

مقدمه ناشر

یک application باحالی هست به اسم way of life نسخه ابتدایی اش (Demo Version) در apple store به طور رایگان هست. می‌تونید برش دارید. حتمن نسخه اندرویدی هم داره!

اون‌جا می‌تونید کلی از عادات‌تون رو که می‌خوان داشته باشین یا نداشته باشین رو لیست کنید و هر روز ثبت کنید.

مثلن مسواک‌زدن، TV نگاه‌کردن، صبحونه‌خوردن و ... خیلی چیزای دیگه که شاید نشه اینجا گفتش. 😊

می‌گن آدم چیزی نیست جز یک package گنده از عادات‌هاش!

عادت‌هایی که به مرور توی ناخودآگاهش شکل گرفتن و آدم در واقع با اون‌ها زندگی می‌کنه. فکر‌هاش، واکنش‌ها، احساسات، هیجانات و تصمیماتش!

اگر آدم قاب عادت‌هاش رو شناسه و خودش رو به دست اون‌ها بسپاره خیلی خطرناک می‌شه!

بیرون آمدن از حلقه عادات هم که واقعن سخته.

این app کمک می‌کنه بتونید عادت‌های خوب یا بد رو ثبت کنید و در اصلاح اون‌هایی که برای اصلاحش انگیزه دارید (چی گفتیم!)

یک مقدار راحت‌تر باشید.

چون به شما یک سری عدد، رقم و نمودار می‌ده که در هفته، ماه، سال یا ... گذشته چند روزش رو چه‌جوری گذروندید. خوشحال یا

ناراحت، با مسواک یا بی مسواک، با لبخند یا بی لبخند! و این یک دید کلی به آدم می‌ده که واقعن واقعن چه‌جوری زندگی کرده!

کیوان صارمی، علی شهبازی و امیر زراندوز دست‌میرزاد.

کارکردن برای بچه‌های انسانی واقعن لذت بیشتری داره، مرسی ازتون.

لبخند بزن برادر!



این کتاب شامل محتوای تکمیلی است. ✓

توی بعضی از صفحه‌های این کتاب آیکون  رو می‌بینی. هر کدوم از این آیکون‌های شماره‌دار ممکنه کلید یه گنج باشن، فقط کافیه دستورالعمل ساده زیر رو اجرا کنی تا به گنج برسی.

1 QR CODE پشت جلد کتاب رو اسکن کن. 

2 شماره آیکون رو در باکس «جست‌وجوی گد» وارد کن و دکمه جست‌وجو رو بزن و محتوای تکمیلی رو ببین. محتوای تکمیلی این کتاب شامل درس ۲: سری‌های زمانی و آزمون‌ها است.

مقدمه مؤلف

برای بیشتر آدماء، ریاضی یعنی عددای خشک و فرمولای بی‌احساس. اما اگه بگم بعضیا عدد «۲» رو مثل برگای خشک پاییز می‌بینن چی؟ یا عدد «۸» رو مثل یه پیرمرد اخمویی تصور می‌کنن که همیشه خاکستریه. این یه اختلال نیست، یه تجربه خاصه که بهش می‌گن Synesthesia (حس آمیزی یا هم‌حسی). به نظرم عدد اونا قدرام خشک نیستن؛ خوب که نگاه کنیم، می‌بینیم پشت هر عدد یه احساس یا داستانه. امیدوارم بعد از خوندن این کتاب، وقتی یه فرمول یا عدد رو می‌بینی، فقط چندتا نماد خشک نباشن برات. یه خاطره رو برات زنده کنن یا یه حس خوب رو بیارن کنارت.

این کتاب سه تا بخش داره:

❖ **درس‌نامه:** این‌جا سعی کردیم هر چیزی رو که لازمه بدونی، قدم‌به‌قدم و شفاف بهت یاد بدیم. از مفاهیم پایه‌ای گرفته تا نکته‌های کنکوری و تکنیک‌هایی که کمک می‌کنن تست‌ها رو سریع‌تر و هوشمندانه حل کنی.

❖ **تست‌ها:** تستا رو سه قسمت کردیم براتون:

❶ **آموزش و تمرین** تو این قسمت تستا رو براتون طبقه‌بندی کردیم. این تستا بیشتر حکم دست‌گرمی رو دارن تا با حلشون یک بار کل مطالب رو مرور کنی.

❷ **تثبیت و تسلط** این‌جا سؤالا یه کم جدی‌تر می‌شن و خبری از طبقه‌بندی نیست، ولی با دقت خیلی زیادی سؤالا رو براتون مرتب کردیم تا با حل کردنشون به مطالب مسلط بشی.

❸ **مثل‌کنکورهای سخت** تو این چند سال کنکور سخت کم نداشتیم. به همین خاطر، در بخش آخر تستای هر درس یه سری تست با ایده جدید، خلاقانه و سخت و پرمحاسبه برات آوردیم. لطفاً بعد از حل تستای «آموزش و تمرین» و «تثبیت و تسلط» با مشورت معلم یا مشاورت سراغ این تستا برو.

❖ **پاسخ‌های تشریحی:** پاسخ سؤالاها رو گام‌به‌گام و واقعاً تشریحی نوشتیم براتون. لطفاً حتی اگه سؤال رو درست هم حل کردی، پاسخشو بررسی کن. ممکنه یه روش یا نکته جدید یاد بگیری.

یه کم در مورد آیکونا براتون بگیم:

تکنیک تست‌زنی این‌جا بهت یاد دادیم تیپ‌های مهم سؤالا رو چه‌جوری مرحله‌به‌مرحله حل کنی.

نکته: یه مطلب مهم کنکوری که احتمال طرح تست ازش زیاده.

شفاف‌سازی: قسمتی از صورت سؤال رو که مبهم یا غیرمستقیم حرف می‌زنه، این‌جا براتون شفافش می‌کنیم.

تیزبازی: روش خلاقانه حل یک سؤاله.

تله: اشتباهی رو که ممکنه انجام بدی و به گزینه اشتباه برسی، این‌جا توضیح می‌دیم.

حواستون باشه: توضیح برای این‌که یه وقت اشتباه برداشت نکنی.

یه توصیه: پیشنهادی که بهتره بهش گوش کنی.

برای این کتاب خیلیا زحمت کشیدن که جا داره ازشون تشکر کنیم:

❖ مهندس سبزمیدانی، مدیر تألیف کتاب که با آموزش‌ها و پیشنهادهای دقیق و مؤثر همراهمون بودن. مرسی بابت همه‌چیز.

❖ خانم مریم طاهری، مسئول محتوای کتاب که خیلی زحمت کشیدن.

❖ ممنون از آقایان فرامرز سلطان کریمی، داوود بوالحسنی، علیرضا محمدی و یاسر راش که بسیار دقیق کتاب رو ویرایش کردن.

❖ ممنون از خانم مونا باجلان بابت پیگیری‌ها و صبوری‌هاش.

❖ تعدادی از سؤالات کتاب، گلچینی از آزمونای خیلی سبزه؛ دم همه طراحای خفن آزمونمون گرم.

❖ ممنون از تیم خفن تولیدمون که سنگ تموم گذاشتن.

در آخر درسته که خیلی از کتاب تعریف کردیم، ولی هیچ‌چیزی بی‌نقص نیست؛ پس اگه اشتباه یا غلطی دیدید یا نقد و پیشنهادی داشتید، ممنون می‌شیم بهمون بگید.

