{۲} - ۱ \in P$ ۴) $\forall x \in P; x^{۲} + ۱ \notin P$

۲- هرگاه $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid -۲ < x < ۳\}$ دامنهٔ متغیر باشد، کدام گزارهٔ سوری نادرست است؟

۱) $\exists x \in A; ۲x + ۱ = -۱$ ۲) $\exists x \in A; x - ۱ \geq ۱$ ۳) $\forall x \in A; ۲x^{۲} + ۳ \geq ۵$ ۴) $\forall x \in A; |x-۱| \leq ۲$

۳- نقیض گزارهٔ $\exists x \in \mathbb{R}; (|x| = -x) \wedge (|x| \leq ۱)$ به کدام صورت است؟

۱) $\forall x \in \mathbb{R}; x > ۰ \wedge |x| > ۱$ ۲) $\forall x \in \mathbb{R}; x > ۰ \vee |x| > ۱$ ۳) $\forall x \in \mathbb{R}; x \geq ۰ \vee |x| \geq ۱$ ۴) $\exists x \in \mathbb{R}; x \geq ۰ \wedge |x| \geq ۱$

۴- نقیض گزارهٔ «بعضی از اعضای کتابخانه اگر کتاب‌های مرجع را امانت گیرند، آن را دیر باز پس می‌آورند.» کدام است؟

۱) همهٔ اعضای کتابخانه که کتاب‌های مرجع را به امانت می‌گیرند و آن را دیر باز پس می‌آورند.

۲) بعضی از اعضای کتابخانه کتاب‌های مرجع را امانت می‌گیرند و آن را دیر باز پس نمی‌آورند.

۳) هر کدام از اعضای کتابخانه کتاب‌های مرجع را امانت می‌گیرند یا آن را دیر باز پس نمی‌آورند.

۴) هر کدام از اعضای کتابخانه که کتاب‌های مرجع را به امانت گیرند و آن را دیر باز پس نمی‌آورند.

۵- گزارهٔ سوری $\forall x \in \mathbb{N}, \exists y \in \mathbb{N}; P(x,y)$ با کدام گزاره‌نمای $P(x,y)$ دارای ارزش درست است؟ *(ریاضی ۹۸)*

۱) $y - x = ۶$ ۲) $x - y = ۶$ ۳) $x + y = ۶$ ۴) $xy = ۶$

جلسهٔ پنجم: مفاهیم مقدماتی مجموعه‌ها/زیرمجموعه‌ها

صفحهٔ ۱۶ و صفحهٔ ۱۷ تا سر تعریف زیرمجموعه به کمک نمادهای ریاضی

در سال‌های نهم و دهم با مجموعه‌ها و مفاهیم اولیهٔ آن آشنا شده‌اید. مفاهیمی مثل اشتراک، اجتماع و تفاضل دو مجموعه، عضوها و زیرمجموعه‌های یک مجموعه، مجموعهٔ مرجع، مجموعه‌های متناهی و نامتناهی و تعداد عضوهای اجتماع دو مجموعه. امسال این مفاهیم را بیشتر باز می‌کنیم و چیزهای بیشتری از مجموعه‌ها می‌آموزیم.

همان‌طور که می‌دانید، نظریهٔ مجموعه‌ها، به معنای امروزی آن را جورج کانتور[1] در سال ۱۸۷۴ پایه‌گذاری کرد. «مجموعه‌ها، یکی از اساسی‌ترین مفاهیم ریاضی است که بسیاری از نظریه‌های دیگر ریاضی بر پایهٔ آن شکل گرفته‌اند.» با این همه، هنوز به تعریف دقیقی از مجموعه دست نیافته‌ایم. به گفتهٔ سیمور لیپشوتز[2]: «در همهٔ شاخه‌های ریاضی مجموعه یک مفهوم بنیادی است.» به بیان دیگر مجموعه جزء نخستین تعریف‌نشده‌هاست، مانند مفاهیمی چون نقطه و خط در هندسه که برای آن‌ها تعریف دقیقی نداریم و آن‌ها را با اثر خود می‌شناسیم. در حقیقت وقتی ما می‌شنویم مجموعه، آن مفهومی که از این کلمه در ذهنمان شکل می‌گیرد، از هر تعریفی گویاتر است.

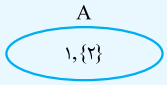
حالا اجازه دهید با طرح و پاسخ‌گویی به چند سؤال مروری بر مفاهیمی که سال‌های گذشته آموخته‌ایم، داشته باشیم:

مثال **فرض کنید $A=\{۱,\{۲\}\}$ باشد، درستی یا نادرستی هر یک از گزینه‌های زیر را مشخص کنید.**

الف) $\{۱\}\in A$ ب) $\{۲\}\in A$ ج) $\{۲\}\subseteq A$ د) $\{۱\}\subseteq A$

هـ) $۲\in A$ و) $\{۱,\{۲\}\}\subseteq A$ ز) $\varnothing\in A$ ح) $\varnothing\subseteq A$

حل خب بد نیست یک مروری روی مفاهیم عضوهای یک مجموعه و زیرمجموعه‌های یک مجموعه داشته باشیم. در این سؤال مجموعهٔ A دارای دو عضو است، یکی از آن‌ها عدد ۱ است و عضو دیگر که به صورت مجموعه است، مجموعه‌ای است که عدد ۲ عضو آن است یعنی $\{۲\}$. در حقیقت مجموعهٔ A را به صورت رو به‌رو نیز می‌توان نشان داد:



حالا یکی‌یکی گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

الف) نادرست است، زیرا عدد ۱ عضو A است و نه $\{۱\}$.

ب) درست است، زیرا $\{۲\}$ عضوی از A است.

ج) نادرست است، مجموعهٔ A یک مجموعهٔ ۲عضوی است که دارای چهار زیرمجموعه است: $\varnothing,\{۱\},\{\{۲\}\},\{۱,\{۲\}\}$

همان‌طور که می‌بینید $\{۲\}$ عضوی از مجموعهٔ A است و نه زیرمجموعهٔ آن.

د) درست است، همان‌طور که دیدید $\{۱\}$ یکی از زیرمجموعه‌های A است.

هـ) نادرست است، A دو عضو دارد: ۱ و $\{۲\}$. عدد ۲ عضو A نیست.

و) هر مجموعه زیرمجموعهٔ خودش است. بنابراین $\{۱,\{۲\}\}\subseteq A$ است و در نتیجه رابطه درست است.

ز) $\varnothing$ عضو A نیست بلکه زیرمجموعهٔ آن است.

ح) درست است، $\varnothing$ زیرمجموعهٔ همهٔ مجموعه‌هاست.

تست **اگر $n\in\mathbb{N}$ و $A_n=\{m\in\mathbb{Z}\,|\,|m|\le n\,,\,۲^m\le ۲n\}$، آن‌گاه مجموعهٔ $(A_۶-A_۴)\cup A_۱$ چند عضو دارد؟** *(سراسری ۹۴)*

۱) ۲ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۷

پاسخ گزینهٔ ۲ خیلی وقت‌ها سؤال‌های کنکور شبیه سؤال‌های کنکور سال‌های قبل است. مثلاً شبیه این سؤال که در کنکور ۹۴ آمده در چند کنکور دیگر از جمله کنکور سال ۹۶ هم آمده است.

حالا بپردازیم به پاسخ سؤال:

$$A_۱=\{m\in\mathbb{Z}\,|\,|m|\le ۱\,,\,۲^m\le ۲\}=\{-۱,۰,۱\}$$

$$A_۴=\{m\in\mathbb{Z}\,|\,|m|\le ۴\,,\,۲^m\le ۸\}=\{-۴,-۳,\dots,۳\}$$

$$A_۶=\{m\in\mathbb{Z}\,|\,|m|\le ۶\,,\,۲^m\le ۱۲\}=\{-۶,-۵,\dots,۳\}$$

$$\Rightarrow A_۶-A_۴=\{-۶,-۵\}\Rightarrow (A_۶-A_۴)\cup A_۱=\{-۶,-۵,-۱,۰,۱\}$$

۱- George Cantor

۲- Seymour Lipschutz

تست کدام‌یک از مجموعه‌های زیر، برابر $\varnothing$ نیست؟

۱) $\{x \in \mathbb{R} \mid x^6 + 64 = 0\}$

۲) $\{x \in \mathbb{Z} \mid |x| \neq |-x|\}$

۳) $\{x \in \mathbb{R} \mid 2 - x^2 > 0 , 3 - x \leq 1\}$

۴) $\{x \in \mathbb{N} \mid \frac{1}{x} + x \leq 2\}$

پاسخ گزینهٔ ۴ در گزینهٔ (۱) می‌دانیم $x^6 \geq 0$ است، پس معادلهٔ $x^6 + 64 = 0$ ریشهٔ حقیقی ندارد.

