

ن و القلم و ما یسطرون

کتاب پیش رو از مجموعه کتاب‌های فرمول بیست می‌باشد. هدف اصلی این مجموعه کتاب ارائه آموزش‌های کامل همراه با مثال‌ها و تمرینات متنوع بر پایه کتاب درسی و در جهت تسلط و آمادگی برای امتحانات می‌باشد.

در این کتاب...

هر فصل شامل چندین درسنامه است تا تمام مطالب فصل با دقت و جزئیات آموزش داده شود و با ارائه مثال‌های لازم، مطالب عمیق‌تر تفهیم گردد. در ادامه در انتهای هر درسنامه تمام تمرینات و مثال‌های کتاب درسی شبیه‌سازی شده و با گردآوری سؤالات متنوع، یک مجموعه تمرین و بانک سؤال خوب و کاملی ارائه شده است. در نهایت با حل کاملاً تشریحی تمرینات، هر آنچه که یک دانش‌پژوه برای آموزش نیاز دارد، در اختیارش قرار گرفته است. در این کتاب برخی تمرینات تحت عنوان سؤالات ستاره‌دار مشخص شده است، این گروه سؤالات همان تمرینات اولیه و حداقلی است که هر دانش‌پژوه باید با آن مواجه گردد. حجم و تنوع این دسته سؤالات به گونه‌ای طراحی شده که دانش‌پژوهانی که فرصت کمتری برای حل تمرین یا مرور فصل دارند ابتدا سراغ این دسته سؤالات بروند و سپس در مرحله بعد و در زمان مقتضی به حل بقیه تمرینات بپردازند و امکان تمرین بیشتر را داشته باشند. گروه دیگری از تمرینات، مجموعه سؤالاتی هستند که تحت عنوان سؤالات بمب شناخته می‌شوند. سؤالات بمب شامل تمریناتی است که سطح آنها یک سروگردن بالاتر از دیگر تمرینات است و دانش‌پژوهان سخت‌کوش‌تر را به چالش می‌کشد تا با حل آنها لذت حل مسأله برایشان دوچندان شود. در انتهای کتاب، چند دوره امتحان نهایی اخیر قرار گرفته تا کار را برای مرور شب امتحان راحت‌تر کند. برای جمع‌بندی و دوره کردن مطالب نیز می‌توانید به فیلم‌های آموزشی ویژه شب امتحان که QR-Code آن‌ها در ابتدای هر فصل آمده، مراجعه کنید. خلاصه این که هر آنچه که یک دانش‌پژوه از یک کتاب آموزشی انتظار دارد، در این کتاب گنجانده شده است. بنابراین برای همراه شدن با این کتاب تردید نکنید و از داشتنش لذت ببرید. در پایان از همه عزیزانی که بنده را در تهیه این کتاب همراهی نموده‌اند نهایت تشکر و قدردانی را دارم؛ همچنین از خانواده عزیزم که مرا صبورانه همراهی کردند، سپاسگزارم.

فهرست

FILM	پاسخ	درسنامه و سؤالات
132 min	۱۲۲	۶ تا ۳۷
92 min	۱۵۱	۶۲ تا ۳۸
26 min	۱۶۸	۶۳ تا ۷۹
30 min	۱۸۲	۸۰ تا ۹۶
27 min	۱۹۸	۹۷ تا ۱۲۰

فصل اول: جبر و معادله

فصل دوم: تابع

فصل سوم: توابع نمایی و لگاریتمی

فصل چهارم: مثلثات

فصل پنجم: حد و پیوستگی

امتحان نهایی



بارمبندی درس حسابان ۱			
شماره فصل	نوبت اول	نوبت دوم	شهریور / دی
اول	۱۰	۴	۴
دوم	۸	۴	۴
سوم	۲ (تا آخر درس ۱ از فصل ۳، صفحه ۱۷۹)	۳	۳
چهارم	-	۴	۴
پنجم	-	۵	۵
جمع	۲۰	۲۰	۲۰

۲۲۰	آزمون ۱: خردادماه ۱۴۰۲ (نوبت صبح)
۲۲۱	آزمون ۲: خردادماه ۱۴۰۲ (نوبت عصر)
۲۲۲	آزمون ۳: خردادماه ۱۴۰۲ (ویژه غائبین)
۲۲۴	آزمون ۴: شهریور ماه ۱۴۰۲
۲۲۵	آزمون ۵: شهریور ماه ۱۴۰۲ (ویژه غائبین)
۲۲۷	آزمون ۶: خردادماه ۱۴۰۳
۲۲۹	پاسخنامه تشریحی آزمون ۱ تا ۶

1

بخش



درسنامه

و سؤالات تشریحی

فصل اول

جبر و معادله

۱

حسابان یازدهم

بهترین جمله‌ای که در مورد این فصل می‌توان گفت، این است که: «پلی است از گذشته به آینده»
 در واقع این فصل و حتی می‌توان گفت کتاب حسابان (۱) ارتباطی بین دانش گذشته و بخصوص مطالب ریاضی دهم و مطالب پیش رو در سال آینده و کتاب حسابان دوازدهم است.
 از یک طرف با تکمیل آموخته‌های سال‌های قبل شما را به سطح خوبی از دانش حسابان می‌رساند و از طرف دیگر شما را برای مواجهه با مطالب جدی‌تر آماده می‌کند.
 با نگاهی به فهرست مطالب فصل اول، خیلی زود در می‌یابید که این فصل آتش شله‌قلم‌کاری است که در همین ابتدا می‌خواهد مطالب جامانده و مقدمات لازم را به سمع و نظر شما برساند و همین جاست که اهمیت این فصل را بر همگان آشکار می‌سازد.
 از این فصل، ۱۰ نمره در نوبت اول و ۴ نمره در نوبت دوم و شهریور سؤال طرح می‌شود.

بسته ۷

بسته‌های ۵ و ۶

بسته‌های ۳ و ۴

بسته‌های ۱ و ۲

برای استفاده از فیلم‌های آموزشی شب امتحان هر بسته QR-code های مقابل را اسکن کنید.

فیلم شب امتحان

مجموع جملات دنباله حسابی

صفحه ۲ تا ۴ کتاب درسی

بسته اول



این کتاب و این فصل رو با دنباله‌ها شروع می‌کنیم، باشه که این شروع خال نیکی برای ادامه داستان حسابان شود.

یادآوری از دنباله‌های حسابی

اگر از سال گذشته به یاد داشته باشید، جملات دنباله‌های حسابی از جمع عددی ثابت با جمله قبل آن، به دست می‌آیند:

$$a_1, \underbrace{a_1 + d}_{a_2}, \underbrace{a_1 + 2d}_{a_3}, \underbrace{a_1 + 3d}_{a_4}, \dots \Rightarrow a_n = a_1 + (n-1)d$$

(a_n ، جمله عمومی و d ، قدرنسبت دنباله می‌باشد.)

بنابراین اختلاف هر دو جمله متوالی در دنباله‌های حسابی، برابر با قدرنسبت دنباله است:

$$a_n - a_{n-1} = d \Rightarrow a_n - a_m = (n-m)d$$

$$2b = a + c \text{ یا } b = \frac{a+c}{2}$$

نکته ! اگر a ، b و c سه جمله متوالی از دنباله حسابی باشند، b واسطه حسابی بین a و c است و در نتیجه:

سؤال مقدار a را از دنباله حسابی $\dots, 5, a, -1$ بیابید. سپس قدرنسبت این دنباله را به دست آورید.

پاسخ

$$-1, a, 5, \dots \xrightarrow{\text{دنباله حسابی}} 2a = (-1) + 5 \Rightarrow 2a = 4 \Rightarrow a = \frac{4}{2} = 2, d = a_2 - a_1 = 2 - (-1) = 3$$

حالا که دنباله‌های حسابی خوب یادتون اومد، بریم که جمله‌های این دنباله‌ها رو با هم جمع کنیم ببینیم چی دستگیرمون می‌شه.

مجموع جملات دنباله‌های حسابی

برای پیدا کردن مجموع n عدد طبیعی متوالی اولیه یعنی $1+2+3+\dots+n$ ، جناب گاوس یک ابتکار به خرج دادند و به روش زیر، این حاصل جمع را محاسبه کردند:

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & + & 2 & + & 3 & + \dots + & n \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ + (n) & + & (n-1) & + & (n-2) & + \dots + & 1 \end{array}$$

$$\underbrace{(n+1) + (n+1) + (n+1) + \dots + (n+1)}_{\text{ت } n} = n(n+1) \Rightarrow 2(1+2+\dots+n) = n(n+1)$$

$$1+2+3+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$$

و در نتیجه داریم:

سؤال مجموع چه تعداد از اعداد طبیعی اولیه، برابر با ۲۱۰ می‌گردد؟

$$1+2+3+\dots+n = 210 \Rightarrow \frac{n(n+1)}{2} = 210 \Rightarrow n(n+1) = 420 \Rightarrow n(n+1) = 20 \times 21 \Rightarrow n = 20$$

حالا می‌توانیم از همین ابتکار الگو بگیریم و مجموع n جمله اول یک دنباله حسابی با جمله اول a_1 و جمله n ام، a_n را پیدا کنیم:

$$\begin{array}{ccccccc} & & a_2 & & a_3 & & a_{n-1} & & a_n \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ S_n = & a_1 & + & (a_1 + d) & + & (a_1 + 2d) & + \dots + & (a_1 + (n-2)d) & + & (a_1 + (n-1)d) \\ & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ & (a_1 + (n-1)d) & + & (a_1 + (n-2)d) & + & (a_1 + (n-3)d) & + \dots + & (a_1 + d) & + & a_1 \end{array} = S_n$$

با جمع کردن دو رابطه بالا داریم:

$$\xrightarrow{+} 2S_n = \underbrace{(2a_1 + (n-1)d) + (2a_1 + (n-1)d) + (2a_1 + (n-1)d) + \dots + (2a_1 + (n-1)d) + (2a_1 + (n-1)d)}_{\text{ت } n}$$

$$\Rightarrow 2S_n = n(2a_1 + (n-1)d) \Rightarrow S_n = a_1 + \dots + a_n = \frac{n(2a_1 + (n-1)d)}{2}$$

و در نتیجه اگر از فرمول جمله n ام دنباله حسابی یعنی $a_n = a_1 + (n-1)d$ کمک بگیریم، داریم:

$$S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d) = \frac{n}{2}(a_1 + (a_1 + (n-1)d)) \Rightarrow S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}$$

سؤال مجموع چند جمله اول از دنباله حسابی $12, 9, 6, \dots$ برابر صفر است؟

پاسخ بایک دنباله حسابی با قدرنسبت $d = -3$ مواجه ایم، پس داریم:

$$S_n = 0 \Rightarrow \frac{n(2a_1 + (n-1)d)}{2} = 0 \xrightarrow{\substack{a_1=12 \\ d=-3}} n(2(12) + (n-1)(-3)) = 0 \xrightarrow{n \neq 0} 24 - 3n + 3 = 0 \Rightarrow 3n = 27 \Rightarrow n = 9$$

بنابراین مجموع ۹ جمله اول این دنباله حسابی برابر صفر است.

سؤال در یک دنباله حسابی اگر $a_2 + a_4 = 15$ باشد، مجموع ۲۰ جمله اول این دنباله را بیابید.

$$a_2 + a_4 = (a_1 + d) + (a_1 + 3d) = 2a_1 + 4d = 15 \quad (*)$$

$$S_{20} = \frac{20}{2}(2a_1 + 19d) \stackrel{(*)}{=} 10(15) = 150$$

نکته اگر S_n مجموع n جمله اول دنباله حسابی a_n باشد، داریم:

۱ $a_1 = S_1$

۲ $S_n - S_{n-1} = a_n$

$$S_n - S_{n-1} = (a_1 + \dots + a_{n-1} + a_n) - (a_1 + \dots + a_{n-1}) = a_n$$

زیرا:

سؤال

 اگر مجموع n جمله اول یک دنباله حسابی از فرمول $S_n = 5n^2 + 3n$ به دست آید، قدرنسبت و جمله عمومی دنباله را بیابید.

پاسخ

$$a_1 = S_1 = 5(1)^2 + 3(1) = 8, \quad S_2 = a_1 + a_2 = 5(2)^2 + 3(2) = 20 + 6 = 26$$

$$a_2 = S_2 - S_1 = 26 - 8 = 18 \Rightarrow d = a_2 - a_1 = 18 - 8 = 10$$

$$\Rightarrow a_n = a_1 + (n-1)d = 8 + 10(n-1) = 10n - 2$$

 با یک دنباله حسابی با قدرنسبت $d = 10$ مواجهیم، پس داریم:

 توجه کنید که جمله عمومی دنباله را به طور مستقیم از فرمول S_n هم می توانستیم بیابیم:

$$a_n = S_n - S_{n-1} = 5n^2 + 3n - (5(n-1)^2 + 3(n-1))$$

$$= 5n^2 + 3n - (5n^2 - 10n + 5 + 3n - 3) = 5n^2 + 3n - 5n^2 + 10n - 5 - 3n + 3 = 10n - 2 \Rightarrow a_n = 10n - 2$$

سؤال

مجموع اعداد دو رقمی مضرب ۶ را بیابید.

مشابه تمرین ۲ صفحه ۶ کتاب درسی

پاسخ

$$۶ : اعداد دو رقمی مضرب ۶ : ۱۲, ۱۸, ۲۴, \dots, a_n = 12 + 6(n-1) = 6n + 6$$

$$a_n = 6n + 6 < 100 \Rightarrow 6n < 94 \Rightarrow n < \frac{94}{6} \approx 15.6 \Rightarrow n \leq 15$$

اولاً باید:

 پس بزرگترین مضرب دو رقمی عدد ۶، به ازای $n = 15$ به دست می آید، بنابراین:

$$S_n = \frac{n}{2} (2a_1 + (n-1)d) \stackrel{n=15}{=} \frac{15}{2} (2(12) + (15-1)(6)) = \frac{15}{2} \times 108 = 810$$

و یا:

$$a_n = a_{15} = 96 \Rightarrow S_{15} = \frac{15}{2} (a_1 + a_{15}) = \frac{15}{2} (12 + 96) = 810$$

بسته ۱
پرسش های تشریحی
مجموع جملات دنباله حسابی

در جای خالی عبارت مناسب قرار دهید.