فهرست

فصل اول: آشنایی با منطق و استدلال ریاضی

درس‌نامه	تست	
۸	۲۲	درس ۱: منطق ریاضی و گزاره‌ها
۳۰	۳۵	درس ۲: استدلال ریاضی

فصل دوم: تابع

۴۱	۴۵	درس ۱: یادآوری تابع
۴۷	۵۷	درس ۲: توابع ثابت، چند ضابطه‌ای و همانی
۶۴	۸۰	درس ۳: توابع پلکانی و قدر مطلق
۹۰	۹۴	درس ۴: اعمال بر روی توابع (جمع، تفریق، ضرب و تقسیم)

فصل سوم: آمار

۱۰۰	۱۰۴	درس ۱: شاخص‌های آماری
۱		درس ۲: سری‌های زمانی
۲		آزمون‌ها



پاسخ‌نامه

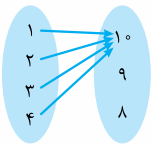
پاسخ‌نامه

۱۱۲		پاسخ‌نامه تشریحی
۱۹۸		پاسخ‌نامه کلیدی

تابع ثابت در نمایش‌های مختلف

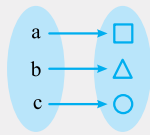
۱. نمایش پیکانی

در نمایش پیکانی یک تابع ثابت، همه پیکان‌ها به یک عضو از مجموعه دوم وارد می‌شوند.
نمونه: نمودار پیکانی مقابل، یک تابع ثابت است، چون همه پیکان‌ها به یک عضو از مجموعه دوم وارد شده‌اند و برد تک‌عضوی است: $R_F = \{1^0\}$

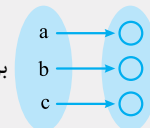
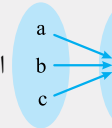


تکنیک تست‌زنی

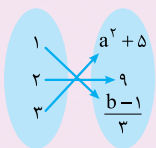
به تابع مقابل نگاه کنید. به نظرتان می‌تواند یک تابع ثابت باشد؟ در نگاه اول نه، چون فلش‌ها به یک عضو وارد نشده‌اند، اما اگر $\square = \triangle = \bigcirc$ باشد چه‌طور؟ در این حالت می‌توانیم مثلاً به جای $\square$ ، $\triangle$ و $\bigcirc$ بگذاریم؛



تا به تابع برسیم. این تابع همان است که ثابت است؛ پس هر وقت در تست‌ها دیدید



برای یک تابع ثابت، فلش‌ها به یک عضو وارد نمی‌شوند، انتهای فلش‌ها را مساوی هم بگذارید.



تست: اگر نمودار پیکانی مقابل نشان‌دهنده یک تابع ثابت باشد، مقدار کوچک‌تر $b-a$ کدام است؟

- (۱) ۳۰
(۲) ۲۹
(۳) ۲۶
(۴) ۲۷

$$\begin{aligned} & \text{(I)} \quad a^2 + 5 = 9 = \frac{b-1}{3} \\ & \text{(II)} \end{aligned}$$

پاسخ ۳: پیکان‌ها به یک عضو وارد نشده‌اند، پس برای این که تابع ثابت بشود، باید خروجی‌هایشان را مساوی هم بگذاریم:

$$D) a^2 + 5 = 9 \Rightarrow a^2 = 4 \xrightarrow[\text{می‌گیریم.}]{\text{جذر}} a = \pm 2$$

گام ۱: حالا معادله‌های (I) و (II) را جداجدا حل می‌کنیم:

$$II) \frac{9}{1} = \frac{b-1}{3} \xrightarrow[\text{طرفین وسطین}]{\text{}} 9 \times 3 = b-1 \Rightarrow 27 = b-1 \Rightarrow b = 28$$

$$\begin{cases} a = 2, b = 28 : b-a = 28-2 = 26 \\ a = -2, b = 28 : b-a = 28-(-2) = 28+2 = 30 \end{cases}$$

گام ۲: در آخر مقادیر $b-a$ را حساب می‌کنیم:

بنابراین مقدار کوچک‌تر $b-a$ می‌شود ۲۶.

۲. نمایش زوج مرتبی

در نمایش زوج مرتبی یک تابع ثابت، مؤلفه دوم همه زوج مرتب‌ها برابرند.
نمونه: تابع مقابل ثابت است.

$$f = \{(1, \sqrt{2}), (2, \sqrt{2}), (5, \sqrt{2}), (8, \sqrt{2})\}$$

تست: اگر برد تابع $f = \{(a, 5), (b, 2b+a), (3, 2a)\}$ تک‌عضوی باشد، مجموع اعضای دامنه آن کدام است؟

- (۱) ۷
(۲) $\frac{27}{4}$
(۳) $\frac{13}{2}$
(۴) ۴

$$\begin{aligned} & \text{(I)} \quad 5 = 2b + a = 2a \\ & \text{(II)} \end{aligned}$$

پاسخ ۲: شفاف‌سازی: «برد تابع f تک‌عضوی باشد»، یعنی f یک تابع ثابت است.

گام ۱: $f = \{(a, 5), (b, 2b+a), (3, 2a)\}$ تابعی ثابت است، پس مؤلفه دوم زوج مرتب‌هایش باید مساوی باشند:

$$D) 2b + a = 2a \Rightarrow 2b = a (*)$$

گام ۲: حالا معادله‌های (I) و (II) را جداجدا بررسی می‌کنیم:

$$II) 2b + a = 5 \xrightarrow[\text{هشتم.}]{\text{۲b همون a هستش.}} a + a = 5 \Rightarrow 2a = 5 \Rightarrow a = \frac{5}{2}$$

$$2b = \frac{5}{2} \Rightarrow b = \frac{5}{4}$$

$a = \frac{5}{2}$ را در (*) جای‌گذاری می‌کنیم تا مقدار b هم پیدا بشود:

$$D_f = \{a, b, 3\}$$

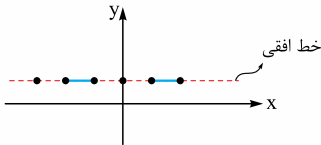
گام ۳: دامنه $f = \{(a, 5), (b, 2b+a), (3, 2a)\}$ همان مجموعه مؤلفه‌های اول زوج مرتب‌هایش است؛ پس D_f می‌شود:

$$a + b + 3 = \frac{5}{2} + \frac{5}{4} + 3 = \frac{10 + 5 + 12}{4} = \frac{27}{4}$$

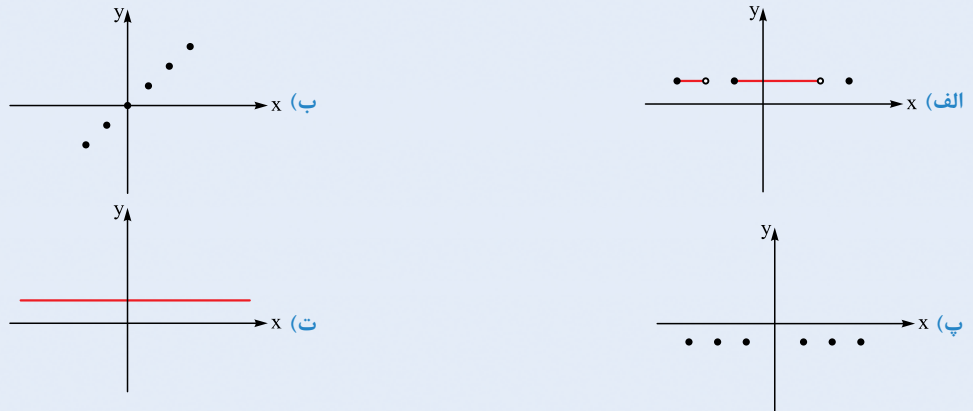
بنابراین مجموع اعضای دامنه f برابر است با:

۳. نمایش مختصاتی اگر نمودار یک تابع ثابت را بکشیم، همه قسمت‌هایش روی یک خطی افقی قرار می‌گیرند.

نمونه: نمودار مقابل برای یک تابع ثابت است:



مثال آموزشی: ثابت بودن یا نبودن توابع زیر را بررسی کنید.



پاسخ: تمام قسمت‌های نمودارهای (الف)، (پ) و (ت) روی یک خط افقی قرار دارند؛ پس تابع ثابت محسوب می‌شوند، ولی این اتفاق برای تابع (ب) نیفتاده؛ پس این تابع، ثابت نیست.

۴. نمایش ضابطه‌ای توابع ثابت ضابطه‌شان به صورت $f(x) = c$ است.

نمونه: توابع $f(x) = 1$ ، $f(x) = 1/7$ و $f(x) = \pi$ همگی ثابت‌اند.

