

در مملکت ما از قدیم‌الایام تا به امروز مردم برای رشته تجربی سر و دست می‌شکوندن. چون از راه این رشته می‌تونن طبیب بشن و مطب بزنن و سری توی سرا در بیارن. برای همین در مملکت ما از لحظه‌ای که بچه‌ای جیغ حیاتش رو می‌کشه بهش می‌گن: سلام دکتر جان! انگار انسان‌ها دو دسته‌اند: دکتر و هیچی! یعنی یا دکتر می‌شی یا هیچی نمی‌شی! این نوع تفکر باعث شده که در مملکت ما تعداد آدمایی که ستینگز (settings) کارخونه‌شون ریاضیه ولی می‌رن تجربی زیاد بشه.^۱ ندایی در ناخودآگاه این آدم‌ها هست که فریاد می‌زنه: «من ریاضی می‌خوام!!!!!!»

و البته این‌که توی مملکت ما خیلی چیزا افراط و تفریطیه گاهی هم چیز بدی نیست. مثلاً خدا رو شکر بچه‌های تجربی کمی افراطی ریاضی می‌خونن و این خبر خوبیه برای تجربی‌رفته‌های ریاضی‌دوست! و خلاصه این‌که در مملکت ما اگر رشته‌ات تجربیه و می‌خوای دکتر بشی باید خیلی خوب ریاضی و فیزیک بخونی (حتی گاهی بیشتر از ریاضیا!) کتاب ماجرای بیست ریاضی ۲ طوری نوشته شده که هم ریاضی رو خیلی راحت بفهمی و هم در امتحان‌های تشریحی خیلی راحت ۲۰ بگیری. چون خداوند مؤلف این کتاب رو برای خوب فهموندن ریاضی به بندگان خلق کرده. جا داره همین‌جا به دکتر کوروش اسلامی بگم: کوروش جان ممنون که قبول کردی این کتاب رو تألیف کنی. مطمئنم که بچه‌های تجربی دعوت می‌کنن.

در ضمن سپاس از همه دست‌اندرکاران تولید این کتاب از جمله خانم انسیه‌سادات میرجعفری که نیروی محرکه واحد تألیف کتابای ماجراست و ویراستاران خوبمون خانم مریم نظری، آقایان صادق محمدی و پیام ابراهیم‌نژاد و صد البته دوستان خستگی‌ناپذیرمون در واحد تولید. دست همتون درد نکنه.

شاد باشید از ته دل.

ماجرای هر کسی با هر کدام از درس‌هایش، یک ماجرای منحصر به فرد است. ماجرای با ژانرهای مختلف: تراژدی، کمدی، اخلاق‌مدار، انگیزشی، سرگرم‌کننده و ...

و اما ماجرای کتاب ماجرای ۲۰ ریاضی ۲ شامل توضیح هر چه بهتر درس‌ها و طرح مجموعه‌ای از سؤال‌های خوب و کاربردی است. پس بیایید در مورد این کتاب برایتان بگویم:

شما که دانش‌آموز پایه یازدهم رشته تجربی هستید باید بدانید که کتاب درسی‌تان نسبتاً پربار و پرکار است؛ یعنی شما باید و یک کتاب درسی پرمات!

یعنی بهتر است از همین الآن (که البته نمی‌دانم کی و کجای سال تحصیلی است) همه حرف و حدیث‌ها را بگذارید کنار و درس ریاضی را خوب و دقیق بخوانید.

سعی‌ام این بوده که بدون زیاده‌گویی، همه چیز را توضیح دهم و بعدش هم تمرین‌های لازم و کافی را (یعنی نه کم‌تر و نه بیشتر) برای تسلط‌تان بیاوریم. تا این‌جایش یعنی نوشتن کتاب، وظیفه من بود، اما کار شما چیست؟ یا چه‌طور از این کتاب استفاده کنید:

۱ درس‌نامه‌ها را با صبر و حوصله بخوانید. به هر مثالی که رسیدید. اول سعی کنید خودتان حل کنید و بعد چه حل کردید و چه نه، جواب مثال را بخوانید و مطمئن شوید که یاد گرفته‌اید.

۲ درس‌نامه را که خواندید، برگردید و سعی کنید مثال‌ها را خودتان حل کنید. یک کار خیلی خوب (و البته یک کم سخت!) این است که در دور اول خواندن درس‌نامه، صورت مثال‌ها را در برگه‌های جداگانه‌ای بنویسید و بعد از تمام‌شدن درس‌نامه، مثال‌ها را بدون استفاده از کتاب حل کنید. (نوشتن صورت سؤال در برگه‌های جداگانه به همین علت است!)

۳ حالا بروید سراغ «سؤال‌های امتحانی» علت این‌که اسم این قسمت را گذاشته‌ایم سؤال‌های امتحانی، این است که سؤال‌های این قسمت طوری طراحی شده‌اند که در امتحان‌هایتان حتماً از این سؤال‌ها می‌بینید.

۴ در آخر هر فصل یک آزمون منتخب از سؤال‌های امتحانی مدارس سراسر کشور آورده‌ایم، تا با حال و هوای انواع سؤال‌ها بیشتر آشنا شوید. از حل این سؤال‌ها هم غفلت نکنید!

۵ برای حل سؤال‌ها زمانتان را برنامه‌ریزی کنید. ممکن است تعداد سؤال‌های یک فصل برای یک بار حل کردن زیاد باشد، در این صورت سؤال‌ها را به چند قسمت تقسیم کنید و در زمان‌های مشخصی آن‌ها را حل کنید.

۶ در فاصله‌های منظم و قبل از هر آزمون یا امتحان جدی، دوباره تمرین‌ها را حل کنید.

۷ کنار بعضی از سؤال‌ها علامت  دارید. حل این سؤال‌ها برای دور اول لازم نیست. سطح این سؤال‌ها از سؤال‌های امتحان‌های نهایی بالاتر است، اما برای تسلط کامل به درس‌ها بهتر است حلشان کنید.

کتابی که در دست دارید به‌طور کامل بازنگری شده است و تعداد بسیار زیادی سؤال به کتاب اضافه شده است.

درباره این کتاب هر نظری دارید در قالب کامنت برایمان بفرستید (در سایت، صفحه اینستا، کانال تلگرام و یا حتی نامه پستی) در پایان از خانم‌ها سمیرا هاشمی و مهشاد زاهدی که با تماس‌های خود در رفع اشکالات این کتاب در چاپ جدید ما را یاری کردند، بسیار تشکر می‌کنیم.

خندان‌تر و پیروزتر باشید.

فهرست

فصل پنجم: توابع نمایی و لگاریتمی

- بخش ۱: تابع نمایی و ویژگی‌های آن ۱۰۸
- بخش ۲: تابع لگاریتمی ۱۱۲
- بخش ۳: ویژگی‌ها و قوانین لگاریتم ۱۱۷
- بخش ۴: معادله‌های لگاریتمی ۱۲۱
- بخش ۵: نمودارها و کاربردهای توابع لگاریتمی و نمایی ۱۲۳
- آزمون جمع‌بندی فصل پنجم ۱۲۹

فصل ششم: حد و پیوستگی

- بخش ۱: فرایندهای حدی ۱۳۰
- بخش ۲: محاسبه حد تابع ۱۳۴
- بخش ۳: پیوستگی ۱۴۲
- آزمون جمع‌بندی فصل ششم ۱۵۲

فصل هفتم: آمار و احتمال

- بخش ۱: احتمال شرطی ۱۵۳
- بخش ۲: پیشامدهای مستقل ۱۵۸
- بخش ۳: آمار توصیفی ۱۶۰
- آزمون جمع‌بندی فصل هفتم ۱۶۶

پاسخ‌نامه‌ها

- پاسخ‌نامه تشریحی سؤال‌های امتحانی ۱۶۷
- پاسخ‌نامه آزمون‌های جمع‌بندی ۲۳۳

امتحانات

- نمونه امتحان نیم‌سال اول (امتحان شماره ۱) ۲۴۷
- نمونه امتحان نیم‌سال اول (امتحان شماره ۲) ۲۴۸
- نمونه امتحان نیم‌سال دوم (امتحان شماره ۳) ۲۵۰
- نمونه امتحان نیم‌سال دوم (امتحان شماره ۴) ۲۵۲
- نمونه امتحان نیم‌سال دوم (نهایی خرداد ۱۴۰۳) ۲۵۴
- پاسخ‌نامه امتحان‌های نیم‌سال اول و دوم ۲۵۶

فصل اول: هندسه تحلیلی و جبر

- بخش ۱: هندسه تحلیلی - یادآوری ۸
- بخش ۲: هندسه تحلیلی ۱۱
- بخش ۳: تابع درجه ۲ و معادله درجه دوم ۱۶
- بخش ۴: مجموع و حاصل ضرب ریشه‌های معادله درجه ۲ ۱۷
- بخش ۵: ماکسیمم و مینییمم تابع درجه دوم (سهمی) ۲۰
- بخش ۶: معادله‌های گویا ۲۶
- بخش ۷: معادلات رادیکالی ۲۸
- آزمون جمع‌بندی فصل اول ۳۰

فصل دوم: هندسه

- بخش ۱: ترسیم‌های هندسی ۳۱
- بخش ۲: استدلال و نسبت ۳۷
- بخش ۳: قضیه تالس ۴۲
- بخش ۴: تشابه مثلث‌ها ۴۷
- بخش ۵: روابط طولی در مثلث قائم‌الزاویه ۵۱
- آزمون جمع‌بندی فصل دوم ۵۴

فصل سوم: تابع

- بخش ۱: آشنایی با برخی از انواع تابع ۵۵
- بخش ۲: تابع جزء صحیح ۶۳
- بخش ۳: وارون تابع و تابع یک‌به‌یک ۶۷
- بخش ۴: به دست آوردن ضابطه تابع وارون ۷۰
- بخش ۵: اعمال روی تابع ۷۳
- آزمون جمع‌بندی فصل سوم ۷۹

فصل چهارم: مثلثات

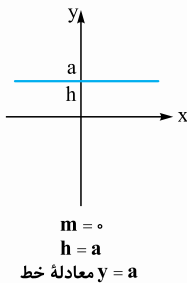
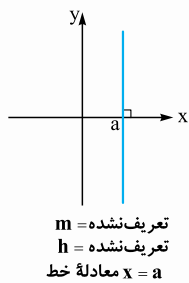
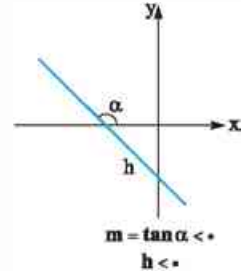
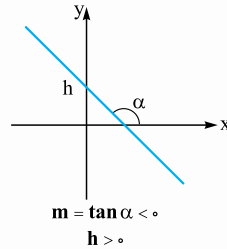
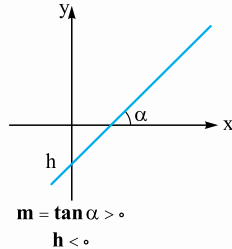
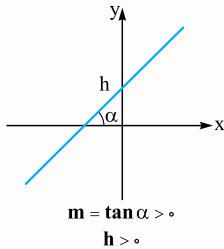
- بخش ۱: واحدهای اندازه‌گیری زاویه ۸۰
- بخش ۲: روابط تکمیلی بین نسبت‌های مثلثاتی ۸۸
- بخش ۳: توابع مثلثاتی ۹۹
- آزمون جمع‌بندی فصل چهارم ۱۰۷

درس نامہ 9 سوالات امتحان

فصل ۱: هندسه تحلیلی و جبر

بخش ۱: هندسه تحلیلی - یادآوری

معادله خط راست در سال نهم دیدیم که معادله هر خط راست به شکل $y = mx + h$ است (یعنی یک معادله درجه اول بر حسب x و y) که در این رابطه m شیب خط و h عرض از مبدأ آن است. به علامت شیب و عرض از مبدأ هر خط دقت کنید.



و از سال گذشته می‌دانیم، شیب خط برابر تانژانت زاویه‌ای است که خط با جهت مثبت محور طول‌ها می‌سازد، اگر این زاویه تند (حاده) باشد $m > 0$ و اگر این زاویه باز (منفرجه) باشد $m < 0$ است. و یادمان هست که عرض از مبدأ خط برابر عرض نقطه‌ای است که خط در آن، محور عرض‌ها را قطع می‌کند. در حالتی که خط موازی محور عرض‌ها است شیب و عرض از مبدأ خط تعریف نشده‌اند و در حالتی که خط موازی محور طول‌ها است $m = 0$ است و h ممکن است هر عدد دلخواه باشد. اگر در معادله خط $h = 0$ باشد، خط از مبدأ مختصات عبور می‌کند. یعنی خط به معادله $y = mx$ از مبدأ مختصات عبور می‌کند.