۱. مجموع جمله از دنباله حسابی $x, 7, 12, \dots$ برابر ۶۰ است. (خرداد ۱۴۰۲ نوبت عصر)
 ۲. در دنباله حسابی با جمله اول ۴ و قدرنسبت ۸، حداقل جمله را با هم جمع کنیم حاصل بیشتر از ۴۰۰ می شود. (خرداد ۱۴۰۲ نوبت صبح)
 ۳. مجموع جملات دنباله حسابی $1, 3, 5, 7, \dots, 199$ برابر با است. (شهریور ۱۴۰۲ غایبین)
 ۴. حاصل عبارت $100 + 96 + 92 + \dots + 4 + 2$ برابر با است. (شهریور ۱۴۰۲)
 ۵. ☆ به کمک شکل های زیر، مجموع n عدد طبیعی اولیه (از ۱ تا n) را به دست آورید. (مشابه فعالیت صفحه ۲ کتاب درسی)
-
۶. ☆ به کمک شکل زیر ثابت کنید مجموع n عدد طبیعی فرد متوالی اولیه، برابر با n^2 است. (مشابه تمرین ۱ صفحه ۶ کتاب درسی)
-
۷. ☆ در هریک از دنباله های حسابی زیر، مجموع بیست جمله اول را بیابید. (شهریور ۹۲)
- ا** $5, 0, 5, \dots$

ب $-5, -3, -1, \dots$
۸. ☆ مجموع جملات دنباله $4, 7, 10, \dots, 100$ را بیابید. (دی ۹۱)
 ۹. مجموع اعداد طبیعی فرد مضرب ۳ و کوچک تر از ۱۰۰ چقدر است؟ (دی ۹۵)
 ۱۰. ☆ مجموع اعداد طبیعی سه رقمی مضرب ۱۵ چقدر است؟ (مشابه خرداد ۱۴۰۳ و مشابه تمرین ۲ صفحه ۶ کتاب درسی)

- ☆ ۱۱. در یک دنباله حسابی، هر جمله از جمله ماقبل خود به اندازه $\frac{1}{p}$ بیش تراست. اگر جمله هفتم برابر ۱۳ باشد، مجموع ۲۰ جمله اول دنباله چقدر است؟
- ☆ ۱۲. در یک دنباله حسابی جملات هفتم و دوازدهم به ترتیب ۳۲ و ۱۲ می باشد. مجموع ۱۵ جمله اول این دنباله را بیابید.
- ☆ ۱۳. در دنباله حسابی ۳, ۹, ۱۵, ... حداقل چند جمله آن را باید با هم جمع کنیم تا حاصل از ۳۰۰ بیش ترشود؟ (مشابه تمرین ۳ صفحه ۶ کتاب درسی و دی ۹۳)
۱۴. در یک دنباله حسابی جمله چهارم برابر با ۳ و جمله هفتم برابر با ۱۲ است،
 [A] جمله اول و قدرنسبت دنباله را بیابید.
- [B] حداکثر چند جمله از آن را با هم جمع کنیم، تا حاصل کم تر از ۴۵۰ شود؟
۱۵. در دنباله حسابی با جمله عمومی $a_n = 3 - 2n$ ، مجموع n جمله اولیه دنباله (S_n) را بیابید، سپس مجموع ۱۵ جمله اول آن را به دست آورید.
- ☆ ۱۶. اگر مجموع n جمله اول یک دنباله حسابی $S_n = \frac{6n^2 - 5n}{12}$ باشد،
 [A] قدرنسبت و جمله اول آن را به دست آورید.
 [B] مجموع ۱۰ جمله اول آن چقدر است؟
- ☆ ۱۷. در یک دنباله حسابی با ۲۰ جمله، مجموع جملات ردیف فرد برابر ۲۴۰ و مجموع جملات ردیف زوج برابر با ۲۷۰ می باشد، جمله اول و قدرنسبت دنباله را بیابید.
- ☆ ۱۸. در یک دنباله حسابی با ۱۰ جمله، مجموع ۵ جمله اول برابر ۲۵ و مجموع ۵ جمله آخر برابر ۱۰۰ می باشد، جمله اول و قدرنسبت دنباله را بیابید.
- ☆ ۱۹. در یک دنباله حسابی با جمله اول a_1 ،
 [A] اگر قدرنسبت یک واحد افزایش یابد، به مجموع ۱۰ جمله اول آن چند واحد افزوده می شود؟
 [B] اگر همه جملات دو برابر شوند، مجموع ۱۰ جمله اول آن چند برابر می شود؟
۲۰. مجموع چند عدد طبیعی اولیه، $\frac{3}{5}$ مربع تعداد آن ها می باشد؟
- ☆ ۲۱. بر روی محیط یک دایره n نقطه قرار دارد. از هر نقطه به نقاط دیگر وصل می کنیم. اگر تعداد کل پاره خط های ایجاد شده برابر ۵۵ باشد، تعداد این نقاط چند تا است؟ (این مسئله را به دو روش حل کنید.)
۲۲. یک موسسه خیریه در اولین سال فعالیت خود ۵۰۰ خانوار را تحت پوشش خود دارد. اگر هدف این موسسه آن باشد که هر سال ۴۰ خانوار را به اعضای تحت پوشش خود بیفزاید، پس از ۱۰ سال مجموعاً چند خانوار را تحت پوشش خواهد داشت؟
- ☆ ۲۳. یک مسابقه دو، طوری طراحی شده که از کنار یک سید شروع به دویدن کرده، در ایستگاه اول یک توپ برداشته، برمی گردیم و در سید می اندازیم و سپس تا ایستگاه دوم رفته و دو توپ برمی داریم، برمی گردیم و در سید می اندازیم و به همین ترتیب تا ایستگاه n ام رفته، n توپ برمی داریم و برمی گردیم در سید می اندازیم. اگر دوندۀ ای در مجموع ۵۵ توپ در سید انداخته باشد و فاصله بین هر دو ایستگاه متوالی و هم چنین ایستگاه اول تا سید، ۲ متر باشد، مجموع مسافت های طی شده توسط این دونده را بیابید.
- (مشابه مثال صفحه ۴ کتاب درسی)

مجموع جملات دنباله هندسی

صفحه ۴ تا ۷ کتاب درسی

بسته دوم



قبل از این که یاد بگیریم چه طور و با چه فرمولی مجموع جملات یه دنباله هندسی رو به دست بیاریم، لازم می دونم که یادآوری کوچیکی از دنباله های هندسی داشته باشیم.

یادآوری از دنباله های هندسی

جملات دنباله های هندسی از ضرب عددی ثابت و مخالف صفر در جمله قبل آن به دست می آیند:

$$a_1, a_1q, a_1q^2, a_1q^3, \dots \Rightarrow a_n = a_1q^{n-1}$$

(a_n جمله عمومی (n ام) و q قدرنسبت دنباله می باشد.)

بنابراین نسبت هر دو جمله متوالی در دنباله هندسی، برابر با قدرنسبت دنباله است:

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = q \Rightarrow \frac{a_n}{a_m} = q^{n-m}$$

نکته! اگر a, b و c سه جمله متوالی از دنباله هندسی با جملات مثبت باشند، b را واسطه هندسی a و c می گویند و داریم:

$$b^2 = ac \text{ یا } b = \sqrt{ac}$$

سؤال مقادیر x و y را در دنباله هندسی $\frac{1}{4}, x, y, \frac{1}{4}, \dots$ بیابید.

پاسخ روش اول

$$4, x, y, \frac{1}{4}, \dots \xrightarrow{\text{دنباله هندسی}} \begin{cases} x^2 = 4y \Rightarrow y = \frac{x^2}{4} \\ y^2 = \frac{1}{4}x \end{cases}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{x^2}{4}\right)^2 = \frac{x}{4} \Rightarrow \frac{x^4}{16} = \frac{x}{4} \xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} 2x^4 = 16x \xrightarrow{x \neq 0} x^3 = 8 = 2^3 \Rightarrow x = 2 \xrightarrow{y = \frac{x^2}{4}} y = \frac{4}{4} = 1$$

روش دوم در دنباله داده شده $a_1 = 4$ و $a_4 = \frac{1}{4}$ است، پس داریم:

$$q^{4-1} = \frac{a_4}{a_1} \Rightarrow q^3 = \frac{\frac{1}{4}}{4} = \frac{1}{16} = \left(\frac{1}{4}\right)^3 \Rightarrow q = \frac{1}{4} \Rightarrow \begin{cases} x = a_1 q = 4\left(\frac{1}{4}\right) = 1 \\ y = x\left(\frac{1}{4}\right) = 1\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4} \end{cases}$$

مجموع جملات دنباله های هندسی

اگر $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ ، مجموع n جمله اول یک دنباله هندسی باشد، به کمک روش زیر می توان فرمولی برای S_n یافت:

$$S_n = a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + \dots + a_1 q^{n-1} \quad (*)$$

طرفین رابطه بالا را در q ضرب می کنیم:

$$qS_n = a_1 q + a_1 q^2 + a_1 q^3 + \dots + a_1 q^{n-1} + a_1 q^n \quad (**)$$

حالا اگر طرفین دو رابطه را از هم کم کنیم، داریم:

$$\xrightarrow{(**) - (*)} qS_n - S_n = (a_1 q + a_1 q^2 + \dots + a_1 q^{n-1} + a_1 q^n) - (a_1 + a_1 q + \dots + a_1 q^{n-1})$$

$$\Rightarrow \underbrace{qS_n - S_n}_{\text{فاکتور از } S_n} = \underbrace{a_1 q^n - a_1}_{\text{فاکتور از } a_1} \Rightarrow S_n (q - 1) = a_1 (q^n - 1) \Rightarrow S_n = \frac{a_1 (q^n - 1)}{q - 1}$$

توجه کنید که فرقی نمی کند بنویسیم $S_n = \frac{a_1 (1 - q^n)}{1 - q}$ یا $S_n = \frac{a_1 (q^n - 1)}{q - 1}$! اگر گفتین چرا؟

مشابه کار در کلاس صفحه ۵ کتاب درسی

سؤال مجموع ۱۰ جمله اول دنباله هندسی $\frac{1}{2}, 1, 2, \dots$ ، چند برابر جمله اول آن است؟

پاسخ

$$\frac{1}{2}, 1, 2, \dots \Rightarrow q = 2, a_1 = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow S_{10} = \frac{a_1 (q^{10} - 1)}{q - 1} = \frac{\frac{1}{2} (2^{10} - 1)}{2 - 1} = \frac{1}{2} (1024 - 1) = \frac{1023}{2} \Rightarrow \frac{S_{10}}{a_1} = \frac{\frac{1023}{2}}{\frac{1}{2}} = 1023$$

سؤال در یک دنباله هندسی، مجموع ۱۰ جمله اول برابر ۶۶ و مجموع ۵ جمله اول برابر ۶۴ است. قدرنسبت دنباله را بیابید.

پاسخ

$$\begin{cases} S_{10} = \frac{a_1 (q^{10} - 1)}{q - 1} = 66 \\ S_5 = \frac{a_1 (q^5 - 1)}{q - 1} = 64 \end{cases} \xrightarrow{\text{دو رابطه را بر هم تقسیم می کنیم}} \frac{S_{10}}{S_5} = \frac{\frac{a_1 (q^{10} - 1)}{q - 1}}{\frac{a_1 (q^5 - 1)}{q - 1}} = \frac{66}{64}$$

$$\xrightarrow{\text{اتحاد مزدوج}} \frac{a_1 (q^{10} - 1) (q - 1)}{a_1 (q^5 - 1) (q - 1)} = \frac{66}{64} \xrightarrow{\text{دور در دور، نزدیک در نزدیک}} \frac{(q^5 - 1)(q^5 + 1)}{q^5 - 1} = \frac{66}{64}$$

$$\Rightarrow q^5 + 1 = \frac{66}{64} \Rightarrow q^5 = \frac{66}{64} - 1 = \frac{2}{32} = \left(\frac{1}{2}\right)^5 \Rightarrow q = \frac{1}{2}$$

❶ $S_1 = a_1$

❷ $S_n - S_{n-1} = a_n$

برای مجموع n جمله اول دنباله هندسی، یعنی S_n ، نیز رابطه‌های روبه‌رو برقرار است:

نکته

سؤال اگر مجموع n جمله اول یک دنباله هندسی برابر با $S_n = 2^n - 1$ باشد، جمله اول و قدرنسبت این دنباله را بیابید.

$a_1 = S_1 = 2^1 - 1 = 1$

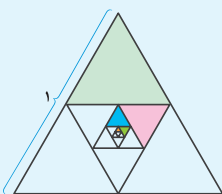
پاسخ روش اول

$a_n = S_n - S_{n-1} = (2^n - 1) - (2^{n-1} - 1) = 2^n - 2^{n-1} = 2^{n-1} \underbrace{(2 - 1)}_1 = 2^{n-1}$

$a_n = a_1 q^{n-1} \xrightarrow{a_1=1, a_n=2^{n-1}} 2^{n-1} = 1 \times q^{n-1} \Rightarrow q = 2$

روش دوم

$S_n = 2^n - 1 \Rightarrow \begin{cases} S_1 = a_1 = 2 - 1 = 1 \\ S_2 = a_1 + a_2 = 2^2 - 1 = 3 \end{cases} \Rightarrow 1 + a_2 = 3 \Rightarrow a_2 = 2 \Rightarrow q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{2}{1} = 2$



سؤال اگر هر بار وسط اضلاع مثلث متساوی‌الاضلاع روبه‌رو را به هم وصل کنیم، مساحت قسمت رنگی چقدر است؟

پاسخ مساحت مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع ۱ برابر است با:

$S = \frac{\sqrt{3}}{4} \times 1^2 = \frac{\sqrt{3}}{4}$

در هر مرحله مساحت رنگ شده $\frac{1}{4}$ مساحت مثلث قبلی است:

$a_1 = \frac{1}{4} S = \frac{1}{4} \left(\frac{\sqrt{3}}{4} \right)$: مساحت مثلث رنگی اول:

$a_2 = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{4} S \right) = \left(\frac{1}{4} \right)^2 \left(\frac{\sqrt{3}}{4} \right)$: مساحت مثلث رنگی دوم:

$a_3 = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{4} \left(\frac{1}{4} S \right) \right) = \left(\frac{1}{4} \right)^3 \left(\frac{\sqrt{3}}{4} \right)$: مساحت مثلث رنگی سوم:
⋮

بنابراین با دنباله‌ای هندسی با قدرنسبت $\left(\frac{1}{4} \right)$ مواجهیم و مساحت کل قسمت رنگی ایجاد شده برابر است با:

$$S_\infty = a_1 + a_2 + \dots + a_\infty = \frac{a_1(q^\infty - 1)}{q - 1} = \frac{\frac{1}{4} \left(\frac{\sqrt{3}}{4} \right) \left(\left(\frac{1}{4} \right)^\infty - 1 \right)}{\left(\frac{1}{4} - 1 \right)} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{4^2} \times \frac{1 - 4^\infty}{4^\infty}}{-\frac{3}{4}} = \frac{\frac{341}{-4^6 \times 4} \times \sqrt{3}}{\frac{341}{4^6 \times 4}} = \frac{341\sqrt{3}}{4^6 \times 4} = \frac{341\sqrt{3}}{4^7}$$

مجموع جملات دنباله هندسی

پرسش‌های تشریحی

بسته
۲

۲۴. در یک دنباله هندسی اگر مجموع ۶ جمله اول ۹ برابر مجموع ۳ جمله اول باشد، مجموع ۱۰ جمله اول چند برابر مجموع ۵ جمله اول است؟

(شهریور ۱۴۰۲ غایبین)

۲۵. طول ضلع مربعی یک متر است. ابتدا نیمی از مساحت آن را رنگ می‌کنیم. پس نیمی از مساحت باقی‌مانده را و به همین ترتیب در هر مرحله نیمی از

مساحت باقی‌مانده از مرحله قبل را رنگ می‌کنیم. پس از دست کم چند مرحله، حداقل ۹۹ درصد سطح مربع رنگ شده است؟

(شهریور ۱۴۰۲)

● در هریک از دنباله‌های هندسی زیر، مجموع ۱۰ جمله اول را بیابید.