تست: تابع با ضابطه $f(x) = 5$ مفروض است. اگر $f(\sqrt{2}) + f(\pi) = 2a - 1$ باشد، مقدار $\frac{f(a)}{a}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{11}{10}$ (۲) $\frac{10}{11}$ (۳) $\frac{55}{2}$ (۴) $\frac{2}{55}$

پاسخ: ۲: $f(x) = 5$ ، ضابطه یک تابع ثابت است، یعنی جای x هر چیزی قرار بدهیم؛ باز هم ۵ تحویل می‌گیریم، پس: $f(\sqrt{2}) = 5$ و $f(\pi) = 5$

کام: مقادیر بالا را در تساوی $f(\sqrt{2}) + f(\pi) = 2a - 1$ جای‌گذاری می‌کنیم: $5 + 5 = 2a - 1 \Rightarrow 10 = 2a - 1 \Rightarrow 2a = 11 \Rightarrow a = \frac{11}{2}$

کام: حالا خواسته سؤال را به ازای $a = \frac{11}{2}$ به دست می‌آوریم:

$$\frac{f(a)}{a} = \frac{f(\frac{11}{2})}{\frac{11}{2}} = \frac{5}{\frac{11}{2}} = \frac{10}{11}$$

تکنیک تست‌زنی: در ضابطه یک تابع ثابت، خبری از مجهول نیست، پس هروقت یک ضابطه مثل $f(x) = \bigcirc x^2 + \square x + 5$ به شما دادند و گفتند،

برای یک تابع ثابت است، کاری کنید که مجهول‌ها (این‌جا x و x^2 مجهول‌اند) حذف بشوند؛ یعنی $\bigcirc$ و $\square$ را مساوی صفر بگذارید.

تست: اگر $f(x) = (a-3)x^2 + (\frac{b}{a}-2)x + \frac{b}{4}$ یک تابع ثابت باشد، مقدار $af(b)$ کدام است؟

- (۱) $3/5$ (۲) 4 (۳) $4/5$ (۴) 5

پاسخ: ۳: گفتیم در تابع ثابت خبری از x و x^2 نیست؛ پس باید ضرایب x^2 و x را مساوی صفر بگذاریم:

$$\begin{cases} x^2 \text{ ضریب } = 0 \Rightarrow a - 3 = 0 \Rightarrow a = 3 \\ x \text{ ضریب } = 0 \Rightarrow \frac{b}{a} - 2 = 0 \xrightarrow{a=3} \frac{b}{3} - 2 = 0 \Rightarrow \frac{b}{3} = 2 \Rightarrow b = 6 \end{cases}$$

کام: مقادیر a و b را در $f(x) = (a-3)x^2 + (\frac{b}{a}-2)x + \frac{b}{4}$ جای‌گذاری می‌کنیم. این‌جا دیگر ضرایب x^2 و x را حساب نمی‌کنیم؛ مستقیم آن‌ها را صفر می‌گذاریم:

$$f(x) = 0x^2 + 0x + \frac{6}{4} \Rightarrow f(x) = \frac{3}{2}$$

$$af(b) \xrightarrow{a=3} 3 f(6) = 3 \left(\frac{3}{2} \right) = \frac{9}{2} = 4 \frac{1}{2}$$

بنابراین خواسته سؤال می‌شود:

تست: اگر تابع $f(x) = (1-ax)(2-x) - bx^2$ یک ثابت باشد، مقدار $a+b$ کدام است؟

۱/۵ (۴)

-۱ (۳)

-۵/۵ (۲)

صفر (۱)

پاسخ ۳: **گام ۱:** این جا اول باید تابع را به فرم $f(x) = \bigcirc x^2 + \square x + \triangle$ بنویسیم: $f(x) = (1-ax)(2-x) - bx^2 = (2-x-2ax+ax^2) - bx^2$
ضرب رو انجام می‌دهیم.

حالا جمله‌های مشابه را کنار هم می‌نویسیم و فاکتور می‌گیریم:
 $f(x) = (ax^2 - bx^2) + (-x - 2ax) + 2 = (a-b)x^2 + (-1-2a)x + 2$
فاکتور از x^2 فاکتور از x

گام ۲: الان باید ضریب x^2 و x را مساوی صفر بگذاریم تا هیچ مجهولی نداشته باشیم و تابعمان ثابت بشود:

$$\begin{cases} \text{ضریب } x^2 = 0 \Rightarrow a-b=0 \Rightarrow a=b \\ \text{ضریب } x = 0 \Rightarrow -1-2a=0 \Rightarrow -2a=1 \Rightarrow a=-\frac{1}{2} \xrightarrow{\text{بالا } a=b \text{ شد}} b=-\frac{1}{2} \end{cases}$$

بنابراین $a+b = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} = -1$ می‌شود.

تکنیک تست‌زنی: بعضی وقت‌ها یک تساوی مثل $2f(f(a+b)) = f(f(a)) \cdot f(f(b))$ می‌دهند و می‌گویند: اگر تابع f ثابت باشد، ضابطه‌اش را به دست بیاورید. این جور وقت‌ها:

اول ضابطه تابع را به صورت $f(x) = c$ در نظر بگیرید.

بعد f و محتویات داخل پرانتزش را حذف کنید و به جایش بنویسید c . مثلاً این جا داریم:

$$2f(f(a+b)) = f(f(a)) \cdot f(f(b)) \Rightarrow 2c = c \times c \Rightarrow 2c = c^2 \Rightarrow c^2 - 2c = 0 \Rightarrow c(c-2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} c=0 \\ c-2=0 \Rightarrow c=2 \end{cases}$$

فاکتور از c

f و هرچی که توی پرانتز جلوش هست رو حذف می‌کنیم و جاش می‌نویسیم c

پس ضابطه تابع یکی از این‌هاست: $f(x) = 0$ یا $f(x) = 2$

تست: اگر f یک تابع ثابت و تساوی $f(f(x)+3) \times f(\frac{f(x)}{3}) = 2f(x) - 1$ برقرار باشد، مقدار $f(1-f(\sqrt{3}))$ کدام است؟

صفر (۴)

۱ (۳)

$1-\sqrt{3}$ (۲)

$\sqrt{3}$ (۱)

پاسخ ۳: **گام ۱:** فرض می‌کنیم ضابطه تابع ثابت به صورت $f(x) = c$ باشد. حالا به جای هر f و محتویات داخل پرانتز جلوش، c می‌گذاریم:

$$f(f(x)+3) \times f(\frac{f(x)}{3}) = 2f(x) - 1 \Rightarrow c \times c = 2c - 1 \Rightarrow c^2 = 2c - 1 \Rightarrow c^2 - 2c + 1 = 0$$

گام ۲: طبق اتحاد مربع دو جمله‌ای، $c^2 - 2c + 1$ همان $(c-1)^2$ است؛ پس:

$$(c-1)^2 = 0 \Rightarrow c-1=0 \Rightarrow c=1$$

پس ضابطه تابع می‌شود:

گام ۳: $f(x) = 1$ شد. پس اگر جای x ، $1-f(\sqrt{3})$ هم بگذاریم، ۱ تحویل می‌گیریم؛ یعنی:

$$f(1-f(\sqrt{3})) = 1$$

توابع چندضابطه‌ای

توابعی که تا این جا بررسی کردیم همگی یک ضابطه داشتند. حالا می‌خواهیم به سراغ توابعی برویم که به جای یک ضابطه چندتا ضابطه دارند. مثلاً

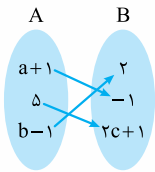
$$f(x) = \begin{cases} 5x-1 & x \geq 2 \\ 2x+3 & x < 2 \end{cases}$$

همین طور است. دامنه‌اش به دو بخش $x \geq 2$ و $x < 2$ تقسیم شده و هر بخش یک ضابطه جداگانه دارد. به این جور توابع

که بخش‌های مختلف دامنه‌شان، ضابطه‌های مختلفی دارند، توابع چندضابطه‌ای می‌گوییم. مثلاً تابع بالا چون دوتا ضابطه دارد، یک تابع دوضابطه‌ای و تابع

$$g(x) = \begin{cases} x & x \geq 3 \\ 2x & 2 < x < 3 \\ x+1 & x \leq 2 \end{cases}$$

چون سه تا ضابطه دارد، تابعی سه‌ضابطه‌ای است.