نوشتن معادله خط

حالا با این مقدمات می‌خواهیم معادله یک خط را بنویسیم. برای نوشتن معادله خط دو حالت در نظر می‌گیریم:

۱ اگر شیب (m) و مختصات یک نقطه $A(x_1, y_1)$ از خط را داشته باشیم، معادله را به یکی از دو روش زیر می‌نویسیم:

$$y - y_1 = m(x - x_1) \text{ یا } y = mx + h$$

مثال: خط d محور x ها را در نقطه‌ای به طول ۳ و با زاویه 30° (در جهت مثبت) قطع می‌کند. معادله خط d را بنویسید و نقطه برخورد آن را با محور y ها پیدا کنید.

پاسخ: خط d از نقطه $A(3, 0)$ می‌گذرد و با محور x ها زاویه 30° می‌سازد، پس شیب این خط برابر $\tan 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$ است:

$$y - 0 = \frac{\sqrt{3}}{3}(x - 3) \Rightarrow y = \frac{\sqrt{3}}{3}x - \sqrt{3} \quad \text{معادله } d$$

حالا برای پیدا کردن نقطه برخورد خط d با محور y ها، مقدار x را برابر صفر قرار می‌دهیم: $x = 0 \Rightarrow y = -\sqrt{3} \Rightarrow$ نقطه برخورد $(0, -\sqrt{3})$

۲ می‌دانیم از هر دو نقطه متمایز فقط یک خط می‌گذرد و برای نوشتن معادله خط گذرنده از نقاط $A(x_1, y_1)$ و $B(x_2, y_2)$ از یکی از دو روش روبه‌رو استفاده می‌کنیم:

$$\begin{cases} m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \\ y - y_1 = m(x - x_1) \end{cases} \quad \text{یا} \quad \begin{cases} m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \\ y = mx + h \end{cases}$$

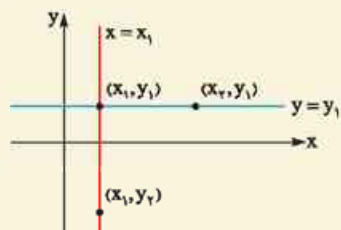
مثال: سه نقطه $A(2, 3)$ ، $B(5, 3)$ و $C(2, 1)$ سه رأس یک مثلث‌اند. معادله اضلاع مثلث را بنویسید.

پاسخ: باید معادله AB و AC و BC را بنویسیم:

$$A \begin{vmatrix} 2 \\ 3 \end{vmatrix}, B \begin{vmatrix} 5 \\ 3 \end{vmatrix} \Rightarrow m = \frac{3-3}{5-2} = 0 \Rightarrow y = 3 \quad \text{معادله } AB$$

$$A \begin{vmatrix} 2 \\ 3 \end{vmatrix}, C \begin{vmatrix} 2 \\ 1 \end{vmatrix} \Rightarrow m = \frac{3-1}{2-2} = \text{تعریف نشده} \Rightarrow x = 2 \quad \text{معادله } AC$$

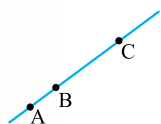
$$B \begin{vmatrix} 5 \\ 3 \end{vmatrix}, C \begin{vmatrix} 2 \\ 1 \end{vmatrix} \Rightarrow m = \frac{1-3}{2-5} = \frac{2}{3} \Rightarrow y - 1 = \frac{2}{3}(x - 2) \Rightarrow y = \frac{2}{3}x - \frac{4}{3} + 1 \Rightarrow y = \frac{2}{3}x - \frac{1}{3} \quad \text{معادله } BC$$



نکته: همان‌طور که در مثال قبل دیدید

معادله خط گذرنده از دو نقطه هم‌عرض $A \begin{vmatrix} x_1 \\ y_1 \end{vmatrix}$ و $B \begin{vmatrix} x_2 \\ y_2 \end{vmatrix}$ به شکل $y = y_1$

و معادله خط گذرنده از دو نقطه هم‌طول $A \begin{vmatrix} x_1 \\ y_1 \end{vmatrix}$ و $B \begin{vmatrix} x_2 \\ y_2 \end{vmatrix}$ به شکل $x = x_1$ است.



۳ اگر سه نقطه A ، B و C روی یک خط راست واقع باشند (یا روی یک راستا باشند) شیب خط گذرنده از هر دوتای آن‌ها با هم برابر است، یعنی $m_{AB} = m_{AC} = m_{BC}$ (دلیلش هم کاملاً معلوم است چون همه نقاط روی یک خط و یک امتداد قرار دارند)

مثال: اگر سه نقطه $A(m, 1)$ ، $B(3m-1, m+2)$ و $C(-1, m-6)$ روی یک خط راست واقع باشند، مقدار m را پیدا کنید.

پاسخ: شیب AB و AC را برابر قرار می‌دهیم:

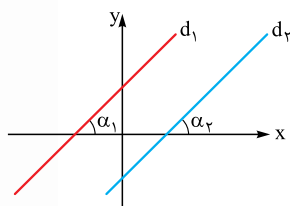
$$m_{AB} = m_{AC} \Rightarrow \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{y_C - y_A}{x_C - x_A} \Rightarrow \frac{m+2-1}{3m-1-m} = \frac{m-6-1}{-1-m}$$

$$\Rightarrow -(m+2)(m+1) = (2m-1)(m-7) \Rightarrow -m^2 - 3m - 2 = 2m^2 - 15m + 7 \Rightarrow 3m^2 - 12m + 9 = 0$$

$$\xrightarrow{\div 3} m^2 - 4m + 3 = 0 \Rightarrow (m-1)(m-3) = 0 \Rightarrow m=1, m=3$$

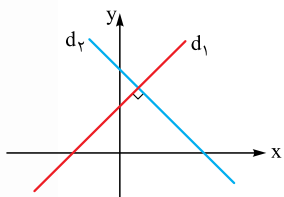
خطوط عمودی و موازی

۱ اگر دو خط با هم موازی باشند شیب‌هایشان با هم برابر است.



$$d_1 \parallel d_2 \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 \Rightarrow m_1 = m_2$$

۲ اگر دو خط بر هم عمود باشند، شیب هر کدام عکس قرینه شیب دیگری است، یعنی حاصل‌ضرب شیب‌هایشان برابر -1 است.



$$d_1 \perp d_2 \Rightarrow \begin{cases} m_1 m_2 = -1 \\ \text{یا} \\ m_1 = -\frac{1}{m_2} \end{cases}$$

نکته: دو خط به معادله‌های $x = a$ و $y = b$ بر هم عمودند، چون یکی موازی محور y ‌ها (اولی) و دیگری موازی محور x ‌ها (دومی) است.

مثال: چهار خط با معادله‌های زیر مفروض‌اند:

$$d_1: 3x - 2y = 4$$

$$d_2: y = -\frac{2}{3}x + 1$$

$$d_3: 6y + 4x = -1$$

$$d_4: y = \frac{3}{2}x + 5$$

تعیین کنید هر کدام از جفت خط‌های زیر نسبت به هم چه وضعی دارند:

d_4, d_2 (ت)

d_2, d_3 (پ)

d_1, d_4 (ب)

d_1, d_2 (الف)

پاسخ: اول شیب هر کدام از خط‌ها را به دست می‌آوریم: برای این کار معادله خط را به صورت $y = mx + h$ تبدیل می‌کنیم، یعنی در یک طرف

$d_1: 3x - 2y = 4 \Rightarrow -2y = -3x + 4 \Rightarrow y = \frac{3}{2}x - 2 \Rightarrow m_1 = \frac{3}{2}$ یا ضرب 1 و در طرف دیگر جمله x و عدد ثابت:

$$d_2: y = -\frac{2}{3}x + 1 \Rightarrow m_2 = -\frac{2}{3}$$

$$d_3: 6y + 4x = -1 \Rightarrow 6y = -4x - 1 \Rightarrow y = -\frac{2}{3}x - \frac{1}{6} \Rightarrow y = -\frac{2}{3}x - \frac{1}{6} \Rightarrow m_3 = -\frac{2}{3}$$

$$d_4: y = \frac{3}{2}x + 5 \Rightarrow m_4 = \frac{3}{2}$$

حالا وضعیت خط‌ها را با توجه به شیب‌هایشان تعیین می‌کنیم:

الف $d_1, d_2 \Rightarrow m_1 m_2 = -1$ بر هم عمودند

ب $d_1, d_4 \Rightarrow m_1 = m_4$ با هم موازی‌اند

پ $d_2, d_3 \Rightarrow m_2 = m_3$ با هم موازی‌اند

ت $d_3, d_4 \Rightarrow m_3 m_4 = -1$ بر هم عمودند

مثال: مقدار a را طوری پیدا کنید که خط گذرنده از دو نقطه $A(2, 3)$ و $B(5, 3)$ و خط $(a+1)x + (a-2)y = 2a+1$:

الف) با هم موازی باشند. ب) بر هم عمود باشند.

پاسخ: شیب خط گذرنده از دو نقطه $A(2, 3)$ و $B(5, 3)$ برابر صفر است یعنی خط گذرنده از A و B موازی محور x ها است، پس:

الف) خط $(a+1)x + (a-2)y = 2a+1$ هم باید موازی محور x ها باشد؛ پس $a+1=0$ یعنی $a=-1$.

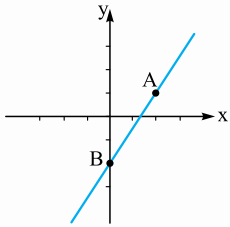
ب) خط $(a+1)x + (a-2)y = 2a+1$ باید موازی محور y ها باشد؛ پس $a-2=0$ یعنی $a=2$.

مثال: سه نقطه $A(1, 2)$ ، $B(3, 5)$ و $C(1, 4)$ سه رأس یک مثلث اند. از نقطه A خطی موازی ضلع BC رسم می کنیم. معادله این خط را بنویسید.

پاسخ: چون خط رسم شده موازی BC است، پس شیبش با شیب BC مساوی است:

$$m_{BC} = \frac{5-4}{3-1} = \frac{1}{2} \Rightarrow m_d = \frac{1}{2}$$

$$A(1, 2), m_d = \frac{1}{2} \Rightarrow y - 2 = \frac{1}{2}(x - 1) \Rightarrow y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2} \quad \text{معادله خط}$$



رسم خط قبلاً دیده بودیم که برای رسم یک خط کافی است با عدد دادن به x یا y مختصات دو نقطه از خط را پیدا کنیم و سپس روی دستگاه مختصات این دو نقطه را به هم وصل کنیم و امتداد دهیم. مثلاً برای رسم خط $3x - 2y = 4$ داریم:

$$x = 2 \Rightarrow 6 - 2y = 4 \Rightarrow y = 1 \Rightarrow A(2, 1)$$

$$x = 0 \Rightarrow 0 - 2y = 4 \Rightarrow y = -2 \Rightarrow B(0, -2)$$

سؤال های امتحانی

سؤال های با علامت سخت ترین سؤال های هر بخش. آله به کم تر از ۲۰، اونی نمی شی، بعد از تسلط روی سؤال های دیگه، برو سراغ اون ها.

جاهای خالی را پر کنید.

۱- شیب هر خط موازی محور x ها برابر است.

۲- شیب هر خط موازی محور y ها است.

۳- اگر دو خط بر هم عمود باشند، شیب هر کدام شیب دیگری است.

۴- اگر دو خط با هم موازی باشند، شیب هر کدام شیب دیگری است.

۵- دو خط $x + 2y = 1$ و $y = 2x + 3$ با هم هستند.

۶- اگر سه نقطه $(1, 2)$ ، $(3, 4)$ ، $(m, m+1)$ روی یک خط راست باشند مقدار برای m به دست می آید.

درستی گزاره های زیر را تعیین کنید.

۷- خط $mx + my + 2m - 1 = 0$ با جهت مثبت محور x ها زاویه 45° می سازد.

۸- خط $(m+1)x - (m+2)y = 3$ همواره از نقطه $(1, 2)$ می گذرد.