(خرداد ۹۱، با کمی تغییر)

۲۶. ☆ $\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \dots$

(شهریور ۹۵، با کمی تغییر)

۲۷. ☆ $\frac{1}{5}, \frac{1}{25}, \frac{1}{125}, \dots$

۲۸. ☆ $\frac{1}{8}, \frac{-1}{4}, \frac{1}{2}, \dots$

● حاصل عبارت های زیر را به دست آورید.

☆ ۲۹. $\frac{1}{2} + 1 + 2 + 4 + \dots + 2048$

☆ ۳۰. $-1 - 3 - 9 - \dots - 729$

☆ ۳۱. $1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{9} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{729} - \frac{1}{128}$

(خرداد ۹۰)

☆ ۳۲. مجموع چند جمله اول از دنباله هندسی $6, -12, 24, \dots$ برابر ۱۲۶ خواهد شد؟

☆ ۳۳. در یک دنباله اعداد، هر جمله دو برابر جمله قبلی خود است. اگر مجموع ۵ جمله اول آن برابر $46/5$ باشد، جمله اول دنباله را بیابید.

☆ ۳۴. در یک دنباله هندسی جمله پانزدهم ۸ برابر جمله دوازدهم است. مجموع ۸ جمله اول این دنباله، چند برابر جمله اول آن است؟

☆ ۳۵. مجموع ۱۲ جمله اول یک دنباله هندسی ۹ برابر مجموع ۶ جمله اول آن است. قدرنسبت را بیابید.

☆ ۳۶. مجموع ۱۰ جمله دوم دنباله هندسی $1, 2, 4, \dots$ ، چند برابر مجموع ۱۰ جمله اول آن است؟

(مشابه تمرین ۵ صفحه ۶ کتاب درسی)

☆ ۳۷. جمله عمومی یک دنباله هندسی به صورت $a_n = 3 \times 2^n$ است،

[۱] مجموع ۵ جمله اول آن را بیابید. [ب] مجموع چند جمله از این دنباله برابر با ۳۰۶۶ است؟

☆ ۳۸. در یک دنباله هندسی با جمله اول a_1 و قدرنسبت q ، مجموع ۱۰ جمله اول S می باشد،

[۱] اگر جمله اول را دو برابر کنیم، مجموع ۱۰ جمله اول چند برابر می شود؟

[ب] اگر قدرنسبت را به توان ۲ برسانیم، مجموع ۱۰ جمله اول را بر حسب S و q بیابید.

(مشابه تمرین ۷ صفحه ۶ کتاب درسی)

● درستی هریک از تساوی های زیر را اثبات کنید.

☆ ۳۹. $1 + a + a^2 + \dots + a^{n-1} = \frac{1-a^n}{1-a}$

☆ ۴۰. $a^n + 1 = (a+1)(a^{n-1} - a^{n-2} + \dots - a + 1)$; (n فرد)

☆ ۴۱. $x^n - y^n = (x-y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + \dots + xy^{n-2} + y^{n-1})$

☆ ۴۲. اگر ضلع مربع ۱ واحد باشد و در هر مرحله وسط اضلاع مربع را به هم وصل کنیم تا مربع جدیدی

حاصل شود، مساحت قسمت رنگی چقدر است؟



☆ ۴۳. طول ضلع مربعی ۱ متر است. ابتدا نیمی از مساحت آن را رنگ می کنیم. سپس نیمی از مساحت باقی مانده را رنگ می کنیم و به همین ترتیب در هر

مرحله نیمی از مساحت باقی مانده از مرحله قبل را رنگ می کنیم. پس از چند مرحله، حداقل ۹۹ درصد از سطح مربع رنگ شده است؟

(تمرین ۶ صفحه ۶ کتاب درسی - دی ۹۴)

☆ ۴۴. برای از بین بردن ذرات معلق در یک محلول، آن را از صافی هایی عبور می دهیم. اگر در اثر عبور از هر صافی تعداد ذرات معلق موجود در محلول نصف

شود، حداقل چند صافی نیاز است تا ذرات معلق موجود در محلول، حداقل ۹۶ درصد کاهش یابد؟

☆ ۴۵. یک مثلث با محیط P را در نظر بگیرید و وسط اضلاع آن را به هم وصل کنید تا مثلث کوچک تری ایجاد شود. این عمل را به طور متوالی انجام دهید.

(خرداد ۹۴، با کمی تغییر)

مجموع محیط مثلث های به دست آمده از مثلث اول تا مثلث دهم، چند برابر P است؟

☆ ۴۶. توپی را اختیار داریم که از ارتفاعی زمین بخورد، پس از زمین خوردن به اندازه $\frac{1}{3}$ ارتفاع اولیه اش بالا می رود. فرض کنید این توپ را به طور قائم از

زمین به هوا پرتاب کرده ایم تا به ارتفاع ۹ متری برسد. پس از شروع پرتاب تا ۵۰ امین برخورد به زمین، در کل مسافت عمودی طی شده این توپ چه قدر

(خرداد ۹۰، با کمی تغییر و مشابه مثال صفحه ۵ کتاب درسی)

است؟

☆ ۴۷. علی می خواهد پول خود را پس انداز کند. او روز اول ۳۰۰۰ تومان پس انداز می کند و روزهای دیگر میزان آن را ۱۰ درصد نسبت به روز قبل افزایش

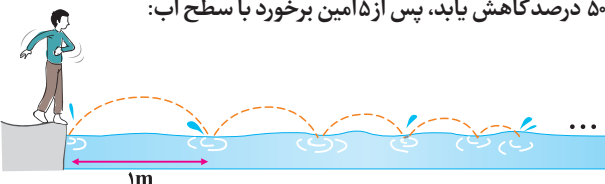
می دهد، پس از یک هفته چند تومان پس انداز می کند؟ $((1/1)^7 = 1/95)$

☆ ۴۸. کودکی سنگی را بر روی سطح آب پرتاب می کند. این سنگ در مسیر نیم دایره هایی به سطح آب برخورد می کند. اگر اولین برخورد سنگ با سطح آب

۱ متر جلوتر از کودک باشد و پس از هر برخورد سنگ با آب، قطر نیم دایره ۵۰ درصد کاهش یابد، پس از ۵۰ امین برخورد با سطح آب:

[۱] فاصله سنگ تا کودک چقدر است؟ (تا دو رقم اعشار)

[ب] سنگ چه مسافتی را پیموده است؟ $(\pi \approx 3/2)$



☆ ۴۹. پدری برای کادوی سالگرد تولد فرزندش، سال اول ۱ سکه، سال دوم ۲ سکه، سال سوم ۴ سکه و به همین ترتیب هر سال دو برابر سال قبل سکه برای او پس انداز می‌کند. اگر بهای هر سکه ۱۰۰۰۰ تومان باشد، وقتی این فرزند به ۱۰ سالگی می‌رسد، چند سکه کادو گرفته و بهای کل آن‌ها چقدر است؟
(مشابه کار در کلاس صفحه ۶ کتاب درسی)

☆ ۵۰. در مسئلهٔ مخترع شطرنج در صفحه ۵ کتاب درسی، اگر وزن هردانهٔ گندم ۱ گرم باشد، نشان دهید این مخترع بیش از ۱۰۰۰ میلیارد تن گندم جایزه دریافت خواهد کرد.
(کار در کلاس صفحه ۶ کتاب درسی)

روابط بین ریشه‌های معادلهٔ درجه دوم

صفحه ۸ تا ۹ کتاب درسی

بسته سوم



🕒 سال گذشته با معادلهٔ درجه دوم با شکل کلی $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) آشنا شدید و روش‌های مختلف حل اون‌ها رو یاد گرفتید. برای یادآوری به مثال زیر توجه کنید.

سؤال معادلات زیر را به روش خواسته شده حل کنید.

۲ $x^2 + 3x + 2 = 0$ (روش تجزیه)

۱ $(x-1)^2 - 25 = 0$ (ریشه‌گیری)

۴ $3x^2 - x - 2 = 0$ (روش کلی)

۳ $2x^2 + 6x - 3 = 0$ (مربع کامل)

پاسخ ۱ برای حل معادلهٔ درجه دوم به روش ریشه‌گیری آن را به فرم $x^2 = a^2$ درآورده، سپس با شرط $a \geq 0$ ، می‌توان با جذر گرفتن از طرفین تساوی، نتیجه گرفت $x = \pm\sqrt{a}$:

$$(x-1)^2 - 25 = 0 \Rightarrow (x-1)^2 = 25 \xrightarrow{\text{جذر می‌گیریم}} x-1 = \pm 5 \Rightarrow \begin{cases} x = 5+1 = 6 \\ x = -5+1 = -4 \end{cases}$$

۲ برای حل معادلهٔ درجه دوم به روش تجزیه، کافی است عبارت را به کمک فاکتورگیری یا اتحادها، به حاصل ضرب ۲ عبارت درجه اول تجزیه کنیم. سپس به کمک خاصیت حاصل ضرب صفر، هریک از عبارات را برابر صفر قرار دهیم. توجه کنید که در این حالت اگر عبارت تجزیه نشدنی باشد، فاقد ریشه است.

$$x^2 + 3x + 2 = 0 \xrightarrow{\text{اتحاد جمله مشترک}} (x+1)(x+2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x+1 = 0 \Rightarrow x = -1 \\ x+2 = 0 \Rightarrow x = -2 \end{cases}$$

۳ برای حل معادلهٔ درجه دوم به روش مربع کامل، ابتدا طرفین معادله را به ضریب x^2 تقسیم می‌کنیم:

$$2x^2 + 6x - 3 = 0 \xrightarrow{\div 2} x^2 + 3x - \frac{3}{2} = 0$$

$$x^2 + 3x = \frac{3}{2}$$

مقدار ثابت را به سمت دیگر معادله می‌بریم:

به طرفین معادله، مربع نصف ضریب x یعنی $(\frac{b}{2})^2$ را اضافه می‌کنیم تا یک طرف به شکل مربع کامل درآید:

$$x^2 + 3x + \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{3}{2} + \left(\frac{3}{2}\right)^2 \Rightarrow \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{3}{2} + \frac{9}{4}$$

طرفین را تا حد امکان ساده می‌کنیم و سپس به کمک ریشه‌گیری جواب‌ها را می‌یابیم:

$$\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{15}{4} \xrightarrow{\text{جذر می‌گیریم}} x + \frac{3}{2} = \pm \frac{\sqrt{15}}{2} \Rightarrow x = -\frac{3}{2} \pm \frac{\sqrt{15}}{2} = \frac{-3 \pm \sqrt{15}}{2}$$

۴ برای حل معادلهٔ درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ ، به روش کلی (روش Δ)، داریم:

$$\Delta = b^2 - 4ac \begin{cases} \Delta < 0 \rightarrow \text{ریشه ندارد.} \\ \Delta = 0 \rightarrow x = \frac{-b}{2a} \text{ (ریشه مضاعف)} \\ \Delta > 0 \rightarrow x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}, x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \end{cases}$$

$$3x^2 - x - 2 = 0 \xrightarrow{a=3, b=-1, c=-2} \Delta = (-1)^2 - 4(3)(-2) = 1 + 24 = 25 > 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{-(-1) + \sqrt{25}}{2(3)} = \frac{1+5}{6} = \frac{6}{6} = 1 \\ x_2 = \frac{-(-1) - \sqrt{25}}{2(3)} = \frac{1-5}{6} = \frac{-4}{6} = \frac{-2}{3} \end{cases}$$

نکته! گاهی برای حل یک معادله می‌توان از تغییر متغیر کمک گرفت تا معادله به صورت ساده‌تری تبدیل گردد.

سؤال هر یک از معادلات زیر را حل کنید.

۲ $(x^2 - 1)^2 + 3(x^2 - 1) - 4 = 0$

۱ $(1 - \sqrt{2}x)^2 + \sqrt{2}x = 0$

پاسخ وقتی به معادله نگاه می‌کنیم به عبارت ترسناک به شکل $(1 - \sqrt{2}x)^2$ می‌بینیم که یا باید اون رو به کمک اتحاد مربع دو جمله‌ای بازش کنیم یا این که برای از بین بردن ترس خودمون این عبارت رو به متغیر جدید در نظر بگیریم تا شکلش عوض بشه!

ریشه ندارد. $\Delta < 0 \Rightarrow t^2 - t + 1 = 0 \Rightarrow t^2 + 1 - t = 0 \xrightarrow{\text{جای گذاری در معادله}} \sqrt{2}x = 1 - t \Rightarrow t = (1 - \sqrt{2}x)$

۲ در این معادله عبارت $(x^2 - 1)$ تکرار شده پس اسم این عبارت رو عوض می‌کنیم و به اسم (متغیر) جدید براش انتخاب می‌کنیم تا معادله شکل ساده‌تری به خودش بگیره!

$$t = x^2 - 1 \xrightarrow{\text{جای گذاری در معادله}} t^2 + 3t - 4 = 0 \Rightarrow (t - 1)(t + 4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = 1 \Rightarrow x^2 - 1 = 1 \Rightarrow x^2 = 2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2} \\ t = -4 \Rightarrow x^2 - 1 = -4 \Rightarrow x^2 = -3 \Rightarrow \text{ریشه ندارد.} \end{cases}$$

۴ حالا که مسابای معادله درجه دوم یار تون اومد بریم سراغ مبثث شیرین روابط بین ضرایب و ریشه‌های معادله درجه دوم!

روابط بین ضرایب و ریشه‌های معادله درجه دوم

گفتیم که در معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ ، اگر $\Delta > 0$ باشد، آن‌گاه معادله دارای دو ریشه α و β است:

$$\begin{cases} \alpha = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \\ \beta = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \end{cases}$$

در این صورت می‌توان نوشت:

$$\alpha + \beta = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-b + \sqrt{\Delta} - b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2b}{2a} = -\frac{b}{a}$$

$$\alpha\beta = \left(\frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(\frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}\right) = \frac{(-b + \sqrt{\Delta})(-b - \sqrt{\Delta})}{(2a)^2} \xrightarrow{\text{اتحاد مزدوج}} \frac{(-b)^2 - (\sqrt{\Delta})^2}{4a^2}$$

$$= \frac{b^2 - \Delta}{4a^2} = \frac{b^2 - (b^2 - 4ac)}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}$$

یعنی:

$$S = \alpha + \beta = -\frac{b}{a} \quad , \quad P = \alpha\beta = \frac{c}{a}$$

به کمک روابط بالا می‌توان مجموع و حاصل ضرب ریشه‌های یک معادله درجه دوم را (در صورت وجود) بدون حل معادله به دست آورد.

سؤال در معادله درجه دوم $2x^2 - 4x + 1 = 0$ ، اگر α و β ریشه‌های معادله باشند، بدون حل معادله حاصل عبارت‌های زیر را بیابید.