در گزینهٔ (۲) می‌دانیم به ازای هر عدد صحیح رابطهٔ $|x| = |-x|$ برقرار است.

در گزینهٔ (۳) داریم:

از طرفی:

$$\left.\begin{array}{l} 2 - x^2 > 0 \Rightarrow x^2 < 2 \Rightarrow -\sqrt{2} < x < \sqrt{2} \\ 3 - x \leq 1 \Rightarrow x \geq 2 \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{اشتراک}} \varnothing$$

بنابراین به ازای هیچ مقداری از x رابطه برقرار نیست.

در گزینهٔ (۴) رابطه به ازای $x = 1$ برقرار است. بنابراین مجموعهٔ داده‌شده $\varnothing$ نیست.

مثال اگر:

$A = \{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 \leq 4\}$ $\quad$ $B = \{k \in \mathbb{N} \mid k^3 - 3k^2 + 2k = 0\}$

$C = \{m \in \mathbb{R} \mid m^3 + m = 0\}$ $\quad$ $D = \{a \in A \mid$ A پیشامد رخ دادن عدد کوچک‌تر از ۴ در پرتاب یک تاس است$\}$

باشد، درستی یا نادرستی هر یک از رابطه‌های زیر را بررسی کنید.

الف) $B \subset A$ $\quad$ ب) $C \in A$ $\quad$ ج) $A = B \cup C$

د) $D - B \subset A$ $\quad$ هـ) $C \not\subset B \cap D$ $\quad$ و) $B \cap C = \varnothing$

حل ابتدا مجموعه‌ها را تشکیل داده و عضوهای آن‌ها را مشخص می‌کنیم:

$$A = \{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 \leq 4\} = \{x \in \mathbb{Z} \mid -2 \leq x \leq 2\} = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$$

$$B = \{k \in \mathbb{N} \mid k^3 - 3k^2 + 2k = 0\} = \{k \in \mathbb{N} \mid k(k-1)(k-2) = 0\} = \{1, 2\}$$

توجه صفر عدد طبیعی نیست.

$$C = \{m \in \mathbb{R} \mid m^3 + m = 0\} = \{m \in \mathbb{R} \mid m(m^2 + 1) = 0\} \Rightarrow m = \{0\}$$

$$D = \{1, 2, 3\}$$

اگر تاس کوچک‌تر از ۴ بیاید، یعنی یا ۱ آمده یا ۲ و یا ۳.

حالا رابطه‌های داده‌شده را یکی‌یکی بررسی می‌کنیم:

الف) درست است، زیرا $\{1, 2\} \subset \{-2, -1, 0, 1, 2\}$.

ب) نادرست است، زیرا $0 \in A$ است و نه $\{0\}$.

ج) نادرست ـ اگر $B \cup C$ را تشکیل دهیم، می‌بینیم که برابر A نیست و دو عضو -2 و -1 را ندارد. $B \cup C = \{0, 1, 2\}$

د) نادرست ـ $D - B$ را پیدا می‌کنیم: $D - B = \{1, 2, 3\} - \{1, 2\} = \{3\}$

روشن است که این مجموعه زیرمجموعهٔ $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$ نیست.

هـ) $B \cap D = \{1, 2\} \cap \{1, 2, 3\} = \{1, 2\}$

اما $C \not\subset B \cap D$، درست است زیرا: $\{0\} \not\subset \{1, 2\}$.

و) $B = \{1, 2\} , C = \{0\} \Rightarrow B \cap C = \varnothing$ رابطه درست است.

تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعه

مجموعهٔ $\varnothing$ فقط دارای یک زیرمجموعه است: خودش. هر مجموعهٔ تک‌عضوی مانند $\{1\}$ دو زیرمجموعه دارد: $\varnothing$ و خودش، یعنی: $\{1\}$. مجموعهٔ دوعضوی $\{1, 2\}$ دارای ۴ زیرمجموعهٔ روبه‌رو است: $\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}$

اما در حالت کلی تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعه چندتا است؟ بدیهی است که اگر تعداد عضوهای یک مجموعه زیاد باشد نمی‌شود همهٔ زیرمجموعه‌ها را نوشت و تعداد آن‌ها را شمرد. فرض کنید $A = \{1, 2, 3\}$ باشد. از دو راه تعداد زیرمجموعه‌های آن را به دست می‌آوریم:

روش اول هر کدام از زیرمجموعه‌ها ممکن است شامل عددهای ۱، ۲ و ۳ باشند یا نباشند. به عنوان مثال $\{2\}$ یکی از زیرمجموعه‌های $A = \{1, 2, 3\}$ است که ۱ را ندارد، ۲ را دارد و ۳ را ندارد. یا $\{2, 3\}$ زیرمجموعهٔ دیگری از این مجموعه است که ۱ را ندارد، ۲ را دارد و ۳ را نیز دارد. یا $\varnothing$ زیرمجموعهٔ دیگری از این مجموعه است که نه ۱ را دارد، نه ۲ را و نه ۳ را. بنابراین در هر کدام از زیرمجموعه‌ها هر کدام از عضوهای A می‌توانند عضو زیرمجموعه باشند یا نباشند. به بیان دیگر برای ۱، ۲ و ۳ یعنی اعضای A دو انتخاب وجود دارد. زیرمجموعه شامل آن‌ها باشد یا نباشد.

بنا بر اصل ضرب داریم:

	۳		۲		۱
۸ حالت =	۲ حالت	×	۲ حالت	×	۲ حالت
	۳ را داشته باشد.		۲ را داشته باشد.		۱ را داشته باشد.
	۳ را نداشته باشد.		۲ را نداشته باشد.		۱ را نداشته باشد.

مثلاً حالت اول یا (ددد) نشان‌دهندهٔ زیرمجموعهٔ $\{۱,۲,۳\}$ از این مجموعه است یا حالت (نندد) نشان‌دهندهٔ زیرمجموعهٔ $\{۱\}$ از این مجموعه است.

بنابراین با توجه به اصل ضرب و دانستن این‌که برای داشتن یک زیرمجموعهٔ مجموعهٔ nعضوی A ، هر یک از عضوهای A را می‌توانیم داشته باشیم یا نداشته باشیم. به بیان دیگر: هر کدام از عضوها می‌توانند عضو زیرمجموعه باشند یا نباشند.

تعداد زیرمجموعه‌های مجموعهٔ nعضوی A برابر است با ۲^n.

روش دوم در روش دوم پیداکردن زیرمجموعه‌های مجموعهٔ $A=\{۱,۲,۳\}$، تعداد زیرمجموعه‌ها را برحسب تعداد عضوهای آن بررسی می‌کنیم:

زیرمجموعه‌های صفرعضوی: فقط $\varnothing$، یعنی فقط یک زیرمجموعه.