گزینه صحیح را انتخاب کنید.

۹- از نقطه $A(2, -1)$ خطی رسم می کنیم که با جهت مثبت محور x ها زاویه 135° می سازد. این خط از کدام نقطه زیر عبور می کند؟

(۱, -۲) (۲, ۱) (۳, -۱) (۴, -۲)

۱۰- معادله خط گذرنده از نقطه $(-1, 3)$ و عمود بر خط گذرنده از دو نقطه $(3, -1)$ و $(1, 3)$ کدام است؟

(۱) $2y - x = 7$ (۲) $2y + x = 5$ (۳) $y - 2x = 5$ (۴) $y + 2x = 1$

۱۱- هر کدام از موارد دو ستون را به هم وصل کنید.

۱- با دو محور مختصات یک مثلث متساوی الساقین می سازد. الف) $y + \sqrt{3}x = 10$

۲- با جهت مثبت محور x ها زاویه 120° می سازد. ب) $\sqrt{3}x + y = 6$

۳- بر خط $y + 2x = 4$ عمود است. پ) $y = x + \frac{2}{3}$

۴- از ربع سوم نمی گذرد. ت) $2y = x - \sqrt{3}$

۱۲- در هر یک از قسمت های زیر معادله خط را بنویسید.

الف) شیب خط ۲- و عرض از مبدأ آن ۳- باشد.

ب) خط از نقطه $(1, 2)$ بگذرد و موازی خط $x - 2y = 5$ باشد.

پ) خط از نقطه $(-1, 3)$ بر خط $2x + y = 3$ عمود شود.

ت) خط از نقطه $(2, -1)$ و نقطه تقاطع دو خط $x + 2y = 3$ و $2x - y = 1$ بگذرد.

۱۳- معادله خطی را بنویسید که از نقطه $(2, 5)$ بگذرد و با جهت مثبت محور طول ها زاویه 45° بسازد.

(نوبتی فردا ۱۴۰۲)



۱۴- مقدار m را طوری پیدا کنید که دو خط $mx - (m+1)y = 7$ و $2x + y - 3 = 0$ موازی باشند.

الف) باهم موازی باشند. ب) بر هم عمود باشند.

۱۵- خط‌های زیر را رسم کنید.

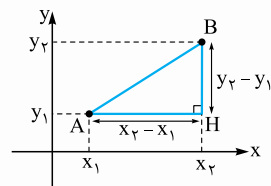
الف) $x + 2y = 6$ ب) $y = -\frac{3}{4}x + 2$ پ) $x = 4$ ت) $3y + 1 = 0$ ث) $\frac{x}{2} - \frac{y}{3} = 1$

۱۶- مقدار a را طوری پیدا کنید که سه نقطه $A(3, 4)$ و $B(5, 8)$ و $C(a, -2)$ روی یک خط راست باشند.

۱۷- از نقطه $A(2, 3)$ خطی موازی خط $mx + 2my - (m+3) = 0$ رسم می‌کنیم. اندازه مساحت مثلثی را که این خط با محورهای مختصات می‌سازد، پیدا کنید.

۱۸- نقاط $A(3, 1)$ و $B(2, 3)$ و $C(1, 1)$ سه رأس یک مثلث‌اند. مختصات نقطه H ، پای ارتفاع AH را پیدا کنید.

بخش ۲: هندسه تحلیلی



طول پاره‌خط AB (یعنی فاصله بین دو نقطه A و B) را از رابطه زیر به دست می‌آوریم:

$$AB = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2} = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

مثلاً فاصله بین دو نقطه $(2, -1)$ و $(-1, -5)$ برابر است با:

$$\sqrt{(2 - (-1))^2 + (-1 - (-5))^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$$

نکات: ۱) رابطه طول پاره‌خط AB با استفاده از رابطه فیثاغورس در مثلث قائم‌الزاویه AHB به دست می‌آید.

۲) اگر $A \begin{vmatrix} x_1 \\ y_1 \end{vmatrix}$ و $B \begin{vmatrix} x_2 \\ y_2 \end{vmatrix}$ باشد (یعنی A و B هم‌طول باشند)، داریم:

$$AB = |y_2 - y_1|$$

۳) اگر $A \begin{vmatrix} x_1 \\ y_1 \end{vmatrix}$ و $B \begin{vmatrix} x_2 \\ y_1 \end{vmatrix}$ باشد (یعنی A و B هم‌عرض باشند)، داریم:

$$AB = |x_2 - x_1|$$

۴) چون مبدأ مختصات $O(0, 0)$ است، پس فاصله یک نقطه تا مبدأ مختصات برابر است با $OA = \sqrt{(x_A - 0)^2 + (y_A - 0)^2}$ که می‌شود:

$$OA = \sqrt{x_A^2 + y_A^2}$$

مثلاً فاصله نقطه $(-2, 3)$ از مبدأ برابر است با $\sqrt{(-2)^2 + 3^2} = \sqrt{13}$.

مثال: نقاط $A(2, 5)$ ، $B(2, 1)$ و $C(6, 1)$ سه رأس یک مثلث‌اند. نوع مثلث را تعیین کنید.

پاسخ: طول هر کدام از اضلاع مثلث را پیدا می‌کنیم:

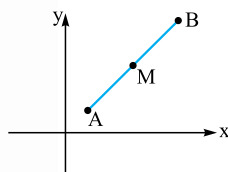
$$A(2, 5), B(2, 1) \Rightarrow AB = |5 - 1| = 4 \quad B(2, 1), C(6, 1) \Rightarrow BC = |6 - 2| = 4$$

$$A(2, 5), C(6, 1) \Rightarrow AC = \sqrt{(2-6)^2 + (5-1)^2} = \sqrt{16 + 16} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$$

می‌بینیم که $AB = BC$ ؛ پس مثلث متساوی‌الساقین است و از طرف دیگر $AB^2 + BC^2 = AC^2$ ، چون $4^2 + 4^2 = (4\sqrt{2})^2$ ؛ یعنی مثلث قائم‌الزاویه هم هست. پس مثلث قائم‌الزاویه متساوی‌الساقین است.

نقطه وسط پاره‌خط

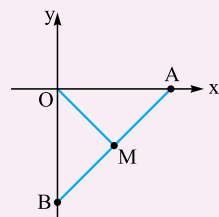
اگر $A \begin{vmatrix} x_1 \\ y_1 \end{vmatrix}$ و $B \begin{vmatrix} x_2 \\ y_2 \end{vmatrix}$ دو سر پاره‌خط AB باشند، مختصات نقطه M ، نقطه وسط پاره‌خط AB از رابطه زیر به دست می‌آید:



$$M \begin{vmatrix} \frac{x_1 + x_2}{2} \\ \frac{y_1 + y_2}{2} \end{vmatrix} \text{ یا } x_M = \frac{x_1 + x_2}{2}, y_M = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

مثال: نقطه A به طول ۸ روی محور x و نقطه B به عرض ۶- روی محور y مفروض‌اند. اگر O و B ،

رأس یک مثلث باشند، طول میانه OM را به دست آورید.



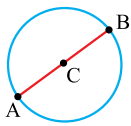
پاسخ: OM میانه مثلث است؛ پس با توجه به شکل باید اول مختصات نقطه M، وسط پاره خط AB را پیدا کنیم و بعد طول پاره خط OM را به دست آوریم:

$$A(8,0), B(0,-6) \Rightarrow M \left(\frac{8+0}{2}, \frac{0+(-6)}{2} \right) \Rightarrow M \left(4, -3 \right)$$

$$OM = \sqrt{x_M^2 + y_M^2} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$$

مثال: نقاط $A(6,-1)$ و $B(-2,5)$ دو سر قطر یک دایره اند. مختصات مرکز و طول شعاع دایره را پیدا کنید.

پاسخ: طبق شکل زیر مرکز دایره، نقطه وسط پاره خط AB است، پس:



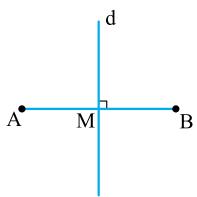
$$A \left(6, -1 \right), B \left(-2, 5 \right) \Rightarrow C_{\text{مرکز}} \left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2} \right) \Rightarrow C \left(2, 2 \right)$$

از طرف دیگر طول پاره خط AB برابر قطر دایره است؛ پس:

$$AB = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2} = \sqrt{(6 - (-2))^2 + (-1 - 5)^2} = \sqrt{64 + 36} = \sqrt{100} = 10$$

پس اندازه شعاع دایره برابر نصف قطر یعنی $R = \frac{10}{2} = 5$ است.

مثال: اگر $A(2,-1)$ و $B(4,7)$ دو سر یک پاره خط باشند، معادله عمود منصف پاره خط AB را بنویسید.



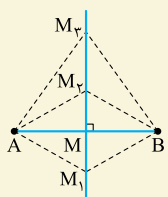
پاسخ: می دانیم عمود منصف یک پاره خط، خطی است که از نقطه وسط پاره خط بر آن عمود می شود؛ پس باید مختصات نقطه M وسط پاره خط AB و شیب پاره خط AB را به دست آوریم و سپس معادله عمود منصف را بنویسیم:

$$A \left(2, -1 \right), B \left(4, 7 \right) \Rightarrow M \left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2} \right) \Rightarrow M \left(3, 3 \right)$$

$$m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{7 - (-1)}{4 - 2} = \frac{8}{2} = 4 \Rightarrow m_d = -\frac{1}{4} \quad (d \perp AB \text{ چون})$$

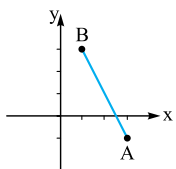
حالا با داشتن مختصات M و شیب عمود منصف، معادله عمود منصف را می نویسیم:

$$M \left(3, 3 \right), m_d = -\frac{1}{4} \Rightarrow y - 3 = -\frac{1}{4}(x - 3) \Rightarrow y = -\frac{1}{4}x + \frac{3}{4} + 3 \Rightarrow y = -\frac{1}{4}x + \frac{15}{4}$$



نکته: از هندسه می دانیم که عمود منصف یک پاره خط، خطی است که در وسط پاره خط بر آن عمود می شود و ویژگی عمود منصف این است که هر نقطه روی عمود منصف یک پاره خط از دو سر آن پاره خط به یک فاصله است، یعنی در شکل روبه رو برای تمام نقاط M داریم: $MA = MB$.

مثال: نقطه ای روی محور عرض ها پیدا کنید که از دو نقطه $(3,-1)$ و $(1,3)$ به یک فاصله باشد.



پاسخ: طبق شکل باید محل برخورد عمود منصف پاره خط AB و محور y را پیدا کنیم.

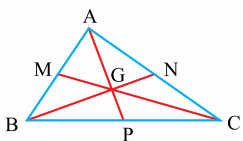
$$A(3,-1), B(1,3) \Rightarrow \text{نقطه وسط } M \left(\frac{3+1}{2}, \frac{-1+3}{2} \right) \Rightarrow M(2,1)$$

$$m_{AB} = \frac{3 - (-1)}{1 - 3} = -2 \Rightarrow \text{شیب عمود} = \frac{1}{2} \Rightarrow \text{معادله عمود منصف} \Rightarrow y - 1 = \frac{1}{2}(x - 2)$$

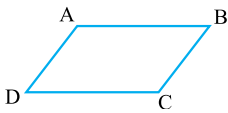
$$\text{نقطه به مختصات } (0,0) \xrightarrow{x=0} y - 1 = -1 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow (0,0)$$

نقطه برخورد میانه های مثلث

برای پیدا کردن نقطه برخورد میانه های مثلث (مرکز ثقل مثلث) باید معادله دوتا از میانه ها را بنویسیم و محل تقاطعشان را مشخص کنیم. اما اگر این سؤال را در حالت کلی حل کنیم می بینیم که در یک مثلث با رئوس A، B و C مختصات نقطه برخورد میانه ها برابر است با:



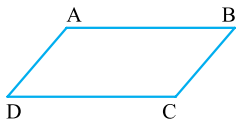
$$G \text{ نقطه همزی میانه ها} \left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3}, \frac{y_A + y_B + y_C}{3} \right)$$



در هر چهارضلعی که قطرهای یکدیگر را نصف می‌کنند (مثل متوازی الاضلاع، مستطیل، مربع و لوزی) مجموع طول‌ها و مجموع عرض‌های دو رأس مقابل با هم برابر است. یعنی به عنوان مثال اگر متوازی الاضلاع ABCD به شکل روبه‌رو باشد داریم:

$$x_A + x_C = x_B + x_D \quad y_A + y_C = y_B + y_D$$

مثال: اگر نقاط $A(2, -1)$ ، $B(3, -2)$ و $C(4, 1)$ سه رأس متوازی الاضلاع ABCD باشند، مختصات رأس D را پیدا کنید.



