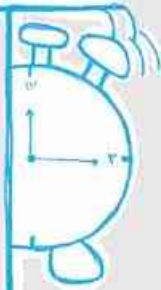


کتاب شب امتحان **هندسه (۳) دوازدهم** از ۴ قسمت اصلی به صورت زیر تشکیل شده است:

- (۱) **آزمون‌های نوبت اول:** آزمون‌های شماره ۱ تا ۴ این کتاب مربوط به مباحث نوبت اول است که خودش به دو قسمت تقسیم می‌شود:
 - (الف) **آزمون‌های طبقه‌بندی‌شده:** آزمون‌های شماره ۱ و ۲ را فصل به فصل طبقه‌بندی کرده‌ایم. بنابراین شما به راحتی می‌توانید پس از خواندن هر فصل از درس‌نامه تعدادی سؤال را بررسی کنید. حواستان باشد این آزمون‌ها، ۲۰ نمره‌ای و مثل یک آزمون کامل هستند. در کنار سؤال‌های این آزمون‌ها نکات مشاوره‌ای نوشته‌ایم. این نکات به شما در درس خواندن قبل از امتحان و پاسخگویی به آزمون در زمان امتحان کمک می‌کند.
 - (ب) **آزمون‌های طبقه‌بندی‌نشده:** آزمون‌های شماره ۳ و ۴ را طبقه‌بندی نکرده‌ایم تا دو آزمون نوبت اول، مشابه آزمونی که معلمان از شما خواهد گرفت، ببینید.
 - (۲) **آزمون‌های نوبت دوم:** آزمون‌های شماره ۵ تا ۱۴ از کل کتاب و مطابق امتحان پایان سال طرح شده‌اند. این قسمت هم، خودش به ۲ بخش تقسیم می‌شود:
 - (الف) **آزمون‌های طبقه‌بندی‌شده:** آزمون‌های شماره ۵ تا ۸ را که به ترتیب امتحان‌های نهایی خرداد ۱۴۰۰، خرداد ۱۴۰۱، دی ۱۴۰۱ و دی ۱۴۰۲ است، طبقه‌بندی کرده‌ایم. با این کار باز هم می‌توانید پس از خواندن هر فصل تعدادی سؤال مرتبط را پاسخ دهید. هر کدام از این آزمون‌ها هم، ۲۰ نمره دارند در واقع در این بخش، شما ۴ آزمون کامل را می‌بینید. این آزمون‌ها هم نکات مشاوره‌ای دارند.
 - (ب) **آزمون‌های طبقه‌بندی‌نشده:** آزمون‌های شماره ۹ تا ۱۴ را طبقه‌بندی نکرده‌ایم؛ پس، در این بخش با ۶ آزمون نوبت دوم، مشابه آزمون پایان سال مواجه خواهید شد. این آزمون‌ها به ترتیب امتحان‌های نهایی خرداد ۱۴۰۲، خرداد ۱۴۰۳، شهریور ۱۴۰۲ و شهریور ۱۴۰۳ و دو آزمون چالشی‌تر با عنوان «بیست پلاس» است.
 - (۳) **پاسخ‌نامه تشریحی آزمون‌ها:** در پاسخ تشریحی آزمون‌ها تمام آن‌چه را که شما باید در امتحان بنویسید تا نمره کامل کسب کنید، برایتان نوشته‌ایم. پاسخ‌ها مطابق با فرمت پاسخ‌برگ مورد تأیید آموزش و پرورش دارای ریزبارم‌بندی و آدرس مبحثی می‌باشد.
 - (۴) **درس‌نامه کامل شب امتحانی:** این قسمت برگ برنده شما نسبت به کسانی است که این کتاب را نمی‌خوانند (🙄) در این قسمت تمام آن‌چه را که شما برای گرفتن نمره عالی در امتحان هندسه (۳) نیاز دارید، تنها در ۱۵ صفحه آورده‌ایم، بخوانید و لذتش را ببرید!
- یک راهکار:** موقع امتحان‌های نوبت اول می‌توانید از سؤال‌های فصل‌های اول و دوم در آزمون‌های ۵ تا ۸ هم استفاده کنید. البته ذکر این مطلب ضروری است که معمولاً در امتحانات نهایی هندسه (۳) سؤالات به صورت فصل‌به‌فصل می‌باشد و می‌توان از سؤالات این آزمون‌ها نیز برای آمادگی جهت امتحانات نوبت اول استفاده نمود.



فهرست

بارم‌بندی درس هندسه (۳)

صفحه صفحه
نوبت آزمون پاسخ‌نامه

شماره فصل	نوبت اول	نوبت دوم (خرداد، شهریور، دی)
فصل اول	۱۶	۶
فصل دوم	۴	۸
	-	-
فصل سوم	-	۶
جمع	۲۰	۲۰