زیرمجموعه‌های یک‌عضوی: $\binom{۳}{۱}=۳$، شامل سه زیرمجموعهٔ روبه‌رو است: $\{۱\},\{۲\},\{۳\}$

زیرمجموعه‌های دوعضوی: $\binom{۳}{۲}=۳$، شامل سه زیرمجموعهٔ روبه‌رو است: $\{۱,۲\},\{۱,۳\},\{۲,۳\}$

و بالاخره این مجموعه یک زیرمجموعهٔ سه‌عضوی نیز دارد: $\binom{۳}{۳}=۱$ که همان A است یعنی: $\{۱,۲,۳\}$، بنابراین تعداد زیرمجموعه‌های مجموعهٔ $A=\{۱,۲,۳\}$ از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$\binom{۳}{۰}+\binom{۳}{۱}+\binom{۳}{۲}+\binom{۳}{۳}=۱+۳+۳+۱=۸$$

همین شیوهٔ استدلال را برای پیداکردن تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعهٔ nعضوی نیز به کار می‌بریم. یعنی زیرمجموعه‌های یک مجموعهٔ nعضوی یا صفرعضوی‌اند، یا یک‌عضوی‌اند، یا دوعضوی‌اند. به همین ترتیب یا nعضوی‌اند که تعداد آن از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$\underbrace{\binom{n}{۰}}_{\text{تعداد زیرمجموعه‌های صفرعضوی}}+\underbrace{\binom{n}{۱}}_{\text{تعداد زیرمجموعه‌های یک‌عضوی}}+\underbrace{\binom{n}{۲}}_{\text{تعداد زیرمجموعه‌های دوعضوی}}+\cdots+\underbrace{\binom{n}{n}}_{\text{تعداد زیرمجموعه‌های nعضوی}}=۲^n$$

تست اگر S فضای نمونه‌ای پرتاب یک تاس است. $A=\{x\in S:$ و $B=\{x\in\mathbb{Z}\mid |x|<۳\}$ باشد، $A-B$ چند زیرمجموعه بیشتر از $B-A$ دارد؟

۱) صفر ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) ۸

پاسخ گزینهٔ ۴ مجموعه‌های A و B را تشکیل داده، $A-B$ و $B-A$ را پیدا می‌کنیم:

$A=\{۱,۲,۳,۴,۵,۶\}$

$B=\{x\in\mathbb{Z}:-۳<x<۳\}=\{-۲,-۱,۰,۱,۲\}$

$\Rightarrow A-B=\{۳,۴,۵,۶\} \Rightarrow$ تعداد مجموعه‌های $A-B$ برابر $۲^۴$ یا ۱۶تا است.

$B-A=\{-۲,-۱,۰\} \Rightarrow$ تعداد زیرمجموعه‌های $B-A$ برابر $۲^۳$ یا ۸تا است.

پس $A-B$ هشت زیرمجموعه بیشتر از $B-A$ دارد.

مثال مجموعهٔ $A=\{۱,۲,۳,۴,۵\}$ را در نظر بگیرید.

الف) تعداد زیرمجموعه‌های A چندتا است؟

ب) چندتا از زیرمجموعه‌های A شامل عدد ۱ است؟

ج) چندتا از زیرمجموعه‌های A شامل عدد ۱ و فاقد عدد ۲ است؟

د) چندتا از زیرمجموعه‌های A سه‌عضوی است؟

هـ) چندتا از زیرمجموعه‌های سه‌عضوی A شامل عدد ۱ و فاقد عدد ۲ است؟

حل الف) بنا بر آن‌چه گفتیم تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعهٔ nعضوی برابر است با ۲^n. در این‌جا چون A دارای ۵ عضو است، پس $۲^۵$ یا ۳۲ زیرمجموعه دارد.

ب اگر بخواهیم زیرمجموعهٔ موردنظر، عدد ۱ را داشته باشد به این مفهوم است که عدد ۱ حتماً باید در مجموعه باشد اما هر یک از عضوهای دیگر را می‌توانیم در زیرمجموعهٔ موردنظرمان **داشته باشیم یا نداشته باشیم**. بنا به اصل ضرب داریم:

۱		۲		۳		۴		۵	
$\boxed{۱}$	×	$\boxed{۲}$	×	$\boxed{۲}$	×	$\boxed{۲}$	×	$\boxed{۲}$	$=۲^۴=۱۶$
یک حالت زیرمجموعه حتماً باید ۱ را داشته باشد.		دو حالت زیرمجموعه می‌تواند ۲ را داشته یا نداشته باشد.		دو حالت زیرمجموعه می‌تواند ۳ را داشته یا نداشته باشد.		دو حالت زیرمجموعه می‌تواند ۴ را داشته یا نداشته باشد.		دو حالت زیرمجموعه می‌تواند ۵ را داشته یا نداشته باشد.	

ج با استدلال مشابه در این‌جا زیرمجموعهٔ موردنظر باید حتماً عدد ۱ را داشته باشد و عدد ۲ را نداشته باشد.

۱		۲		۳		۴		۵	
$\boxed{۱}$	×	$\boxed{۱}$	×	$\boxed{۲}$	×	$\boxed{۲}$		$\boxed{۲}$	$=۲^۳=۸$
یک حالت زیرمجموعه حتماً باید عدد ۱ را داشته باشد.		یک حالت زیرمجموعه نباید عدد ۲ را داشته باشد.		دو حالت زیرمجموعه می‌تواند ۳ را داشته باشد یا نداشته باشد.		دو حالت زیرمجموعه می‌تواند ۴ را داشته باشد یا نداشته باشد.		دو حالت زیرمجموعه می‌تواند ۵ را داشته باشد یا نداشته باشد.	

د یک زیرمجموعهٔ ۳عضوی از تعریفش مشخص است که باید سه عضو داشته باشد. یعنی در واقع باید از مجموعهٔ $\{۱,۲,۳,۴,۵\}$ سه عضو انتخاب کنیم:

$$\binom{۵}{۳}=۱۰$$

تعداد زیرمجموعه‌های kعضوی یک مجموعهٔ nعضوی برابر است با: $\binom{n}{k}$

هـ در این قسمت می‌خواهیم زیرمجموعهٔ موردنظر ما سه‌عضوی باشد اما شامل عضو ۱ و فاقد عضو ۲. بنابراین از سه عضوی که باید انتخاب کنیم یکی به اجبار عدد ۱ است $\{۱,.....,.....\}$ یعنی در حقیقت باید دو عضو انتخاب کنیم. اما دو عضوی که انتخاب می‌کنیم هیچ‌کدام نباید عدد ۲ باشند. به بیان دیگر ۲ عضو را باید از میان عددهای ۳، ۴ و ۵ انتخاب کنیم:

$$\binom{۳}{۲}=۳$$

مجموعهٔ $A=\{۱,۲\}$ را در نظر بگیرید. اگر همهٔ زیرمجموعه‌های آن را بنویسیم و داخل یک مجموعه قرار دهیم، به چنین مجموعه‌ای می‌رسیم:

$$\{\varnothing,\{۱\},\{۲\},\{۱,۲\}\}$$

به این مجموعه، مجموعهٔ توانی مجموعهٔ A می‌گویند و آن را با $P(A)$ نشان می‌دهند.

مجموعهٔ همهٔ زیرمجموعه‌های A ، مجموعهٔ توانی A نامیده می‌شود و آن را با $P(A)$ نمایش می‌دهیم.
چنان‌چه A دارای n عضو باشد، در این صورت $P(A)$ دارای ۲^n عضو و $۲^{۲^n}$ زیرمجموعه است.

مثال **اگر $A=\{۱,\{۱\},\varnothing\}$ باشد، درستی یا نادرستی هر یک از گزاره‌های زیر را مشخص کنید.**

الف $۱\in P(A)$ **ب** $\{۱\}\in P(A)$ **ج** $\{۱\}\subset P(A)$ **د** $\{\{۱\}\}\in P(A)$

هـ $\{\{۱\}\}\subset P(A)$ **و** $A\cap P(A)=\{۱\}$ **ز** $A-P(A)=\{۱\}$ **ح** $\{\{۱\}\}\in (P(A)-A)$

حل اجازه دهید پیش از هر کار $P(A)$ یا مجموعهٔ همهٔ زیرمجموعه‌های A را تشکیل دهیم:

$$P(A)=\{\varnothing,\{\varnothing\},\{۱\},\{\{۱\}\},\{\varnothing,۱\},\{\varnothing,\{۱\}\},\{۱,\{۱\}\},\{\varnothing,۱,\{۱\}\}\}$$

حالا گزاره‌ها را یکی‌یکی بررسی می‌کنیم:

الف همان‌طور که می‌بینید $۱\notin P(A)$.

ب درست است، زیرا $\{۱\}\in P(A)$.

ج نادرست است، زیرا $۱\in P(A)$ نیست که $\{۱\}$ زیرمجموعهٔ A باشد.

د درست است، $\{\{۱\}\}\in P(A)$.

هـ این هم درست است، چون $\{۱\}\in P(A)$ است، پس $\{\{۱\}\}\subset P(A)$ است.

و با توجه به این‌که $A=\{۱,\{۱\},\varnothing\}$ ، اشتراک دو مجموعهٔ A و $P(A)$ شامل دو عضو $\{۱\}$ و $\varnothing$ خواهد بود، پس گزاره نادرست است.

$$A\cap P(A)=\{\{۱\},\varnothing\}$$

ز فقط عدد ۱ است که عضوی از A است اما عضو $P(A)$ نیست. پس رابطه درست است.

$$A-P(A)=\{۱\}$$

ح درست است، $\{\{۱\}\}$ عضو $P(A)$ است ولی عضو A نیست.