پاسخ: چون اسم متوازی الاضلاع ABCD داده شده، پس A روبه‌روی C و B روبه‌روی D است:

$$x_A + x_C = x_B + x_D \Rightarrow 2 + 4 = 3 + x_D \Rightarrow x_D = 3$$

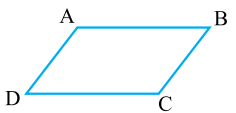
$$y_A + y_C = y_B + y_D \Rightarrow -1 + 1 = -2 + y_D \Rightarrow y_D = 2$$

پس مختصات رأس D به صورت $D(3, 2)$ است.

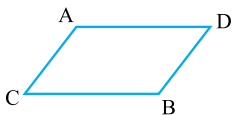
مثال: سه نقطه $(2, 1)$ ، $(-3, 2)$ و $(7, 3)$ سه رأس یک متوازی الاضلاع‌اند. مختصات رأس چهارم را پیدا کنید.

پاسخ: چون در صورت سؤال مشخص نشده است که کدام رأس‌ها روبه‌روی هم هستند، پس باید رأس‌ها را نام‌گذاری کنیم و تمام حالت‌هایی را که ممکن است این چهار رأس دوبه‌دو روبه‌روی هم باشند بررسی کنیم؛ پس اگر $A(2, 1)$ ، $B(-3, 2)$ و $C(7, 3)$ سه رأس متوازی الاضلاع باشند و رأس چهارم را D بنامیم، داریم:

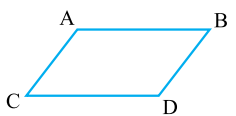
$$A \begin{vmatrix} 2 \\ 1 \end{vmatrix}, B \begin{vmatrix} -3 \\ 2 \end{vmatrix}, C \begin{vmatrix} 7 \\ 3 \end{vmatrix}$$



$$\left. \begin{array}{l} \text{روبه‌روی هم } A, C \\ \text{روبه‌روی هم } B, D \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} x_A + x_C = x_B + x_D \Rightarrow 2 + 7 = (-3) + x_D \\ \Rightarrow x_D = 12 \\ y_A + y_C = y_B + y_D \Rightarrow 1 + 3 = 2 + y_D \\ \Rightarrow y_D = 2 \end{cases} \Rightarrow D \begin{vmatrix} 12 \\ 2 \end{vmatrix}$$



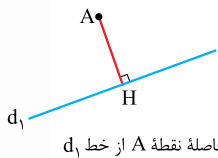
$$\left. \begin{array}{l} \text{روبه‌روی هم } B, A \\ \text{روبه‌روی هم } D, C \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} x_A + x_B = x_C + x_D \Rightarrow 2 + (-3) = 7 + x_D \\ \Rightarrow x_D = -8 \\ y_A + y_B = y_C + y_D \Rightarrow 1 + 2 = 3 + y_D \\ \Rightarrow y_D = 0 \end{cases} \Rightarrow D \begin{vmatrix} -8 \\ 0 \end{vmatrix}$$



$$\left. \begin{array}{l} \text{روبه‌روی هم } D, A \\ \text{روبه‌روی هم } B, C \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} x_A + x_D = y_B + y_C \Rightarrow 2 + x_D = -3 + 7 \\ \Rightarrow x_D = 2 \\ y_A + y_D = y_B + y_C \Rightarrow 1 + y_D = 2 + 3 \\ \Rightarrow y_D = 4 \end{cases} \Rightarrow D \begin{vmatrix} 2 \\ 4 \end{vmatrix}$$

حواسمان باشد که اگر مثلاً در صورت سؤال گفته شده بود متوازی الاضلاع ABCD، دیگر ترتیب رأس‌ها مشخص بود و حل سؤال فقط شامل حالت اول بود؛ یعنی در متوازی الاضلاع ABCD رأس‌های A و C روبه‌روی هم و رأس‌های B و D روبه‌روی هم هستند.

فاصله نقطه از خط



$d_1 = \text{فاصله نقطه } A \text{ از خط } d_1$

فاصله نقطه $A \begin{vmatrix} x_0 \\ y_0 \end{vmatrix}$ از خط به معادله $ax + by + c = 0$ برابر طول پاره‌خط عمودی است که از A بر خط رسم می‌شود:

$$AH = d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

این فاصله را از رابطه روبه‌رو پیدا می‌کنیم:

یعنی مختصات نقطه را در معادله خط قرار می‌دهیم (معادله‌ای که همه اجزای آن به یک طرف منتقل شده است) و حاصلش را داخل قدرمطلق می‌گذاریم و بر جذر مجموع مربع‌های ضرایب x و y ضرب می‌کنیم.

$$d_1: 3x + 4y - 7 = 0$$

$$d_2: 4x + 3y - 1 = 0$$

مثال: نقطه $A(2, 3)$ به کدام خط مقابل نزدیک‌تر است؟

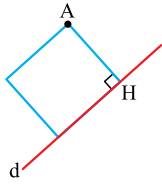
پاسخ: فاصله نقطه A را از هر کدام از خط‌ها پیدا می‌کنیم:

$$A(2, 3), d_1: 3x + 4y - 7 = 0 \Rightarrow AH = \frac{|3(2) + 4(3) - 7|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{|6 + 12 - 7|}{\sqrt{25}} = \frac{11}{5}$$

$$A(2, 3), d_2: 4x + 3y - 1 = 0 \Rightarrow AH' = \frac{|4(2) + 3(3) - 1|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = \frac{|8 + 9 - 1|}{\sqrt{25}} = \frac{16}{5}$$

و چون $\frac{11}{5} < \frac{16}{5}$ است، پس نقطه A به خط اول نزدیک‌تر است.

مثال: نقطه $A(2,1)$ یک رأس و خط d به معادله $y = \frac{-12x+3}{5}$ معادله یکی از اضلاع مربع است. اندازه قطر مربع را پیدا کنید.



پاسخ: طبق شکل روبهرو فاصله نقطه A از خط d برابر ضلع مربع است. معادله خط را به شکل $12x + 5y - 3 = 0$

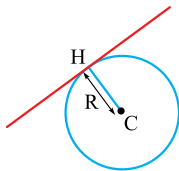
$$AH = \frac{|12(2) + 5(1) - 3|}{\sqrt{12^2 + 5^2}} = \frac{26}{\sqrt{169}} = \frac{26}{13} = 2$$

می نویسیم:

$$2\sqrt{2} = \text{قطر مربع} \Rightarrow \sqrt{2}a = \text{قطر مربع} \Rightarrow a = 2 = \text{ضلع مربع}$$

مثال: نقطه $C(2,-1)$ مرکز دایره‌ای است که بر خط به معادله $y = \frac{3}{4}x$ مماس است. اندازه مساحت دایره را پیدا کنید.

پاسخ: طبق شکل زیر، چون در نقطه تماس، شعاع دایره بر خط مماس عمود است. پس اندازه شعاع دایره برابر فاصله نقطه $C(2,-1)$ از خط $y = \frac{3}{4}x$ است:



$$C(2,-1), y = \frac{3}{4}x \Rightarrow 4y = 3x \Rightarrow 3x - 4y = 0$$

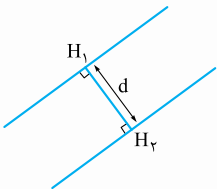
$$CH = R = \frac{|3(2) - 4(-1)|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{|6 + 4|}{\sqrt{9 + 16}} = \frac{10}{\sqrt{25}} = \frac{10}{5} = 2$$

و چون شعاع دایره $R = 2$ است، پس مساحت دایره برابر است با $S = \pi R^2 = 4\pi$

فاصله دو خط موازی

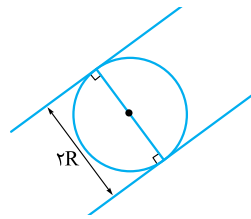
اگر معادله دو خط موازی به صورت $ax + by + c_1 = 0$ و $ax + by + c_2 = 0$ باشد (دقت کنید که ضریب‌های x و y در معادله دو خط، یکسان‌اند) فاصله این دو خط از رابطه مقابل به دست می‌آید:

$$H_1 H_2 = d = \frac{|c_1 - c_2|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$



مثال: دایره‌ای بر دو خط $y = \frac{1}{4}x + 4$ و $x - 2y - 2 = 0$ مماس است. اندازه شعاع دایره را پیدا کنید.

پاسخ: خط $y = \frac{1}{4}x + 4$ که مرتب‌شده‌اش می‌شود $2y = x + 8$ یا $x - 2y + 8 = 0$ و خط $x - 2y - 2 = 0$ با هم موازی‌اند؛ پس طبق شکل شعاع دایره برابر نصف فاصله بین این دو خط است.

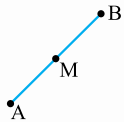


$$\begin{cases} x - 2y + 8 = 0 \\ x - 2y - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow d = \frac{|c_1 - c_2|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|8 - (-2)|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2}} = \frac{10}{\sqrt{5}} = \frac{10\sqrt{5}}{5} = 2\sqrt{5}$$

پس شعاع دایره برابر است با $R = \frac{1}{2}(2\sqrt{5}) = \sqrt{5}$

قرینه نقطه A نسبت به نقطه M

اگر دو نقطه M و A داشته باشیم و بخواهیم قرینه نقطه A را نسبت به نقطه M پیدا کنیم، طبق شکل زیر اگر این نقطه را B بنامیم،



$$\begin{cases} x_M = \frac{x_A + x_B}{2} \Rightarrow \alpha = \frac{x_A + x_B}{2} \Rightarrow x_B = 2\alpha - x_A \\ y_M = \frac{y_A + y_B}{2} \Rightarrow \beta = \frac{y_A + y_B}{2} \Rightarrow y_B = 2\beta - y_A \end{cases}$$

پس قرینه نقطه A نسبت به نقطه M برابر است با $B \begin{vmatrix} 2\alpha - x_A \\ 2\beta - y_A \end{vmatrix}$

مثال: قرینه نقطه $(2,5)$ را نسبت به نقطه $M \begin{vmatrix} 3 \\ 1 \end{vmatrix}$ پیدا کنید.

پاسخ: روش اول: از همان روشی که در بالا گفتیم استفاده می‌کنیم:

$$A \begin{vmatrix} 2 \\ 5 \end{vmatrix}, B \begin{vmatrix} x_B \\ y_B \end{vmatrix}, \text{ وسط } M \begin{vmatrix} 3 \\ 1 \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 3 = \frac{2 + x_B}{2} \Rightarrow x_B + 2 = 6 \Rightarrow x_B = 4 \\ 1 = \frac{5 + y_B}{2} \Rightarrow y_B + 5 = 2 \Rightarrow y_B = -3 \end{cases} \Rightarrow B \begin{vmatrix} 4 \\ -3 \end{vmatrix}$$

روش دوم: از روابطی که به دست آوردیم استفاده می‌کنیم:

$$A \begin{vmatrix} 2 \\ 5 \end{vmatrix}, M \begin{vmatrix} 3 \\ 1 \end{vmatrix} \Rightarrow B \begin{vmatrix} 2\alpha - x_A \\ 2\beta - y_A \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2(3) - 2 \\ 2(1) - 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 \\ -3 \end{vmatrix}$$



نکته: قرینه نقطه $A(x_1, y_1)$ نسبت به مبدأ مختصات برابر $A'(-x_1, -y_1)$ است. مثلاً قرینه نقطه $A(-2, \frac{1}{3})$ نسبت به مبدأ مختصات عبارت است از $A'(2, -\frac{1}{3})$

سوال های امتحانی

جاهای خالی را با عبارت یا عدد مناسب پر کنید.

۱۹- فاصله نقطه $A(2, -1)$ از نقطه $B(3, -2)$ فاصله نقطه $C(4, -3)$ از نقطه B است.

۲۰- فاصله نقطه (.....) روی محور طول ها از دو نقطه $A(2, -3)$ و $B(0, 6)$ یکسان است.

۲۱- مساحت دایره ای که بر دو خط $\sqrt{2}x - y = 5$ و $2x - \sqrt{2}y + \sqrt{2} = 0$ مماس است برابر است.