۴ $\alpha^2 + \beta^2$

۳ $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}$

۲ $\alpha\beta$

۱ $\alpha + \beta$

۱ $2x^2 - 4x + 1 = 0 \Rightarrow a = 2, b = -4, c = 1$

$$\alpha + \beta = \frac{-b}{a} = \frac{-(-4)}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

۲ $\alpha\beta = \frac{c}{a} = \frac{1}{2}$

۳ $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta} = \frac{S}{P} = \frac{2}{\frac{1}{2}} = 2 \times 2 = 4$

۴ $\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = S^2 - 2P = 2^2 - 2\left(\frac{1}{2}\right) = 4 - 1 = 3$



سؤال اگر $x = -1$ یک ریشه معادله $2x^2 - mx - 3 = 0$ باشد، مقدار m و ریشه دیگر را بیابید.

مشابه کار در کلاس صفحه ۵ و مثال صفحه ۶ کتاب درسی

پاسخ روش اول ریشه معادله در معادله صدق می‌کند:

$$2x^2 - mx - 3 = 0 \xrightarrow{x=-1} 2(-1)^2 - m(-1) - 3 = 0 \Rightarrow 2 + m - 3 = 0 \Rightarrow m = 3 - 2 = 1$$

حال با جای‌گذاری $m = 1$ داریم:

$$2x^2 - x - 3 = 0 \Rightarrow \Delta = (-1)^2 - 4(2)(-3) = 25 \Rightarrow x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{25}}{2(2)} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1+5}{4} = \frac{3}{2} \\ x = \frac{1-5}{4} = -1 \end{cases}$$

روش دوم کافی است از روابط بین ریشه‌ها کمک بگیریم:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{-(-m)}{2} = \frac{m}{2} \\ x_1 x_2 = \frac{-3}{2} \end{cases} \xrightarrow{x_1=-1} \begin{cases} -1 + x_2 = \frac{m}{2} \\ (-1)(x_2) = \frac{-3}{2} \Rightarrow x_2 = \frac{3}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow -1 + \frac{3}{2} = \frac{m}{2} \Rightarrow \frac{m}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow m = 1$$

سؤال در هر مورد m را طوری بیابید که حاصل ضرب ریشه‌های معادله $2x^2 - 3x + m = 0$.

۱ برابر با ۲ باشد. ۲ برابر با (-1) باشد.

پاسخ

$$2x^2 - 3x + m = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -3 \\ c = m \end{cases}$$

$$x_1 \times x_2 = \frac{c}{a} \Rightarrow 2 = \frac{m}{2} \Rightarrow m = 4$$

۱

$$2x^2 - 3x + 4 = 0$$

اما توجه کنید که به ازای $m = 4$ معادله فاقد ریشه است:

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4(2)(4) = 9 - 32 < 0 \Rightarrow \text{ریشه ندارد}$$

پس $m = 4$ قابل قبول نیست. یعنی به ازای هیچ m ای حاصل ضرب ریشه‌ها ۲ نمی‌شود.

$$x_1 \times x_2 = \frac{c}{a} \Rightarrow -1 = \frac{m}{2} \Rightarrow m = -2$$

۲

$$2x^2 - 3x - 2 = 0$$

به ازای $m = -2$ معادله دارای دو ریشه است:

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4(2)(-2) = 9 + 16 = 25 > 0$$

بنابراین $m = -2$ قابل قبول است.

نکته توجه کنید در سؤالات مشابه سؤال بالا که یکی از پارامترها مجهول است و مجموع یا حاصل ضرب ریشه‌ها داده شده، پس از به‌دست آوردن مقدار پارامتر مجهول حتماً چک شود که آیا معادله به ازای آن دارای ریشه است و مقدار به‌دست آمده قابل قبول است یا نه.

نوشتن یک معادله درجه دوم با داشتن ریشه‌های آن

اگر α و β ریشه‌های یک معادله درجه دوم باشند، این معادله را می‌توان به صورت‌های روبه‌رو نوشت:

صورت اول: $(x - \alpha)(x - \beta) = 0$

صورت دوم: $\begin{cases} S = \alpha + \beta \\ P = \alpha\beta \end{cases} \Rightarrow x^2 - Sx + P = 0$

توجه کنید که هر ضربی از معادلات بالا نیز دارای ریشه‌های α و β است.

مشابه فعالیت صفحه ۹ کتاب درسی

سؤال معادله درجه دومی بنویسید که دارای ریشه‌های ۲ و -۳ باشد.

$$(x - \alpha)(x - \beta) = 0 \Rightarrow (x - 2)(x - (-3)) = 0 \Rightarrow (x - 2)(x + 3) = 0 \Rightarrow x^2 + x - 6 = 0$$

پاسخ روش اول

$$\begin{cases} S = \alpha + \beta = -3 + 2 = -1 \\ P = \alpha\beta = (-3)(2) = -6 \end{cases} \xrightarrow{x^2 - Sx + P = 0} x^2 + x - 6 = 0$$

روش دوم

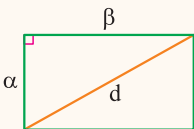
مشابه مثال صفحه ۹ کتاب درسی

سؤال اگر محیط و مساحت یک مستطیل به ترتیب ۱۶ و ۱۵ باشد،

۱ بدون محاسبه ابعاد مستطیل، طول قطران را بیابید. ۲ با تشکیل معادله درجه دوم، ابعاد مستطیل را بیابید.

$$\begin{cases} \text{محیط: } 2(\alpha + \beta) = 16 \Rightarrow \alpha + \beta = 8 \\ \text{مساحت: } \alpha\beta = 15 \end{cases}$$

پاسخ اگر α و β را طول و عرض این مستطیل در نظر بگیریم، داریم:



$$\begin{aligned} d^2 &= \alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = 8^2 - 2(15) = 64 - 30 \\ &\Rightarrow d^2 = 34 \Rightarrow d = \sqrt{34} \end{aligned}$$

۱ اگر طول قطر مستطیل برابر d باشد، داریم:

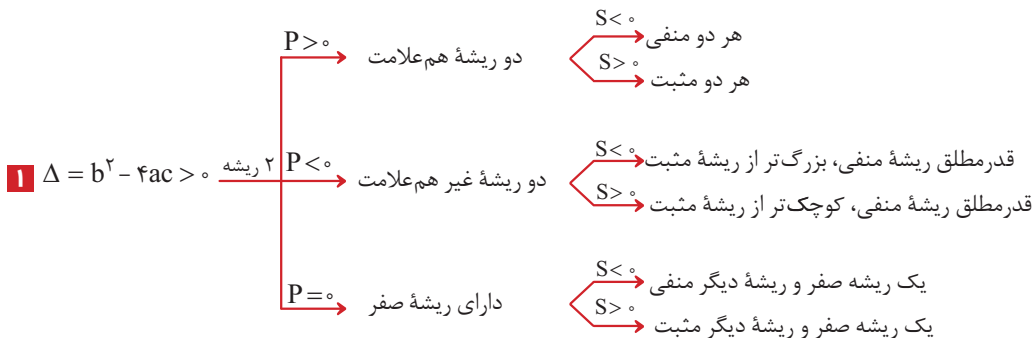
۲ با داشتن $S = \alpha + \beta = 8$ و $P = \alpha\beta = 15$ ، می‌توان نوشت:

$$x^2 - Sx + P = 0 \xrightarrow{\substack{S=8 \\ P=15}} x^2 - 8x + 15 = 0 \Rightarrow \Delta = (-8)^2 - 4(1)(15) = 64 - 60 = 4$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{-(-8) + \sqrt{4}}{2(1)} = \frac{8+2}{2} = 5: \text{طول} \\ \beta = \frac{-(-8) - \sqrt{4}}{2(1)} = \frac{8-2}{2} = 3: \text{عرض} \end{cases}$$

تعداد و علامت ریشه‌ها

در معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ ، با توجه به علامت Δ و علامت ضرایب a ، b و c ، می‌توان در مورد تعداد و علامت ریشه‌های معادله بدون حل آن اظهار نظر کرد: (S مجموع و P حاصل ضرب ریشه‌های معادله است.)



مثال $2x^2 - 3x - 1 = 0 \Rightarrow \Delta = 17 > 0$ $P = -\frac{1}{2} < 0$ $S = \frac{3}{2} > 0$ قدرمطلق ریشه منفی، کوچک‌تر از ریشه مثبت $\rightarrow$ دو ریشه غیر هم علامت

مثال $-x^2 + 4x - 3 = 0 \Rightarrow \Delta = 4 > 0$ $P = 3 > 0$ $S = 4 > 0$ هر دو ریشه مثبت است.

🕒 به وقت نیابین همه مطالب گفته شده رو حفظ کنید! خیلی راحت خودتون می‌تونین با به کار گرفتن مغزتون و به کوچولو استفاده از استدلال، به نتایج گفته شده برسین. کافیه به بار امتحان کنین. به ترتیب از علامت Δ ، بعرض علامت P و در نهایت علامت S می‌تونین نتیجه‌های بالا رو به دست بیارین.

۲ $\Delta = b^2 - 4ac = 0 \Rightarrow$ ریشه مضاعف

- $S < 0$: ریشه مضاعف منفی
- $S > 0$: ریشه مضاعف مثبت

مثال $ax^2 - 2ax + a = 0 \Rightarrow \Delta = 4a^2 - 4a(a) = 0$ $S = 2 > 0$ ریشه مضاعف مثبت دارد.

۳ $\Delta = b^2 - 4ac < 0 \Rightarrow$ ریشه ندارد.

نکته چند نکته در مورد معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$:

- ۱ اگر $b = 0$ باشد، با شرط $ac < 0$ معادله دارای دو ریشه قرینه است.
- ۲ اگر $a = c$ باشد، با شرط $\Delta > 0$ معادله دارای دو ریشه معکوس است.
- ۳ اگر $a = -c$ باشد، معادله دارای دو ریشه قرینه و معکوس است.
- وقتی a و c هم علامت نباشن هتماً معادله ۲ تا ریشه رو داره! (به نظر تون پیرا؟)
- ۴ اگر $a + b + c = 0$ باشد، (مجموع ضرایب صفر باشد). معادله دارای دو ریشه $x_1 = 1$ و $x_2 = \frac{c}{a}$ می باشد.
- ۵ اگر $a + c = b$ باشد، معادله دارای دو ریشه $x_1 = -1$ و $x_2 = -\frac{c}{a}$ می باشد.

سؤال در مورد ریشه های معادلات زیر بحث کنید.

۴ $-x^2 + 3x + 1 = 0$

۳ $6x^2 + 5x - 1 = 0$

۲ $2x^2 - 3x + \frac{1}{4} = 0$

۱ $-3x^2 + 2x + 1 = 0$

۱ $-3x^2 + 2x + 1 = 0 \xrightarrow{a+b+c=0} x_1 = 1, x_2 = \frac{c}{a} = -\frac{1}{3}$

۲ $2x^2 - 3x + \frac{1}{4} = 0 \xrightarrow{P>0, \Delta>0} S>0$ هر دو ریشه مثبت معادله دارای دو ریشه هم علامت است.

۳ $6x^2 + 5x - 1 = 0 \xrightarrow{a+c=b} x_1 = -1, x_2 = \frac{-c}{a} = \frac{-(-1)}{6} = \frac{1}{6}$

۴ $-x^2 + 3x + 1 = 0 \xrightarrow{a=-c} S>0$ معادله دارای دو ریشه قرینه و معکوس

می توانیم بگیم ریشه های این معادله به صورت α و $\frac{-1}{\alpha}$ که $\alpha > 1$ است! آگه گفتین پیرا؟

روابط بین ریشه های معادله درجه دوم

پریش های تشریحی

در جای خالی عبارت مناسب قرار دهید.

(مشابه خرداد ۱۴۰۳ و شهریور ۱۴۰۲)

۵۱ حاصل ضرب ریشه های معادله $4x^2 + 3x - 8 = 0$ برابر با است.

(خرداد ۱۴۰۲ نوبت صبح)

۵۲ معادله درجه دوم دارای ریشه های $3 \pm 2\sqrt{5}$ است.

۵۳ ☆ معادلات زیر را به روش خواسته شده حل کنید.

ب $x^2 - 3x + 2 = 0$ (تجزیه)

ا $6x^2 - 30x = 0$ (تجزیه)

ت $x^2 + 6x - 7 = 0$ (مربع کامل)

پ $(x-3)^2 - 16 = 0$ (ریشه گیری)

ج $2x^2 - 5x + 2 = 0$ (روش کلی)

ث $4x^2 + 12x + 5 = 0$ (مربع کامل)

ز $x^2 + 3x + 5 = 0$ (روش کلی)

معادلات زیر را حل کنید.

۵۵ $(2 - \sqrt{2})x^2 + 4x + (\sqrt{2} + 2) = 0$

۵۴ $(2 + \sqrt{2})x^2 - 2\sqrt{2}x + (\sqrt{2} - 2) = 0$

(مشابه تمرین ۵ صفحه ۱۵ کتاب درسی)

(شهریور ۹۵)

۵۷ ☆ $\left(\frac{x^2}{2} - 1\right)^2 + \left(\frac{x^2}{2} - 1\right) - 2 = 0$ (شهریور ۹۵)

۵۶ ☆ $(4 - x^2)^2 - 2(4 - x^2) - 15 = 0$

(دی ۹۱)

۵۹ $\left(\frac{x^2}{3} - 2\right)^2 - 11\left(\frac{x^2}{3} - 2\right) + 10 = 0$ (شهریور ۹۲)

۵۸ ☆ $(x^2 - 1)^4 + (x^2 - 1)^2 - 2 = 0$

۶۰ ☆ اگر α و β ریشه های معادله $x^2 - 3x - 5 = 0$ باشند، بدون محاسبه ریشه ها، حاصل $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}$ را بیابید.

۶۱ اگر α و β ریشه های معادله درجه دوم $2x^2 - 8x + 1 = 0$ باشند، حاصل $\frac{1}{\alpha+1} + \frac{1}{\beta+1}$ را بیابید.