۲۰۱- اگر نمایش پیکانی روبه‌رو مربوط به یک تابع همانی باشد، میانگین اعداد a ، b و c کدام است؟

- (۱) $\frac{7}{3}$ (۲) ۲ (۳) $\frac{4}{3}$ (۴) ۱

۲۰۲- در تابع همانی $f = \{(a+1, -2), (2b+1, 2-a), (c, -b+1)\}$ ، واریانس اعداد a^2 ، b^2 و c کدام است؟

- (۱) ۱۶ (۲) $\frac{50}{3}$ (۳) ۱۷ (۴) $\frac{52}{3}$

۲۰۳- اگر تابع $f = \{(a-11, 7-a), (6b, b^2+a), (c-a, \frac{b}{3}+1)\}$ همانی باشد، میانگین اعضای برد تابع f چند برابر b است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴ (آزمون‌های آزمایشی خیلی سبز)

۲۰۴- اگر f یک تابع همانی و $\frac{f(1)+af(2)}{f(3)} = f(a)$ باشد، مقدار a کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۲۰۵- تابع همانی f مفروض است. اگر $3f(x) = f(x+1) + 2f(x+2) + a$ باشد، مقدار $f(a)$ کدام است؟

- (۱) ۸ (۲) -۶ (۳) -۵ (۴) ۷

۲۰۶- اگر $f(x) = a(x+1) + b$ یک تابع همانی باشد، مقدار $f(a+b)$ کدام است؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) -۱ (۴) ۳

۲۰۷- تابع همانی f را در نظر بگیرید. اگر تابع $g(x) = a(f(x)+1)^2 - f(bx+c)$ همانی باشد، مقدار $a+b+c$ کدام است؟

- (۱) -۳ (۲) -۲ (۳) -۱ (۴) ۱

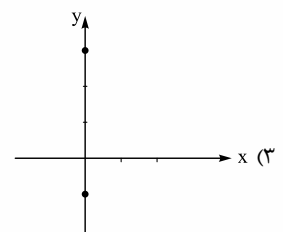
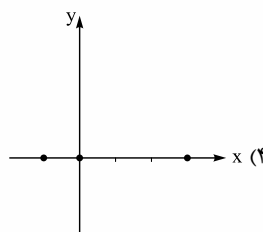
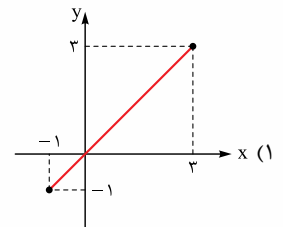
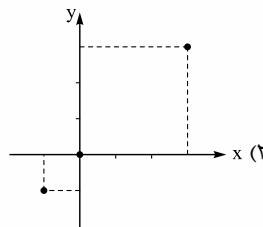
۲۰۸- ضابطه $f(x) = (ax+1)(x+b) + 2$ مربوط به تابع همانی است. حاصل $f(\sqrt{a-b})$ کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) -۲ (۳) $\sqrt{2}$ (۴) $-\sqrt{2}$

۲۰۹- اگر $f(x) = \frac{(a-3)x+b}{c-1}$ یک تابع همانی و $g = \{(3, a), (b, 6-c), (7, d-1)\}$ تابع ثابت باشد، مقدار $a+b+c+d$ کدام است؟

- (۱) ۸ (۲) ۹ (۳) ۱۰ (۴) ۱۱

۲۱۰- کدام یک از گزینه‌های زیر نمودار یک تابع همانی با دامنه $\{-1, 0, 3\}$ را نشان می‌دهد؟



۲۱۱- اگر نقطه $(2, m^2 - 3m + 4)$ روی نیمساز ناحیه اول و سوم باشد، مقدار m کدام است؟

- (۱) ۱ و ۲ (۲) ۲ و -۱ (۳) -۲ و ۱ (۴) -۲ و -۱

۲۱۲- اگر نقطه $(m, m^2 - m - 8)$ روی نیمساز ناحیه سوم باشد، m کدام است؟

- (۱) فقط ۲ (۲) فقط -۴ (۳) -۲ یا -۴ (۴) -۲ یا ۴

(خارج از کشور ۹۸)

۲۱۳- اگر هر سه زوج مرتب $(4, 3n - n^2)$ ، $(n^2 + 20, 1)$ و $(m+n, 1)$ بر روی نیمساز ناحیه اول و سوم باشند، m کدام است؟

- (۱) -۳ (۲) -۲ (۳) ۲ (۴) ۶

تثبیت و تسلط ؟

۲۱۴- رابطه $f = \{(m+3n, 2t^2), (-2, n^2+2n), (1-3m, 8)\}$ یک تابع ثابت با دامنه دوعضوی است. اگر m و n عضوی از اعداد طبیعی باشند، مجموع دو

عضو دامنه چه قدر است؟

(خارج از کشور ۱۴۰۱)

- (۱) ۲۳ (۲) ۲۱ (۳) ۵ (۴) ۳



۲۱۵- اگر واریانس اعضای برد تابع $f = \{(m, m^2 + 2m), (1, k^2 - k - 3), (k^2 - k, 3)\}$ برابر صفر و این تابع دوجزوی باشد، مقدار $m + k^2 - k$ کدام است؟

(مثل کنگور)

- ۳ (۱) ۴ (۲) ۶ (۳) ۷ (۴)

۲۱۶- اگر f تابعی ثابت، $2f(\sqrt{3}) = f(1) + a^2$ و $3f(\pi) = 2f(\sqrt{2}) + 6a - 9$ باشد، نصف مجذور عدد a چند برابر خروجی تابع f است؟

- $\frac{1}{3}$ (۱) $\frac{2}{3}$ (۲) $0/5$ (۳) $0/25$ (۴)

۲۱۷- اگر $f(x) = (ax + b)(2x - a) - x^2$ یک تابع ثابت باشد، برد تابع f کدام است؟

- $\{-\frac{1}{16}\}$ (۱) $\{\frac{1}{16}\}$ (۲) $\{\frac{5}{16}\}$ (۳) $\{-\frac{5}{16}\}$ (۴)

۲۱۸- نمودار تابع ثابت f از نقطه $(-1, 3)$ می‌گذرد. اگر $f(x) = a(x+1) - bx$ باشد، مقدار $af(b) + bf(a)$ کدام است؟

- ۶ (۱) ۹ (۲) ۱۲ (۳) ۱۸ (۴)

۲۱۹- تابع $f(x) = (a-2)x + a + 1$ یک تابع ثابت با برد $\{b-1, c\}$ است. طول رأس سهمی $y = ax^2 + bx + c$ کدام است؟ (آزمون‌های آزمایشی خیلی سبز)

- ۱ (۱) -۱ (۲) ۲ (۳) -۲ (۴)

۲۲۰- در تابع ثابت f ، اگر $f(a) \times f(b) - 4 = f(a) + f(b)$ و $f(a) \times f(b) = m + 2\sqrt{n}$ باشد، مجموع دو عدد طبیعی m و n کدام است؟

- ۱۰ (۱) ۱۱ (۲) ۱۲ (۳) ۱۳ (۴) (آزمون‌های آزمایشی خیلی سبز)

۲۲۱- تابع با ضابطه $f(x) = (\Delta x^2 - (ax+1)(x-b))c$ ثابت است. اگر $f(x+y) = f(x) \cdot f(y) - 2$ باشد، مقدار مثبت c کدام است؟ (سراسری ۱۴۰۳)

- ۱۰ (۱) ۵ (۲) ۲ (۳) ۴ (۴)

۲۲۲- تابع $f(x)$ یک تابع خطی با شیب صفر است. اگر $f(x) - c = \frac{ax^2 - a}{x+1} - x$ و $cf(-y) = 2f(f(x) + f(y))$ باشد، مقدار بزرگ‌تر $\frac{c}{a}f(\frac{a}{c})$ کدام است؟

- ۲ (۱) ۳ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) (مثل کنگور)

۲۲۳- اگر هزینه پارکینگ یک فروشگاه در روز جمعه براساس مدت‌زمان سپری‌شده از بازگشایی فروشگاه از ساعت ۸ صبح از تابع $f(x) = \begin{cases} 4 & 0 \leq x < 3 \\ x+2 & 3 \leq x < 9 \\ x+3 & 9 \leq x \leq 16 \end{cases}$ تابع

پیروی کند، هزینه پارک خودرویی که از ساعت ۹ تا ۱۷ داخل پارکینگ است، کدام است؟ (هر واحد هزینه $f(x)$ را معادل با ۵۰۰ تومان در نظر بگیرید.)