۲۲- نقطه (.....) از هر سه رأس مثلث به رئوس $(1, 3)$ ، $(-1, 5)$ و $(3, -1)$ به یک فاصله است.

۲۳- قرینه نقطه $C(1, 2)$ نسبت به نقطه $M(-1, 4)$ برابر است.

درستی یا نادرستی موارد زیر را مشخص کنید.

۲۴- فاصله دو نقطه $A(\alpha + 1, \beta - 1)$ و $B(\alpha - 1, \beta + 1)$ از مبدأ یکسان است.

۲۵- مساحت مربعی که دو نقطه $A(1, 5)$ و $B(-2, 8)$ دو رأس مقابلش باشند، برابر ۹ است.

۲۶- خط $3x - 2y = 6$ محور طول ها و عرض ها را به ترتیب در نقاط A و B قطع می کند. اندازه اضلاع مثلث OAB و مساحت آن را پیدا کنید.

۲۷- اگر $A(2, 4)$ و $B(4, -2)$ دو سر قطر یک دایره باشند، مختصات مرکز دایره را بیابید.

۲۸- اگر $A(1, 3)$ یک نقطه روی دایره به مرکز $O(-3, 4)$ باشد، مساحت دایره را بیابید.

۲۹- نقاط $A(1, -3)$ ، $B(1, 1)$ و $C(4, 1)$ سه رأس یک مثلث اند. محیط مثلث را پیدا کنید.

۳۰- نقاط $A(1, 2)$ ، $B(-1, 8)$ و $C(-3, 4)$ سه رأس یک مثلث اند. معادله و طول میانه AM را پیدا کنید.

۳۱- نقاط $A(1, 6)$ ، $B(2, 3)$ و $C(5, 9)$ سه رأس یک مثلث اند. ارتفاع گذرنده از رأس A را رسم می کنیم. نقطه برخورد ارتفاع با ضلع مقابل را پیدا کنید.

۳۲- نقاط $A(2, 3)$ ، $B(3, 5)$ و $C(-1, 7)$ سه رأس متوازی الاضلاع $ABCD$ هستند. مختصات رأس چهارم و محل برخورد قطرهای متوازی الاضلاع را پیدا کنید.

۳۳- قرینه نقطه $A(3, 2)$ را نسبت به نقطه $B(5, -1)$ پیدا کنید.

۳۴- نقاط $A(1, 2)$ ، $B(0, -1)$ و $C(4, -4)$ سه رأس یک مثلث اند.

الف) اندازه ارتفاع AH را پیدا کنید.

گزینه صحیح را انتخاب کنید.

۳۵- فاصله نقطه $A(-2, 2)$ از خط $3x + 4y - 6 = 0$ کدام است؟

۱) $-\frac{4}{5}$ ۲) $\frac{4}{5}$ ۳) $\frac{8}{5}$ ۴) $-\frac{6}{5}$

۳۶- متوازی الاضلاع $OABC$ به شکل روبه رو مفروض است. اگر $AB > OA$ و محیط و مساحت متوازی الاضلاع

به ترتیب برابر $4(\sqrt{2} + 2)$ و ۸ باشد، اندازه طول متوازی الاضلاع کدام است؟

۱) ۲ ۲) $2\sqrt{2}$ ۳) ۴ ۴) ۸

۳۷- کدام یک از خط های زیر به مبدأ مختصات نزدیک تر است؟

۱) $3x + 4y = 3$ ۲) $3x - y + 2 = 0$ ۳) $2x + y - 1 = 0$ ۴) $2x - y = 3$

۳۸- خط $4x - 3y = 0$ بر دایره ای به مرکز $(3, -1)$ مماس است. مساحت دایره را محاسبه کنید.

۳۹- نقطه $A(3, 0)$ یکی از رئوس مربعی است که یک ضلع آن منطبق بر خط $L: y - x = 5$ می باشد. مساحت این مربع را به دست آورید.

۴۰- نقطه $A(-1, 1)$ یک رأس و نقطه $M(2, 1)$ نقطه برخورد قطرهای یک مربع اند. مختصات سه رأس دیگر مربع را پیدا کنید.

۴۱- نقاط $O(0, 0)$ و $A(6, 0)$ دو رأس یک مثلث متساوی الاضلاع هستند مختصات رأس سوم مثلث را پیدا کنید.

۴۲- دو ضلع مقابل مربعی روی خط های $3x + 4y - 3 = 0$ و $4y + 3x = 7$ قرار دارند. مساحت مربع را پیدا کنید.

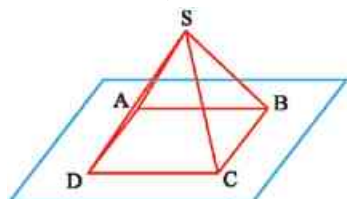
۴۳- خطوط $x + y - a = 0$ و $x + y + a = 0$ دو ضلع مقابل یک مربع اند. اگر مساحت مربع برابر ۱۸ باشد، مقدار a را تعیین کنید.

۴۴- نقاط $A(3, -2)$ و $B(8, 1)$ دو رأس مربع $ABCD$ هستند. اگر رأس D روی محور y ها واقع باشد، مختصات رأس C و D را پیدا کنید.

۴۵- نقاط $A(-2, -1)$ ، $B(4, 5)$ و $C(-1, 7)$ طبق شکل روبه رو، بر روی صفحه مختصات واقع اند.

مختصات نقطه D را چنان پیدا کنید که اگر از نقطه S خارج از صفحه ای که این سه نقطه روی آن قرار

دارند، چهار نخ به نقاط A ، B ، C و D وصل کنیم، یک هرم منتظم ساخته شود.

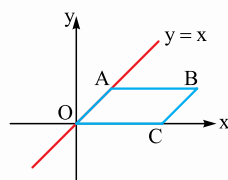


(شبه نهایی ۱۳۰۲)



(نهایی فرداد ۱۳۰۲)

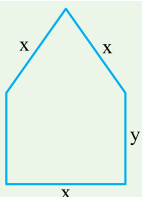
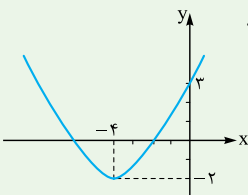
(نهایی فرداد ۱۳۰۲)



(نهایی فرداد ۱۳۰۲)

(نهایی فرداد ۱۳۰۲)

ردیف	آزمون جمع‌بندی فصل اول	رشته علوم تجربی	مدت امتحان: ۹۰ دقیقه	Kheilisabz.com
۱	به سؤالات زیر پاسخ کوتاه دهید (نوشتن راه کوتاه الزامی است). الف) نقطه $A(3, -1)$ وسط قطر مربعی است که یک ضلع آن منطبق بر خط $2y - x = 5$ است. مساحت مربع است. ب) اگر مجموع جذر هر دو ریشه معادله درجه دوم $2x^2 - (m+1)x + \frac{1}{8} = 0$ برابر ۲ باشد، مقدار m برابر است. پ) اگر نقاط $A(2, 5)$ و $B(-2, 3)$ و $C(4, 1)$ رأس‌های مثلث ABC باشند، طول میانه AM برابر است با ت) اگر معادله $\sqrt{x^2 - 3x - 4} + \sqrt{2x^2 + x - a} = 0$ جواب داشته باشد، a برابر است.	۲		
۲	قرینه نقطه $A(1, 2)$ نسبت به خط $y = ax + b$ نقطه $A'(-3, 4)$ است مقدار $a + b$ کدام است؟	۱		
۳	نقاطی روی خط $x - y = 1$ بیابید که فاصله‌شان از خط به معادله $2x + 3y = 4$ برابر $\sqrt{13}$ باشد.	۱		
۴	معادله‌های زیر را حل کنید. الف) $x^6 + 3x^2 + 2 = 0$ ب) $\sqrt{2x-5} = \sqrt{x+1} - 1$ پ) $(x + \frac{1}{x})^2 - x - 2 = \frac{1}{x}$ ت) $\sqrt{x+7} = \sqrt{x} + 1$ ث) $\sqrt{2-x} = x$ ج) $\sqrt{x+2} - \frac{2}{\sqrt{x+2}} = 1$ (نوبتی فردار ۱۴۰۲) چ) $\frac{x}{\sqrt{x+1}} + \frac{\sqrt{x+1}}{x} = 2$	۳/۵		
۵	اگر x_1 و x_2 ریشه‌های معادله $x^2 + (k+1)x + 8 = 0$ باشند و $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = -\frac{3}{4}$ ، مقدار k چه قدر است؟	۱		
۶	اگر در معادله درجه دوم $x^2 + (m+1)x + 64 = 0$ ، یک ریشه دو برابر توان چهارم ریشه دیگر باشد، مقدار m و ریشه‌ها را به دست آورید.	۱		
۷	معادله $x^2 - (m+2)x - \frac{m}{4} = 0$ دارای دو ریشه متمایز مثبت است. حدود m را بیابید.	۱		
۸	معادله درجه دومی بنویسید که ریشه‌های آن مربع ریشه‌های معادله $2x^2 - 5x - 7 = 0$ باشد. (بدون محاسبه ریشه‌ها)	۱		
۹	معادله مقابل را حل کنید: $\frac{x-3}{x^2-1} - \frac{x+2}{x+1} = \frac{5}{2-2x}$	۱		
۱۰	اگر $x = 2$ یک جواب معادله $\frac{1}{x^2+x} + \frac{x^2}{x^2-1} = \frac{ax-1}{x^3-x}$ باشد، حاصل ضرب ریشه‌ها را به دست آورید.	۱		
۱۱	علی به همراه دوستان، ماهانه یک مجله ادبی ۱۶ صفحه‌ای منتشر می‌کنند. پس از حروف چینی مطالب او معمولاً ۲ ساعت برای ویرایش مجله وقت صرف می‌کند. اگر رضا به او کمک کند، کار ویرایش حدود ۱ ساعت و بیست دقیقه به طول می‌انجامد، حال اگر رضا بخواهد به تنهایی کار ویرایش یک شماره از مجله را انجام دهد، نیازمند چه میزان وقت خواهد بود؟	۱		
۱۲	در شکل مقابل نمودار سهمی $p(x) = ax^2 + bx + c$ داده شده است. ضرایب a ، b و c را به دست آورید.	۱/۵		
۱۳	رأس سهمی $y = 3x^2 + kx + m$ نقطه $A(1, -4)$ است. این سهمی محور عرض‌ها را در چه نقطه‌ای قطع می‌کند؟ حاصل ضرب ریشه‌های آن چه قدر است؟	۱		
۱۴	سهمی $y = x^2 - mx + m^2 - 4$ از چهار ناحیه مختصات عبور می‌کند. حدود m را به دست آورید.	۱		
۱۵	یک پنجره به شکل مستطیل است که در بالای آن یک مثلث متساوی‌الاضلاع قرار گرفته است. اگر محیط پنجره m باشد، x را طوری بیابید که پنجره حداکثر نوردهی را داشته باشد.	۲		
۲۰	مجموع نمرات			



پاسخ نامہ تشریحی



۱. صفر

۲. تعریف نشده

۳. قرینه معکوس

۴. مساوی

۵. عمود (چون شیب هایشان $-\frac{1}{2}$ و 2 است.)

۶. بی شمار - شیب های خط گذرنده از دویله های نقطه ها را برابر قرار می دهیم:

$$(1,2), (3,4) \Rightarrow \frac{4-2}{3-1} = 1$$

$$(1,2), (m, m+1) \Rightarrow \frac{m+1-2}{m-1} = \frac{m-1}{m-1} = 1$$

چون شیب ها همواره برابرند، پس برای m بی شمار مقدار به دست می آید.

۷. نادرست، چون شیب خط $mx + my + 2m - 1 = 0$ برابر است با $-\frac{m}{m} = -1$ ؛

پس خط با جهت مثبت محور x زاویه $135^\circ - 45^\circ = 90^\circ$ می سازد.

۸. نادرست، زیرا:

$$(1,2) \Rightarrow (m+1)(1) - (m+2)2 = 3 \Rightarrow -m - 3 = 3 \Rightarrow m = -6$$

پس خط فقط به ازای یک مقدار m از این نقطه می گذرد.