تست **تعداد اعضای A را دو برابر کردیم، تعداد عضوهای P(A) هشت برابر شده است. A در ابتدا چندعضوی بوده است؟**

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۸

پاسخ **گزینهٔ ۲** فرض کنید A دارای n عضو است، در این صورت P(A) دارای ۲^n عضو خواهد بود.

اگر تعداد اعضای A دو برابر شود، یعنی A دارای ۲n عضو و P(A) دارای $۲^{۲n}$ عضو خواهد بود، یعنی:

$$\frac{۲^{۲n}}{۲^n} = ۸ \Rightarrow ۲^n = ۲^۳ \Rightarrow n = ۳$$

اگر $A \subseteq B$، به طوری که $A \neq B$، آن‌گاه A زیرمجموعهٔ محض یا سرهٔ B نامیده می‌شود.

تست **اگر سه عضو جدید به مجموعهٔ A اضافه کنیم، تعداد عضوهای P(A)، ۱۱۲تا افزایش پیدا می‌کند. مجموعهٔ A دارای چند زیرمجموعهٔ سرهٔ غیرتهی است؟**

۱) ۶ ۲) ۷ ۳) ۱۴ ۴) ۱۵

پاسخ **گزینهٔ ۳** فرض می‌کنیم A دارای n عضو است. در این صورت P(A) دارای ۲^n عضو است. اگر ۳ عضو جدید به A اضافه کنیم، P(A) دارای $۲^{n+۳}$ عضو خواهد شد، داریم:

$$۲^{n+۳} - ۲^n = ۱۱۲ \Rightarrow ۲^n(۲^۳ - ۱) = ۱۱۲ \Rightarrow ۲^n \times ۷ = ۱۱۲ \Rightarrow ۲^n = ۱۶ \Rightarrow n = ۴$$

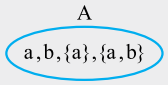
می‌دانیم یک مجموعهٔ ۴عضوی دارای $۲^۴$ یا ۱۶ زیرمجموعه است اما چون زیرمجموعه‌های سره و غیرتهی این مجموعه خواسته شده پس باید $\varnothing$ و خود مجموعه را حذف کنیم:

$$۱۶ - ۲ = ۱۴$$

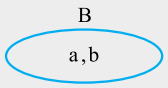
تست **اگر $A = \{a,b,\{a\},\{a,b\}\}$ و $B = \{a,b\}$، مجموعهٔ $A - \{B\}$ چند زیرمجموعهٔ سرهٔ غیرتهی دارد؟**

۱) ۲ ۲) ۷ ۳) ۶ ۴) ۱

پاسخ **گزینهٔ ۳** مجموعهٔ A دارای ۴ عضو است:



مجموعهٔ B فقط دو عضو a و b را دارد:



همان‌طور که می‌بینیم $A - B$ دارای دو عضو خواهد بود. اما در سؤال $A - \{B\}$ خواسته شده است. $\{B\}$ به صورت زیر است:

$$\{B\} = \{\{a,b\}\}$$

پس A و $\{B\}$ فقط در یک عضو که $\{a,b\}$ باشد، مشترک‌اند، بنابراین $A - \{B\}$ دارای سه عضو است. می‌دانیم تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعهٔ nعضوی ۲^n است پس $A - \{B\}$ دارای $۲^۳ = ۸$ زیرمجموعه است ولی چون زیرمجموعه‌های غیرتهی و سرهٔ این مجموعه خواسته شده دوتا از زیرمجموعه‌ها یعنی $\varnothing$ و خود مجموعه را حذف می‌کنیم و می‌شود ۶تا.

سؤالات امتحان نهایی درس: آمار و احتمال	امتحان تشریحی جلسهٔ ۵	تعداد سؤال:
پایهٔ یازدهم: دورهٔ دوم متوسطه	رشته: ریاضی	مدت امتحان:

درست یا نادرست بودن جمله‌های زیر را مشخص کنید و در صورت نادرست بودن، جمله را طوری تغییر دهید که درست شود. ۲

۱ تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعهٔ ۷ عضوی ۴۹تا است.

۲ تعداد زیرمجموعه‌های ۳عضوی یک مجموعهٔ ۶عضوی ۲۰تا است.

۳ اگر دو عضو به تعداد اعضای مجموعهٔ متناهی A اضافه کنیم، تعداد زیرمجموعه‌های آن ۴ واحد بیشتر می‌شود.

۴ مجموعهٔ $A=\{\{\},\varnothing,\{a,b\},\{b,a\}\}$، ۱۵ زیرمجموعهٔ ناتهی دارد.

۵ اگر $A_n=\{m\in\mathbb{Z}\,|\,|m|\le n\,,\,2^m\le 2n\}$ باشد، $-6\in A_6$ است.

جاهای خالی را با کلمات مناسب پر کنید. ۱/۵

۶ ..... زیرمجموعهٔ هر مجموعه‌ای است و هر مجموعه، زیرمجموعهٔ ..... است.

۷ مجموعهٔ همهٔ زیرمجموعه‌های A، مجموعهٔ ..... A نامیده می‌شود و آن را با نماد ..... نمایش می‌دهیم.

۸ اگر $A\subseteq B$ به طوری که .....، آن‌گاه A زیرمجموعهٔ ..... یا سرهٔ B نامیده می‌شود.

۹ اعضای مجموعهٔ $A=\{7n-3\,|\,n\in\mathbb{W}\,,\,n\le 5\}$ را بنویسید. ۱

اگر $A=\{1\}$، $B=\{\{1\},2\}$ و $C=\{1,\{1\},\{\{1\},2\},2\}$ باشد، در هر مورد به جای $\square$ چه تعداد از نمادهای $\in$، $\notin$، $\subseteq$ یا $\not\subseteq$ را می‌توان قرار داد تا گزاره درست شود؟ ۱/۵

۱۰ $A\ \square\ B$

۱۱ $A\ \square\ C$

۱۲ $B\ \square\ C$

۱۳ اگر $A=[-i,2-i]$ و $i\in\mathbb{N}$ باشد، مطلوب است $\bigcup_{i=1}^{4}A_i$ و $\bigcap_{i=1}^{4}A_i$. *(نهایی ۹۲)* ۱/۵

۱۴ مجموعه‌های $A=\{\varnothing,2\}$ و $B=\{\varnothing,\{2\}\}$ مفروض‌اند: *(نهایی ۹۴)* ۱

الف) $A-B$ را با نوشتن عضوها مشخص کنید. ب) مجموعهٔ توانی A را با نوشتن عضوها مشخص کنید.

۱۵ اگر $n\in\mathbb{N}$ و $A_n=\{m\in\mathbb{Z}\,|\,|m|\le n\,,\,2^m\le 4n\}$، آن‌گاه مجموعهٔ $(A_5-A_1)\cup A_3$ چند عضو دارد؟ ۲

اگر A مجموعهٔ اعداد طبیعی یک‌رقمی باشد، به سوالات زیر پاسخ دهید. ۱/۵

۱۶ A چند زیرمجموعه شامل عضو ۱ و فاقد دو عضو ۲ و ۳ دارد؟

۱۷ A چند زیرمجموعهٔ سه‌عضوی شامل دو عضو ۲ و ۷ دارد؟

۱۸ A چند زیرمجموعهٔ سه‌عضوی شامل عضو ۳ و فاقد دو عضو ۴ و ۸ دارد؟

۱۹ اگر دو عضو از مجموعهٔ A حذف کنیم، تعداد زیرمجموعه‌های آن ۳۸۴ واحد کم می‌شود. مجموعهٔ A چند زیرمجموعهٔ ناتهی دارد؟ ۱/۵

۲۰ اگر تعداد اعضای مجموعهٔ A را دو برابر کنیم، تعداد زیرمجموعه‌های آن ۹۹۲تا بیشتر می‌شود. A در ابتدا چندعضوی بوده است؟ ۱/۵

۲۱ اگر $A=\{1,2,3,4,5,6\}$ و $B=\{5,6,7,8,9\}$ باشد، چند مجموعه مانند X وجود دارد به طوری که $X\subset A$ ولی $X\not\subset B$؟ ۲

۲۲ مجموعهٔ اعداد طبیعی یک‌رقمی، چند زیرمجموعهٔ سه‌عضوی دارد به طوری که جمع اعضای آن فرد باشند؟ ۱

۲۳ مجموعهٔ $A=\{1,2,3,\ldots,30\}$، چند زیرمجموعهٔ ۴عضوی دارد که اعضای آن تشکیل دنباله‌ای هندسی دهند؟ ۲

آزمونک تستی جلسهٔ ۵

اگر مجموعه‌های A، B، C و D به صورت زیر تعریف شوند:

$A = \{x \mid$ x یک متوازی‌الاضلاع است.$\}$ $\qquad$ $B = \{x \mid$ x یک مستطیل است.$\}$

$C = \{x \mid$ x یک لوزی است.$\}$ $\qquad$ $D = \{x \mid$ x یک مربع است.$\}$

۱- کدام گزینه نادرست است؟

۱) $D \subset C$ $\qquad$ ۲) $B \cap C = D$ $\qquad$ ۳) $(B \cup C) \subset A$ $\qquad$ ۴) $A - D = B$

۲- مجموعه‌های $A = \{2\}$، $B = \{3,5,\{2\}\}$ و $C = \{\{\{2\},3,5\},2\}$ مفروض‌اند، کدام بیان در مورد آن‌ها نادرست است؟ *(سراسری ۹۵)*

۱) $A \in B$ $\qquad$ ۲) $A \in C$ $\qquad$ ۳) $B \in C$ $\qquad$ ۴) $A \subset C$

۳- اگر $n \in \mathbb{N}$ و $A_n = \{m \in \mathbb{Z} \mid m \geq -n , 2^m \leq n\}$، آن‌گاه مجموعهٔ $A_3 \cap A_4$ چند زیرمجموعه دارد؟

۱) ۸ $\qquad$ ۲) ۱۶ $\qquad$ ۳) ۳۲ $\qquad$ ۴) ۳۶

۴- تعداد زیرمجموعه‌های ۴عضوی و kعضوی از مجموعهٔ A برابرند $(k \neq 4)$. اگر k عضو به A اضافه کنیم، تعداد زیرمجموعه‌های آن ۸۹۶ واحد افزایش می‌یابد. تعداد زیرمجموعه‌های $k-2$ عضوی از مجموعهٔ اولیهٔ A کدام است؟

۱) ۱ $\qquad$ ۲) ۱۵ $\qquad$ ۳) ۷ $\qquad$ ۴) ۲۸

۵- مجموعهٔ $A = \{1,2,3,\ldots,9\}$ را در نظر بگیرید. این مجموعه دارای چند زیرمجموعه است به طوری که بزرگ‌ترین عضو آن، ۳ برابر کوچک‌ترین عضو آن باشد؟

۱) ۴۲ $\qquad$ ۲) ۶۴ $\qquad$ ۳) ۸۴ $\qquad$ ۴) ۱۶۸

جلسهٔ ششم: تعریف زیرمجموعه به کمک نمادهای ریاضی/ روش عضوگیری دلخواه/ تساوی دو مجموعه

صفحهٔ ۱۷ تا انتهای صفحهٔ ۲۰

در کتاب درسی سال نهم در تعریف زیرمجموعه خواندیم که اگر هر عضو مجموعهٔ A، عضوی از مجموعهٔ B باشد، می‌توانیم بگوییم $A \subseteq B$، هم‌چنین اگر عضوی از A باشد که در B نباشد در این صورت A زیرمجموعهٔ B نیست، یعنی $A \not\subseteq B$. حالا با نمادهای ریاضی می‌توان تعریف‌های $A \subseteq B$ و $A \not\subseteq B$ را به صورت‌های زیر نوشت:

$$A \subseteq B \Leftrightarrow \forall x;(x \in A \Rightarrow x \in B) \qquad A \not\subset B \Leftrightarrow \exists x;(x \in A \wedge x \notin B)$$

با استفاده از این نمادهای ریاضی می‌توانیم ویژگی‌های مجموعه‌ها را ثابت کنیم.

چند اثبات مهم

دقت کنید هر یک از اثبات‌های زیر را باید به خوبی بلد باشید چون از هر کدام آن‌ها ممکن است در امتحان نهایی سؤال بیاید.

	قضیه	اثبات
۱	برای هر مجموعهٔ دلخواه مانند A با مجموعهٔ مرجع U ثابت کنید $\varnothing \subseteq A$.	می‌دانیم اگر $A \subseteq B$ یعنی $\forall x;(x \in A \Rightarrow x \in B)$ حالا برای این‌که نشان دهیم $\varnothing \subseteq A$ باید نشان دهیم: $\forall x;(x \in \varnothing \Rightarrow x \in A)$ و چون تهی عضوی ندارد پس $x \in \varnothing$ نادرست است و چون می‌دانیم در یک گزارهٔ شرطی اگر فرض یا مقدم نادرست باشد، کل گزاره درست است پس کل این گزارهٔ شرطی نیز درست است یعنی: $\varnothing \subseteq A$

پاسخ امتحان تشریحی جلسهٔ ۴

۱- درست

۲- درست

۳- $\exists$ ـ $\forall$

۴- $\exists$ ـ $\forall$

۵-

عبارت با زبان فارسی	عبارت با زبان ریاضی
برای هر عدد حقیقی x داریم: $x^2 \geq 0$	$\forall x \in \mathbb{R} ; x^2 \geq 0$
هر عدد زوج مانند a، به صورت $a = 2k$ نوشته می‌شود که k عددی صحیح است.	$\forall a \in E ; a = 2k \ (k \in \mathbb{Z})$
وجود دارد عدد اولی مانند p به طوری که p زوج باشد.	$\exists p \in P ; p = 2k \ (k \in \mathbb{Z})$
بعضی از اعداد فرد، عدد اول هستند.	$\exists x \in O ; x \in P$

۶- نادرست. ۲ عدد اول و زوج است.

۷- اول ریشه‌های معادله را پیدا می‌کنیم:

$$2x^2 + 3x + 1 = 0 \xrightarrow{\Delta=1} \begin{cases} x = \frac{-3+1}{4} = -\frac{1}{2} \\ x = \frac{-3-1}{4} = -1 \end{cases}$$

هیچ‌کدام از ریشه‌های معادله طبیعی نیستند، پس این گزاره نادرست است.

۸- **نکته** حاصل‌ضرب هر دو عدد صحیح متوالی زوج است.

با توجه به نکتهٔ بالا، $x(x+1)$ همواره زوج است، پس $\frac{x(x+1)}{2}$ همواره عددی صحیح شده و ارزش گزاره درست است.

۹- نادرست. به ازای $x = \frac{\pi}{2}$، $\tan x$ تعریف‌نشده می‌شود.

۱۰- اول نامعادله را حل می‌کنیم:

$$|x| - 1 < 0 \Rightarrow |x| < 1 \Rightarrow -1 < x < 1$$

$x = 0$ در نامعادله صدق می‌کند، پس این گزاره درست است.

۱۱- درست. برای مثال به ازای $x = \sqrt{2}$، x گنگ است $(x \in \mathbb{Q}')$ ولی $x^2 = 2$ گویا است $(x^2 \in \mathbb{Q})$.

۱۲- $\exists a \in \mathbb{Z} ; a^2 + a = -1$

ارزش گزاره نادرست است، چون معادلهٔ $a^2 + a = -1$ یا همان $a^2 + a + 1 = 0$، ریشه ندارد. (دلتا منفی است.)

۱۳- $\exists x \in (0, +\infty) \ ; \ x^3 < x$

نامعادله را حل می‌کنیم: $x^3 < x \Rightarrow x^3 - x < 0 \Rightarrow x(x^2 - 1) < 0$

$$\xrightarrow{\text{جدول تعیین علامت}} \begin{array}{ccccccc} & -1 & & 0 & & 1 & \\ - & | & + & | & - & | & + \end{array}$$

$$\xrightarrow{\text{مقادیر منفی را می‌خواهیم}} (-\infty, -1) \cup (0, 1)$$

با توجه به مجموعه جواب نامعادله، x می‌تواند برابر مقادیر مثبتی مانند $\frac{1}{2}$، $\frac{1}{3}$، $\frac{5}{7}$ و ... باشد، پس ارزش گزاره درست است. (البته بدون رسم جدول تعیین علامت هم می‌توانستیم بگوییم که ارزش گزاره درست است، چون برای مثال $x = \frac{1}{2}$ در آن صدق می‌کند.)

۱۴- $\forall x \in \mathbb{R} - \{0\} ; x + \frac{1}{x} \geq 2$

ارزش گزاره نادرست است، چون مقادیر منفی x (مثلاً $x = -1$) در نامعادله صدق نمی‌کنند.

۱۵- نادرست است، چون $x = 0$ در نامعادله صدق نمی‌کند، نقیض این گزاره به این صورت است: $\exists x \in \mathbb{R} ; x^2 \leq 0$

۱۶- این گزاره می‌گوید عددی حقیقی مثل y داریم که $y < 0$ و $y^2 \leq 1$ باشد. ارزش گزاره درست است، چون برای مثال y می‌تواند برابر $-\frac{1}{2}$، -1 و ... باشد. نقیض این گزاره به شکل زیر است:

$$\forall y \in \mathbb{R} ; \underbrace{\sim(\overbrace{(y<0)}^{p} \wedge \overbrace{(y^2 \leq 1)}^{q})}_{\text{دمورگان}} \equiv \forall y \in \mathbb{R} ; (\underbrace{(y \geq 0)}_{\sim p} \vee \underbrace{(y^2 > 1)}_{\sim q})$$

۱۷- نادرست است، چون به ازای $x = 1$، کسر سمت چپ تعریف‌نشده می‌شود. نقیض این گزاره به شکل زیر است:

$$\exists x \in \mathbb{R} ; \frac{x^2 - 1}{x - 1} \neq x + 1$$

۱۸- ارزش این گزاره هم نادرست است، چون به ازای $n = 3$، $2^3 + 1 = 9$ می‌شود که عدد اول نیست. نقیض این گزاره به شکل زیر است:

$$\exists n \in \mathbb{N} ; (2^n + 1) \notin P$$

۱۹- $\forall x \in (-\infty, 0) ; x - \frac{1}{x} \leq -2$

ارزش گزاره نادرست است، چون $x = -2$ در نامعادله صدق نمی‌کند. (به ازای $x = -2$، نامعادله به شکل $-\frac{3}{2} \leq -2$ می‌شود.)

۲۰- $\exists y \in \mathbb{R} ; \frac{y - 3}{5} = 0$

ارزش گزاره درست است، چون به ازای $y = 3$ تساوی برقرار می‌شود.

۲۱- $\forall x \in (-\infty, 0) ; \frac{2|x| + 2}{x - 1} = -2$

ارزش گزاره درست است، چون: $x < 0 \Rightarrow |x| = -x$

$$\Rightarrow \frac{2|x| + 2}{x - 1} = \frac{-2x + 2}{x - 1} = \frac{-2(x - 1)}{x - 1} = -2$$

حواستون باشه یهو نگین ارزش گزاره غلطه چون به ازای $x = 1$ مخرج کسر صفر میشه! سؤال گفته $x \in (-\infty, 0)$ که اصلاً $x = 1$ تو این بازه نیست!

۲۲- ارزش گزاره نادرست است. برای مثال به ازای $x=6$، هیچ عدد طبیعی مثل y نداریم که $6+y\le 5$ یا به عبارت دیگر $y\le -1$ شود.

۲۳- ارزش گزاره درست است. اگر به جای x قرار دهیم $\sqrt{2}$، تساوی به ازای همهٔ مقادیر حقیقی y برقرار می‌شود.

۲۴- هر متوازی‌الاضلاع ذوزنقه است.

پاسخ آزمونک تستی جلسهٔ ۴

۱- گزینهٔ ۳ گزینهٔ (۱) نادرست است،

زیرا $x^2+x=0 \Rightarrow x(x+1)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=-1 \end{cases}$ که هیچ‌کدام عضوی از $\mathbb{N}$ نیستند.

گزینهٔ (۲) نادرست است، زیرا به ازای $x=-1$ عبارت برابر صفر می‌شود.

گزینهٔ (۳) درست است، زیرا اگر به جای x عدد ۲ را قرار دهیم، x^2-1 برابر ۳ می‌شود که عددی اول است.

گزینهٔ (۴) نادرست است، زیرا به ازای $x=2$ عبارت x^2+1 نیز برابر با عددی اول می‌شود.

۲- گزینهٔ ۳ $A=\{x\in\mathbb{Z}\,|\,-2<x<3\} \Rightarrow A=\{-1,0,1,2\}$

گزینهٔ (۱): به ازای $x=-1$ برقرار است، پس سور درست است.

گزینهٔ (۲): به ازای $x=2$ درست است، پس سور درست است.

در گزینهٔ (۳): اگر به جای x عدد صفر قرار دهیم، رابطه نادرست می‌شود، پس سور درست نیست.

در گزینهٔ (۴): $|x-1|\le 2 \Rightarrow -2\le x-1\le 2 \Rightarrow -1\le x\le 3$

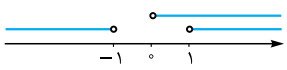
که همهٔ عددهای مجموعهٔ A دارای این ویژگی می‌باشند.

۳- گزینهٔ ۲ نکته اگر $|x|=-x$ باشد، یعنی $x\le 0$.

بنابراین $\sim(\exists x;P(x))\equiv\forall x;\sim P(x)$

$\sim(\exists x\in\mathbb{R};(x\le 0)\wedge(|x|\le 1))$

$\equiv\forall x\in\mathbb{R};(x>0)\vee(|x|>1)$



۴- گزینهٔ ۴ مجموعهٔ اعضای کتابخانه را با A، p را امانت‌گرفتن کتاب مرجع و q را دیر پس آوردن آن فرض می‌کنیم. در این صورت گزارهٔ سوری صورت سؤال به صورت روبه‌رو است: $\exists x\in A;p\Rightarrow q$

می‌دانیم $\sim(\exists x\in A;P(x))\equiv\forall x\in A;\sim P(x)$ است، بنابراین:

$\sim(\exists x\in A;p\Rightarrow q)\equiv\forall x\in A;\sim(p\Rightarrow q)\equiv\forall x\in A;p\wedge\sim q$

یعنی هر کدام از اعضای کتابخانه که کتاب‌های مرجع را به امانت می‌گیرند و آن را دیر باز پس نمی‌آورند.

۵- گزینهٔ ۱ می‌خواهیم گزارهٔ $\forall x\in\mathbb{N},\exists y\in\mathbb{N};P(x,y)$ ارزش درست داشته باشد؛ یعنی x هر عدد طبیعی که باشد می‌توان یک عدد طبیعی مثل y پیدا کرد که رابطه برقرار باشد.

گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم.

گزینهٔ (۱): $y-x=6$ رابطهٔ درست است. x را هر عدد طبیعی که فرض کنید، کافی است y را ۶تا بیشتر در نظر بگیرید *(که اون هم قطعاً یه عدد طبیعیه!)* و رابطه برقرار می‌شود.

گزینهٔ (۲): $x-y=6$ نادرست است. برای مثال اگر $x=1$ باشد، هیچ مقدار طبیعی برای y نمی‌توانیم پیدا کنیم.

گزینهٔ (۳): $x+y=6$ نادرست است. برای مثال اگر $x=6$ باشد، برای y هیچ مقدار طبیعی وجود ندارد.

گزینهٔ (۴): $xy=6$ نادرست است. برای مثال اگر $x=12$ باشد، y عددی طبیعی نمی‌شود.

پاسخ امتحان تشریحی جلسهٔ ۵

۱- یادآوری تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعهٔ nعضوی 2^n تا است.

نادرست. جواب درست برابر $2^7=128$ است.

۲- تعداد زیرمجموعه‌های kعضوی یک مجموعهٔ nعضوی $\binom{n}{k}$ تا است.

درست. $\binom{6}{3}=\frac{6!}{3!3!}=\frac{6\times5\times4}{3\times2\times1}=20$

۳- نادرست. اگر A، n عضو داشته باشد، 2^n زیرمجموعه دارد. حالا با اضافه‌کردن دو عضو، تعداد عضوهای آن $n+2$ و تعداد زیرمجموعه‌های آن $2^{n+2}=4\times2^n$ می‌شود، یعنی تعداد زیرمجموعه‌های آن ۴ برابر می‌شود.

۴- یادآوری یک مجموعهٔ n عضوی، 2^n-1 زیرمجموعهٔ ناتهی دارد.

نکته در مجموعه‌ها، عضو تکراری و جابه‌جایی اعضا تأثیری ندارد.

نادرست. دقت کنید که $\{\}$ همان $\varnothing$ و $\{a,b\}$ همان $\{b,a\}$ است، پس A دو عضو و در نتیجه $2^2-1=3$ زیرمجموعهٔ ناتهی دارد.

۵- درست است. $A_6=\{m\in\mathbb{Z}\,|\,\underbrace{|m|\le 6}_{-6\le m\le 6},\underbrace{2^m\le 2\times6}_{m\le 3}\}$

$=\{-6,-5,-4,\dots,3\} \Rightarrow -6\in A_6$

۶- تهی ـ خودش (دقت کنید در جای خالی دوم، می‌توانیم مجموعهٔ مرجع را نیز قرار دهیم.)

۷- توانی ـ $P(A)$

۸- محض ـ $A\ne B$

۹- $n\in\mathbb{W}$ و $n\le 5$ است، پس n می‌تواند برابر ۰، ۱، ۲، ۳، ۴ یا ۵ باشد:

۱۰- $\Rightarrow A=\{7\times0-3,7\times1-3,7\times2-3,7\times3-3,7\times4-3,7\times5-3\}$

$=\{-3,4,11,18,25,32\}$

۱۱- $\{1\}$ یکی از اعضای B است، پس $A\in B$ می‌شود. ولی $\{1\}$ جزو زیرمجموعه‌های B نیست، پس $A\not\subseteq B$.

۱۲- $\{1\}$ یکی از اعضای C و یکی از زیرمجموعه‌های C است، پس $A \in C$ و $A \subseteq C$ می‌شود.

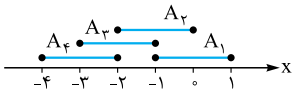
۱۳- $\{\{1\},2\}$ یکی از اعضای C و یکی از زیرمجموعه‌های C است، پس $B \in C$ و $B \subseteq C$ می‌شود.

۱۴- ابتدا چهار بازهٔ A_1 تا A_4 را تشکیل می‌دهیم:

$$A_1=[-1,1] \qquad A_2=[-2,0]$$

$$A_3=[-3,-1] \qquad A_4=[-4,-2]$$

برای سادگی کل چهار بازه را روی محور نشان می‌دهیم.



همان‌طور که می‌بینید، چهار بازه با هم اشتراک ندارند، پس: $\bigcap_{i=1}^{4} A_i=\varnothing$

اما: $\bigcup_{i=1}^{4} A_i=A_1\cup A_2\cup A_3\cup A_4=[-4,1]$

۱۵- الف)

$A=\{\varnothing,2\}\ ,\ B=\{\varnothing,\{2\}\}$

همان‌طور که می‌بینید دو مجموعه دارای عضو مشترک $\varnothing$ هستند، پس:

$A-B=\{2\}$

ب) حالا $P(A)$ را تشکیل می‌دهیم:

$P(A)=\{\varnothing,\{\varnothing\},\{2\},\{\varnothing,2\}\}$

۱۶- اول A_1، A_3 و A_5 را مشخص می‌کنیم:

$$A_1=\{m\in\mathbb{Z}\,|\,\underbrace{|m|\le 1}_{-1\le m\le 1},\ \underbrace{2^m\le 4}_{m\le 2}\}=\{-1,0,1\}$$

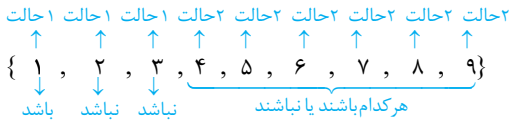
$$A_3=\{m\in\mathbb{Z}\,|\,\underbrace{|m|\le 3}_{-3\le m\le 3},\ \underbrace{2^m\le 12}_{m\le 3}\}=\{-3,-2,-1,\dots,3\}$$

$$A_5=\{m\in\mathbb{Z}\,|\,\underbrace{|m|\le 5}_{-5\le m\le 5},\ \underbrace{2^m\le 20}_{m\le 4}\}=\{-5,-4,-3,\dots,4\}$$

پس: $A_5-A_1=\{-5,-4,-3,-2,2,3,4\}$

بنابراین: $(A_5-A_1)\cup A_3=\{-5,-4,-3,\dots,3,4\}\Rightarrow$ ۱۰ عضو

۱۷- برای شمارش تعداد زیرمجموعه‌های شامل عضو ۱ و فاقد دو عضو ۲ و ۳، باید دقت کنیم که عضو ۱، یک حالت دارد، چون باید در زیرمجموعه باشد، هر کدام از دو عضو ۲ و ۳ هم یک حالت دارند، چون نباید در زیرمجموعه باشند، حالا هر کدام از عضو دیگر (اعضای ۴، ۵، ۶ و ... و ۹) دو حالت دارند که در زیرمجموعه باشند یا نباشند، پس جواب برابر $2^6=64$ می‌شود. برای درک بهتر به مجموعهٔ زیر نگاه کنید:



۱۸- در زیرمجموعهٔ سه‌عضوی ما، دو عضو ۲ و ۷ حضور دارند، پس باید یک عضو دیگر از بین ۷ عضو دیگر (همهٔ اعضا به‌جز ۲ و ۷) را به $\binom{7}{1}=7$ حالت انتخاب کنیم.

۱۹- در این زیرمجموعهٔ سه‌عضوی، عضو ۳ حضور دارد، پس باید ۲ عضو دیگر انتخاب کنیم، اما ۴ و ۸ نباید انتخاب شوند، پس به $\binom{6}{2}=15$ حالت می‌توانیم ۲ عضو دیگر از بین ۶ عضو باقی‌مانده (همهٔ اعضا به‌جز ۳، ۴ و ۸) انتخاب کنیم.

۲۰- فرض کنید تعداد اعضای A، n باشد که در این صورت A، 2^n زیرمجموعه دارد. اگر از A دو عضو حذف کنیم، تعداد اعضای آن $n-2$ و تعداد زیرمجموعه‌های آن 2^{n-2} می‌شود، پس:

$$2^n-384=2^{n-2}\ \Rightarrow\ 2^n-2^{n-2}=384$$

$$\Rightarrow\ 2^{n-2}(2^2-1)=384\ \Rightarrow\ 2^{n-2}\times 3=128\times 3$$

$$\Rightarrow\ 2^{n-2}=128=2^7\ \Rightarrow\ n-2=7\ \Rightarrow\ n=9$$

بنابراین مجموعهٔ A، ۹ عضو و $2^9-1=511$ زیرمجموعهٔ ناتهی دارد.

۲۱- فرض می‌کنیم A دارای n عضو باشد.

می‌دانیم تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعهٔ nعضوی برابر است با 2^n، بنابراین:

$$2^{2n}-2^n=992$$

اگر 2^n را برابر x فرض کنیم، داریم:

$$x^2-x=992\ \Rightarrow\ x^2-x-992=0$$

با تجزیهٔ ۹۹۲ متوجه می‌شویم $992=32\times 31$.

$$\Rightarrow\ (x-32)(x+31)=0\ \Rightarrow\ \begin{cases} x=32 \\ x=-31\ \otimes \end{cases}$$

$$2^n=32=2^5\ \Rightarrow\ n=5$$

۲۲- مجموعهٔ A شش‌عضوی است و دارای 2^6 یا ۶۴ زیرمجموعه است اما آیا همهٔ این زیرمجموعه‌ها، زیرمجموعهٔ B نیز هستند؛ طبیعتاً خیر ولی چندتا از این ۶۴ زیرمجموعه، زیرمجموعهٔ B نیز هستند؛ طبیعی است آن‌هایی که عضوهایشان هم عضو A باشند هم عضو B یعنی عضو $A\cap B$.

داریم: $A\cap B=\{5,6\}$

این مجموعه دارای چهار زیرمجموعهٔ مقابل است: $\varnothing,\{5\},\{6\},\{5,6\}$

این چهار زیرمجموعه هم زیرمجموعهٔ A هستند و هم زیرمجموعهٔ B؛ بنابراین به درد ما نمی‌خورند! پس تعداد مجموعه‌های قابل‌قبول X برابر است با: $64-4=60$

۲۳- در مجموعهٔ اعداد طبیعی یک‌رقمی، چهار رقم زوج ۲ و ۴ و ۶ و ۸ و پنج رقم فرد ۱ و ۳ و ۵ و ۷ و ۹ را داریم.