- ۵۰۰۰ (۱) ۵۵۰۰ (۲) ۶۰۰۰ (۳) ۷۰۰۰ (۴)

۲۲۴- اگر $f(x) = \begin{cases} 2x-1 & x \geq 1 \\ x^2-x-3 & x < 1 \end{cases}$ و $f(1+a^2) = f(-3)$ باشد، مقدار مثبت a کدام است؟

- ۱ (۱) $\sqrt{2}$ (۲) $\sqrt{3}$ (۳) ۲ (۴)

۲۲۵- تابع $f(x) = \begin{cases} x+1 & x \geq 2 \\ x^2 & -2 \leq x < 2 \\ \sqrt{-x} & x < -2 \end{cases}$ مفروض است. اگر $f(\sqrt{2}) + f(a) = 5$ باشد، میانگین مقادیر ممکن برای a کدام است؟

- $\frac{11+\sqrt{3}}{3}$ (۱) $\frac{11-\sqrt{3}}{4}$ (۲) $-\frac{7}{4}$ (۳) $\frac{2}{3}$ (۴)

۲۲۶- در تابع $f(x) = \begin{cases} x^2+2x-7 & x \geq a \\ x^2-4x+11 & x \leq a \end{cases}$ مقدار $f(2-\sqrt{a})$ کدام است؟ (آزمون‌های آزمایشی خیلی سبز)

- ۴ (۱) ۶ (۲) ۹ (۳) ۱۰ (۴)

۲۲۷- تابع $f(x) = \begin{cases} 2x^2 & x \geq 1 \\ mx+m^2 & m \leq x < 1 \\ x+1 & x \leq m \end{cases}$ مفروض است. اگر m عددی طبیعی نباشد، مقدار $f(\sqrt{\frac{1}{m^2}+1})$ کدام است؟

- $-\frac{1}{2}$ (۱) $\sqrt{5}+1$ (۲) ۱۰ (۳) $\frac{1}{4}$ (۴)

۲۲۸- نمودار تابع $f(x) = \begin{cases} x^2-4 & x < -1 \\ 2x-6 & x \geq -1 \end{cases}$ در سه نقطه A ، B و C محورهای مختصات را قطع می‌کند. مساحت مثلث ABC چند واحد سطح است؟

- ۱۰ (۱) ۱۲ (۲) ۳ (۳) ۱۵ (۴) (آزمون‌های آزمایشی خیلی سبز)

۲۲۹- تابع $f(x) = \begin{cases} x^2-2x+2 & x \geq 0 \\ -x^2-4x+2 & x < 0 \end{cases}$ خط $y = k$ را در دو نقطه قطع می‌کند. مجموع مقادیر ممکن برای k کدام است؟

- ۴ (۱) ۵ (۲) ۶ (۳) ۷ (۴)

۲۲۰- نمودار تابع $f(x) = \begin{cases} 3-x & x \geq -1 \\ 2x+8 & -7 < x < -1 \end{cases}$ ، نمودار تابع همانی g را در نقطه A و نمودار تابع ثابت h را در نقطه B قطع می‌کند. اگر طول نقاط A و B قرینه هم باشند، میانگین عرض نقاط A و B کدام است؟

(آزمون‌های آزمایشی خیلی سبز)

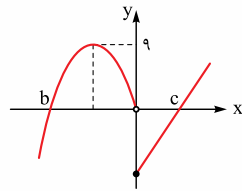
۳/۷۵ (۴)

۳/۵ (۳)

۳/۲۵ (۲)

۳ (۱)

۲۲۱- نمودار تابع $f(x) = \begin{cases} -x^2+mx & x < 0 \\ 2x+b & x \geq 0 \end{cases}$ به صورت زیر است. مقدار $\frac{m+b}{c}$ کدام است؟



(آزمون‌های آزمایشی خیلی سبز)

-۱ (۱)

-۲ (۲)

-۳ (۳)

-۴ (۴)

(کنکور مجدد ۱۴۰۱)

۲۲۲- تابع $f = \{(2, 2n^2 - 3n), (m+3n, 2), (m, -t^2)\}$ یک تابع همانی است. اگر میانگین m, n و t ، صفر باشد، مقدار t کدام است؟

$-\frac{1}{2}$ (۴)

-۲ (۳)

۲ (۲)

$\frac{1}{2}$ (۱)

۲۲۳- توابع همانی $f(x) = \frac{(a-1)x+b}{cx+1}$ و $g = \{(x, a+c), (y, b+c)\}$ مفروض‌اند. مقدار $f(x-y)$ کدام است؟

-۲ (۴)

-۱ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

(آزمون‌های آزمایشی خیلی سبز)

۲۲۴- اگر f تابعی همانی و $f(a^2-1) - f(3a^2) = f(8a-11)$ باشد، بیشترین مقدار $\frac{f(a-3)}{f(a+1)}$ کدام است؟

۴ (۴)

$\frac{1}{2}$ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

(مثل کنکور)

۲۲۵- توابع همانی f و g مفروض‌اند. اگر $f(x) + f(-x) = g(y+1) + g(y+1)$ باشد، حداکثر مقدار $f(y)$ کدام است؟

۱ (۴)

۲ (۳)

-۱ (۲)

-۲ (۱)

۲۲۶- توابع همانی f, g و h را در نظر بگیرید. اگر $h(x) = f(x+a)f(x+b) - g(x+2)g(x+1)$ باشد، مقدار $h(a^2+b^2)$ کدام است؟

۵ (۴)

۷ (۳)

۱۲ (۲)

۹ (۱)

(آزمون‌های آزمایشی خیلی سبز)

۲۲۷- تابع ثابت f و تابع همانی g در نقطه $A(2-3a, a+10)$ متقاطع‌اند. مقدار $f(a) + g(\frac{a}{2})$ کدام است؟

۹ (۴)

۸ (۳)

۷ (۲)

۶ (۱)

۲۲۸- تابعی همانی و نقطه $(f(1-2a) + f(2), 4 - af(a))$ روی نیمساز ناحیه دوم و چهارم قرار دارد. حاصل ضرب مقادیر ممکن برای a کدام است؟

-۲ (۴)

۲ (۳)

-۷ (۲)

۷ (۱)

(آزمون‌های آزمایشی خیلی سبز)

۲۲۹- برای برخی مقادیر x زوج مرتب $(f(x) + f(-x), 3x^2 - 17x + 10)$ روی نیمساز ربع دوم و چهارم قرار دارد. اگر تابع f همانی با دامنه $\mathbb{R}$ باشد، اختلاف مقادیر x کدام است؟

$\frac{17}{3}$ (۳)

$\frac{13}{3}$ (۳)

$\frac{10}{3}$ (۲)

$\frac{7}{3}$ (۱)

(سراسری ۱۴۰۲)

۲۴۰- اگر f تابع ثابت و برای $m, n, k \in \mathbb{N}$ داشته باشیم: $f(kx) = (k^2 - 3)f(x)$ و تابع g به صورت زیر یک تابع همانی باشد، مقدار $f(m)$ کدام است؟

$g = \{(k, n^2 - 3n + 4), (2n, m^2 - 4m + 4), (f(n), n - 4)\}$

(خارج از کشور ۱۴۰۲)

صفر (۴)

-۲ (۳)

-۳ (۲)

-۴ (۱)

۲۴۱- اگر f تابع ثابت و برای $m, n, k \in \mathbb{N}$ داشته باشیم:

$2f(k^2 - 3) = (k^2 - 2).f(x)$ و تابع g به صورت زیر یک تابع همانی باشد، مقدار $f(n^2)$ کدام است؟

(مثل کنکور)

$g = \{(k^2, n^2 - 3n + 6), (2n, m^2 - 4m + 4), (f(kn), n - 4)\}$

صفر (۴)

-۲ (۳)

-۳ (۲)

-۴ (۱)

۲۴۲- واریانس اعضای برد تابع f برابر صفر و تابع g همانی است. اگر تابع $i = \{(3f(m)f(n) - 2, g(k)), (f(mn), g(h))\}$ دارای یک زوج مرتب روی نیمساز ناحیه اول باشد، مجموع x هایی که در رابطه $g(x^2 - kx + h) = x + 3k$ صدق می‌کنند کدام است؟

(مثل کنکور)

-۲ (۴)

۲ (۳)

-۱ (۲)

۱ (۱)

برای حل این تست‌ها حتماً با معلم یا مشاورتان مشورت کنید!

مثل کنکورهای سخت

۲۴۳- توابع ثابت $h(x)$ و $i(x)$ مفروض‌اند. اگر $h(x) = f(x) \times g(x)$ و $i(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ باشد، کدام گزینه در مورد تابع $(f(x) - g(x))(f(x) + g(x))$ حتماً درست است؟

(۲) برد آن دوعضوی است.