۲ بخش



پاسخنامه

جبر و معادله

فصل ۱

۶ | با توجه به الگوی داده شده می توان نوشت:

$$\begin{aligned} 1 &= 1^2 \\ 1+3 &= 2^2 \\ 1+3+5 &= 3^2 \\ 1+3+5+7 &= 4^2 \\ 1+3+5+7+9 &= 5^2 \\ &\vdots \\ 1+3+5+\dots+(2n-1) &= n^2 \end{aligned}$$

مجموع n عدد طبیعی فرد اولیه

۷ | با یک دنباله حسابی با جمله اول $a_1 = -5$ و قدرنسبت

$d = 0 - (-5) = 5$ مواجهه ایم. بنابراین:

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d) \\ \xrightarrow{n=20} S_{20} &= \frac{20}{2}(2a_1 + 19d) \xrightarrow{a_1=-5, d=5} \frac{20}{2}(2(-5) + 19(5)) \\ \Rightarrow S_{20} &= 10(-10 + 95) = 10 \times 85 = 850 \end{aligned}$$

ب) با یک دنباله حسابی با جمله اول $a_1 = -5$ و قدرنسبت $d = -3 - (-5) = 2$ مواجهه ایم:

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d) \\ \xrightarrow{n=20} S_{20} &= \frac{20}{2}(2a_1 + 19d) \xrightarrow{a_1=-5, d=2} \frac{20}{2}(2(-5) + 19(2)) \\ \Rightarrow S_{20} &= 10(-10 + 38) = 10 \times 28 = 280 \end{aligned}$$

$$4, 7, 10, \dots, 100$$

$\Rightarrow d = 3$ و قدرنسبت $a_1 = 4$ حسابی با $a_1 = 4$ و قدرنسبت $d = 3$ دنباله حسابی با $a_1 = 4$ می یابیم:

$$\begin{aligned} a_n &= 100 \xrightarrow{a_n = a_1 + (n-1)d} 4 + (n-1)(3) = 100 \Rightarrow 3(n-1) = 96 \\ \Rightarrow n-1 &= \frac{96}{3} = 32 \Rightarrow n = 33 \\ \Rightarrow S_{33} &= 4 + 7 + \dots + 100 = \frac{33}{2}(a_1 + a_{33}) = \frac{33}{2}(4 + 100) \\ \Rightarrow S_{33} &= \frac{33 \times 104}{2} = 1716 \end{aligned}$$

$$99, \dots, 15, 9, 3: \text{اعداد فرد طبیعی مضرب ۳ و کوچک تر از } 100$$

دنباله حسابی با $a_1 = 3$ و قدرنسبت $d = 6$

حال تعداد جملات دنباله را می یابیم:

$$\begin{aligned} a_n &= 99 \xrightarrow{a_n = a_1 + (n-1)d} 3 + (n-1)(6) = 99 \Rightarrow 6(n-1) = 96 \\ \Rightarrow n-1 &= \frac{96}{6} = 16 \Rightarrow n = 17 \end{aligned}$$

و بنابراین مجموع این جملات برابر است با:

$$S_{17} = \frac{17}{2}(a_1 + a_{17}) = \frac{17}{2}(3 + 99) = \frac{17 \times 102}{2} = 867$$

$$x, y, 12, \dots \Rightarrow d = 5 \Rightarrow x + 5 = y \Rightarrow x = 2 \Rightarrow a_1 = 2$$

فرض کنیم مجموع n جمله از دنباله حسابی برابر با ۶۰ باشد:

$$\begin{aligned} S_n = 60 &\Rightarrow \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d) = 60 \\ \xrightarrow{a_1=2, d=5} \frac{n}{2}(2(2) + (n-1)(5)) &= 60 \\ \Rightarrow \frac{n}{2}(4 + 5n - 5) = 60 &\Rightarrow \frac{n}{2}(5n - 1) = 60 \Rightarrow 5n^2 - n - 120 = 0 \\ \Rightarrow 5n^2 - n - 120 &= 0 \\ \Delta = (-1)^2 - 4(5)(-120) &= 1 + 2400 = 2401 = 49^2 \\ \Rightarrow n = \frac{-(-1) \pm 49}{2(5)} = \frac{1 \pm 49}{10} \xrightarrow{n>0} n = \frac{1+49}{10} = \frac{50}{10} = 5 \end{aligned}$$

۲ | یازده

$$S_n > 400 \Rightarrow \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d) > 400$$

$$\begin{aligned} \xrightarrow{a_1=4, d=8} \frac{n}{2}(2(4) + (n-1)8) &> 400 \\ \Rightarrow \frac{n}{2}(8 + 8(n-1)) &> 400 \\ \Rightarrow \frac{n}{2} \times 8(1 + n - 1) &> 400 \Rightarrow 4n^2 > 400 \\ \Rightarrow n^2 > 100 &\Rightarrow n > 10 \Rightarrow n \geq 11 \end{aligned}$$

حداقل ۱۱ جمله را باید جمع کنیم.

$$1, 3, 5, 7, \dots, 199 \Rightarrow a_1 = 1, d = 2$$

حال باید تعداد جملات را بیابیم:

$$\begin{aligned} a_n = 199 &\Rightarrow a_1 + (n-1)d = 199 \\ \xrightarrow{a_1=1, d=2} 1 + (n-1) \times 2 &= 199 \Rightarrow 2(n-1) = 198 \\ \Rightarrow n-1 &= 99 \Rightarrow n = 100 \end{aligned}$$

حال مجموع جملات را می یابیم:

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) = \frac{100}{2}(1 + 199) = \frac{100 \times 200}{2} = 10000$$

$$\begin{cases} a_1 = 2 \\ d = 2 \\ n = 50 \end{cases}$$

$$\Rightarrow S_{50} = \frac{50}{2}(2 + 100) = 50 \times 51 = 2550$$

۵ | با توجه به الگوی داده شده می توان نوشت:

$$\begin{aligned} 2(1) &= 1 \times 2 \\ 2(1+2) &= 2 \times 3 \\ 2(1+2+3) &= 3 \times 4 \\ &\vdots \\ \Rightarrow 2(1+2+\dots+n) &= n \times (n+1) \Rightarrow 1+2+3+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2} \end{aligned}$$

۱۴ | آ

$$\begin{cases} a_4 = 3 \\ a_n - a_m = (n-m)d \end{cases} \rightarrow a_4 - a_7 = (4-7)d$$

$$\Rightarrow 3 - 12 = (-3)d \Rightarrow d = \frac{-9}{-3} = 3$$

حالا با جای‌گذاری در رابطه a_4 یا a_7 مقدار a_1 را می‌یابیم:

$$a_4 = a_1 + 3d = 3 \Rightarrow a_1 + 3(3) = 3 \Rightarrow a_1 = 3 - 9 = -6$$

$$S_n < 450 \Rightarrow \frac{n}{2} (2a_1 + (n-1)d) < 450$$

$$\frac{a_1 = -6}{d = 3} \rightarrow \frac{n}{2} (2(-6) + (n-1)(3)) < 450$$

$$\xrightarrow{\text{فاکتور از 3}} \frac{3n}{2} (n-5) < 450$$

$$\times \frac{2}{3} \rightarrow n(n-5) < 300 \Rightarrow n^2 - 5n - 300 < 0$$

$$\Rightarrow (n-20)(n+15) < 0 \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} -15 < n < 20$$

$$\xrightarrow{n > 0} n < 20 \Rightarrow n \leq 19$$

حداکثر ۱۹ جمله را می‌توانیم با هم جمع کنیم تا حاصل کم‌تر از ۴۵۰ شود.

۱۵ |

$$a_n = 3 - 2n \Rightarrow a_1 = 3 - 2 = 1$$

$$\Rightarrow S_n = \frac{n}{2} (a_1 + a_n) = \frac{n}{2} (1 + 3 - 2n)$$

$$\Rightarrow S_n = \frac{n}{2} (-2n + 4) \xrightarrow{\text{فاکتور از 2}} \frac{2n}{2} (-n + 2) = n(2 - n)$$

$$\Rightarrow S_{15} = 15(2 - 15) = 15 \times (-13) = -195$$

روش دوم

$$a_n = 3 - 2n \begin{cases} n=1 \rightarrow a_1 = 3 - 2 = 1 \\ n=15 \rightarrow a_{15} = 3 - 2(15) = 3 - 30 = -27 \end{cases}$$

$$S_{15} = \frac{15}{2} (a_1 + a_{15}) = \frac{15}{2} (1 - 27) = \frac{15 \times (-26)}{2} = -195$$

۱۶ | آ

$$S_n = \frac{6n^2 - 5n}{12} \Rightarrow \begin{cases} S_1 = a_1 = \frac{6-5}{12} = \frac{1}{12} \\ S_7 = a_1 + a_7 = \frac{6(49) - 5(7)}{12} = \frac{14}{12} \end{cases}$$

$$a_7 = S_7 - S_1 = \frac{14}{12} - \frac{1}{12} = \frac{13}{12}$$

$$d = a_7 - a_1 = \frac{13}{12} - \frac{1}{12} = \frac{12}{12} = 1$$

$$S_{10} = \frac{6(100) - 5(10)}{12} = \frac{600 - 50}{12} = \frac{550}{12} = \frac{275}{6}$$

$$S_{10} = \frac{10}{2} (2a_1 + 9d) = 5(2(\frac{1}{12}) + 9(1)) = 5(\frac{55}{6}) = \frac{275}{6}$$

و یا:

۱۰ | اعداد بخش‌پذیر بر ۱۵، بر ۳ و ۵ بخش‌پذیرند و اولین عدد طبیعی

سه‌رقمی که بر ۳ و ۵ بخش‌پذیر باشد، ۱۰۵ است.
۱۰۵، ۱۲۰، ۱۳۵، ...

برای یافتن تعداد اعداد طبیعی سه‌رقمی بخش‌پذیر بر ۱۵ داریم:

$$a_n = a_1 + (n-1)d < 1000 \Rightarrow 105 + (n-1)(15) < 1000$$

$$\Rightarrow 15n + 90 < 1000 \Rightarrow 15n < 910 \Rightarrow n < \frac{910}{15} \approx 60.6 \Rightarrow n \leq 60$$

بنابراین داریم:

$$S_{60} = \frac{60}{2} (2a_1 + 59d) = \frac{60}{2} (2(105) + 59(15))$$

$$= 30 (210 + 885) = 32850$$

$$a_n = a_{60} = 105 + 59(15) = 990$$

و یا می‌توان گفت:

$$\Rightarrow S_{60} = \frac{60}{2} (a_1 + a_{60}) = 30 (105 + 990) = 32850$$

۱۱ | چون هر جمله از جمله قبلی به اندازه $\frac{1}{2}$ بیش‌تر است، پس

قدرنسبت دنباله حسابی برابر $d = \frac{1}{2}$ است و چون $a_7 = 13$ ، پس داریم:

$$a_7 = a_1 + 6d = 13 \xrightarrow{d = \frac{1}{2}} a_1 + 6(\frac{1}{2}) = 13$$

$$\Rightarrow a_1 + 3 = 13 \Rightarrow a_1 = 13 - 3 = 10$$

$$S_{10} = \frac{10}{2} (2a_1 + 9d) \xrightarrow{\substack{a_1 = 10 \\ d = \frac{1}{2}}} 5 (2(10) + 9(\frac{1}{2}))$$

$$= 5 (20 + 9/2) = 295$$

۱۲ |

$$\begin{cases} a_7 = 32 \\ a_n - a_m = (n-m)d \end{cases} \rightarrow a_7 - a_{17} = (7-17)d$$

$$\Rightarrow 32 - 12 = -10d \Rightarrow d = -4$$

$$a_7 = a_1 + 6d = 32 \xrightarrow{d = -4} a_1 + 6(-4) = 32 \Rightarrow a_1 = 32 + 24 = 56$$

$$\Rightarrow S_{15} = \frac{15}{2} (2a_1 + 14d) = \frac{15}{2} (2(56) + 14(-4))$$

$$= \frac{15}{2} (112 - 56) = \frac{15}{2} \times 56 = 420$$

۱۳ |

$$\begin{matrix} +6 & +6 \\ \rightarrow & \rightarrow \end{matrix} \quad 3, 9, 15, \dots \Rightarrow a_1 = 3 \text{ و } d = 6$$

دنباله حسابی با ۶ و ۳ می‌خواهیم مجموع جملات بیش‌تر از ۳۰۰ شود:

$$S_n > 300 \Rightarrow \frac{n}{2} (2a_1 + (n-1)d) > 300$$

$$\Rightarrow \frac{n}{2} (2(3) + (n-1)(6)) > 300$$

$$\Rightarrow \frac{n}{2} (6 + 6(n-1)) > 300 \xrightarrow{\text{فاکتور از 6}} \frac{6n}{2} (\underbrace{1 + n - 1}_n) > 300$$

$$\Rightarrow 3n^2 > 300 \Rightarrow n^2 > 100 \Rightarrow n > 10 \Rightarrow n \geq 11$$

حداقل ۱۱ جمله را باید با هم جمع کنیم.

حالا با دو برابر شدن جملات و دنباله، خواهیم داشت:

$$S'_1 = \frac{1}{2} (2a_1 + 2a_{10}) = 2 \left(\frac{1}{2} (a_1 + a_{10}) \right) = 2S_1 \Rightarrow \text{۲ برابر می شود.}$$

فاکتور از ۲

$$1 + 2 + \dots + n = \frac{3}{5} n^2 \Rightarrow \frac{n(n+1)}{2} = \frac{3n^2}{5}$$

$$\Rightarrow \frac{n^2 + n}{2} = \frac{3n^2}{5} \xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} 5n^2 + 5n = 6n^2$$

$$\Rightarrow n^2 - 5n = 0 \Rightarrow n(n-5) = 0 \xrightarrow{n \neq 0} n = 5$$

۲۱ | **روش اول** از نقطه اول به (n-1) نقطه دیگر وصل می کنیم

$\Leftarrow$ (n-1) پاره خط

از نقطه دوم به (n-2) نقطه دیگر (همه به غیر از نقطه اول) وصل

می کنیم. $\Leftarrow$ (n-2) پاره خط

از نقطه سوم به (n-3) نقطه دیگر (همه به غیر از نقاط اول و دوم) وصل می کنیم.