آزمون شماره ۱	(طبقه‌بندی‌شده)	اول	۳	۲۳
آزمون شماره ۲	(طبقه‌بندی‌شده)	اول	۴	۲۴
آزمون شماره ۳	(طبقه‌بندی‌نشده)	اول	۶	۲۶
آزمون شماره ۴	(طبقه‌بندی‌نشده)	اول	۷	۲۷
آزمون شماره ۵ نهایی خرداد ۱۴۰۰	(طبقه‌بندی‌شده)	دوم	۸	۲۹
آزمون شماره ۶ نهایی خرداد ۱۴۰۱	(طبقه‌بندی‌شده)	دوم	۱۰	۳۰
آزمون شماره ۷ نهایی دی ۱۴۰۱	(طبقه‌بندی‌شده)	دوم	۱۲	۳۲
آزمون شماره ۸ نهایی دی ۱۴۰۲	(طبقه‌بندی‌شده)	دوم	۱۳	۳۴
آزمون شماره ۹ نهایی خرداد ۱۴۰۲	(طبقه‌بندی‌نشده)	دوم	۱۴	۳۵
آزمون شماره ۱۰ نهایی خرداد ۱۴۰۳	(طبقه‌بندی‌نشده)	دوم	۱۶	۳۷
آزمون شماره ۱۱ نهایی شهریور ۱۴۰۲	(طبقه‌بندی‌نشده)	دوم	۱۷	۳۹
آزمون شماره ۱۲ نهایی شهریور ۱۴۰۳	(طبقه‌بندی‌نشده)	دوم	۱۸	۴۱
آزمون شماره ۱۳ بیست پلاس (چالشی‌تر)	(طبقه‌بندی‌نشده)	دوم	۱۹	۴۳
آزمون شماره ۱۴ بیست پلاس (چالشی‌تر)	(طبقه‌بندی‌نشده)	دوم	۲۱	۴۵

آزمون ۱	تاریخ آزمون: دی ماه مدت آزمون: ۱۲۰ دقیقه	رشته: ریاضی فیزیک پایه دوازدهم	هندسه (۳) نوبت اول	
--	--	--	--	--

ردیف	فصل اول	نمره
۱	جاهای خالی را با عبارت مناسب پر کنید. الف) اگر A یک ماتریس مربعی وارون پذیر باشد، آن گاه $(A^{-1})^{-1} = \dots\dots\dots$. ب) ماتریس قطری که درایه های روی قطر اصلی آن با هم برابر باشند، ماتریس $\dots\dots\dots$ نام دارد. پ) شرط لازم و کافی برای این که ماتریس مربعی A وارون پذیر باشد، آن است که دترمینان ماتریس $A \dots\dots\dots$ باشد. ت) حاصل ضرب ماتریس ها خاصیت جابه جایی $\dots\dots\dots$.	۱
۲	درستی یا نادرستی عبارتهای زیر را مشخص کنید. الف) اگر A, B و C سه ماتریس مربعی و هم مرتبه باشند، آن گاه $A \times (B + C) = A \times B + A \times C$. ب) اتحادهای جبری درباره ماتریس ها برقرار هستند. ت) اگر A و B دو ماتریس مربعی و هم مرتبه باشند، آن گاه $BA = AB = A B$.	۲
۳	ماتریس $A = [a_{ij}]_{3 \times 3}$ و $a_{ij} = 2i + 3j$ را به صورت آرایه مستطیلی بنویسید. سپس مجموع درایه های $\dots\dots\dots$ با توجه به سطر و ستون باید اعداد داخل ماتریس را مشخص کنی. روی قطر اصلی را بیابید.	۳
۴	اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$، نشان دهید: $A^2 - 4A - 5I_3 = \bar{O}$. هواست باشد یعنی $I_{3 \times 3}$.	۴
۵	دو ماتریس 3×3 مانند A و B مثال بزنید که $A \neq \bar{O}$ و $B \neq \bar{O}$ ولی $AB = \bar{O}$. دقت کن که باید تمام درایه های ماتریس AB، صفر شوند.	۵
۶	اگر A یک ماتریس وارون پذیر از مرتبه 2×2 باشد و $A = -2$، آن گاه حاصل عبارت زیر را بیابید. $A^4 - 4 A^{-1} + 3$ دقت کن ضریب ۴ پیرون از دترمینان است ولی توان ۴ داخل دترمینان.	۶
۷	اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$، حاصل عبارت $5A^{-1} + B^{-1}$ را به دست آورید. ضریب ۵ فقط برای A^{-1} است.	۷
۸	دترمینان ماتریس $A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 7 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 5 & -2 \end{bmatrix}$ را یک بار به روش ساروس و یک بار برحسب ستون اول محاسبه کنید. هواست باشد حاصل دترمینان از هر دو روش باید یکسان شود.	۸
۹	مقدار a را چنان بیابید که دستگاه $\begin{cases} 2x + 3y = 4 \\ ax - y = 2a \end{cases}$ دارای بی شمار جواب باشد. بی شمار جواب برای دستگاه، یعنی منطبق بودن دو خط.	۹
۱۰	ماتریس های $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} a & b \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$ در تساوی $(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$ صدق می کنند. اتحاد تورو یاد پی می انداز؟ مقادیر a و b را بیابید.	۱۰
۱۱	اگر $A^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 8 & -5 \end{bmatrix}$ باشد، ماتریس $A \times B$ را محاسبه کنید. هواست باشد اول A رو پیدا کنی.	۱۱
۱۲	دستگاه معادلات $\begin{cases} x - 2y = 3 \\ 2x + 6y = -4 \end{cases}$ را با استفاده از روش ماتریس وارون حل کنید. فرم ۳ ماتریسی دستگاه فراموش نشه.	۱۲
۱۳	اگر $A = [a_{ij}]_{2 \times 2}$ و $A^5 = -32$ باشد، حاصل $\frac{ 3A }{ 4A^{-1} }$ چه قدر است؟ به مرتبه ماتریس دقت کن.	۱۳
فصل دوم		
۱۴	یک رویه مخروطی را در نظر بگیرید. اگر صفحه P عمود بر محور رویه مخروطی طوری رسم شود که از رأس مخروط عبور نکند سطح مقطع حاصل چه شکلی است؟ شکل مناسب رسم کنید. دقت کن که صفحه P از رأس مخروط نگذشته.	۱۴
۱۵	مکان هندسی موردنظر را با رسم شکل مناسب مشخص کنید. «مکان هندسی نقاطی از صفحه که از خط L به فاصله ثابت ۱ واحد باشند.» خط L از طرفین نامحدود است.	۱۵
۱۶	خط d و نقطه A غیرواقع بر آن داده شده اند. نقطه ای روی خط d تعیین کنید که از نقطه A به فاصله L واحد باشد. (در مورد تعداد جواب ها بحث کنید).	۱۶
۱۷	سطح استوانه ای را تعریف کنید. در چه حالتی سطح مقطع یک صفحه با سطح استوانه ای بیضی خواهد بود؟ (شکل مناسب رسم کنید).	۱۷
۲۰	جمع نمرات	موفق باشید