(۱) تابع همانی است.

(۴) برد آن سه‌عضوی است.

(۳) تابع ثابت است.

$$= \frac{[(a_1-1)^2+1]+[(a_2-1)^2+1]+\dots+[(a_{10}-1)^2+1]}{10}$$

طبق (*) می‌شه ۳۰

$$= \frac{[(a_1-1)^2+(a_2-1)^2+\dots+(a_{10}-1)^2]+(1 \times 10)}{10}$$

$$= \frac{30+10}{10} = \frac{40}{10} = 4$$

۱۶۶. **گام ۳** گفتیم برد تابع ثابت باید تک‌عضوی باشد، پس در مجموعه

$$R_f = \{a-3, 1-a\} \text{ باید } 1-a = a-3 \text{ را مساوی هم بگذاریم:}$$

$$a-3=1-a \Rightarrow 2a=4 \Rightarrow a=2$$

به ازای $a=2$ ، $a-3=1-a=-1$ می‌شود؛ پس برد تابع می‌شود $R_f = \{-1\}$.

گام ۴ به گفته سؤال $(1, 1-b)$ عضو f است. از طرفی برد تابع فقط -1

$$1-b=-1 \Rightarrow b=2$$

است؛ پس $1-b$ را مساوی -1 می‌گذاریم:

گام ۵ بنابراین مقدار $a-b$ می‌شود $2-2=0$.

۱۶۷. **گام ۳** تک‌تک گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

۱ گفتیم توابعی که ضابطه‌شان به صورت $f(x)=c$ است، ثابت‌اند؛ پس $f(x)=\frac{1}{x}$ تابع ثابت است.

عدد ثابت

۲ همان‌طور که در شکل مقابل می‌بینید، تمامی پیکان‌های خارج‌شده از مجموعه A ، فقط به یک عضو از مجموعه B وارد شده‌اند (به عضو 4)، پس این نمایش پیکانی، یک تابع ثابت را نشان می‌دهد.

۳ در نمایش مختصاتی تابع ثابت، تمام نقاط باید روی یک خط افقی باشند که در این نمودار همچین اتفاقی نیفتاده، پس این تابع، ثابت نیست.

همین‌جا معلوم شد **۳** جواب است، ولی تحلیل **۴** را هم ببینید:

۴ تمام مؤلفه‌های دوم زوج مرتب‌های $(\sqrt{3}, -1), (7, -1), (2, -1)$ را هم ببینید: با هم برابرند، پس f تابعی ثابت است.

۱۶۸. **گام ۱** در نمایش مقابل، پیکان‌ها به یک عضو وارد نشده‌اند؛ پس برای این‌که تابع ثابت بشود، باید انتهای پیکان‌ها را مساوی هم بگذاریم:

$$2a-1=3-b=5 \Rightarrow \begin{cases} 2a-1=5 \Rightarrow 2a=6 \Rightarrow a=3 \\ 3-b=5 \Rightarrow -b=2 \Rightarrow b=-2 \end{cases}$$

گام ۲ حالا حاصل تک‌تک گزینه‌ها را به ازای $a=3$ و $b=-2$ به دست می‌آوریم؛ هر کدام برابر صفر شد، جواب است:

$$1 \quad 2a+3b=2(3)+3(-2)=6+(-6)=0$$

پس **۱** جواب است.

۱۶۹. **گام ۲** تابع $f = \{(-3, 2), (5, a+7)\}$ به شرطی یک تابع ثابت است که مؤلفه‌های دوم زوج مرتب‌هایش برابر باشند؛ پس:

$$a+7=2 \Rightarrow a=2-7=-5$$

۱۷۰. **گام ۴**

شفاف‌سازی: «برد تابع f دارای یک عضو است»؛ یعنی f تابعی ثابت است.

گام ۱ f تابعی ثابت است، پس مؤلفه دوم زوج مرتب‌هایش باید برابر باشند:

$$f = \{(2b, a+3), (-a+1, 5), (3a+1, b)\}$$

$$a+3=5=b \Rightarrow \begin{cases} a+3=5 \Rightarrow a=2 \\ b=5 \end{cases}$$

سؤال مقدار $g(a)$ را می‌خواهد که همان $g(7)$ است:

$$g(7) = \sqrt{4(7)-3}-1 = \sqrt{25}-1 = 5-1 = 4$$

۱۶۴. **گام ۲** در تساوی $g(x) = \frac{f(x)}{f(x)-x}$ به جای x ، 3 قرار می‌دهیم

تا بتوانیم مقدار $f(3)$ را حساب کنیم:

$$g(3) = \frac{f(3)}{f(3)-3} \Rightarrow 3 = \frac{f(3)}{f(3)-3}$$

به گفته سؤال $g(3)=3$ هستند.

$$\xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} 3(f(3)-3) = f(3) \Rightarrow 3f(3)-9 = f(3)$$

$$\Rightarrow 2f(3) = 9 \Rightarrow f(3) = \frac{9}{2} = 4.5$$

گام ۳ حالا $f(3)=4.5$ و $g(3)=3$ را در معادله زیر جای‌گذاری می‌کنیم:

$$h = \{(f(3), f(3)-g(3)), (1/5g(3), g(3)), (2, 3)\}$$

$$h = \{(4.5, 1/5), (4/5, g(3)), (2, 3)\}$$

گام ۴ مؤلفه‌های اول زوج مرتب‌های رنگی بالا یکسان‌اند؛ پس برای این‌که h

تبدیل به تابع بشود، مؤلفه‌های دومشان را مساوی هم می‌گذاریم:

$$g(2) = 1/5 \text{ یا } \frac{3}{2} \quad (*)$$

گام ۵ حالا در تساوی $g(x) = \frac{f(x)}{f(x)-x}$ به جای x ، 2 می‌گذاریم تا به $f(2)$ برسیم:

$$g(2) = \frac{f(2)}{f(2)-2} \Rightarrow \frac{3}{2} = \frac{f(2)}{f(2)-2}$$

طبق (*) می‌شه ۳

$$3(f(2)-2) = 2f(2) \Rightarrow 3f(2)-6 = 2f(2) \Rightarrow f(2) = 6$$

۱۶۵. **گام ۳** به گفته سؤال، دامنه f ، 10 عضو دارد؛ پس آن را به صورت

$$D_f = \{a_1, a_2, \dots, a_{10}\}$$

زیر را بخوانید:

فلش یک: میانگین $(\bar{x})$ و واریانس (σ^2) داده‌های $x_1, x_2, \dots, x_n$ و از رابطه‌های زیر محاسبه می‌شوند:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$$

$$\sigma^2 = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2}{n}$$

گام ۴ به گفته سؤال میانگین داده‌های $a_1, a_2, \dots, a_{10}$ برابر 1 ($\bar{a}=1$) و

واریانشان برابر 3 است، پس طبق «فلش یک» می‌توانیم بنویسیم:

$$\sigma^2 = \frac{(a_1 - \bar{a})^2 + (a_2 - \bar{a})^2 + \dots + (a_{10} - \bar{a})^2}{10}$$

$$\xrightarrow{\bar{a}=1} 3 = \frac{(a_1-1)^2 + (a_2-1)^2 + \dots + (a_{10}-1)^2}{10}$$

$$\xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} (a_1-1)^2 + (a_2-1)^2 + \dots + (a_{10}-1)^2 = 30 \quad (*)$$

گام ۵ برای محاسبه اعضای برد تابع $f(x) = (x-1)^2 + 1$ باید $f(a_1)$ تا

$f(a_{10})$ را به دست بیاوریم:

$$f(a_1) = (a_1-1)^2 + 1, f(a_2) = (a_2-1)^2 + 1, \dots, f(a_{10}) = (a_{10}-1)^2 + 1$$

گام ۶ به دنبال میانگین اعضای برد f هستیم، پس طبق «فلش یک» بالا باید جمع $f(a_1)$ تا $f(a_{10})$ را به تعدادشان، یعنی 10 تقسیم کنیم:

$$f \text{ میانگین اعضای برد } = \frac{f(a_1) + f(a_2) + \dots + f(a_{10})}{10}$$

گام ۱ دامنه f مجموعه‌ای شامل تمام مؤلفه‌های اول زوج مرتب‌های f است.
 D_f را می‌نویسیم و $a=2$ و $b=5$ را در آن جای گذاری کنیم:

$$D_f = \{2b, -a+1, 3a+1\}$$

$$\xrightarrow{a=2, b=5} D_f = \{2(5), -2+1, 3(2)+1\} = \{10, -1, 7\}$$

گام ۱ ۱۷۱. $f = \{(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)\}$ تابعی ثابت است؛ پس مؤلفه‌های دوم زوج مرتب‌هایش برابرند، یعنی $y_1 = y_2 = y_3$ است.

گام ۲ حالا فلش یک زیر را بخوانید:

فلش یک: واریانس چند عدد یکسان، همیشه برابر صفر است.

دیدیم که y_1, y_2, y_3 برابر شدند؛ پس طبق فلش یک بالا واریانشان برابر صفر است.

گام ۲ ۱۷۲. $f = \{(m, 3m-1), (-1, k^2-k), (k^2-k, 2)\}$

تابعی ثابت است؛ پس مؤلفه دوم زوج مرتب‌هایش باید برابر باشند:

$$3m-1 = k^2-k = 2 \Rightarrow \begin{cases} 3m-1=2 \Rightarrow 3m=3 \Rightarrow m=1 \\ k^2-k=2 \end{cases}$$

گام ۳ حالا در تابع f به جای k^2-k ،
 $f = \{(1, 2), (-1, 2), (2, 2)\}$ قرار می‌دهیم:

پس ضرب اعضای دامنه f می‌شود:

گام ۲ ۱۷۳. $f = \{(2, m^2), (3, 4), (m, c)\}$ تابعی ثابت است، پس مؤلفه دوم زوج مرتب‌هایش باید برابر باشند:

$$m^2 = 4 = c \Rightarrow \begin{cases} m^2 = 4 \Rightarrow m = \pm 2 \\ c = 4 \end{cases}$$

گام ۳ این‌جا باید حواسمان باشد که به ازای $m=2$ ، f دوتا زوج مرتب یکسان دارد؛ ببینید:

ولی سؤال به دنبال ۳ تا زوج مرتب متمایز است، پس $m=-2$ را می‌پذیریم؛ بنابراین مقدار $\frac{c}{m}$ می‌شود $-\frac{4}{-2} = 2$.

گام ۴ ۱۷۴. در تابع ثابت، مؤلفه دوم تمام زوج مرتب‌ها با هم برابرند، پس $n^2-2n = 8$ ، t و $3m+2$ با هم برابرند:

$$3m+2=8 \Rightarrow 3m=6 \Rightarrow m=2$$

$$n^2-2n=8 \Rightarrow n^2-2n-8=0 \Rightarrow (n-4)(n+2)=0 \Rightarrow \begin{cases} n=4 \\ n=-2 \end{cases}$$

تجزیه با جمله مشترک

گام ۵ یک بار $n=4$ و $m=2$ ، $t=8$ را در تابع جای گذاری می‌کنیم:

$$f = \{(3, 8), (2, 8), (3, 8), (4, 8)\}$$

به خاطر تکراری بودن حذف می‌شود.

پس در این حالت تابع f دارای ۳ عضو (زوج مرتب) است و داریم:

$$m+n+t=2+4+8=14$$

گام ۶ با این‌که حالت قبل قطعاً جواب بود ولی یک بار هم با $n=-2$ ، $m=2$ و $t=8$ تابع را می‌نویسیم:

$$f = \{(3, 8), (2, 8), (-9, 8), (4, 8)\}$$

در این حالت تابع ۴ عضوی شد؛ پس قابل قبول نیست!

گام ۴ ۱۷۵. f یک تابع ثابت است، پس می‌توانیم ضابطه‌اش را به صورت $f(x) = c$ در نظر بگیریم.

گام ۱ پس تابع f ، به ازای ورودی‌های $a+b$ و a (یا هر ورودی دیگری) خروجی c را تحویل می‌دهد:

$$f(a+b) - f(a) = c - c = 0$$

۱۷۶. $f(x) = 3$ ، ضابطه یک تابع ثابت است. یعنی جای x هر چیزی قرار بدهیم، باز هم ۳ تحویل می‌گیریم؛ پس:

$$f(\sqrt{3}) = 3, f(\sqrt{5}) = 3$$

حالا تساوی‌های بالا را در $f(\sqrt{3}) + f(\sqrt{5}) = 2a$ جای گذاری می‌کنیم:

$$3+3=2a \Rightarrow 6=2a \Rightarrow a=3$$

گام ۲ به دنبال $\frac{f(a)}{a}$ هستیم که به ازای $a=3$ می‌شود:

$$\frac{f(3)}{3} = \frac{3}{3} = 1$$

۱۷۷. باید ضرب x^2 و x را مساوی صفر بگذاریم تا در ضابطه تابع فقط عدد ثابت ببینیم:

$$\begin{cases} x^2 = 0 \Rightarrow a-1=0 \Rightarrow a=1 \\ x = 0 \Rightarrow ab+1=0 \xrightarrow{a=1} b+1=0 \Rightarrow b=-1 \end{cases}$$

گام ۳ حالا مقادیر a و b را در $f(x) = (a-1)x^2 + (ab+1)x + \frac{a}{b}$ جای گذاری می‌کنیم:

$$f(x) = 0x^2 + 0x + \frac{1}{-1} \Rightarrow f(x) = -1$$

گام ۴ بنابراین خواسته سؤال می‌شود:

$$bf(a) = -1f(1) = (-1)(-1) = 1$$

۱۷۸. **گام ۳** اول سعی می‌کنیم ضابطه تابع را به فرم $f(x) = \bigcirc x^2 + \square x + \triangle$ بنویسیم:

$$f(x) = x(ax+1) - bx + a = ax^2 + \underbrace{x-bx}_x + a = ax^2 + (1-b)x + a$$

گام ۴ در تابع ثابت، خبری از x و x^2 نیست؛ پس در تابع بالا ضرب x^2 و x را مساوی صفر می‌گذاریم:

$$\begin{cases} x^2 = 0 \Rightarrow a=0 \\ x = 0 \Rightarrow 1-b=0 \Rightarrow b=1 \end{cases}$$

گام ۵ بنابراین $a+b$ می‌شود $1+0=1$.

۱۷۹. **گام ۳** تابع $f(x) = (a-3)x + a$ به شرطی یک تابع ثابت است که ضرب x مساوی صفر باشد:

$$a-3=0 \Rightarrow a=3$$

گام ۴ حالا $a=3$ را $f(x) = (a-3)x + a$ جای گذاری می‌کنیم:

$$f(x) = 0x + 3 \Rightarrow f(x) = 3$$

از ضابطه بالا نتیجه می‌گیریم که $f(y)$ هم برابر ۳ است.

گام ۵ حالا مقادیر $f(x)$ و $f(y)$ را در تساوی $1+f(x)f(y) = 2b$ جای گذاری می‌کنیم:

$$1+(3)(3) = 2b \Rightarrow 1+9 = 2b \Rightarrow 10 = 2b \Rightarrow b=5$$

پس $a+b$ می‌شود $3+5=8$.

۱۸۰. **گام ۴** فرض می‌کنیم ضابطه تابع ثابت به صورت $f(x) = c$ باشد. حالا به جای هر f و محتویات داخل پرانتز جلوی c می‌گذاریم:

$$f(a+b) = f(a) \times f(b) \Rightarrow c = c^2 \Rightarrow \underbrace{c^2 - c}_c = 0$$

$$\Rightarrow c(c-1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} c=0 \\ c-1=0 \Rightarrow c=1 \end{cases}$$

گام ۵ پس $f(3)$ یا صفر است یا ۱.

و به ازای اعداد کوچکتر از 2 ($x < 2$)، نصف آن عدد را خروجی می‌دهد:

$$x < 2: f(x) = \frac{x}{2}$$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x > 2 \\ \frac{x}{2} & x < 2 \end{cases}$$

پس ضابطه f به صورت مقابل است:

گام ۲ $x = 3$ در محدوده $x > 3$ و $x = -8$ در محدوده $x < 2$ قرار دارد؛

پس برای به دست آوردن $f(3)$ از ضابطه اول و برای به دست آوردن $f(-8)$ از ضابطه دوم استفاده می‌کنیم:

$$x > 2: f(x) = x^2 \xrightarrow{x=3} f(3) = 3^2 = 9$$

$$x < 2: f(x) = \frac{x}{2} \xrightarrow{x=-8} f(-8) = \frac{-8}{2} = -4$$

$$f(3) + f(-8) = 9 + (-4) = 5$$

پس خواسته سؤال می‌شود:

۱۸۷. گام ۲ $x = 1$ و $x = \frac{1}{2}$ در محدوده $0 < x \leq 1$ قرار دارند؛ پس

برای محاسبه $f(1)$ و $f(\frac{1}{2})$ از ضابطه دوم استفاده می‌کنیم:

$$f(x) = x^2 - a \begin{cases} x=1 \rightarrow f(1) = 1^2 - a \Rightarrow f(1) = 1 - a \quad (1) \\ x=\frac{1}{2} \rightarrow f(\frac{1}{2}) = (\frac{1}{2})^2 - a \Rightarrow f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{4} - a \quad (2) \end{cases}$$

گام ۳ $x = 2$ در محدوده $1 < x \leq 2$ قرار دارد، پس برای محاسبه $f(2)$ از ضابطه اول کمک می‌گیریم:

$$f(x) = ax - a \xrightarrow{x=2} f(2) = 2a - a \Rightarrow f(2) = a \quad (3)$$

گام ۴ حالا روابط (۱)، (۲) و (۳) را در تساوی $a(f(1) + f(2)) = f(\frac{1}{2})$ جای گذاری می‌کنیم:

$$a((1-a) + a) = \frac{1}{4} - a \Rightarrow a = \frac{1}{4} - a \Rightarrow 2a = \frac{1}{4} \Rightarrow a = \frac{1}{8}$$

گام ۵ پس $f(a)$ همان $f(\frac{1}{8})$ است. $x = \frac{1}{8}$ هم در محدوده $0 < x \leq 1$

قرار دارد، بنابراین برای محاسبه $f(\frac{1}{8})$ از ضابطه دوم کمک می‌گیریم:

$$f(x) = x^2 - a \xrightarrow{x=\frac{1}{8}} f(\frac{1}{8}) = (\frac{1}{8})^2 - \frac{1}{8} = \frac{1}{64} - \frac{1}{8} = -\frac{7}{64}$$

شده $\frac{1}{8}$ فاکتور از $\frac{1}{8}$

۱۸۸. گام ۲ چون نمی‌دانیم a در کدام یک از محدوده‌های $x \geq 1$ یا $x < 1$ قرار دارد، باید با هر دو حالت، مسئله را حل کنیم و جواب به دست آمده را بررسی کنیم.

گام ۳ فرض می‌کنیم a در محدوده $x \geq 1$ است؛ پس برای محاسبه $f(a)$ باید در ضابطه اول، یعنی $f(x) = 2x - 1$ ، جای x ها بنویسیم:

$$f(x) = 2x - 1 \xrightarrow{x=a} f(a) = 2a - 1$$

سؤال گفته $f(a) = 5$ است؛ پس: $2a - 1 = 5 \Rightarrow 2a = 6 \Rightarrow a = 3$ مقدار به دست آمده برای a در محدوده $x \geq 1$ قرار دارد، پس این جواب قابل قبول است.

گام ۴ فرض می‌کنیم a در محدوده $x < 1$ است؛ پس برای محاسبه $f(a)$ باید در ضابطه دوم، یعنی $f(x) = x - 2$ ، جای x ها بنویسیم:

$$f(x) = x - 2 \Rightarrow f(a) = a - 2$$

$$a - 2 = 5 \Rightarrow a = 7$$

پس: $f(a) = 5$ است.

این‌جا باید حواسمان باشد که $a = 7$ در محدوده $x < 1$ قرار ندارد، پس این جواب قابل قبول نیست. بنابراین فقط $a = 3$ قابل قبول است.

۱۸۱. گام ۲ فرض می‌کنیم ضابطه تابع به صورت $f(x) = c$ باشد،

پس می‌توانیم به جای هر f و محتویات داخل پرانتز c بگذاریم:

$$f(f(x) - 2) \times f(f(x) + 2) = 2f(x) - 1 \Rightarrow c^2 = 2c - 1$$

$$\Rightarrow c^2 - 2c + 1 = 0 \Rightarrow (c-1)^2 = 0 \Rightarrow c-1 = 0 \Rightarrow c = 1$$

اتحاد مربع دو جمله‌ای

گام ۳ $f(x) = 1$ شد، پس به f اگر $f(\sqrt{2})$ هم بدهیم، ۱ تحویل

$$f(1 - f(\sqrt{2})) = 1$$

می‌دهد، یعنی:

۱۸۲. گام ۳ $x = 1$ در محدوده $x < 2$ قرار دارد؛ پس برای محاسبه $f(1)$ از

ضابطه پایینی، یعنی $f(x) = 2 + 4x$ باید استفاده کنیم:

$$f(x) = 2 + 4x \xrightarrow{x=1} f(1) = 2 + 4(1) = 2 + 4 = 6$$

۱۸۳. گام ۲ عدد $x = 3$ در محدوده $x > 2$ قرار دارد؛ پس برای محاسبه $f(3)$ از ضابطه سوم استفاده می‌کنیم:

$$f(x) = 5 \Rightarrow f(3) = 5$$

گام ۳ عدد $x = -1$ در محدوده $-1 \leq x \leq 2$ قرار دارد؛ پس برای محاسبه

$$f(-1): f(x) = x^2 \Rightarrow f(-1) = (-1)^2 = 1$$

گام ۴ بنابراین خواسته سؤال می‌شود: $f(3) + f(-1) = 5 + 1 = 6$

۱۸۴. گام ۱ سه عدد رادیکالی را تخمین می‌زنیم:

$$-\sqrt{2} = -1/4, \sqrt{3} = 1/7, \sqrt{8} = 2/8$$

گام ۲ $x = -\sqrt{2} = -1/4$ در محدوده $x \leq -1$ قرار دارد؛ پس برای محاسبه $f(-\sqrt{2})$ از ضابطه اول استفاده می‌کنیم:

$$f(x) = 2x + 3 \xrightarrow{x=-\sqrt{2}} f(-\sqrt{2}) = 2(-\sqrt{2}) + 3 = -2\sqrt{2} + 3$$

گام ۳ $x = \sqrt{3} = 1/7$ در محدوده $-1 < x \leq 2$ قرار دارد؛ پس برای محاسبه $f(\sqrt{3})$ از ضابطه دوم استفاده می‌کنیم:

$$f(x) = x^2 \xrightarrow{x=\sqrt{3}} f(\sqrt{3}) = (\sqrt{3})^2 = 3$$

گام ۴ $x = \sqrt{8} = 2/8$ در محدوده $x > 2$ قرار دارد؛ پس برای محاسبه $f(\sqrt{8})$ از ضابطه سوم استفاده می‌کنیم:

$$f(x) = x \xrightarrow{x=\sqrt{8}} f(\sqrt{8}) = \sqrt{8}$$

گام ۵ حالا حاصل عبارت خواسته شده را به دست می‌آوریم. فقط $\sqrt{8}$ را می‌توانیم به صورت $\sqrt{4 \times 2} = 2\sqrt{2}$ هم بنویسیم:

$$f(-\sqrt{2}) + f(\sqrt{3}) + f(\sqrt{8}) = (-2\sqrt{2} + 3) + 3 + (2\sqrt{2}) = -2\sqrt{2} + 3 + 3 + 2\sqrt{2} = 6$$

۱۸۵. گام ۲ می‌دانیم اگر عددی به توان زوج برسد، حاصلش حتماً بزرگتر یا مساوی صفر است، پس $a^2 \geq 0$ است.

گام ۳ $a^2 \geq 0$ است؛ پس برای محاسبه $f(a^2)$ باید سراغ ضابطه اول یعنی $f(x) = 1$ برویم که دامنه‌اش $x \geq 0$ است. خروجی این ضابطه هم که عدد ثابت ۱ است؛ پس $f(a^2) = 1$ می‌شود.

۱۸۶. گام ۱ اول باید ضابطه تابع f را بنویسیم. تابع f به ازای اعداد بزرگتر از 2 ($x > 2$)، مربع آن عدد (یعنی x^2) را خروجی می‌دهد:

$$x > 2: f(x) = x^2$$