$\Leftarrow$ (n-3) پاره خط

با ادامه این روند، تعداد پاره خط های ایجاد شده برابر است با:

$$\text{تعداد کل پاره خط ها} = (n-1) + (n-2) + (n-3) + \dots + 2 + 1$$

$\Rightarrow$ مجموع (n-1) عدد طبیعی اولیه

$$\Rightarrow \text{تعداد پاره خط ها} = \frac{(n-1)}{2} ((n-1) + 1) = \frac{n(n-1)}{2}$$

می دانیم تعداد پاره خط ها ۵۵ تا است:

$$\Rightarrow \frac{n(n-1)}{2} = 55 \Rightarrow n(n-1) = 110$$

$$\Rightarrow n(n-1) = 11 \times 10 \Rightarrow n = 11$$

۲۰ | **روش دوم** (ترکیبیات): برای داشتن هر پاره خط کافی است دو نقطه از این n

نقطه را انتخاب کنیم، در نتیجه:

$$\text{تعداد پاره خط ها} = \binom{n}{2} = 55 \Rightarrow \frac{n(n-1)}{2} = 55$$

$$\Rightarrow n(n-1) = 110 = 11 \times 10 \Rightarrow n = 11$$

۲۲ | با یک دنباله حسابی مواجه ایم که:

$$a_1 = 500, d = 40$$

می خواهیم مجموع خانوارهای تحت پوشش را پس از ۱۰ سال ببایم:

$$S_n = \frac{n}{2} (2a_1 + (n-1)d) \Rightarrow S_{10} = \frac{1}{2} (2a_1 + 9d)$$

$$= 5(2(500) + 9(40))$$

$$\Rightarrow S_{10} = 5(1000 + 360) = 1360 \times 5 = 6800 \text{ خانوار}$$

$$\begin{array}{ccccccc} & +d & +d & +d & & & \\ a_1 & , & a_2 & , & a_3 & , & a_4, \dots, a_{20} \\ & +2d & +2d & & & & \end{array}$$

بنابراین داریم:

$$\begin{array}{l} \text{مجموع ۱۰ جمله از دنباله حسابی با جمله اول } a_1 \text{ و قدرنسبت } 2d \\ \left\{ \begin{array}{l} a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{10} = 240 \\ a_2 + a_3 + a_4 + \dots + a_{20} = 270 \end{array} \right. \\ \text{مجموع ۱۰ جمله از دنباله حسابی با جمله اول } a_2 \text{ و قدرنسبت } 2d \end{array}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{2} (2a_1 + 9(2d)) = 240 \\ \frac{1}{2} (2a_2 + 9(2d)) = 270 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \Delta(2a_1 + 18d) = 240 \\ \Delta(2a_1 + 22d + 18d) = 270 \end{cases}$$

$a_1 + d$

$$\xrightarrow{\div 5} \begin{cases} 2a_1 + 18d = 48 \\ 2a_1 + 22d = 54 \end{cases} \xrightarrow{\text{از هم کم می کنیم.}} 20d - 18d = 54 - 48$$

$$\Rightarrow 2d = 6 \Rightarrow d = 3$$

$$\xrightarrow{2a_1 + 18d = 48} 2a_1 + 18(3) = 48 \Rightarrow 2a_1 = 48 - 54 = -6$$

$$\Rightarrow a_1 = -3$$

$$\begin{cases} a_1 + a_2 + \dots + a_{25} = 25 \Rightarrow \frac{25}{2} (2a_1 + 24d) = 25 \\ a_6 + \dots + a_{30} = 100 \Rightarrow \frac{25}{2} (2a_6 + 24d) = 100 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{25}{2} \times 2(a_1 + 12d) = 25 \Rightarrow \Delta(a_1 + 12d) = 25 \\ \frac{25}{2} \times 2(a_6 + 12d) = 100 \Rightarrow \Delta(a_1 + 5d + 12d) = 100 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\div 5} \begin{cases} a_1 + 12d = 5 \\ a_1 + 17d = 20 \end{cases} \xrightarrow{\text{از هم کم می کنیم.}} 5d - 12d = 20 - 5 \Rightarrow 5d = 15$$

$$\Rightarrow d = 3 \xrightarrow{a_1 + 12d = 5} a_1 + 12(3) = 5 \Rightarrow a_1 = 5 - 36 = -31$$

۱۹ | **الف** دنباله حسابی با جمله اول a_1 و قدرنسبت d در نظر می گیریم، داریم:

$$S_{10} = \frac{1}{2} (2a_1 + 9d) = 5(2a_1 + 9d)$$

حال اگر به قدرنسبت یک واحد اضافه کنیم، خواهیم داشت:

$$S'_{10} = \frac{1}{2} (2a_1 + 9(d+1)) = 5(2a_1 + 9d + 9) = 5(2a_1 + 9d) + 45$$

S_{10}

$$\Rightarrow S'_{10} - S_{10} = 45 \Rightarrow \text{۴۵ واحد افزوده می شود.}$$

ب) اگر a_1 و a_{10} به ترتیب جمله اول و دهم دنباله باشند، داریم:

$$S_{10} = \frac{1}{2} (a_1 + a_{10})$$

۲۶ دنباله هندسی با $a_1 = \frac{1}{3}$ و $q = \frac{1}{3}$ $\Rightarrow \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \dots$

$$\Rightarrow S_{10} = \frac{a_1(q^{10} - 1)}{q - 1} = \frac{\frac{1}{3}((\frac{1}{3})^{10} - 1)}{\frac{1}{3} - 1} = \frac{\frac{1}{3}(\frac{1}{3^{10}} - 1)}{-\frac{2}{3}}$$

$$= \frac{\frac{1}{3}(\frac{1 - 3^{10}}{3^{10}})}{-\frac{2}{3}} = \frac{\frac{1 - 3^{10}}{3^{11}}}{-\frac{2}{3}} = -\frac{3^{10} - 1}{2 \times 3^{10}}$$

۲۷ دنباله هندسی با $a_1 = \frac{1}{5}$ و $q = \frac{1}{5}$ $\Rightarrow \frac{1}{5}, \frac{1}{25}, \frac{1}{125}, \dots$

$$S_{10} = \frac{a_1(q^{10} - 1)}{q - 1} = \frac{\frac{1}{5}((\frac{1}{5})^{10} - 1)}{\frac{1}{5} - 1} = \frac{\frac{1}{5}(\frac{1}{5^{10}} - 1)}{-\frac{4}{5}}$$

$$= \frac{\frac{1}{5}(\frac{1 - 5^{10}}{5^{10}})}{-\frac{4}{5}} = -\frac{5^{10} - 1}{4 \times 5^9}$$

۲۸ دنباله هندسی با $a_1 = \frac{1}{8}$ و $q = -2$ $\Rightarrow \frac{1}{8}, \frac{-1}{4}, \frac{1}{2}, \dots$

$$S_{10} = \frac{a_1(q^{10} - 1)}{q - 1} = \frac{\frac{1}{8}((-2)^{10} - 1)}{-2 - 1} = \frac{\frac{1}{8}(2^{10} - 1)}{-3}$$

$$= \frac{1024 - 1}{-3 \times 8} = -\frac{1023}{24} = -\frac{341}{8}$$

۲۹ دنباله هندسی با $a_1 = \frac{1}{2}$ و $q = 2$ $\Rightarrow \frac{1}{2}, 1, 2, 4, \dots, 2048$

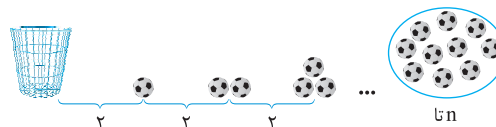
حالا تعداد جملات دنباله را می‌یابیم:

$$a_n = 2048 \Rightarrow a_1 q^{n-1} = 2048 \xrightarrow{a_1 = \frac{1}{2}, q = 2} \frac{1}{2} \times 2^{n-1} = 2048$$

$$\Rightarrow 2^{n-2} = 2^{11} \Rightarrow n - 2 = 11 \Rightarrow n = 13$$

$$\Rightarrow \frac{S_{13}}{\frac{1}{2} + 1 + 2 + 4 + \dots + 2048} = \frac{a_1(q^{13} - 1)}{q - 1} = \frac{\frac{1}{2}(2^{13} - 1)}{2 - 1} = \frac{2^{13} - 1}{2}$$

$$= \frac{8192 - 1}{2} = \frac{8191}{2} = 4095.5$$



مجموع توپ‌هایی که دونده در سبد انداخته ۵۵ تاست، بنابراین داریم:

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = 55 \Rightarrow \frac{n(n+1)}{2} = 55$$

$$\Rightarrow n(n+1) = 110 = 10 \times 11 \Rightarrow n = 10$$

یعنی دونده تا ایستگاه ۱۰ عملیات رفت و برگشت را انجام داده است و مسافت طی شده توسط او برابر است با:

برای ایستگاه اول $2 \times 2 = 4$
برای ایستگاه دوم $4 \times 2 = 8$
برای ایستگاه سوم $6 \times 2 = 12$
...

$$\xrightarrow{\text{دنباله حسابی}} S_{10} = \frac{10}{2} (2(4) + 9(4)) = 5 \times 44 = 220 \text{ متر}$$

۲۴ اگر قدر نسبت دنباله q را در نظر بگیریم، با شرط $q \neq 1$ داریم:

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 = 9(a_1 + a_2 + a_3)$$

$$\Rightarrow \frac{a_1(q^6 - 1)}{q - 1} = 9 \times \frac{a_1(q^3 - 1)}{q - 1}$$

$$\Rightarrow (q^6 - 1) = 9(q^3 - 1) \Rightarrow (q^3 - 1)(q^3 + 1) = 9(q^3 - 1)$$

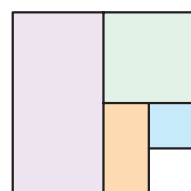
اتحاد مزدوج

$$\Rightarrow q^3 + 1 = 9 \Rightarrow q^3 = 8 = 2^3 \Rightarrow q = 2$$

بنابراین داریم:

$$\frac{S_{10}}{S_5} = \frac{\frac{a_1(q^{10} - 1)}{q - 1}}{\frac{a_1(q^5 - 1)}{q - 1}} = \frac{q^{10} - 1}{q^5 - 1} = \frac{(q^5 - 1)(q^5 + 1)}{(q^5 - 1)} = q^5 + 1$$

$$\xrightarrow{q=2} \frac{S_{10}}{S_5} = 2^5 + 1 = 32 + 1 = 33$$



۲۵ مقدار مساحت رنگ شده در هر مرحله

تشکیل دنباله هندسی می‌دهد:

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \dots \Rightarrow a_1 = \frac{1}{2}, q = \frac{1}{2}$$

بنابراین داریم:

$$S_n \geq \frac{99}{100} \Rightarrow \frac{a_1(1 - q^n)}{1 - q} \geq \frac{99}{100}$$

$$\xrightarrow{a_1 = \frac{1}{2}, q = \frac{1}{2}} \frac{\frac{1}{2}(1 - (\frac{1}{2})^n)}{1 - \frac{1}{2}} \geq \frac{99}{100} \Rightarrow 1 - (\frac{1}{2})^n \geq \frac{99}{100}$$

$$\Rightarrow (\frac{1}{2})^n \leq 1 - \frac{99}{100} \Rightarrow \frac{1}{2^n} \leq \frac{1}{100} \Rightarrow 2^n \geq 100 \Rightarrow n \geq 7$$

بنابراین دست کم پس از ۷ مرحله، حداقل ۹۹ درصد مربع رنگ شده است.

۳۴

$$a_{15} = 8a_{12} \xrightarrow{a_n = a_1 q^{n-1}} a_1 q^{14} = 8a_1 q^{11} \xrightarrow{a_1 \neq 0} q^{14} = 8q^{11}$$

$$\Rightarrow \frac{q^{14}}{q^{11}} = 8 \Rightarrow q^3 = 8 \Rightarrow q^3 = 2^3 \Rightarrow q = 2$$

$$S_8 = \frac{a_1(1-q^8)}{1-q} = \frac{a_1(1-2^8)}{1-2} = -a_1(1-256)$$

$$= -(255)a_1 = 255a_1 \Rightarrow \frac{S_8}{a_1} = 255$$

۳۵

$$S_{12} = 9S_6 \Rightarrow \frac{a_1(1-q^{12})}{1-q} = 9 \frac{a_1(1-q^6)}{1-q}$$

$$\Rightarrow 1-q^{12} = 9(1-q^6) \xrightarrow{\text{اتحاد مزدوج}} (1-q^6)(1+q^6) = 9(1-q^6)$$

$$\Rightarrow 1+q^6 = 9 \Rightarrow q^6 = 8 \Rightarrow q = \pm \sqrt[6]{8}$$

۳۶

دنباله هندسی با $a_1 = 1$ و $q = 2$ ، $1, 2, 4, \dots \Rightarrow q = 2$ و $a_1 = 1$

$$S_{10} = \text{مجموع } 10 \text{ جمله اول} = \frac{a_1(q^{10}-1)}{q-1} = \frac{1(2^{10}-1)}{2-1}$$

$$= 2^{10} - 1 = 1024 - 1 = 1023$$

برای ادامه ی حل یکی از روش های زیر را به کار می گیریم:

روش اول ۱۰ جمله دوم از a_{11} شروع و به a_{20} ختم می گردد، پس داریم:

$$\text{مجموع } 10 \text{ جمله دوم} = a_{11} + a_{12} + \dots + a_{20} \xrightarrow{q=2} \frac{a_{11}(2^{10}-1)}{2-1}$$

$$= \frac{a_1 q^{10}(1024-1)}{1} = 1 \times 2^{10}(1023) = 1024 \times 1023$$

روش دوم

$$S_{20} = \text{مجموع } 20 \text{ جمله اول} = \frac{a_1(q^{20}-1)}{q-1} = \frac{1(2^{20}-1)}{2-1} = 2^{20} - 1$$

مجموع ۱۰ جمله اول - مجموع ۲۰ جمله اول = مجموع ۱۰ جمله دوم

$$= (2^{20} - 1) - (2^{10} - 1) = 2^{20} - 2^{10} = 2^{10}(2^{10} - 1) = 1024 \times 1023$$

بنابراین:

$$\Rightarrow \frac{\text{مجموع } 10 \text{ جمله دوم}}{\text{مجموع } 10 \text{ جمله اول}} = \frac{1024 \times 1023}{1023} = 1024$$

روش سوم در حالت کلی تر می توان نوشت:

$$\frac{a_{11} + \dots + a_{20}}{a_1 + \dots + a_{10}} = \frac{\frac{a_{11}(1-q^{10})}{1-q}}{\frac{a_1(1-q^{10})}{1-q}} = \frac{a_{11}q^{10}(1-q^{10})}{a_1(1-q^{10})} = q^{10}$$

$$\xrightarrow{q=2} \text{حاصل} = 2^{10} = 1024$$

۳۰

دنباله هندسی با $a_1 = -1$ و $q = 3$ و $-1, -3, -9, \dots, -729 \Rightarrow q = 3$ و $a_1 = -1$

حالا تعداد جملات دنباله را می یابیم:

$$a_n = -729 \Rightarrow a_1 q^{n-1} = -729 \Rightarrow (-1)3^{n-1} = -729 \Rightarrow 3^{n-1} = 3^6$$

$$\Rightarrow n-1 = 6 \Rightarrow n = 7$$

$$\Rightarrow \overbrace{-1-3-9-\dots-729}^{S_7} = \frac{a_1(q^7-1)}{q-1} = \frac{(-1)(3^7-1)}{3-1}$$

$$= -\frac{1}{2}(2187-1) = -\frac{2186}{2} = -1093$$

۳۱ جملات دنباله در نگاه اول دنباله هندسی نمی سازند اما می توان ۲ تا دنباله هندسی از آن ها ساخت:

$$1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{3} + \frac{1}{9} - \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{729} - \frac{1}{729}$$

$$= \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{729}\right) - \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{729}\right)$$

هندسی با $a_1 = 1$ و $q = \frac{1}{3}$ ، $n = 7$ هندسی با $a_1 = \frac{1}{3}$ و $q = \frac{1}{3}$ ، $n = 7$

$$= \frac{1(1-(\frac{1}{3})^7)}{1-\frac{1}{3}} - \frac{\frac{1}{3}(1-(\frac{1}{3})^7)}{1-\frac{1}{3}} = \frac{1-\frac{1}{3^7}}{\frac{2}{3}} - \frac{\frac{1}{3}(1-\frac{1}{3^7})}{\frac{2}{3}}$$

$$= \frac{3^7-1}{2} - \left(1 - \frac{1}{3^7}\right) = \frac{3^7-1}{2 \times 3^6} - \frac{2^7-1}{2^7}$$

۳۲

دنباله هندسی با $a_1 = 6$ و $q = -2$ ، $6, -12, 24, \dots \Rightarrow q = -2$ و $a_1 = 6$

$$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n = -126 \Rightarrow \frac{6(1-(-2)^n)}{1-(-2)} = -126$$

$$\Rightarrow \frac{6(1-(-2)^n)}{3} = -126 \Rightarrow 1-(-2)^n = \frac{-126}{2} = -63$$

$$\Rightarrow (-2)^n = 1 - (-63) \Rightarrow (-2)^n = 64 \Rightarrow n = 6$$

بنابراین مجموع ۶ جمله اول دنباله (-126) خواهد شد.

۳۳

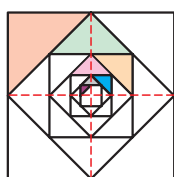
ایک دنباله هندسی با قدرنسبت $q = 2$ سروکار داریم، که $S_5 = 46/5$ می باشد. بنابراین:

$$S_5 = 46/5 \Rightarrow \frac{a_1(q^5-1)}{q-1} = 46/5 \xrightarrow{q=2} \frac{a_1(2^5-1)}{2-1} = 46/5$$

$$\Rightarrow a_1(32-1) = 46/5 \Rightarrow 31a_1 = 46/5$$

$$\Rightarrow a_1 = \frac{46/5}{31} = \frac{2}{31} = \frac{2}{2 \times 31} = \frac{1}{31}$$

$$\begin{aligned}
 & x^{n-1} + x^{n-2}y + \dots + xy^{n-2} + y^{n-1} \\
 & \times \frac{y}{x} \\
 & \times \frac{y}{x} \\
 & \text{دنباله هندسی} \\
 & a_1 = x^{n-1}, q = \frac{y}{x} \\
 & \frac{x^{n-1}((\frac{y}{x})^n - 1)}{\frac{y}{x} - 1} = \frac{x^{n-1}(\frac{y^n - x^n}{x^n})}{\frac{y-x}{x}} \\
 & = \frac{y^n - x^n}{y-x} \cdot \frac{x}{y-x} = \frac{x(y^n - x^n)}{x(y-x)} = \frac{x^n - y^n}{x-y} \\
 & \text{طرفین وسطین} \rightarrow x^n - y^n = (x-y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + \dots + y^{n-1})
 \end{aligned}$$



۴۲ | در مربع اول (بزرگ‌ترین مربع)

مساحت قسمت رنگی $\frac{1}{\lambda}$ مساحت مربع است. به همین ترتیب در هر مرحله، مساحت قسمت رنگی از هر مربع، $\frac{1}{\lambda}$ مساحت همان مربع است.

بنابراین اگر a_n مساحت مثلث رنگی در مربع n ام باشد، چون مساحت مربع‌ها هر بار نصف می‌گردد، داریم:

$$\begin{cases}
 \text{مساحت مربع اول} \\
 a_1 = \frac{1}{\lambda} \left(\frac{1}{1} \right) \\
 \text{مساحت مربع دوم} \\
 a_2 = \frac{1}{\lambda} \left(\frac{1}{\lambda} \times 1 \right) \\
 \text{مساحت مربع سوم} \\
 a_3 = \frac{1}{\lambda} \left(\frac{1}{\lambda} \times \frac{1}{\lambda} \times 1 \right) \\
 \vdots
 \end{cases}$$

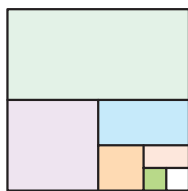
$\Rightarrow q = \frac{1}{\lambda}$ و قدرنسبت با $a_1 = \frac{1}{\lambda}$ دنباله هندسی

$$\Rightarrow \text{مساحت رنگی} = S_V = a_1 + a_2 + \dots + a_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1}$$

$$= \frac{\frac{1}{\lambda}((\frac{1}{\lambda})^n - 1)}{\frac{1}{\lambda} - 1} = \frac{\frac{1}{\lambda}(\frac{1}{\lambda^n} - 1)}{-\frac{1}{\lambda}} = -\frac{2}{\lambda} \left(\frac{1 - \lambda^n}{\lambda^n} \right)$$

$$= -\frac{1}{4} \left(\frac{1 - 128}{128} \right) = -\frac{1}{4} \left(\frac{-127}{128} \right) = \frac{127}{4 \times 128} = \frac{127}{512}$$

۴۳ | اگر a_n مساحت رنگ شده در هر مرحله باشد، داریم:



$$\begin{aligned}
 a_1 &= \frac{1}{\lambda} \xrightarrow{\text{باقی مانده}} \frac{1}{\lambda} \\
 a_2 &= \frac{1}{\lambda} \times \frac{1}{\lambda} = \left(\frac{1}{\lambda} \right)^2 \xrightarrow{\text{باقی مانده}} \frac{1}{\lambda} \times \frac{1}{\lambda} \\
 a_3 &= \frac{1}{\lambda} \times \frac{1}{\lambda} \times \frac{1}{\lambda} = \left(\frac{1}{\lambda} \right)^3 \\
 &\vdots \\
 a_n &= \left(\frac{1}{\lambda} \right)^n
 \end{aligned}$$

$$a_1 = 3 \times 2 = 6, a_2 = 3 \times 4 = 12 \Rightarrow q = \frac{a_2}{a_1} = 2 \quad \text{۳۷ | آ}$$

$$S_5 = \frac{6(1-2^5)}{1-2} = \frac{6(1-32)}{-1} = (-6)(-31) = 6 \times 31 = 186$$

ب

$$S_n = 3066 \xrightarrow{a_1=6, q=2} \frac{6(1-2^n)}{1-2} = 3066 \Rightarrow 6(2^n - 1) = 3066$$

$$\Rightarrow 2^n - 1 = \frac{3066}{6} = 511 \Rightarrow 2^n = 512 = 2^9 \Rightarrow n = 9$$

۳۸ | مجموع ده جمله اول دنباله هندسی برابر است با:

$$S = \frac{a_1(1-q^{10})}{1-q}$$

آ جمله اول را ۲ برابر می‌کنیم، داریم:

$$S_{10} = \frac{(2a_1)(1-q^{10})}{1-q} = 2 \frac{a_1(1-q^{10})}{1-q} = 2S \Rightarrow 2 \text{ برابر می‌شود.}$$

ب اگر قدرنسبت را به توان ۲ برسانیم، داریم:

$$S_{10} = \frac{a_1(1-(q^2)^{10})}{1-q^2} = \frac{a_1(1-(q^{10})^2)}{1-q^2}$$

$$\xrightarrow{\text{اتحاد مزدوج}} \frac{a_1(1-q^{10})(1+q^{10})}{(1-q)(1+q)} = \frac{1+q^{10}}{1+q} S$$

$$\begin{aligned}
 & \text{جمله } n \\
 & 1 + a + a^2 + \dots + a^{n-1} \xrightarrow{\text{دنباله هندسی}} \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1} \\
 & \times a \quad \times a
 \end{aligned}$$

$$\frac{a_1 = 1}{q = a} \frac{1(a^n - 1)}{a - 1} = \frac{1 - a^n}{1 - a}$$

توجه کنید که در مرحله آخر صورت و مخرج را قرینه کردیم.

۴۵ | روش اول با توجه به درستی تساوی مسئله قبل، کافی است به

جای a ، $(-a)$ قرار دهیم:

$$1 + (-a) + (-a)^2 + \dots + (-a)^{n-2} + (-a)^{n-1} = \frac{1 - (-a)^n}{1 - (-a)}$$

$$\xrightarrow{\text{فرد } n} 1 - a + a^2 + \dots - a^{n-2} + a^{n-1} = \frac{1 + a^n}{1 + a}$$

$$\xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} a^n + 1 = (a+1)(a^{n-1} - a^{n-2} + \dots + a^2 - a + 1)$$

روش دوم

$$\begin{aligned}
 & 1 - a + a^2 + \dots - a^{n-2} + a^{n-1} \xrightarrow{\text{دنباله هندسی}} \frac{1(1 - (-a)^n)}{1 - (-a)} \\
 & \times (-a) \quad \times (-a) \quad \times (-a)
 \end{aligned}$$

$$\xrightarrow{\text{فرد } n} \frac{1 + a^n}{1 + a}$$

$$\xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} a^n + 1 = (a+1)(a^{n-1} - a^{n-2} + \dots + a^2 - a + 1)$$

۴۶ | ارتفاع‌هایی که توپ پس از هر بار زمین خوردن بالا می‌آید، یک

دنباله هندسی با قدرنسبت $q = \frac{1}{3}$ تشکیل می‌دهد:

$$\begin{cases} l_1 = 9 \\ l_2 = \frac{1}{3} l_1 \\ l_3 = \frac{1}{3} l_2 = \left(\frac{1}{3}\right)^2 l_1 \\ \vdots \\ l_n = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} l_1 \end{cases}$$

مسافت طی شده $= 2(l_1 + l_2 + \dots + l_n) = 2S_n = 2 \times \frac{l_1(q^n - 1)}{q - 1}$

$$\begin{aligned} q = \frac{1}{3} \quad 2 \times \frac{9 \left(\left(\frac{1}{3} \right)^n - 1 \right)}{\frac{1}{3} - 1} &= 2 \times 9 \times \frac{1 - 3^n}{3^n - 1} = \frac{18(1 - 3^n)}{3^n - 1} \\ &= \frac{18 \times (1 - 3^n)}{3^n - 1} = \frac{18 \times (1 - 3^n)}{3^n - 1} \end{aligned}$$

۴۷ | $a_1 = 30000$

$a_2 = a_1 + 0.1a_1 = (1.1)a_1$

$a_3 = a_2 + 0.1a_2 = (1.1)a_2 = (1.1)^2 a_1$

$\vdots$

$a_n = (1.1)^{n-1} a_1$

بنابراین با یک دنباله هندسی با $a_1 = 30000$ و $q = 1.1$ مواجه هستیم:

$$S_n = \frac{a_1(1 - q^n)}{1 - q} = \frac{30000(1 - (1.1)^n)}{1 - 1.1} = 30000 \times \frac{(1.1)^n - 1}{0.1}$$

تومان $\approx 30000 \times (1.1^{10} - 1) = 30000 \times 0.1047 = 3141 \approx 3141$

۴۸ | قطر $d_1 = 1$

$d_2 = d_1 - 0.5d_1 = 0.5d_1 = 0.5$

$d_3 = d_2 - 0.5d_2 = 0.5d_2 = (0.5)^2$

$\vdots$

$d_n = (0.5)^{n-1}$

بنابراین قطر نیم‌دایره‌ها تشکیل یک دنباله هندسی با جمله اول $d_1 = 1$ و قدرنسبت $q = 0.5$ می‌دهند.

فاصله سنگ تا کودک $= d_1 + d_2 + \dots + d_n = S_n = \frac{d_1(1 - q^n)}{1 - q}$

$$\begin{aligned} &= \frac{1(1 - (0.5)^n)}{1 - 0.5} = \frac{1 - (0.5)^n}{0.5} \\ &= \frac{1 - \frac{1}{2^n}}{\frac{1}{2}} = \frac{2 - \frac{1}{2^{n-1}}}{1} = 2 - \frac{1}{2^{n-1}} \end{aligned}$$

مجموع مساحت‌های رنگ‌شده در مرحله n $S_n = \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \dots + \left(\frac{1}{4}\right)^n$

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{1}{4} \quad a_1(q^n - 1) = \frac{1}{4} \left(\left(\frac{1}{4} \right)^n - 1 \right) \\ q &= \frac{1}{4} \quad \frac{1}{4} - 1 = -\frac{3}{4} \end{aligned}$$

حالا می‌خواهیم مجموع مساحت‌های رنگ شده بیش‌تر یا مساوی ۹۹ درصد سطح مربع اولیه باشد:

$$\begin{aligned} S_n &\geq \frac{99}{100} \times 1 \Rightarrow 1 - \frac{1}{4^n} \geq \frac{99}{100} \Rightarrow \frac{1}{4^n} \leq 1 - \frac{99}{100} = \frac{1}{100} \\ &\Rightarrow 4^n \geq 100 \Rightarrow n \geq 7 \end{aligned}$$

یعنی پس از ۷ مرحله، حداقل ۹۹ درصد از سطح مربع رنگ شده است.

۴۴ | میزان کاهش ذرات در هر مرحله به صورت زیر است:

مرحله اول: $\frac{1}{4} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} \times \dots$ ، مرحله دوم: $\frac{1}{4}$ ، مرحله n ام $= \left(\frac{1}{4}\right)^n$

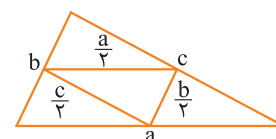
بنابراین پس از n مرحله میزان کاهش ذرات برابر است با:

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^3 + \dots + \left(\frac{1}{4}\right)^n \\ q &= \frac{1}{4} \quad \frac{1}{4} \left(1 - \left(\frac{1}{4} \right)^n \right) \\ &= 1 - \left(\frac{1}{4} \right)^n \end{aligned}$$

حالا می‌خواهیم میزان کاهش ذرات حداقل ۹۶ درصد باشد:

$$\begin{aligned} S_n &\geq \frac{96}{100} \Rightarrow 1 - \left(\frac{1}{4} \right)^n \geq \frac{96}{100} \Rightarrow \left(\frac{1}{4} \right)^n \leq \frac{4}{100} = \frac{1}{25} \\ &\Rightarrow \frac{1}{4^n} \leq \frac{1}{25} \Rightarrow 4^n \geq 25 \Rightarrow n \geq 5 \end{aligned}$$

بنابراین حداقل ۵ صافی نیاز است.



۴۵ | بنابه قضیه تالس، در

هر مرحله طول اضلاع مثلث ایجادشده نصف طول اضلاع مثلث مرحله قبل است، بنابراین:

محیط مثلث اول: $a_1 = a + b + c = P$

محیط مثلث دوم: $a_2 = \frac{a}{2} + \frac{b}{2} + \frac{c}{2} = \frac{1}{2}P$

محیط مثلث سوم: $a_3 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}P \right) = \left(\frac{1}{2} \right)^2 P$

$\vdots$

محیط مثلث n ام: $a_n = \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1} P$

$$\begin{aligned} S_{10} &= P + \frac{1}{2}P + \dots + \left(\frac{1}{2} \right)^9 P \\ q &= \frac{1}{2} \quad \frac{P(1 - (\frac{1}{2})^{10})}{1 - \frac{1}{2}} \\ &= 2P \left(1 - \frac{1}{2^{10}} \right) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow S_{10} = 2P \left(\frac{2^{10} - 1}{2^{10}} \right) = \frac{2^{10} - 1}{2^9} P = \frac{1023 - 1}{512} P = \frac{1022}{512} P$$

بنابراین مجموع محیط‌ها $\frac{1023}{512} P$ برابر P است.

فهرست

جبر و معادله

۳

فصل اول

تابع

۳۴

فصل دوم

توابع نمایی و لگاریتمی

۶۳

فصل سوم

مثلثات

۷۷

فصل چهارم

حد و پیوستگی

۹۰

فصل پنجم

فصل

جبر و معادله

درس ۱ | مجموعه جملات دنباله‌های حسابی و هندسی

کاردرکلاس | ص ۴ کتاب درسی

۱ | نشان دهید در یک دنباله حسابی اگر a_1 و a_n به ترتیب جملات اول و آخر باشند، آنگاه:

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$$

می‌دانیم در یک دنباله حسابی با جمله اول a_1 و قدر نسبت d ، جمله آخر (جمله n ام) برابر است با:

$$a_n = a_1 + (n-1)d \quad (1)$$

از طرفی می‌دانیم در این دنباله، مجموع n جمله اول به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$S_n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d] = \frac{n}{2}[a_1 + \underbrace{a_1 + (n-1)d}_{a_n}] \Rightarrow S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$$

۲ | مجموع همه عددهای طبیعی دو رقمی مضرب ۴ را به دست آورید.

می‌دانیم عددهای طبیعی دو رقمی مضرب ۴ عبارت‌اند از: ۹۶, ..., ۲۰, ۱۶, ۱۲

که تشکیل یک دنباله حسابی با جمله اول $a_1 = ۱۲$ و قدر نسبت $d = ۴$ می‌دهند. ابتدا به دنبال این هستیم که بدانیم این دنباله دارای چند جمله است. داریم:

$$a_n = ۹۶ \Rightarrow a_1 + (n-1)d = ۹۶ \Rightarrow ۱۲ + (n-1)(۴) = ۹۶ \Rightarrow ۴n + ۸ = ۹۶ \Rightarrow n = ۲۲$$

حال باید مجموع ۲۲ جمله اول این دنباله را پیدا کنیم:

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) \xrightarrow{n=22} S_{22} = \frac{22}{2}(۱۲ + ۹۶) = ۱۱ \times ۱۰۸ = ۱۱۸۸$$

کاردرکلاس | ص ۵ و ۶ کتاب درسی

۱ | مجموع ۱۰ جمله اول دنباله هندسی مقابل را به دست آورید. $\frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \dots$

دنباله داده شده، یک دنباله هندسی با جمله اول $a = \frac{1}{8}$ و قدر نسبت $q = ۲$ است.

$$S_n = a \frac{1-q^n}{1-q} \Rightarrow S_{10} = \frac{1}{8} \times \frac{1-2^{10}}{1-2} = 2^{-3}(2^{10}-1) = 2^7 - 2^{-3} = ۱۲۸ - \frac{1}{8} = ۱۲۷ \frac{۷}{۸}$$

۲ در داستان مخترع شطرنج اگر در خانه اول یک دانه گندم و در خانه دوم دو دانه گندم و به همین صورت در هر خانه دو برابر خانه قبلی گندم قرار دهیم و اگر هر دانه گندم را یک گرم در نظر بگیریم:

الف) این جایزه چند گرم می‌شود؟ صفحه شطرنج ۶۴ خانه دارد. باید حاصل جمع زیر را به دست آوریم:

$$1 + 2 + 4 + 8 + \dots + 2^{63} = 2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{63}$$

بنابراین باید مجموع ۶۴ جمله اول دنباله هندسی با جمله اول $a = 1$ و قدر نسبت $q = 2$ را محاسبه کنیم.

$$S_n = a \frac{1-q^n}{1-q} \Rightarrow S_{64} = 1 \times \frac{1-2^{64}}{1-2} = 2^{64} - 1 \Rightarrow 2^{64} - 1 \text{ گرم می‌شود.}$$

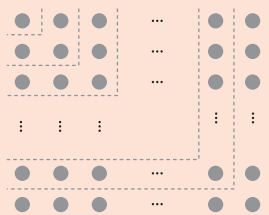
ب) نشان دهید جایزه او بیش از ۱۰۰۰ میلیارد تن خواهد شد.

$$10^{18} \text{ g} = 10^6 \times 10^{12} = 10^9 \times 10^9 = 1000 \times 1000 \text{ میلیارد تن}$$

حال نشان می‌دهیم $2^{64} - 1$ از 10^{18} بزرگ‌تر است.

$$2^{64} - 1 = 2^{64} = 2^4 \times (2^{10})^6 = 16 \times (10^{24})^6 = 16 \times (1000)^6 = 16 \times 10^{18} > 10^{18}$$

تمرین | ص ۶ کتاب درسی



۱ الف) به کمک شکل زیر حاصل عبارت روبه‌رو را به

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1) = ?$$

دست آورید.

با توجه به شکل، داریم:

$$1^2 = 1 \times 1 = 1 \Rightarrow \text{تعداد دایره‌ها} = 1 \Rightarrow \text{اولین عدد فرد}$$

$$2^2 = 2 \times 2 = 4 \Rightarrow \text{تعداد دایره‌ها} = 1 + 3 = 4 \Rightarrow \text{مجموع تادومین عدد فرد}$$

$$3^2 = 3 \times 3 = 9 \Rightarrow \text{تعداد دایره‌ها} = 1 + 3 + 5 = 9 \Rightarrow \text{مجموع تا سومین عدد فرد}$$

$\vdots$

$$n^2 = n \times n = n^2 \Rightarrow \text{تعداد دایره‌ها} = 1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1) \Rightarrow \text{مجموع تا } n \text{مین عدد فرد}$$

$$\Rightarrow 1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1) = n^2$$

ب) اکنون با استفاده از فرمول درستی جواب خود در قسمت الف را بررسی کنید.

در واقع باید مجموع n جمله اول یک دنباله حسابی با جمله اول $a_1 = 1$ و جمله آخر $a_n = 2n-1$ را پیدا کنیم.

$$S_n = 1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1) = \frac{n}{2} (a_1 + a_n) = \frac{n}{2} (1 + (2n-1)) = n^2$$

همان‌طور که دیده می‌شود، پاسخ قسمت (ب) درستی پاسخ قسمت (الف) را تأیید می‌کند.

۲ مجموع همه اعداد طبیعی سه رقمی که مضرب شش هستند، چقدر می شود؟

باید حاصل جمع اعداد روبه رو را به دست آوریم:

$$102, 108, 114, \dots, 996$$

ابتدا بررسی می کنیم که در این دنباله، چند جمله وجود دارد:

$$a_1 = 102, d = 6$$

$$a_n = 996 \Rightarrow a_1 + (n-1)d = 996 \Rightarrow 102 + (n-1)(6) = 6n + 96$$

بنابراین باید مجموع ۱۵۰ جمله اول این دنباله را به دست آوریم:

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) \Rightarrow S_{150} = \frac{150}{2}(102 + 996) = 75 \times 1098 = 82350$$

دقت کنید که راه دیگری برای پیدا کردن تعداد جملات دنباله وجود دارد، به صورت زیر:

$$6 \leq n \leq 1000 \Rightarrow \frac{100}{6} \leq n < \frac{1000}{6} \xrightarrow{n \in \mathbb{N}} 17 \leq n \leq 166$$

بنابراین n می تواند ۱۵۰ باشد. مقدار مختلف اختیار کند، پس تعداد جملات دنباله ۱۵۰ تا است.

۳ در دنباله حسابی $5, 8, 11, \dots$ حداقل چند جمله آن را با هم جمع کنیم تا حاصل آن از ۴۹۳ بیشتر شود؟

$$5, 8, 11, \dots \Rightarrow a_1 = 5, d = 3$$

$$S_n > 493 \Rightarrow \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d] > 493 \Rightarrow \frac{n}{2}[2(5) + (n-1)(3)] > 493$$

$$\Rightarrow \frac{n}{2}(3n+7) > 493 \Rightarrow 3n^2 + 7n - 986 > 0$$

$$3n^2 + 7n - 986 = 0 \Rightarrow n = \frac{-7 \pm \sqrt{11881}}{6} = \frac{-7 \pm 109}{6}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} n = \frac{-7+109}{6} = 17 \\ n = \frac{-7-109}{6} = \frac{-58}{3} \end{cases}$$

n	$\frac{-58}{3}$	17
$3n^2 + 7n - 986 > 0$	$+$ ج	$-$ ج

$$n \in \mathbb{N} \Rightarrow n > 17 \Rightarrow n \geq 18$$

بنابراین باید حداقل ۱۸ جمله این دنباله را با هم جمع کنیم تا حاصل آن بیشتر از ۴۹۳ شود.

۴ در ۲۰ جمله اول یک دنباله حسابی مجموع جملات شماره های فرد ۱۳۵ و مجموع جملات شماره های زوج ۱۵۰ می باشد. جمله اول و قدر نسبت دنباله را مشخص کنید.

فرض می کنیم جمله اول دنباله a_1 و قدر نسبت آن d باشد. بنابراین:

$$a_1 + a_3 + a_5 + \dots + a_{19} = 135$$

$$\Rightarrow a_1 + (a_1 + 2d) + (a_1 + 4d) + \dots + (a_1 + 18d) = 135$$

$$\Rightarrow 10a_1 + 2d(1+2+3+\dots+9) = 135$$

$$\Rightarrow 10a_1 + 2d\left(\frac{9 \times (9+1)}{2}\right) = 135 \Rightarrow 10a_1 + 90d = 135 \quad (1)$$

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{15} = 150$$

$$\Rightarrow (a_1 + d) + (a_1 + 3d) + (a_1 + 5d) + \dots + (a_1 + 19d) = 150$$

دهمین عدد فرد
↑

$$\Rightarrow 10a_1 + d(1+3+5+\dots+19) = 150$$

$$\Rightarrow 10a_1 + 10^2 d = 150 \Rightarrow 10a_1 + 100d = 150 \quad (2)$$

$$\xrightarrow{(1), (2)} \begin{cases} 10a_1 + 90d = 135 \\ 10a_1 + 100d = 150 \end{cases} \Rightarrow a_1 = 0, d = 1/5$$

۵ جمله عمومی یک دنباله به صورت $a_n = 2^{n-1}$ است. چند جمله از این دنباله را با هم جمع کنیم تا مجموع آنها برابر ۲۵۵ شود؟

$$a_n = 2^{n-1} \Rightarrow \text{جملات دنباله: } 2^0, 2^1, 2^2, \dots$$

این دنباله یک دنباله هندسی با جمله اول $a = 2^0 = 1$ و قدر نسبت $q = 2$ است. بنابراین:

$$S_n = 255 \Rightarrow a \frac{1-q^n}{1-q} = 255 \Rightarrow 1 \times \frac{1-2^n}{1-2} = 255 \Rightarrow 2^n - 1 = 255$$

$$\Rightarrow 2^n = 256 \Rightarrow 2^n = 2^8 \Rightarrow n = 8$$

بنابراین باید ۸ جمله اول این دنباله را با هم جمع کنیم تا حاصل، برابر ۲۵۵ شود.

۶ طول ضلع مربعی یک متر است. ابتدا نیمی از مساحت مربع را رنگ می‌کنیم. سپس نیمی از مساحت باقی‌مانده را، و به همین ترتیب در هر مرحله نیمی از مساحت باقی‌مانده از قبل را رنگ می‌کنیم. پس از دست‌کم چند مرحله حداقل ۹۹ درصد سطح مربع رنگ شده است؟ الگوی هندسی مربوطه را رسم می‌کنیم و در هر شکل، سطح رنگ‌شده را به دست می‌آوریم. پس باید داشته باشیم:

$$\begin{array}{ccc} \begin{array}{|c|c|} \hline \text{White} & \text{Pink} \\ \hline \end{array} & , & \begin{array}{|c|c|} \hline \text{White} & \text{Pink} \\ \hline \end{array} \\ \frac{1}{2} & , & \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \\ \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|c|} \hline \text{White} & \text{Pink} & \text{Pink} \\ \hline \end{array} \quad , \dots$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^n} \geq \frac{99}{100} \Rightarrow S_n \geq \frac{99}{100}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \times \frac{1 - (\frac{1}{2})^n}{1 - \frac{1}{2}} \geq \frac{99}{100} \Rightarrow 1 - (\frac{1}{2})^n \geq \frac{99}{100} \Rightarrow (\frac{1}{2})^n \leq \frac{1}{100} \Rightarrow 2^n \geq 100$$

با حدس و آزمایش و اینکه $2^7 = 128$ ، نتیجه می‌شود $n \geq 7$. بنابراین پس از حداقل ۷ مرحله، حداقل ۹۹ درصد سطح مربع رنگ شده است.

۷ برای عدد حقیقی $a (a \neq 1)$ و عدد طبیعی n :

الف) حاصل عبارت مقابل را به دست آورید.

$$1 + a + a^2 + \dots + a^{n-1}$$

در واقع باید مجموع n جمله اول یک دنباله هندسی با جمله اول $t = 1$ و قدر نسبت $q = a$ را محاسبه کنیم.

$$S_n = 1 \times \frac{1 - a^n}{1 - a} = \frac{1 - a^n}{1 - a}$$

ب) با استفاده از قسمت الف نتیجه بگیرید که:

$$S_n = 1 + a + a^2 + \dots + a^{n-1} = \frac{1 - a^n}{1 - a} \Rightarrow a^{n-1} + \dots + a^2 + a + 1 = \frac{a^n - 1}{a - 1}$$

$$\Rightarrow a^n - 1 = (a - 1)(a^{n-1} + \dots + a^2 + a + 1)$$

درس ۲ معادلات درجه دوم

کاردکلاس | ص ۷ کتاب درسی

۱ معادله $3x^2 - 5x - 2 = 0$ را حل کنید.

$$3x^2 - 5x - 2 = 0 \Rightarrow a = 3, b = -5, c = -2$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4(3)(-2) = 1 \Rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$= \frac{-(-5) \pm \sqrt{1}}{2(3)} = \frac{5 \pm 1}{6} \Rightarrow x = 1 \text{ یا } x = \frac{2}{3}$$

۲ اگر $x = -1$ یک ریشه معادله $4x^2 - mx - 7 = 0$ باشد، ریشه دیگر کدام است؟

چون $x = -1$ یک ریشه است، بنابراین با جای‌گذاری آن، تساوی برقرار خواهد بود.

$$4(-1)^2 - m(-1) - 7 = 0 \Rightarrow 4 + m - 7 = 0 \Rightarrow m = 3 \Rightarrow 4x^2 - 3x - 7 = 0$$

$$4x^2 - 3x - 7 = 0 \Rightarrow a = 4, b = -3, c = -7$$

حالا معادله را حل می‌کنیم:

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4(4)(-7) = 121 \Rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$= \frac{-(-3) \pm \sqrt{121}}{2(4)} = \frac{3 \pm 11}{8} \Rightarrow x = -1 \text{ یا } x = \frac{7}{4}$$

بنابراین ریشه دیگر، $x = \frac{7}{4}$ است.

کاردکلاس | ص ۹ کتاب درسی

معادله درجه دومی تشکیل دهید که ریشه‌های آن $2 + \sqrt{3}$ و $2 - \sqrt{3}$ باشند.

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= 2 + \sqrt{3} \\ \beta &= 2 - \sqrt{3} \end{aligned} \right\} \Rightarrow S = \alpha + \beta = 2 + \sqrt{3} + 2 - \sqrt{3} = 4, P = \alpha\beta$$

$$= (2 + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3}) = 4 - 3 = 1$$

$$\Rightarrow x^2 - Sx + P = 0 \Rightarrow x^2 - 4x + 1 = 0$$