۹. خط با محور x زاویه 135° می سازد؛ پس شیب خط برابر

$\tan 135^\circ = -1$ است. معادله خط را می نویسیم:

$$A(2, -1), m = -1 \Rightarrow y + 1 = (-1)(x - 2) \Rightarrow y = -x + 1$$

حالا مختصات گزینه ها را در این خط جای گذاری می کنیم تا ببینیم کدامشان

در معادله صدق می کنند. $(-1, 2) \Rightarrow 2 = -(-1) + 1 \checkmark$

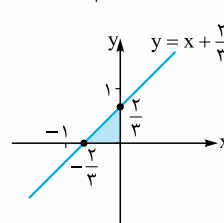
۱۰. ابتدا شیب خط گذرنده از دو نقطه $(2, -1)$ و $(1, 2)$ را پیدا

می کنیم: $m = \frac{3 - (-1)}{1 - 2} = -2 \Rightarrow$ خط عمود $m = \frac{1}{2}$

حالا معادله خط عمود بر این خط و گذرنده از نقطه $(-1, 3)$ را می نویسیم:

$$y - 3 = \frac{1}{2}(x + 1) \Rightarrow y = \frac{1}{2}x + \frac{7}{2} \Rightarrow 2y - x = 7$$

۱۱. ۱. پ، خط را رسم می کنیم:

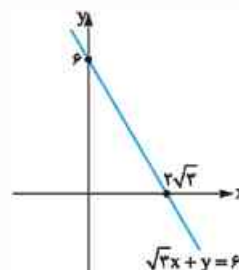


۲. الف، چون شیب خط $y + \sqrt{3}x = 10$ برابر $m = -\sqrt{3} = \tan 120^\circ$ است.

۳. ت، چون شیب خط $y + 2x = 4$ برابر -2 و شیب خط $2y = x - \sqrt{3}$

برابر $\frac{1}{2}$ است.

۴. ب، خط را رسم می کنیم.



۱۲. الف $y = mx + h \Rightarrow y = -2x - 3$

ب دو خط موازی اند و $\frac{1}{2}$ شیب $x - 2y = 5 \Rightarrow$

$$(1, 2), m = \frac{1}{2} \Rightarrow y - 2 = \frac{1}{2}(x - 1) \Rightarrow y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$$

$$2x + y = 3 \Rightarrow \text{شیب} = -2 \Rightarrow \text{شیب خط عمود} = \frac{1}{2}$$

$$(-1, 2), m = \frac{1}{2} \Rightarrow y - 2 = \frac{1}{2}(x + 1) \Rightarrow y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$$

ت ابتدا نقطه تقاطع دو خط $x + 2y = 3$ و $2x - y = 1$ را پیدا می کنیم:

$$\begin{cases} x + 2y = 3 \\ 2x - y = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 2y = 3 \\ 4x - 2y = 2 \end{cases} \xrightarrow{+} \Delta x = 5 \Rightarrow x = 1, y = 1$$

$$(1, 1), (2, -1) \Rightarrow \text{شیب } m = \frac{-1 - 1}{2 - 1} = -2$$

$$(2, -1), m = -2 \Rightarrow y + 1 = -2(x - 2) \Rightarrow y = -2x + 3$$

۱۳. شیب خط برابر $m = \tan 45^\circ = 1$ و از نقطه $A(2, 5)$ می گذرد؛ پس:

روش دوم:

روش اول:

$$y = mx + h$$

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y = x + h$$

$$y - 5 = 1(x - 2)$$

$$(2, 5) \Rightarrow 5 = 2 + h \Rightarrow h = 3 \quad y = x - 2 + 5$$

$$y = x + 3 \quad y = x + 3$$

معمولاً روش دوم روش سریع تری است و خیلی وقت ها بعد از نوشتن $y = mx + h$

با جای گذاری مقادیر x و y نقطه می توانیم h را به طور مستقیم حساب کنیم.

۱۴. اول شیب هر کدام از خط ها را پیدا می کنیم:

$$2x + y - 3 = 0 \Rightarrow y = -2x + 3 \Rightarrow m_1 = -2$$

$$mx - (m + 1)y = 7 \Rightarrow (m + 1)y = mx - 7$$

$$\Rightarrow y = \left(\frac{m}{m+1}\right)x - \frac{7}{m+1} \Rightarrow m_2 = \frac{m}{m+1}$$

الف برای این که دو خط موازی باشند، باید شیب هایشان برابر باشد:

$$m_1 = m_2 \Rightarrow -2 = \frac{m}{m+1} \Rightarrow -2m - 2 = m \Rightarrow m = -\frac{2}{3}$$

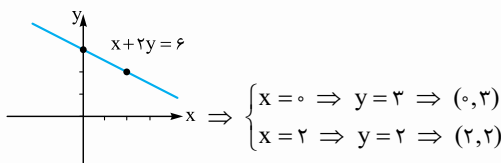
ب برای این که دو خط بر هم عمود باشند، باید حاصل ضرب شیب هایشان

$$m_1 m_2 = -1 \Rightarrow (-2)\left(\frac{m}{m+1}\right) = -1$$

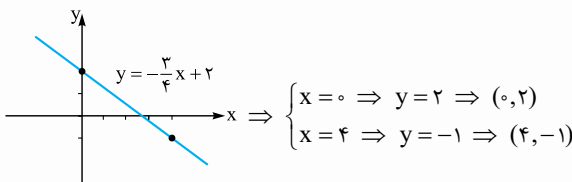
برابر -1 باشد:

$$\Rightarrow \frac{2m}{m+1} = 1 \Rightarrow 2m = m + 1 \Rightarrow m = 1$$

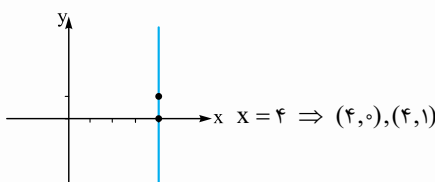
۱۵. الف



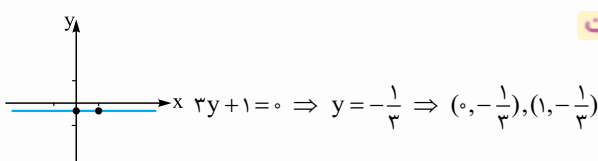
ب



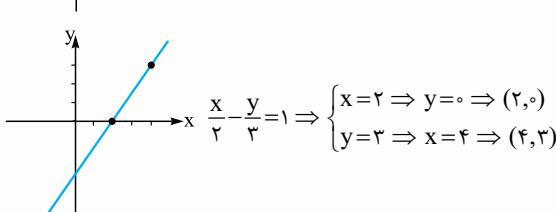
پ

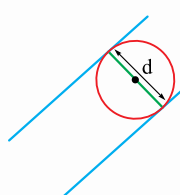


ت



ث





۲۱. زیرا: 3π

$$\begin{cases} \sqrt{2}x - y = 5 \\ 2x - \sqrt{2}y + \sqrt{2} = 0 \end{cases} \xrightarrow{\div \sqrt{2}} \begin{cases} \sqrt{2}x - y = 5 \\ \sqrt{2}x - y + 1 = 0 \end{cases}$$

$$d = \frac{|c - c'|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|-5 - 1|}{\sqrt{2+1}} = \frac{6}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}$$

$$d = 2\sqrt{3} \Rightarrow r = \sqrt{3}, S = \pi r^2 = \pi(\sqrt{3})^2 = 3\pi$$

۲۲. $(-8, -4)$ ، زیرا نقطه‌ای که از هر سه رأس مثلث به یک فاصله است.

نقطه برخورد عمودمنصف‌های مثلث است؛ پس معادله عمودمنصف دو ضلع را می‌نویسیم و با هم قطع می‌دهیم:

$$(1, 3), (-1, 5) \Rightarrow \text{وسط } M \left(\frac{1-1}{2}, \frac{3+5}{2} \right) \Rightarrow M(0, 4)$$

$$m = \frac{5-3}{-1-1} = -1 \Rightarrow \text{شیب عمود} = 1$$

$$\xrightarrow{\text{معادله عمودمنصف}} y - 4 = 1(x - 0) \Rightarrow y = x + 4$$

$$(1, 3), (3, -1) \Rightarrow \text{وسط } N \left(\frac{1+3}{2}, \frac{3-1}{2} \right) \Rightarrow N(2, 1)$$

$$m = \frac{-1-3}{3-1} = -2 \Rightarrow \text{شیب عمود} = \frac{1}{2}$$

$$\xrightarrow{\text{معادله عمودمنصف}} y - 1 = \frac{1}{2}(x - 2) \Rightarrow y = \frac{1}{2}x$$

$$\text{تقاطع: } \begin{cases} y = x + 4 \\ y = \frac{1}{2}x \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{2}x = x + 4 \Rightarrow x = -8 \Rightarrow y = -4$$

پس مختصات نقطه مورد نظر $(-8, -4)$ است.

۲۳. زیرا: $(-3, 6)$

$$\text{نقطه قرینه } C' \left(\begin{matrix} 2\alpha - x_1 \\ 2\beta - y_1 \end{matrix} \right) \Rightarrow C' \left(\begin{matrix} 2(-1) - 1 \\ 2(4) - 2 \end{matrix} \right) \Rightarrow C' \left(\begin{matrix} -3 \\ 6 \end{matrix} \right)$$

۲۴. نادرست، زیرا:

$$OA = \sqrt{(\alpha+1)^2 + (\beta-1)^2} = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha - 2\beta + 2}$$

$$OB = \sqrt{(\alpha-1)^2 + (\beta+1)^2} = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha + 2\beta + 2} \text{ و } OA \neq OB$$

$$AB = \sqrt{(1+2)^2 + (5-8)^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2} \text{ درست، زیرا:}$$

$$3\sqrt{2} \Rightarrow \text{ضلع} = 3 \Rightarrow \text{مساحت} = 3^2 = 9$$

۲۶. برای پیدا کردن نقاط A و B یعنی نقاط برخورد خط با محور xها و yها، یک بار x و بار دیگر y را برابر صفر قرار می‌دهیم:

$$\text{برخورد با محور } x: y = 0 \Rightarrow 3x = 6 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow A(2, 0)$$

$$\text{برخورد با محور } y: x = 0 \Rightarrow -2y = 6 \Rightarrow y = -3 \Rightarrow B(0, -3)$$

حالا طول اضلاع را پیدا می‌کنیم: $OA = |2-0| = 2$ ، $A(2, 0)$ ، $O(0, 0)$

$$O(0, 0)$$
، $B(0, -3) \Rightarrow OB = |0 - (-3)| = 3$

$$A(2, 0), B(0, -3) \Rightarrow AB = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2} = \sqrt{(2-0)^2 + (0-(-3))^2} = \sqrt{13}$$

برای پیدا کردن مساحت مثلث، چون مثلث در رأس O قائم‌الزاویه است، پس:

$$S = \frac{1}{2} \times OA \times OB \Rightarrow S = \frac{1}{2} (2)(3) = 3$$

۱۶. اگر سه نقطه $A(3, 4)$ ، $B(5, 8)$ و $C(a, -2)$ روی یک خط راست باشند، باید شیب AB و BC یکسان باشد؛ پس:

$$m_{AB} = m_{BC} \Rightarrow \frac{4-8}{3-5} = \frac{8-(-2)}{5-a} \Rightarrow 2 = \frac{10}{5-a} \Rightarrow a = 0$$

۱۷. شیب خط $mx + 2my - (m+3) = 0$ برابر است با $-\frac{1}{2}$ ؛ پس باید معادله خطی را بنویسیم که از $A(2, 3)$ می‌گذرد و شیبش برابر $-\frac{1}{2}$ است:

$$y - 3 = -\frac{1}{2}(x - 2) \Rightarrow y = -\frac{1}{2}x + 1 + 3 \Rightarrow y = -\frac{1}{2}x + 4$$

حالا طبق شکل روبه‌رو برای پیدا کردن اندازه مساحت مثلثی که خط با محورهای مختصات می‌سازد، باید مختصات نقاطی را که خط محورهای مختصات را قطع می‌کند، پیدا کنیم:

$$y = 0 \Rightarrow 0 = -\frac{1}{2}x + 4 \Rightarrow x = 8 \Rightarrow A(8, 0)$$

$$x = 0 \Rightarrow y = 4 \Rightarrow B(0, 4)$$

پس اندازه مساحت مثلث OAB برابر است با:

$$S = \frac{1}{2} (OA)(OB) = \frac{1}{2} (8)(4) = 16$$

۱۸. اگر یک شکل فرضی برای مثلث ABC رسم کنیم، نقطه H محل برخورد ارتفاع AH و ضلع BC است. یعنی باید اول معادله ارتفاع AH را پیدا کنیم و بعد نقطه برخورد AH و BC را که همان نقطه H است به دست آوریم.