جمع سه رقم وقتی فرد می‌شود که یا هر سه رقم فرد باشند، یا دو تا ارقام زوج و دیگری فرد باشد.

حالا تعداد حالات هر کدام را می‌شماریم.

اگر سه رقم فرد باشند، باید سه عدد از میان اعداد فرد انتخاب کنیم که $\binom{5}{3}=10$ حالت دارد. و اگر دو رقم زوج و یک رقم فرد باشند، باید دو عدد از میان اعداد زوج به $\binom{4}{2}=6$ حالت و یک عدد از میان اعداد فرد به $\binom{5}{1}=5$ حالت انتخاب کنیم.

بنابراین جواب برابر است با:

$$\underbrace{\binom{5}{3}}_{\text{هر سه فرد}}+\underbrace{\binom{4}{2}\binom{5}{1}}_{\text{۲ تا زوج و یکی فرد}}=10+6\times5=40$$

۲۴- می‌دانیم ۴ جملهٔ متوالی یک دنبالهٔ هندسی را می‌توانیم به این صورت نمایش دهیم: a, aq, aq^2, aq^3

حالا برحسب مقدار q حالت‌بندی می‌کنیم: (دقت کنید q نمی‌تواند برابر ۱ باشد، چون در این صورت هر ۴ جمله برابر شده و زیرمجموعه ۴ عضوی نمی‌شود.)

اگر $q=2$ باشد، جمله‌ها به صورت a، ۲a، ۴a و ۸a می‌شوند. از طرفی کوچک‌ترین و بزرگ‌ترین عضو مجموعهٔ A به ترتیب ۱ و ۳۰ هستند، پس کوچک‌ترین جملهٔ دنباله (یعنی a) باید بزرگ‌تر یا مساوی یک و بزرگ‌ترین جملهٔ دنباله (یعنی ۸a) باید کوچک‌تر یا مساوی ۳۰ باشد:

$$a\ge1$$
$$8a\le30\Rightarrow a\le3/75$$

از طرفی اعضای دنباله باید مقادیر ۱ تا ۳۰ باشند، پس a باید عددی طبیعی باشد که از آن نتیجه می‌شود ۳ یا ۲ یا ۱ = a، یعنی سه دنبالهٔ هندسی با قدرنسبت ۲ داریم که این سه دنباله به شکل مقابل هستند:

$$a=1\Rightarrow 1,2,4,8$$
$$a=2\Rightarrow 2,4,8,16$$
$$a=3\Rightarrow 3,6,12,24$$

اگر $q=3$ باشد، جمله‌ها به صورت a، ۳a، ۹a و ۲۷a می‌شوند. حالا تنها حالت ممکن این است که $a=1$ باشد، یعنی جمله‌های دنبالهٔ هندسی به صورت ۱، ۳، ۹ و ۲۷ باشند. (دقت کنید در این حالت به ازای $a\ge2$، ۲۷a بزرگ‌تر از ۳۰ می‌شود که غیر قابل قبول است.)

اما هیچ دنبالهٔ هندسی با $q>3$ نداریم که ۴ جملهٔ آن بتوانند از بین اعداد ۱ تا ۳۰ باشند. برای مثال اگر $q=4$ باشد، ۴ جملهٔ دنبالهٔ هندسی به شکل a، ۴a، ۱۶a و ۶۴a می‌شوند! بنابراین مجموعهٔ A، فقط چهار زیرمجموعهٔ ۴عضوی دارد که اعضای آن تشکیل دنبالهٔ هندسی دهند.

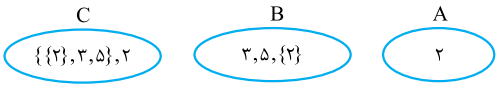
پاسخ آزمونک تستی جلسهٔ ۵

۱- گزینهٔ ۴ همهٔ مربع‌ها لوزی نیز هستند، پس گزینهٔ (۱) درست است. اگر شکلی هم لوزی باشد هم مستطیل، یعنی لوزی‌ای است که همهٔ زاویه‌های آن 90° است، پس مربع است، پس گزینهٔ (۲) نیز درست است.

همهٔ لوزی‌ها و مستطیل‌ها به هر حال متوازی‌الاضلاع‌اند پس گزینهٔ (۳) نیز درست است.

اما اگر یک متوازی‌الاضلاع، مربع نباشد دلیل ندارد، حتماً مستطیل باشد. مثل شکل روبه‌رو:

۲- گزینهٔ ۲ برای تفهیم بهتر، اعضای مجموعه‌های A، B و C را به صورت زیر نشان می‌دهیم:



گزینهٔ (۱) درست است، زیرا {۲} عضو B است.

گزینهٔ (۲) نادرست است، زیرا {۲} عضوی از C نیست بلکه زیرمجموعهٔ C است؛ یعنی گزینهٔ (۴) درست است.

گزینهٔ (۳) نیز درست است، چون همان‌طور که می‌بینید مجموعهٔ C دارای دو عضو است یکی مجموعهٔ B و دیگری عدد ۲.

۳- گزینهٔ ۳ مجموعه‌های A_3 و A_4 را پیدا می‌کنیم:

$$A_3=\{m\in\mathbb{Z}\mid m\ge-3, 2^m\le3\}=\{-3,-2,-1,0,1\}$$
$$A_4=\{m\in\mathbb{Z}\mid m\ge-4, 2^m\le4\}$$
$$=\{-4,-3,-2,-1,0,1,2\}\Rightarrow A_3\cap A_4=A_3$$

می‌دانیم یک مجموعهٔ nعضوی دارای 2^n زیرمجموعه است، پس $A_3\cap A_4$ دارای ۳۲ زیرمجموعه است.

۴- گزینهٔ ۳ یادآوری تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعهٔ nعضوی، 2^n تا و تعداد زیرمجموعه‌های kعضوی آن $\binom{n}{k}$ تا است.

نکته اگر $\binom{n}{a}=\binom{n}{b}$ باشد، $a=b$ یا $a+b=n$ می‌شود.

فرض کنید تعداد اعضای A، n تا باشد:

$$\underbrace{\binom{n}{4}}_{\text{زیرمجموعه‌های ۴عضوی A}}=\underbrace{\binom{n}{k}}_{\text{زیرمجموعه‌های kعضوی A}}\Rightarrow\begin{cases}k=4 \text{ غ ق ق}\\ k+4=n\end{cases}$$

$$2^{n+K}=2^n+896\Rightarrow 2^n\times2^K=2^n+896$$
$$\Rightarrow 2^n(2^k-1)=896=128\times7=2^7\times7$$
$$\Rightarrow\begin{cases}2^n=2^7\Rightarrow n=7\\ 2^k-1=7\Rightarrow 2^k=8=2^3\Rightarrow k=3\end{cases}$$
$$\Rightarrow\underbrace{\binom{n}{k-2}}_{\text{زیرمجموعه‌های k-۲ عضوی A}}=\binom{7}{1}=7$$

۵- گزینهٔ ۱ برای این‌که بزرگ‌ترین عضو، ۳ برابر کوچک‌ترین عضو باشد، ۳ حالت داریم:

۲ حالت $\Rightarrow$ بزرگ‌ترین عضو ۳ و کوچک‌ترین عضو ۱ $\Rightarrow\{1,\underset{\downarrow}{2},3\}$

۲ حالت که باشد یا نباشد.

بزرگ‌ترین عضو ۶ و کوچک‌ترین عضو ۲ $\Rightarrow\{2,\underbrace{3,4,5}_{},6\}$

هرکدام ۲ حالت که باشند یا نباشند.

$\Rightarrow 2\times2\times2=8$ حالت

بزرگ‌ترین عضو ۹ و کوچک‌ترین عضو ۳ $\Rightarrow\{3,\underbrace{4,5,6,7,8}_{},9\}$

هرکدام ۲ حالت که باشند یا نباشند.

$\Rightarrow 2\times2\times2\times2\times2=32$ حالت

پس جواب می‌شود $2+8+32=42$ زیرمجموعه.