هندسه (۳)	رشته: ریاضی فیزیک	تاریخ آزمون: شهریور ۱۴۰۳
نوبت دوم	پایه دوازدهم	مدت آزمون: ۱۲۰ دقیقه

ردیف	فصل اول	نمره
۱	درستی یا نادرستی هر یک از عبارتهای زیر را مشخص کنید. (الف) برای هر دو ماتریس مربعی هم مرتبه A و B ، در حالت کلی رابطه $(A - B)(A + B) = A^2 - B^2$ برقرار است. (ب) وارون هر ماتریس مربعی در صورت وجود منحصر به فرد است.	۰/۵
۲	ماتریسهای $A = \begin{bmatrix} -1 & m \\ -2 & m \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ ، چنان هستند که $C = 2A + 3B$ ماتریس قطری است. مقدار m و مجموع درایه های قطر اصلی ماتریس C را حساب کنید.	۱/۲۵
۳	با فرض $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ ، ماتریس A^5 را محاسبه کنید.	۱
۴	(الف) اگر A ماتریس 2×2 و اسکالر باشد و $a_{22} = 3$ ، در این صورت A و $ A $ را بیابید. (ب) دو ماتریس $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ 0 & d & 0 \\ e & 0 & f \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} ka & kb & kc \\ 0 & d & 0 \\ e & 0 & f \end{bmatrix}$ ، $(k$ عددی حقیقی است.) را در نظر بگیرید. با محاسبه $ A $ و $ B $ نشان دهید که: $ B = k A $.	۱/۷۵
۵	دستگاه $\begin{cases} 3x - 4y = 1 \\ -x + 2y = 1 \end{cases}$ را با استفاده از ماتریس وارون حل کنید.	۱/۵
۶	برای هر یک از عبارتهای (الف) و (ب)، مورد مناسب را از بین کلمات (سهمی - بیضی - نقطه) انتخاب کرده و در پاسخ برگ وارد کنید (یک مورد اضافی است). (الف) فصل مشترک یک صفحه و یک سطح مخروطی در حالتی که صفحه بر محور سطح مخروطی عمود بوده و از رأس آن بگذرد. (ب) مکان هندسی نقاطی از یک صفحه که از یک خط ثابت در آن صفحه و از یک نقطه ثابت غیر واقع بر آن خط در آن صفحه به یک فاصله باشند.	۰/۵
۷	نقطه A و خط d در صفحه مفروض اند. نقطه ای بیابید که از A به فاصله ۲ سانتی متر و از خط d به فاصله ۳ سانتی متر باشد. (در باره تعداد جوابهای مسئله بحث کنید).	۱/۵
۸	مقدار m را چنان تعیین کنید که دایره به معادله $x^2 + y^2 + 2x - 2y + m = 0$ با دایره به مرکز $O(2, -3)$ و شعاع ۳ مماس بیرون باشد.	۱/۵
۹	معادله دایره ای را بنویسید که $O(1, -1)$ مرکز آن بوده و روی خط به معادله $4x - 3y = 2$ ، و تری به طول ۶ جدا کند.	۱/۲۵
۱۰	(الف) خروج از مرکز یک بیضی با اندازه قطرهای ۴ و ۶ را بیابید. (ب) نقطه P بیرون بیضی با قطر بزرگ $AA' = 2a$ و کانونهای F و F' مفروض است. ثابت کنید: $PF + PF' > 2a$ (رسم شکل در پاسخ برگ الزامی است).	۱/۷۵
۱۱	سهمی به معادله $y^2 - 4x = 4y$ داده شده است. مختصات رأس، کانون و معادله خط هادی سهمی را به دست آورید.	۱/۵
۱۲	جاهای خالی را با عبارت یا اعداد مناسب کامل کنید. (الف) معادله صفحه گذرنده از نقطه $A(2, 3, -1)$ و عمود بر محور x ها به صورت می باشد. (ب) اگر $A(-1, 0, 3)$ و $B(5, 2, -3)$ ، مختصات نقطه M وسط پاره خط AB به صورت است. (پ) برای هر دو بردار دلخواه $\vec{a}$ و $\vec{b}$ ، حاصل $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{a}$ برابر می باشد. (ت) حاصل $2\vec{k} - (\vec{j} \times \vec{i})$ برابر است.	۱
۱۳	برای هر دو بردار غیر صفر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ ثابت کنید: $ \vec{a} \cdot \vec{b} \leq \vec{a} \vec{b} $. (منظور از $ \vec{a} \cdot \vec{b} $ قدر مطلق مقدار $\vec{a} \cdot \vec{b}$ می باشد).	۱
۱۴	فرض کنید $\vec{a} = (\frac{3}{4}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$ و $\vec{b} = (1, 0, 1)$ ، تصویر قائم بردار $2\vec{a} - \vec{b}$ را بر امتداد بردار $\vec{b}$ به دست آورید.	۱/۷۵
۱۵	نقاط $A(1, 0, 0)$ ، $B(0, -2, 0)$ و $C(0, 0, 3)$ داده شده اند، ابتدا حاصل $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$ را محاسبه کرده و سپس به کمک آن مساحت مثلث ABC را به دست آورید.	۱/۵
۱۶	حجم متوازی السطوح ایجاد شده توسط بردارهای $\vec{a} = (0, -1, 1)$ ، $\vec{b} = (1, 0, -1)$ و $\vec{c} = (0, -1, -1)$ را بیابید.	۰/۷۵
	جمع نمرات	۲۰
	موفق باشید	

پاسخنامه تشریحی

آزمون شماره ۱ (نوبت اول)

۱- الف) A (۵/۵) ب) اسکالر (۵/۵) پ) غیر صفر (۵/۵)

(فصل ۱- ماتریس، وارون ماتریس و دترمینان)

ت) ندارد (۵/۵)

۲- الف) درست (۵/۵)؛ خاصیت توزیع پذیری در ماتریس ها برقرار است.

(فصل ۱- اعمال روی ماتریس ها)

ب) نادرست (۵/۵)؛ زیرا ضرب ماتریس ها خاصیت جابه جایی ندارد. در نتیجه اتحاد های جبری برقرار نیستند.

(فصل ۱- اعمال روی ماتریس ها)

پ) نادرست (۵/۵)؛ زیرا $|A| = 12 - 12 = 0$. می دانیم شرط وارون پذیری ماتریس مربعی A آن است که $|A| \neq 0$ باشد.

(فصل ۱- وارون ماتریس و دترمینان)

ت) درست (۵/۵)؛ دترمینان روی ضرب ماتریس های مربعی هم مرتبه باز می شود.

(فصل ۱- وارون ماتریس و دترمینان)

۳- i شماره سطر و j شماره ستون است. $1 \leq i, j \leq 3$.

$$a_{11} = 2(1) + 3(1) = 5$$

$$a_{12} = 2(1) + 3(2) = 8$$

$$a_{13} = 2(1) + 3(3) = 11$$

$$a_{21} = 2(2) + 3(1) = 7$$

$$a_{22} = 2(2) + 3(2) = 10$$

$$a_{23} = 2(2) + 3(3) = 13$$

$$a_{31} = 2(3) + 3(1) = 9$$

$$a_{32} = 2(3) + 3(2) = 12$$

$$a_{33} = 2(3) + 3(3) = 15$$

پیدا کردن درایه ها (۵/۷۵)

در نتیجه ماتریس A به صورت $A = \begin{bmatrix} 5 & 8 & 11 \\ 7 & 10 & 13 \\ 9 & 12 & 15 \end{bmatrix}$ خواهد بود. مجموع درایه های

$$a_{11} + a_{22} + a_{33} = 5 + 10 + 15 = 30 \quad (۵/۷۵)$$

روی قطر اصلی یعنی:

(فصل ۱- اعمال روی ماتریس ها)

۴- A^T یعنی A را در خودش ضرب کنیم:

$$A^T = A \times A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 8 & 8 \\ 8 & 9 & 8 \\ 8 & 8 & 9 \end{bmatrix} \quad (۵/۵)$$

$4A$ یعنی عدد ۴ را در تمام درایه های ماتریس A ضرب کنیم:

$$4A = 4 \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 8 & 8 \\ 8 & 4 & 8 \\ 8 & 8 & 4 \end{bmatrix} \quad (۵/۷۵)$$

I_3 ماتریس همانی مرتبه 3×3 ، $I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ است و $5I_3$ برابر است با $\begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ (۵/۷۵)

$$A^T - 4A - 5I_3 = \begin{bmatrix} 9 & 8 & 8 \\ 8 & 9 & 8 \\ 8 & 8 & 9 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 & 8 & 8 \\ 8 & 4 & 8 \\ 8 & 8 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \quad (۵/۷۵)$$

اگر عملیات تفریق را روی درایه های نظریه نظیر انجام دهیم، آن گاه داریم:

$$A^T - 4A - 5I_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \bar{0} \quad (۵/۷۵)$$

(فصل ۱- اعمال روی ماتریس ها)

۵- برای دو ماتریس غیر صفر $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 1 & -3 & -5 \\ -1 & 3 & 5 \end{bmatrix}$ (۵/۵)

حاصل ضرب AB را تشکیل می دهیم:

$$AB = \begin{bmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 1 & -3 & -5 \\ -1 & 3 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \bar{0} \quad (۵/۵)$$

یعنی ممکن است حاصل ضرب دو ماتریس غیر صفر، ماتریس صفر بشود.

توجه: برای هر ماتریس 3×3 دیگر نیز همین نمره لحاظ می شود.

(فصل ۱- اعمال روی ماتریس ها)

۶- می دانیم توان از دترمینان خارج می شود، یعنی $|A|^4 = |A^4|$. هم چنین $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$

$$|A^4| - 4|A^{-1}| + 3 = \underbrace{|A|^4}_{(۵/۷۵)} - 4 \times \underbrace{\frac{1}{|A|}}_{(۵/۷۵)} + 3$$

در نتیجه:

$$= \underbrace{(-2)^4}_{(۵/۷۵)} - 4 \times \frac{1}{-2} + 3 = 16 + 2 + 3 = 21 \quad (۵/۷۵)$$

(فصل ۱- وارون ماتریس و دترمینان)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = 3 - (-2) = 5 \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow 5A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (۵/۷۵)$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow |B| = 4 - 3 = 1 \Rightarrow B^{-1} = \frac{1}{1} \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \quad (۵/۷۵)$$

$$5A^{-1} + B^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{جمع نظریه نظیر درایه ها}} \begin{bmatrix} 7 & -3 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \quad (۵/۷۵)$$

(فصل ۱- وارون ماتریس و دترمینان)

۸- ساروس:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 7 & 1 & 5 \\ 2 & -1 & 3 & 2 & -1 \\ 4 & 5 & -2 & 4 & 5 \end{vmatrix} = \underbrace{(+2+60+70)}_{(۵/۷۵)} - \underbrace{(-28+15-20)}_{(۵/۷۵)} = 132 - (-33) = 132 + 33 = 165 \quad (۵/۷۵)$$

بسط ستون اول:

$$|A| = 1 \times (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} + 2 \times (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} + 4 \times (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} \\ = 1(2-15) - 2(-10-35) + 4(15+7) = -13 + 90 + 88 = 165 \quad (۵/۷۵)$$

(فصل ۱- دترمینان)

۹- برای این که دستگاه بی شمار جواب داشته باشد، باید نسبت ضرایب با هم برابر باشند

$$\frac{2}{a} = \frac{3}{-1} = \frac{4}{2a} \quad (۵/۵)$$

یعنی:

$$2a = -2 \Rightarrow a = -\frac{2}{2} = -1 \quad (۵/۷۵)$$

از حل تناسب اول داریم:

با جای گذاری $a = -\frac{2}{3}$ ، هر سه کسر با هم برابرند.

$$\frac{2}{-\frac{2}{3}} = \frac{3}{-1} = \frac{4}{2(-\frac{2}{3})} \Rightarrow -3 = -3 = -3 \quad (۵/۷۵)$$

بنابراین به ازای $a = -\frac{2}{3}$ دستگاه بی شمار جواب دارد. (توجه کنید اگر تساوی بین کسرها برقرار نمی شد، آن گاه دستگاه به ازای هیچ مقدار a دارای بی شمار جواب نبود.)

(فصل ۱- دستگاه معادلات)



۱۰- طبق فرض $(A+B)(A-B) = A^T - B^T$ در نتیجه:

$$A \times A - A \times B + B \times A - B \times B = A^T - B^T$$

$$\Rightarrow A^T - AB + BA - B^T = A^T - B^T$$

$$\Rightarrow -AB = -BA \Rightarrow AB = BA \quad (۰/۷۵)$$

$$AB = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ 4 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3a-8 & 3b+4 \\ 2a+12 & 2b-6 \end{bmatrix} \quad (۰/۷۵)$$

$$BA = \begin{bmatrix} a & b \\ 4 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3a+2b & -2a+3b \\ 8 & -14 \end{bmatrix} \quad (۰/۷۵)$$

$$AB = BA \Rightarrow \begin{cases} 3a+12=8 \Rightarrow 3a=-4 \Rightarrow a=-\frac{4}{3} \quad (۰/۷۵) \\ 2b-6=-14 \Rightarrow 2b=-8 \Rightarrow b=-4 \quad (۰/۷۵) \end{cases}$$

(فصل ۱- اعمال روی ماتریس‌ها)

۱۱- ابتدا وارون ماتریس A^{-1} را محاسبه می‌کنیم:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow |A^{-1}| = -2+4=2 \quad (۰/۷۵)$$

$$\Rightarrow (A^{-1})^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \quad (۰/۷۵) \Rightarrow A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad (۰/۷۵)$$

$$A \times B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 8 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & -3 \\ -7 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad (۰/۷۵)$$

(فصل ۱- وارون ماتریس و دترمینان)

۱۲-

$$\begin{cases} x-2y=3 \\ 2x+6y=-4 \end{cases} \Rightarrow A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 6 \end{bmatrix} \quad (۰/۷۵)$$

معادله ماتریسی را می‌نویسیم:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \end{bmatrix} \quad (۰/۷۵)$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = A^{-1} \times \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \end{bmatrix} = \frac{1}{6+4} \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \end{bmatrix} \quad (۰/۷۵)$$

$$= \frac{1}{10} \begin{bmatrix} 10 \\ 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x=1 \quad (۰/۷۵) \\ y=1 \quad (۰/۷۵) \end{cases}$$

(فصل ۱- وارون ماتریس و دترمینان)

۱۳-

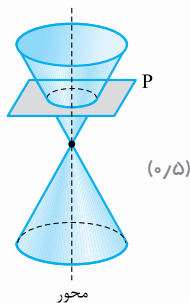
$$|A^5| = -32 \Rightarrow |A|^5 = (-2)^5 \Rightarrow |A| = -2 \quad (۰/۷۵)$$

$$|3A| = 3^2 |A| = 9(-2) = -18 \quad (۰/۷۵)$$

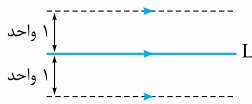
$$|4A^{-1}| = 4^2 \frac{1}{|A|} = 16 \times \frac{1}{-2} = -8 \quad (۰/۷۵)$$

در نتیجه $\frac{-18}{-8} = 2\frac{1}{2}$ جواب نهایی است. (فصل ۱- دستگاه معادلات) (۰/۷۵)

۱۴- دایره (۰/۷۵)



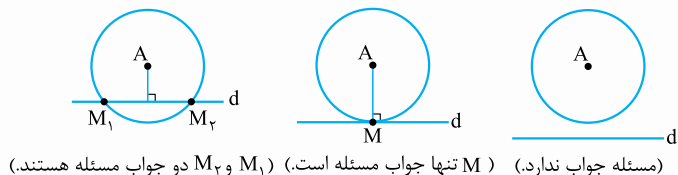
(فصل ۲- مقاطع مخروطی)



(فصل ۲- مکان هندسی)

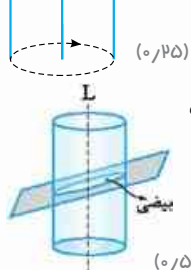
۱۵- دو خط موازی با خط L و به فاصله ۱ واحد از آن، که در دو طرف خط L هستند. (۰/۷۵)

۱۶- مکان هندسی نقاطی از صفحه که از نقطه A به فاصله معلوم L باشد دایره‌ای به مرکز A و شعاع L است. (۰/۷۵) اگر این دایره خط d را در دو نقطه قطع کند، آن دو نقطه، نقطه‌های مطلوب هستند و مسئله دارای دو جواب است. (۰/۷۵) اگر این دایره بر خط d مماس باشد، نقطه تماس، نقطه مطلوب است و مسئله دارای یک جواب است. (۰/۷۵) اگر این دایره، خط d را قطع نکند، مسئله دارای جواب نیست. (۰/۷۵)



(فصل ۲- مکان هندسی)

۱۷- دو خط موازی L و d را در نظر می‌گیریم. اگر L ثابت و d را حول L دوران دهیم، رویه حاصل را سطح استوانه‌ای می‌نامیم. (۰/۷۵)



(فصل ۲- مقاطع مخروطی)

آزمون شماره ۲ (نوبت اول)

۱- الف حاصل ضرب $A \times B$ زمانی تعریف می‌شود که تعداد ستون‌های A (n) با تعداد سطرهای B (2) برابر باشد و مرتبه $A \times B$ از حذف این مقدار مساوی حاصل می‌شود؛ در نتیجه $n=2$ (۰/۷۵) و مرتبه $A \times B$ برابر 3×4 است. (۰/۷۵)

(فصل ۱- اعمال روی ماتریس‌ها)

ب) $|A| = \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ (۰/۷۵) (فصل ۱- وارون ماتریس و دترمینان)
پ) صفر (۰/۷۵) (کافی است برای به دست آوردن دترمینان، از بسط این سطر استفاده کنیم، آن‌گاه واضح است که مقدار دترمینان صفر است.) (فصل ۱- وارون ماتریس و دترمینان)

۲- الف) درست (۰/۷۵)
ب) نادرست (۰/۷۵)؛ (قانون حذف در ضرب ماتریس‌ها لزوماً برقرار نیست.)

(فصل ۱- اعمال روی ماتریس‌ها)

۳- i شماره سطر و j شماره ستون است. طبق فرض در ماتریس A ، $i=1, 2$ و $j=1, 2, 3$ هستند.

$$\left. \begin{aligned} a_{11} &= 1^2 + 1 = 2, & a_{12} &= 1 + 2 - 1 = 2 \\ a_{13} &= 1 + 3 - 1 = 3, & a_{21} &= 2 - 1 = 1 \\ a_{22} &= 2^2 + 1 = 5, & a_{23} &= 2 + 3 - 1 = 4 \end{aligned} \right\} \Rightarrow A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & 5 & 4 \end{bmatrix} \quad (۰/۷۵)$$

در ماتریس B ، $i=1, 2, 3$ و $j=1, 2$ هستند.

$$\left. \begin{aligned} b_{11} &= 2(1) - 1 = 1, & b_{12} &= 1 + 2 = 3 \\ b_{21} &= 2^2 - 1 = 3, & b_{22} &= 2(2) - 2 = 2 \\ b_{31} &= 3^2 - 1 = 8, & b_{32} &= 3^2 - 2 = 7 \end{aligned} \right\} \Rightarrow B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \\ 8 & 7 \end{bmatrix} \quad (۰/۷۵)$$

اکنون ماتریس AB را تشکیل می‌دهیم:

$$A \times B = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & 5 & 4 \end{bmatrix}_{2 \times 3} \times \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \\ 8 & 7 \end{bmatrix}_{3 \times 2} = \begin{bmatrix} 22 & 21 \\ 48 & 41 \end{bmatrix}_{2 \times 2} \quad (۰/۷۵)$$

(فصل ۱- اعمال روی ماتریس‌ها)

۴- $-2A$ یعنی عدد -2 را در تمام درایه‌های ماتریس A ضرب کنیم:

$$-2A = \begin{bmatrix} -4 & +2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} \quad (۰/۷۵)$$

درس نامهٔ توپ برای شب امتحان

۳. ماتریس مربعی: ماتریسی که تعداد سطرها و آن با تعداد ستون‌های آن برابر باشد را ماتریس

مربعی مرتبه $n \times n$ می‌نامیم. مانند: $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}_{2 \times 2}$ یا $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}_{3 \times 3}$

در ماتریس‌های مربعی، درایه‌هایی که شمارهٔ سطر و ستون برابر دارند $(a_{11}, a_{22}, a_{33}, \dots)$ را درایه‌های قطر اصلی می‌نامیم. مثلاً در ماتریس‌های

مربعی بالا، به ترتیب قطرهای اصلی ۱ و ۵ هستند.

۴. ماتریس قطری: ماتریس مربعی که تمام درایه‌های خارج قطر اصلی آن صفر باشند (درایه‌های روی قطر اصلی دلخواه هستند) را ماتریس قطری می‌نامیم. مانند:

$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{2 \times 2}$ $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}_{3 \times 3}$

۵. ماتریس اسکالر: ماتریس قطری که درایه‌های روی قطر اصلی آن با هم برابر باشند را ماتریس اسکالر می‌نامیم. مانند:

$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ $A = \begin{bmatrix} -5 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}$

در حالت خاص اگر درایه‌های روی قطر اصلی همه برابر ۱ باشند، آن ماتریس را همانی نامیده و با I نشان می‌دهند.

$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}_{2 \times 2}$ $I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{3 \times 3}$

۶. ماتریس صفر: ماتریسی که تمام درایه‌های آن صفر باشد را ماتریس صفر می‌نامیم و با $\bar{O}$ نشان می‌دهیم. مانند:

$\bar{O} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{2 \times 2}$

تساوی بین دو ماتریس

دو ماتریس هم‌مرتبه $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ و $B = [b_{ij}]_{m \times n}$ را مساوی می‌گوییم، هرگاه درایه‌های نظیر به نظیر با هم برابر باشند، یعنی برای هر j و i ، $a_{ij} = b_{ij}$ باشد.

مثال: مقادیر a و b را طوری بیابید که دو ماتریس $A = \begin{bmatrix} a & 2+b \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ و

$B = \begin{bmatrix} 1-b & 1 \\ a+b & -1 \end{bmatrix}$ با هم برابر باشند.

پاسخ: هر دو ماتریس از مرتبه 2×2 هستند (پس هم‌مرتبه‌اند). اکنون باید درایه‌های نظیر به نظیر را برابر هم قرار دهیم:

$\begin{cases} 1-b=a \Rightarrow a+b=1 \\ 1=2+b \Rightarrow b=-1 \end{cases} \Rightarrow a=2$

جمع و تفریق ماتریس‌ها

برای جمع و تفریق دو ماتریس اولاً باید دو ماتریس هم‌مرتبه باشند، ثانیاً درایه‌ها را نظیر به نظیر با هم جمع یا تفریق می‌کنیم. مانند:

$\begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix}$

فصل: ماتریس و کاربرد

درس: ماتریس و اعمال روی ماتریس‌ها

تعریف: هر آرایش مستطیلی از اعداد حقیقی، شامل تعدادی سطر و ستون یک ماتریس نامیده می‌شود. هر عدد حقیقی واقع در هر ماتریس را درایهٔ آن ماتریس می‌نامیم. معمولاً ماتریس‌ها را با حروف بزرگ مانند A, B, C و ... نشان می‌دهیم. مثلاً:

$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ \sqrt{2} & 0/5 \end{bmatrix}$
 $C = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ \sqrt{3} \end{bmatrix}$ $D = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 5 \end{bmatrix}$

تعریف مرتبهٔ ماتریس: اگر ماتریسی مانند A دارای m سطر و n ستون باشد، می‌نویسیم $A_{m \times n}$

و می‌خوانیم « A ماتریسی از مرتبهٔ $m \times n$ است». مثلاً ماتریس $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 3 \\ 5 & \sqrt{2} \end{bmatrix}$

یک ماتریس 3×2 سطر و ۲ ستونی است، بنابراین مرتبه‌اش 3×2 است.

نمایش کلی ماتریس A به صورت $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ است، که a_{ij} ‌ها درایهٔ واقع در سطر i و ستون j هستند. m تعداد سطرها و n تعداد ستون‌ها می‌باشد.

مثلاً: $A_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$

$A_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ $A_{2 \times 3} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$

مثال: ماتریس $A = [a_{ij}]_{2 \times 3}$ به صورت $A = 2i - j$ تعریف شده است. ماتریس A را با درایه‌هایش بنویسید.

پاسخ: $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$

برای درایهٔ a_{11} داریم: $i=1, j=1$ پس: $a_{11} = 2(1) - 1 = 1$

برای درایهٔ a_{12} داریم: $i=1, j=2$ پس: $a_{12} = 2(1) - 2 = 0$

و به همین ترتیب: $a_{13} = 2(1) - 3 = -1$ $a_{21} = 2(2) - 1 = 3$

$a_{22} = 2(2) - 2 = 2$ $a_{23} = 2(2) - 3 = 1$

در نتیجه ماتریس A به صورت مقابل است: $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

معرفی چند ماتریس خاص

۱. ماتریس سطری: ماتریسی که فقط یک سطر داشته باشد. مانند $A = [3 \ 2 \ -1]_{1 \times 3}$

۲. ماتریس ستونی: ماتریسی که فقط یک ستون داشته باشد. مانند $A = \begin{bmatrix} -\sqrt{2} \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}_{3 \times 1}$



ضرب یک عدد حقیقی در ماتریس

عدد حقیقی r و ماتریس $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ را در نظر می‌گیریم. حاصل ضرب عدد r در ماتریس A را با نماد rA نمایش می‌دهیم که r در همه درایه‌های ماتریس A ضرب می‌شود.

$$rA = r[a_{ij}]_{m \times n} = [ra_{ij}]_{m \times n}$$

مثال: اگر $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ باشد، ماتریس $2A + 3B$ را به دست آورید.

پاسخ: عدد 2 را در تمام درایه‌های ماتریس A و عدد 3 را در تمام درایه‌های ماتریس B ضرب می‌کنیم.

$$2A = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \quad 3B = \begin{bmatrix} 9 & 0 \\ -3 & 3 \end{bmatrix}$$

$$2A + 3B = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 9 & 0 \\ -3 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ -1 & 7 \end{bmatrix}$$

قرینه یک ماتریس: اگر $A_{m \times n}$ ، آن‌گاه قرینه ماتریس A ، از ضرب عدد -1 در ماتریس A به وجود می‌آید و آن را با $-A$ نمایش می‌دهیم.

توجه شود که $A + (-A) = \bar{O}$.

تذکره: به کمک قرینه یک ماتریس می‌توان تفاضل دو ماتریس را به صورت زیر تعریف کرد:

$$A - B = A + (-B)$$

خواص جمع و تفریق ماتریس‌ها و ضرب عدد در ماتریس

فرض کنید A و B و C سه ماتریس هم‌مرتبه $m \times n$ بوده، r و s دو عدد حقیقی باشند، آن‌گاه:

① $A + B = B + A$ (خاصیت جابه‌جایی)

② $A + (B + C) = (A + B) + C$ (خاصیت شرکت‌پذیری)

③ $A + \bar{O} = \bar{O} + A = A$ (عضو خنثی جمع)

④ $A + (-A) = (-A) + A = \bar{O}$ (عضو قرینه)

⑤ $r(A \pm B) = rA \pm rB$ ⑥ $(r \pm s)A = rA \pm sA$

⑦ $A = B \Rightarrow rA = rB$ ⑧ $\begin{cases} rA = rB \\ r \neq 0 \end{cases} \Rightarrow A = B$

اثبات خاصیت‌های (۵) و (۶):

اثبات (۵): فرض می‌کنیم $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ و $B = [b_{ij}]_{m \times n}$.

$$r(A \pm B) = r([a_{ij}] \pm [b_{ij}]) = r([a_{ij} \pm b_{ij}]) = [r(a_{ij} \pm b_{ij})]$$

$$= [ra_{ij} \pm rb_{ij}] = [ra_{ij}] \pm [rb_{ij}] = r[a_{ij}] \pm r[b_{ij}] = rA \pm rB$$

اثبات (۶): فرض می‌کنیم $A = [a_{ij}]$.

$$(r \pm s)A = (r \pm s)[a_{ij}] = [(r \pm s)a_{ij}] = [ra_{ij} \pm sa_{ij}] = [ra_{ij}] \pm [sa_{ij}]$$

$$= r[a_{ij}] \pm s[a_{ij}] = rA \pm sA$$

ضرب ماتریس‌ها

دو ماتریس $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ و $B = [b_{ij}]_{n \times p}$ را در نظر می‌گیریم. حاصل ضرب A در B ، یعنی AB زمانی تعریف می‌شود که تعداد ستون‌های A با تعداد سطرهای B برابر باشد (n). آن‌گاه ماتریس AB از مرتبه $m \times p$ است. نکته مهم این‌که، برای پیدا کردن درایه سطر i و ستون j حاصل ضرب AB ، باید درایه‌های سطر i ام ماتریس A را نظیر به نظیر در درایه‌های نظیرش در ستون j ام ماتریس B ضرب کنیم، سپس حاصل آن‌ها را با هم جمع کنیم.

مثال: اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ ، ماتریس BA را محاسبه کنید.

پاسخ: تعداد ستون‌های B (۳) با تعداد سطرهای A (۳) برابر است، پس ضرب BA تعریف شده است. برای محاسبه ماتریس BA ، باید درایه‌های هر سطر B را در درایه‌های متناظرش در هر ستون A ضرب کنیم:

$$BA = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix}_{2 \times 3} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \end{bmatrix}_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} 7 & -5 & 2 \\ 8 & -5 & 3 \end{bmatrix}_{2 \times 3}$$

مثلاً درایه سطر اول و ستون اول BA به صورت زیر محاسبه شده است:

$$1 \times 1 + 0 \times 2 + 2 \times 3 = 7$$

تذکره: توجه شود که در مثال بالا ماتریس AB تعریف نمی‌شود. زیرا تعداد ستون‌های A (۳) با تعداد سطرهای B (۲) برابر نیست.

سه خاصیت مهم ضرب ماتریس‌ها

① ضرب ماتریس‌ها در حالت کلی خاصیت جابه‌جایی ندارد. یعنی: $A \times B \neq B \times A$

اما در حالت خاص ضرب ماتریس I (همانی) در هر ماتریس مربعی دلخواه (با شرط هم‌مرتبه بودن با I) خاصیت جابه‌جایی دارد، یعنی:

$$A \times I = I \times A = A$$

در واقع ماتریس همانی I ، در عملیات ضرب ماتریس‌ها عضو خنثی است.

② ضرب ماتریس‌ها خاصیت توزیع‌پذیری دارد. یعنی: $A \times (B \pm C) = A \times B \pm A \times C$

③ ضرب ماتریس‌ها خاصیت شرکت‌پذیری دارد. یعنی: $A \times (B \times C) = (A \times B) \times C$

تذکره: دقت کنید که همیشه باید حواسمان باشد که ضرب دو ماتریس تعریف شده باشد.

دو نکته مهم درباره ضرب ماتریس‌ها

① اگر A و B دو ماتریس ضرب‌پذیر باشند و $AB = \bar{O}$ ، آن‌گاه نمی‌توان نتیجه گرفت $A = \bar{O}$ یا $B = \bar{O}$. به بیان دیگر می‌توان دو ماتریس ناصفر A و B یافت، به طوری که ضرب آن‌ها برابر ماتریس صفر شود.

مثال: دو ماتریس ناصفر 2×2 مثال بزنید که ضرب آن‌ها ماتریس صفر شود.

پاسخ: اگر $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$ ، آن‌گاه AB برابر است با:

$$AB = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \bar{O}$$

② قانون حذف در ضرب ماتریس‌ها برقرار نیست، یعنی از تساوی $AB = AC$ نمی‌توان نتیجه گرفت $B = C$.

مثلاً اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ، $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ و $C = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$ ؛

آن‌گاه $AB = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ و $AC = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ اما $B \neq C$.

تذکره: توان در ماتریس: منظور از ماتریس A^n این است که ماتریس A را n بار در خودش ضرب کنیم. طبیعی است ماتریسی قابل ضرب کردن در خودش است که مربعی باشد. پس توان فقط برای ماتریس‌های مربعی تعریف می‌شود.

$$A^2 = A \times A$$

$$A^3 = A \times A \times A$$

:

تذکره: اگر A یک ماتریس قطری باشد، برای محاسبه توان آن، کافی است درایه‌های روی قطر اصلی را به توان برسانیم.

$$A = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix} \Rightarrow A^n = \begin{bmatrix} a^n & 0 & 0 \\ 0 & b^n & 0 \\ 0 & 0 & c^n \end{bmatrix}$$