ارتفاع BC عمود است؛ پس شیبش عکس قرینه BC است:

$$m_{BC} = \frac{3-1}{2-1} = 2 \Rightarrow m_{AH} = -\frac{1}{2}$$

$$\text{معادله } AH: A(3, 1), m_{AH} = -\frac{1}{2} \Rightarrow y - 1 = -\frac{1}{2}(x - 3)$$

$$\Rightarrow y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2} + 1 \Rightarrow y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$$

حالا معادله BC را پیدا می‌کنیم:

$$B(2, 3), m_{BC} = 2 \Rightarrow y - 3 = 2(x - 2) \Rightarrow y = 2x - 1$$

حالا نقطه برخورد BC و AH را پیدا می‌کنیم:

$$\begin{cases} y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2} \\ y = 2x - 1 \end{cases} \Rightarrow -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2} = 2x - 1 \Rightarrow \frac{5}{2}x = \frac{7}{2} \Rightarrow x = \frac{7}{5}$$

$$\Rightarrow x = \frac{7}{5} \Rightarrow y = \frac{9}{5} \Rightarrow H\left(\frac{7}{5}, \frac{9}{5}\right)$$

۱۹. برابر، زیرا

$$A(2, -1), B(3, -2) \Rightarrow AB = \sqrt{(2-3)^2 + (-1+2)^2} = \sqrt{2}$$

$$C(4, -3), B(3, -2) \Rightarrow BC = \sqrt{(4-3)^2 + (-3+2)^2} = \sqrt{2}$$

۲۰. $(-\frac{23}{4}, 0)$ ، معادله عمودمنصف پاره‌خط AB را می‌نویسیم و با محور xها قطع می‌دهیم:

$$A(2, -3), B(0, 6) \Rightarrow \text{نقطه وسط } M \left(\frac{2+0}{2}, \frac{-3+6}{2} \right) \Rightarrow M(1, \frac{3}{2})$$

$$m_{AB} = \frac{6-(-3)}{0-2} = -\frac{9}{2} \Rightarrow \text{شیب عمودمنصف} = \frac{2}{9}$$

$$\text{معادله عمودمنصف: } y - \frac{3}{2} = \frac{2}{9}(x - 1)$$

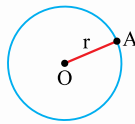
$$\text{برخورد با محور } x: y = 0 \Rightarrow \frac{2}{9}(x - 1) = -\frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow x - 1 = -\frac{27}{2} \Rightarrow x = -\frac{23}{2}$$

۲۷.

$$A(2, 4), B(4, -2) \xrightarrow{\text{مرکز وسط قطر است.}} \begin{cases} x_O = \frac{2+4}{2} = 3 \\ y_O = \frac{4-2}{2} = 1 \end{cases}$$

۲۸. فاصله بین دو نقطه A و O برابر شعاع دایره است، پس:



$$OA = \sqrt{(1-(-3))^2 + (3-4)^2} = \sqrt{16+1} = \sqrt{17}$$

$$r = \sqrt{17}, S = \pi r^2 \Rightarrow S = 17\pi$$

۲۹. برای پیدا کردن محیط مثلث باید طول اضلاع آن را پیدا و با هم جمع کنیم:

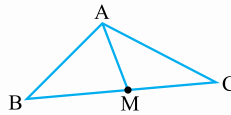
$$A(1, -3), B(1, 1) \Rightarrow AB = |y_A - y_B| = |-3-1| = 4$$

$$A(1, -3), C(4, 1) \Rightarrow AC = \sqrt{(x_A - x_C)^2 + (y_A - y_C)^2} \\ = \sqrt{(1-4)^2 + (-3-1)^2} = \sqrt{9+16} = 5$$

$$B(1, 1), C(4, 1) \Rightarrow BC = |x_B - x_C| = |1-4| = 3$$

پس محیط مثلث برابر است با $AB + AC + BC = 4 + 5 + 3 = 12$.

۳۰. اگر یک مثلث فرضی رسم کنیم،



می بینیم که M وسط BC است و برای

پیدا کردن معادله و طول میانه AM اول

باید مختصات نقطه M را پیدا کنیم.

$$B(-1, 8), C(-3, 4) \Rightarrow M \left(\frac{x_B + x_C}{2}, \frac{y_B + y_C}{2} \right) \Rightarrow M \left(\frac{-1-3}{2}, \frac{8+4}{2} \right) \Rightarrow M(-2, 6)$$

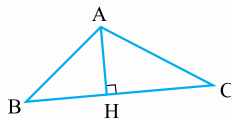
حالا طول AM را پیدا می کنیم:

$$A(1, 2), M(-2, 6) \Rightarrow AM = \sqrt{(x_A - x_M)^2 + (y_A - y_M)^2} \\ = \sqrt{(1-(-2))^2 + (2-6)^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$$

و برای پیدا کردن معادله میانه AM داریم:

$$A(1, 2), M(-2, 6) \Rightarrow m_{AM} = \frac{y_M - y_A}{x_M - x_A} = \frac{6-2}{-2-1} = -\frac{4}{3}$$

$$AM: y - 2 = -\frac{4}{3}(x - 1) \Rightarrow y = -\frac{4}{3}x + \frac{10}{3}$$



۳۱. اگر یک مثلث فرضی رسم کنیم،

می دانیم که برای پیدا کردن نقطه H

یعنی محل برخورد ارتفاع AH با ضلع

BC باید معادله AH و BC را در یک

دستگاه حل کنیم؛ پس باید معادله BC و AH را بنویسیم:

$$BC: B(2, 2), C(5, 9) \Rightarrow m_{BC} = \frac{y_C - y_B}{x_C - x_B} = \frac{9-2}{5-2} = \frac{7}{3}$$

$$\Rightarrow y - 2 = \frac{7}{3}(x - 2) \Rightarrow y = \frac{7}{3}x - \frac{8}{3}$$

$$AH \perp BC \Rightarrow m_{AH} = -\frac{1}{m_{BC}} = -\frac{3}{7}, A(1, 6)$$

$$\Rightarrow AH: y - 6 = -\frac{3}{7}(x - 1) \Rightarrow y = -\frac{3}{7}x + \frac{45}{7}$$

حالا معادله AH و BC را در یک دستگاه حل می کنیم:

$$\begin{cases} y = \frac{7}{3}x - \frac{8}{3} \\ y = -\frac{3}{7}x + \frac{45}{7} \end{cases} \Rightarrow \frac{7}{3}x - \frac{8}{3} = -\frac{3}{7}x + \frac{45}{7}$$

$$\Rightarrow \frac{5}{21}x = \frac{15}{7} \Rightarrow x = 9 \Rightarrow y = 5 \Rightarrow H(9, 5)$$

۳۲. چون A، B و C سه رأس متوالی متوازی الاضلاع ABCD هستند، پس

رأس A مقابل رأس C و رأس B مقابل رأس D است؛ یعنی:

$$A(2, 3), B(3, 5), C(-1, 7)$$

$$\begin{cases} x_A + x_C = x_B + x_D \\ y_A + y_C = y_B + y_D \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2 + (-1) = 3 + x_D \\ 3 + 7 = 5 + y_D \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_D = -2 \\ y_D = 5 \end{cases} \Rightarrow D(-2, 5)$$

محل برخورد قطرهای متوازی الاضلاع نقطه وسط دو رأس مقابل آن است، پس:

$$O \left(\frac{x_A + x_C}{2}, \frac{y_A + y_C}{2} \right) \Rightarrow O \left(\frac{2 + (-1)}{2}, \frac{3 + 7}{2} \right) \Rightarrow O \left(\frac{1}{2}, 5 \right)$$

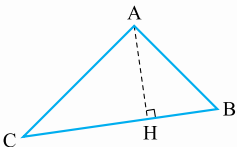
۳۳. از رابطه نقطه قرینه استفاده می کنیم:

$$A \left(\begin{matrix} 3 \\ 2 \end{matrix} \right), B \left(\begin{matrix} 5 \\ -1 \end{matrix} \right) \Rightarrow A' \left(\begin{matrix} 2x_B - x_A \\ 2y_B - y_A \end{matrix} \right) \Rightarrow A' \left(\begin{matrix} 2(5) - 3 \\ 2(-1) - 2 \end{matrix} \right) \Rightarrow A' \left(\begin{matrix} 7 \\ -4 \end{matrix} \right)$$

۳۴. الف) برای پیدا کردن اندازه ارتفاع AH

باید فاصله نقطه A را از ضلع BC پیدا کنیم؛

پس باید اول معادله ضلع BC را بنویسیم:



$$B(0, -1), C(4, -4)$$

$$\Rightarrow m_{BC} = \frac{y_B - y_C}{x_B - x_C} \Rightarrow m_{BC} = \frac{-1-(-4)}{0-4} = -\frac{3}{4}$$

$$BC \text{ معادله: } y - (-1) = -\frac{3}{4}(x - 0) \Rightarrow y = -\frac{3}{4}x - 1$$

$$\Rightarrow 4y = -3x - 4 \Rightarrow 3x + 4y + 4 = 0$$

حالا فاصله رأس A را از ضلع BC پیدا می کنیم:

$$A(1, 2), 3x + 4y + 4 = 0 \Rightarrow AH = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \Rightarrow AH = \frac{|3(1) + 4(2) + 4|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{15}{5} = 3$$

ب) برای به دست آوردن مساحت مثلث، اندازه ارتفاع AH را که داریم،

پس کافی است اندازه ضلع BC را هم پیدا کنیم:

$$B(0, -1), C(4, -4) \Rightarrow BC = \sqrt{(x_B - x_C)^2 + (y_B - y_C)^2}$$

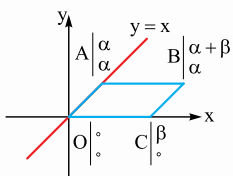
$$= \sqrt{(0-4)^2 + (-1-(-4))^2} = \sqrt{16+9} = 5$$

پس اندازه مساحت مثلث برابر است با:

$$S = \frac{1}{2}(BC)(AH) \Rightarrow S = \frac{1}{2}(5)(3) = \frac{15}{2}$$

۳۵. ۲

$$3x + 4y - 6 = 0 \xrightarrow{A(-2, 2)} AH = \frac{|3(-2) + 4(2) - 6|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{4}{5}$$



۳۶. ۳ با توجه به شکل روبه رو و

محیط و مساحت متوازی الاضلاع می توانیم

بنویسیم:

$$\text{محیط} = 2(OA + OC) = 2((\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}) + \beta)$$

$$\Rightarrow 2(\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}) = 4(\sqrt{2} + 2) \Rightarrow \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} = 2\sqrt{2} + 4 \quad (I)$$

$$\text{مساحت} = \alpha\beta \Rightarrow \alpha\beta = 8$$

طرفین معادله (I) را در β ضرب می کنیم:

$$\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \cdot \beta = (2\sqrt{2} + 4)\beta \Rightarrow \beta^2 - (2\sqrt{2} + 4)\beta + 8\sqrt{2} = 0$$

حالا با تجزیه معادله به دست آمده داریم:

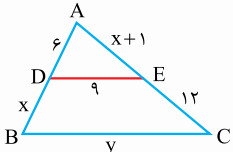
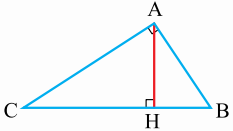
$$(\beta - 2\sqrt{2})(\beta - 4) = 0 \Rightarrow \beta = 2\sqrt{2}, \beta = 4$$

حالا با توجه به این که $AB > OA$ است؛ پس $\beta = 4$ یعنی طول متوازی الاضلاع

برابر ۴ است.

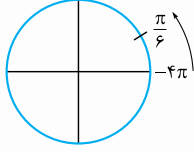
آزمون‌های ثوبت اوّل دوم 9



نمونه امتحان نیمسال اول		رشته تجربی	ریاضی ۲	ردیف
امتحان شماره ۱		مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه	kheilisabz.com	نمره
۱	جاهای خالی را با عبارت‌های مناسب پر کنید. الف) زاویه $\frac{23\pi}{6}$ - در ربع دایره مثلثاتی قرار دارد. ب) تعداد ریشه‌های گویای معادله $x^4 - x^2 - 2 = 0$ برابر است.			۱
۲	درستی یا نادرستی گزاره‌های زیر را تعیین کنید. الف) اگر زاویه بین دو ساق مثلث متساوی‌الساقینی $\frac{1}{4}$ رادیان باشد، آن‌گاه اندازه قاعده این مثلث، کوچک‌تر از اندازه ساق آن است. ب) $\sin \frac{2\pi}{3} = -\sin \frac{\pi}{3}$			۰/۵
۳	نقاط $A(1, -1)$ ، $B(4, 0)$ و $C(0, 2)$ سه رأس یک مثلث‌اند. نوع مثلث را تعیین کنید.			۱
۴	معادله درجه‌دومی با ضرایب گویا بنویسید که یکی از ریشه‌هایش $2 - \sqrt{2}$ باشد.			۰/۵
۵	معادله‌های روبه‌رو را حل کنید: الف) $x^4 + 5x^2 - 36 = 0$ ب) $(x^2 + x)^2 + x^2 + x - 6 = 0$			۱/۵
۶	معادله مقابل را حل کنید. $\frac{x+4}{2x-4} + \frac{x}{x+2} = \frac{4}{x^2-4}$			۱
۷	معادله روبه‌رو را حل کنید. $\sqrt{x-3} + x = 5$			۱
۸	طریقه رسم خط عمود بر یک خط را از نقطه‌ای غیرواقع بر آن توضیح دهید.			۰/۵
۹	خط d و نقطه A به فاصله ۳ سانتی‌متر از آن مفروض است. می‌خواهیم مثلث متساوی‌الساقینی رسم کنیم که یک رأسش نقطه A و طول ساق‌هایش ۵ سانتی‌متر و قاعده‌اش بر خط d قرار داشته باشد. روش رسم را توضیح دهید.			۰/۷۵
۱۰	در شکل روبه‌رو، $DE \parallel BC$ است. مقدار x و y را پیدا کنید.			۱/۷۵
۱۱	هر کدام از حکم‌های کلی زیر را با یک مثال نقض رد کنید. الف) در هر مثلث اندازه هر زاویه خارجی از اندازه هر زاویه داخلی بزرگ‌تر است. ب) مجموع هر دو عدد اول دلخواه همواره یک عدد مرکب است.			۰/۵
۱۲	در مثلث قائم‌الزاویه روبه‌رو $AB = 3$ و $BH = \frac{9}{5}$ است. اندازه AC و CH را پیدا کنید.			۱
۱۳	نمودار تابع $f(x) = \frac{1}{x-2}$ را رسم کنید.			۱
۱۴	دامنه تابع‌های مقابل را پیدا کنید. الف) $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$ ب) $f(x) = \frac{2x+1}{x^2-5x+6}$			۱
۱۵	ضابطه تابع وارون تابع $f(x) = \frac{3}{4}x^3 + \frac{1}{4}$ را پیدا کنید.			۰/۷۵
۱۶	نمودار تابع $f(x) = [x] - 1$ را با دامنه $[-2, 2]$ رسم کنید.			۰/۷۵
۱۷	در هر کدام از موارد زیر ضابطه $f+g$ و $\frac{f}{g}$ و دامنه هر کدام را به دست آورید. الف) $\begin{cases} f(x) = x^2 - 3x + 2 \\ g(x) = x - 2 \end{cases}$ ب) $\begin{cases} f(x) = x \\ g(x) = \sqrt{x} \end{cases}$			۱/۵
۱۸	اندازه طول کمان روبه‌رو به زاویه $\frac{\pi}{6}$ رادیان را در یک دایره به شعاع ۲۰ سانتی‌متر پیدا کنید.			۰/۷۵
۱۹	مقدار عبارت‌های زیر را به دست آورید. الف) $\sin^2(\frac{4\pi}{3}) + \tan(\frac{3\pi}{4}) - \cos \frac{5\pi}{3}$ ب) $\sin 75^\circ + \cos 30^\circ + \tan 585^\circ$			۱
۲۰	نمودار تابع $y = 2 \cos x$ را در بازه $[0, 2\pi]$ رسم کنید.			۱
۲۱	در یک مثلث $\hat{A} = \frac{\pi}{4}$ و $\hat{B} = 5\hat{C}$ است: الف) زاویه‌های $\hat{B}$ و $\hat{C}$ را برحسب رادیان و درجه پیدا کنید. ب) حاصل عبارت $\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C$ را پیدا کنید.			۱/۲۵
۲۰	جمع نمرات			

پاسخنامه امتحان شماره (۱)

الف اول؛ زیرا:

$$-\frac{23\pi}{6} = -\left(\frac{24\pi}{6} - \frac{\pi}{6}\right) = -4\pi + \frac{\pi}{6}$$


ب صفر، زیرا:

$$x^2 = u \Rightarrow u^2 - u - 2 = 0 \Rightarrow (u+1)(u-2) = 0 \Rightarrow u = -1, u = 2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^2 = -1 \\ x^2 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{جواب ندارد.} \\ x = \sqrt{2} \\ x = -\sqrt{2} \end{cases}$$

ب نادرست

الف درست

۳ طول اضلاع مثلث را به دست می آوریم: $A(1, -1), B(4, 0), C(0, 2)$

$$AB = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2} = \sqrt{(1-4)^2 + (-1-0)^2} = \sqrt{9+1} = \sqrt{10}$$

$$AC = \sqrt{(x_A - x_C)^2 + (y_A - y_C)^2} = \sqrt{(1-0)^2 + (-1-2)^2} = \sqrt{1+9} = \sqrt{10}$$

$$BC = \sqrt{(x_B - x_C)^2 + (y_B - y_C)^2} = \sqrt{(4-0)^2 + (0-2)^2} = \sqrt{16+4} = \sqrt{20}$$

می دانیم که:

$$((\sqrt{10})^2 + (\sqrt{10})^2 = (\sqrt{20})^2) \Rightarrow AB^2 + AC^2 = BC^2 \Rightarrow AB = AC$$

پس مثلث قائم الزاویه و متساوی الساقین است.

۴ چون یکی از ریشه ها $2 - \sqrt{2}$ و ضرایب معادله گویا است، ریشه دیگر باید $2 + \sqrt{2}$ باشد. حالا مجموع ریشه ها (S) و حاصل ضرب ریشه ها (P) را حساب می کنیم:

$$S = 2 + \sqrt{2} + 2 - \sqrt{2} = 4$$

$$P = (2 + \sqrt{2})(2 - \sqrt{2}) = 2^2 - (\sqrt{2})^2 = 4 - 2 = 2$$

پس معادله به صورت $x^2 - Sx + P = 0$ یعنی $x^2 - 4x + 2 = 0$ است.

$$۵ \quad x^4 + 5x^2 - 36 = 0 \xrightarrow{x^2=t} t^2 + 5t - 36 = 0$$

$$\Rightarrow (t+9)(t-4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = -9 \\ t = 4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^2 = -9 \\ x^2 = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{غ ق ق} \\ x = 2 \\ x = -2 \end{cases}$$

$$۶ \quad (x^2 + x)^2 + x^2 + x - 6 = 0 \xrightarrow{x^2+x=u} u^2 + u - 6 = 0$$

$$\Rightarrow (u+3)(u-2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} u = -3 \\ u = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + x = -3 \\ x^2 + x = 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^2 + x + 3 = 0 \Rightarrow \Delta = 1 - 4(1)(3) < 0 \text{ ریشه ندارد} \\ x^2 + x - 2 = 0 \Rightarrow (x+2)(x-1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = 1 \end{cases} \end{cases}$$

۶ مخرج مشترک می گیریم و دو طرف را ساده می کنیم:

$$\frac{x+4}{2x-4} + \frac{x}{x+2} = \frac{4}{x^2-4} \Rightarrow \frac{(x+4)(x+2) + x(2x-4)}{2(x-2)(x+2)} = \frac{4}{x^2-4}$$

$$\Rightarrow \frac{x^2 + 6x + 8 + 2x^2 - 4x}{2(x-2)(x+2)} = \frac{4}{(x-2)(x+2)}$$

$$\Rightarrow \frac{3x^2 + 2x + 8}{2} = 4 \Rightarrow 3x^2 + 2x + 8 = 8$$

$$\Rightarrow 3x^2 + 2x = 0 \Rightarrow x(3x+2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \text{ ق ق} \\ x = -\frac{2}{3} \text{ ق ق} \end{cases}$$

$$\sqrt{x-3} + x = 5 \Rightarrow \sqrt{x-3} = 5-x$$

۷

$$\xrightarrow{\text{توان } 2} x-3 = 25-10x+x^2$$

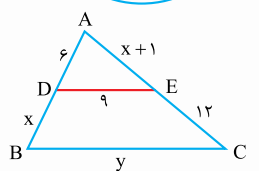
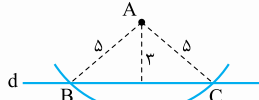
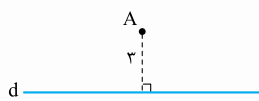
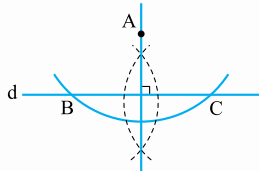
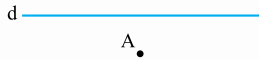
$$\Rightarrow x^2 - 11x + 28 = 0 \Rightarrow (x-4)(x-7) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 4 \text{ ق ق} \\ x = 7 \text{ غ ق} \end{cases}$$

جواب $x = 7$ چون در معادله $\sqrt{x-3} = 5-x$ صدق نمی کند قابل قبول نیست.

۸

خط d و نقطه A را غیر واقع بر آن در

نظر می گیریم.



الف به مرکز A و به شعاعی که خط d را قطع کند کمان می زنیم تا خط d را در دو نقطه B و C قطع کند.

ب عمود منصف پاره خط BC را رسم می کنیم. پ نقطه A روی عمود منصف پاره خط BC واقع است چون از B و C به یک فاصله است. عمود منصف رسم شده همان عمودی است که از نقطه A بر خط d رسم کرده ایم.

۹ نقطه A را به فاصله ۳ سانتی متر از خط d در نظر می گیریم. به مرکز A دایره ای به شعاع ۵ سانتی متر رسم می کنیم تا خط d را در نقاط B و C قطع کند.

مثلث ABC جواب مسئله است.

۱۰ طبق قضیه تالس داریم:

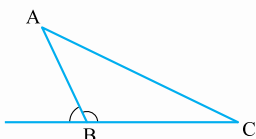
$$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC} \Rightarrow \frac{6}{x} = \frac{x+1}{12}$$

$$\xrightarrow{\text{طرفین و سطین}} x(x+1) = 6 \times 12$$

$$\Rightarrow x^2 + x - 72 = 0 \Rightarrow (x+9)(x-8) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -9 \text{ غ ق ق} \\ x = 8 \end{cases}$$

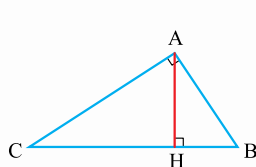
و طبق تعمیم قضیه تالس داریم:

$$\frac{AD}{AB} = \frac{DE}{BC} \Rightarrow \frac{6}{14} = \frac{9}{y} \Rightarrow y = \frac{14 \times 9}{6} = 21$$



۱۱ الف اگر زاویه داخلی منفرجه باشد زاویه خارجی اش حاده است، مثل شکل روبه رو.

ب اگر عدد ۲ و ۵ را در نظر بگیریم $2+5=7$ است که یک عدد اول است.



$$۱۲ \quad AB = 2, BH = \frac{9}{5}$$

$$\text{می دانیم: } AB^2 = BH \times BC$$

$$\Rightarrow 9 = \frac{9}{5} \times BC \Rightarrow BC = 5$$

$$CH = BC - BH \Rightarrow CH = 5 - \frac{9}{5} = \frac{25-9}{5} = \frac{16}{5}$$

$$AC^2 = CH \times BC \Rightarrow AC^2 = \frac{16}{5} \times 5 \Rightarrow AC^2 = 16 \Rightarrow AC = 4$$

۱۳ برای رسم نمودار تابع $f(x) = \frac{1}{x-2}$ ابتدا نمودار تابع $y = \frac{1}{x}$ را رسم می کنیم و سپس نمودار را ۲ واحد در راستای محور xها به سمت راست منتقل می کنیم:

