

کتاب شب امتحان ریاضی و آمار (۳) دوازدهم از ۴ قسمت اصلی به صورت زیر تشکیل شده است:

(۱) **آزمون‌های نوبت اول:** آزمون‌های شماره ۱ تا ۴ این کتاب مربوط به مباحث نوبت اول است که خودش به دو قسمت تقسیم می‌شود:

(الف) **آزمون‌های طبقه‌بندی شده:** آزمون‌های شماره ۱ و ۲ را فصل به فصل طبقه‌بندی کرده‌ایم؛ بنابراین شما به راحتی می‌توانید پس از خواندن هر فصل از درس‌نامه تعدادی سؤال را بررسی کنید. حواستان باشد این آزمون‌ها، ۲۰ نمره‌ای و مثل یک آزمون کامل هستند. در کنار سؤال‌های این آزمون‌ها نکات مشاوره‌ای نوشته‌ایم. این نکات به شما در درس‌خواندن قبل از امتحان و پاسخگویی به آزمون در زمان امتحان کمک می‌کند.

(ب) **آزمون‌های طبقه‌بندی نشده:** آزمون‌های شماره ۳ و ۴ را طبقه‌بندی نکرده‌ایم تا دو آزمون نوبت اول، مشابه آزمونی که معلمان از شما خواهد گرفت، ببینید.

(۲) **آزمون‌های نوبت دوم:** آزمون‌های شماره ۵ تا ۱۴ امتحان‌های نهایی برگزار شده در سال‌های ۱۴۰۰، ۱۴۰۱، ۱۴۰۲ و ۱۴۰۳ هستند. این قسمت هم، خودش به ۲ بخش تقسیم می‌شود:

(الف) **آزمون‌های طبقه‌بندی شده:** آزمون‌های شماره ۵ تا ۸ آزمون‌های نهایی خرداد ۱۴۰۰ و ۱۴۰۱ و دی ۱۴۰۱ و ۱۴۰۲ هستند که طبقه‌بندی کرده‌ایم. با این کار باز هم می‌توانید پس از خواندن هر فصل تعدادی سؤال مرتبط را پاسخ دهید. هر کدام از این آزمون‌ها، ۲۰ نمره دارند. در واقع در این بخش، شما ۴ آزمون کامل را می‌بینید. این آزمون‌ها هم نکات مشاوره‌ای دارند.

(ب) **آزمون‌های طبقه‌بندی نشده:** آزمون‌های شماره ۹ تا ۱۴ را طبقه‌بندی نکرده‌ایم؛ پس، در این بخش با ۶ آزمون نوبت دوم، مشابه آزمون پایان سال مواجه خواهید شد. این آزمون‌ها به ترتیب امتحان‌های نهایی خرداد ۱۴۰۲ و ۱۴۰۳ و شهریور ۱۴۰۲ و ۱۴۰۳ و دو آزمون چالشی‌تر با عنوان «بیست پلاس» هستند.

(۳) **پاسخ‌نامه تشریحی آزمون‌ها:** در پاسخ تشریحی آزمون‌ها تمام آن‌چه را که شما باید در امتحان بنویسید تا نمره کامل کسب کنید، برایتان نوشته‌ایم. پاسخ‌ها مطابق با فرمت پاسخ برگ مورد تأیید آموزش و پرورش دارای ریزبارم‌بندی و آدرس مبحثی می‌باشند.

(۴) **درس‌نامه کامل شب امتحانی:** در این قسمت، همه آن‌چه را که شما برای گرفتن نمره عالی در امتحان ریاضی و آمار (۳) نیاز دارید، در ۲۲ صفحه آورده‌ایم، بخوانید و لذتش را ببرید!

یک راهکار: موقع امتحان‌های نوبت اول می‌توانید از سؤال‌های فصل‌های اول و دوم آزمون‌های ۵ تا ۸ هم استفاده کنید.

فهرست



صفحه صفحه

نوبت آزمون پاسخ‌نامه

بارم‌بندی درس ریاضی و آمار ۳

فصل	نوبت اول	نوبت دوم (خرداد)	شهریور و دی
۱	۱۵	۷	۸
۲	۵	۲	۵/۵
	—	۳/۵	
۳	—	۷/۵	۶/۵
جمع	۲۰	۲۰	۲۰

آزمون شماره ۱	(طبقه‌بندی شده)	اول	۳	۳۱
آزمون شماره ۲	(طبقه‌بندی شده)	اول	۵	۳۲
آزمون شماره ۳	(طبقه‌بندی نشده)	اول	۷	۳۳
آزمون شماره ۴	(طبقه‌بندی نشده)	اول	۹	۳۵
آزمون شماره ۵ نهایی خرداد ۱۴۰۰	(طبقه‌بندی شده)	دوم	۱۱	۳۶
آزمون شماره ۶ نهایی خرداد ۱۴۰۱	(طبقه‌بندی شده)	دوم	۱۳	۳۸
آزمون شماره ۷ نهایی دی ۱۴۰۱	(طبقه‌بندی شده)	دوم	۱۵	۳۹
آزمون شماره ۸ نهایی دی ۱۴۰۲	(طبقه‌بندی شده)	دوم	۱۷	۴۰
آزمون شماره ۹ نهایی خرداد ۱۴۰۲	(طبقه‌بندی نشده)	دوم	۱۹	۴۲
آزمون شماره ۱۰ نهایی خرداد ۱۴۰۳	(طبقه‌بندی نشده)	دوم	۲۱	۴۳
آزمون شماره ۱۱ نهایی شهریور ۱۴۰۲	(طبقه‌بندی نشده)	دوم	۲۳	۴۵
آزمون شماره ۱۲ نهایی شهریور ۱۴۰۳	(طبقه‌بندی نشده)	دوم	۲۵	۴۶
آزمون شماره ۱۳ بیست پلاس (چالشی‌تر)	(طبقه‌بندی نشده)	دوم	۲۷	۴۸
آزمون شماره ۱۴ بیست پلاس (چالشی‌تر)	(طبقه‌بندی نشده)	دوم	۲۹	۵۰

ردیف	فصل اول	نمره
۱	الف) مطابق شکل روبه‌رو به چند طریق می‌توانیم از شهر A به شهر C برویم و برگردیم به طوری که در مسیر برگشت، از مسیر رفته شده استفاده نکنیم؟ (تمام جاده‌ها دوطرفه هستند). ب) جای خالی را پر کنید. اگر در بین داده‌ها، داده دورافتاده داشته باشیم بهتر است از شاخص مرکزی استفاده کنیم.	۲
۲	حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید: الف) $\frac{8 \times 7 \times 6!}{2! \times 7!}$ ب) $\frac{(n+3)!}{(n+1)!}$	۱
۳	مجموعه $A = \{a, b, c, d, e, f\}$ چند زیرمجموعه ۳ عضوی دارد؟	۰/۷۵
۴	با ارقام ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸ و بدون تکرار ارقام: الف) چند عدد چهاررقمی می‌توان ساخت؟ ب) چند عدد پنج‌رقمی فرد می‌توان ساخت؟ پ) چند عدد شش‌رقمی می‌توان ساخت که یکان آن ۷ و صدگان آن صفر است؟	۱/۵
۵	با حروف کلمه «وساطت» و بدون تکرار حروف: الف) چند کلمه ۵ حرفی می‌توان نوشت؟ ب) چند کلمه ۵ حرفی می‌توان نوشت که با «و» شروع و به «ط» ختم شود؟	۱
۶	در هر قسمت، پیشامد مطلوب را رنگ کنید: الف) A رخ دهد ولی B یا C رخ ندهند. (نه B رخ دهد نه C) ب) A، B و C رخ دهند.	۱
۷	سکه‌ای را پرتاب می‌کنیم. اگر «رو» ظاهر شد آن گاه تاسی را می‌ریزیم در غیر این صورت، یک بار دیگر سکه را می‌اندازیم. الف) فضای نمونه این آزمایش تصادفی را مشخص کنید. ب) پیشامد A را که در آن، عدد ظاهرشده روی تاس زوج باشد یا حداقل یکی از سکه‌ها پشت بیاید با اعضا مشخص کنید.	۲
۸	از جعبه‌ای که شامل ۱۰ سیب سالم و ۴ سیب لکه‌دار است، ۳ سیب را به طور تصادفی انتخاب می‌کنیم؛ مطلوب است محاسبه احتمال این‌که: الف) هر ۳ سیب سالم باشند. ب) ۲ سیب خراب باشند. پ) تعداد سیب‌های سالم یکی بیشتر از لکه‌دارها باشد.	۲
۹	دو تاس را با هم پرتاب می‌کنیم احتمالات زیر را حساب کنید: الف) اعداد ظاهرشده، یکسان باشند. (پیشامد A) ب) مجموع اعداد ظاهرشده، ۴ باشد. (پیشامد B) پ) حاصل ضرب اعداد ظاهرشده، کم‌تر از ۳۷ باشد. (پیشامد C)	۲/۵
۱۰	گام‌های مختلف چرخه آمار در حل مسائل را فقط نام ببرید.	۱/۲۵

	تاریخ آزمون: دی‌ماه	رشته: ادبیات و علوم انسانی	ریاضی و آمار (۳)	۱ آزمون
	مدت آزمون: ۱۲۰ دقیقه	پایه دوازدهم	نوبت اول	

۱	فصل دوم جاهای خالی را پر کنید. الف) یک دنباله، نوعی تابع است که دامنه آن است. ب) رابطه بازگشتی دنباله $1, -4, 2, -8, \dots$ برابر با است.	۱۱
۱/۲۵	اگر تابع f مدل ریاضی هر کدام از مسائل زیر باشد، دامنه هر کدام از آن‌ها را مشخص کنید. الف) کاهش دمای هوا با دور شدن از سطح زمین ب) میزان ساعات مطالعه دانش‌آموزان یک کلاس براساس شماره هر دانش‌آموز در لیست کلاس پ) حجم مکعبی به ضلع x سانتی‌متر ت) تغییرات سطح آب یک دریاچه در ۱۰ سال اخیر ث) میزان مصرف ماهانه برق آپارتمان‌های با شماره ۱ تا ۱۰۰ یک مجتمع زیرمجموعه $\mathbb{R}$ ☐ زیرمجموعه $\mathbb{N}$ ☐ زیرمجموعه $\mathbb{R}$ ☐ زیرمجموعه $\mathbb{N}$ ☐ زیرمجموعه $\mathbb{R}$ ☐ زیرمجموعه $\mathbb{N}$ ☐ زیرمجموعه $\mathbb{R}$ ☐ زیرمجموعه $\mathbb{N}$ ☐ زیرمجموعه $\mathbb{R}$ ☐ زیرمجموعه $\mathbb{N}$ ☐	۱۲
۱/۵	الف) برای دنباله $2, 7, 12, 17, \dots$ هم ضابطه تابعی و هم رابطه بازگشتی بنویسید. ب) برای دنباله $16, 3, 16, 3, 16, \dots$ یک رابطه دوضابطه‌ای بنویسید.	۱۳
۱/۲۵	اگر $a_n = \frac{n^2}{(-1)^n}$ ، $b_n = 4$ و $c_n = 4 + (-1)^n$ باشند، حاصل عبارت زیر را به دست آورید. $a_1 + b_8 - c_7 = ?$	۱۴
۲۰	موفق باشید جمع نمرات	

	تاریخ آزمون: خرداد ۱۴۰۳	رشته: ادبیات و علوم انسانی	ریاضی و آمار (۳)
	مدت آزمون: ۱۲۰ دقیقه	پایه دوازدهم	نوبت دوم

۱	۱۰, ۱۵, ۲۰, ۲۵, ... مدت زمان مطالعه روزانه دانش آموزی در درس ریاضی و آمار برحسب دقیقه به صورت دنباله مقابل است: مجموع مدت زمان مطالعه دانش آموز در شانزده روز اول را بیابید. (با استفاده از فرمول مجموع)	۱۳
۱/۲۵	برای دنباله هندسی مقابل: $\frac{1}{2}, \frac{1}{10}, \frac{1}{50}, \frac{1}{250}, \dots$ الف) نسبت مشترک و جمله عمومی دنباله را بنویسید. ب) رابطه بازگشتی آن را مشخص کنید.	۱۴
۱/۵	جمله اول یک دنباله هندسی ۵ و نسبت مشترک آن ۲ است. الف) جمله چندم این دنباله برابر ۶۴۰ است؟ ب) با استفاده از فرمول، مجموع نه جمله اول دنباله را به دست آورید.	۱۵
۱	عبارت توان دار را به صورت رادیکالی و عبارت رادیکالی را به صورت توان دار بنویسید. الف) $(\frac{0}{25})^{\frac{1}{4}}$ ب) $\sqrt[3]{4/2}$ پ) $\sqrt[2]{(\frac{1}{6})^3}$ ت) $(\frac{1}{3})^{\frac{-8}{3}}$	۱۶
۱/۵	حاصل عبارت های زیر را به ساده ترین صورت ممکن بنویسید. ($a > 0$) الف) $(\frac{a^{\frac{-1}{3}}}{a^{\frac{-1}{6}}})^{-6}$ ب) $(\frac{1}{3})^{\frac{1}{2}} \times (12)^{\frac{1}{2}} \times (0/7)^0$	۱۷
۰/۷۵	نمودار تابع نمایی $y = (\frac{1}{3})^x$ را در دستگاه مختصات رسم کنید.	۱۸
۱	شخصی چهل میلیون تومان در یک شرکت تولیدی در راستای حمایت از تولید ملی سرمایه گذاری می کند. اگر در پایان هر سال ۳۰ درصد سود علی الحساب به او پرداخت شود، پس از دو سال سرمایه او چه قدر خواهد شد؟	۱۹
۲۰	جمع نمرات موفق باشید	

پاسخنامه تشریحی

آزمون شماره ۱ (نوبت اول)

۱- الف) ۴ حالت برای رفت و برگشت از A به C و برعکس وجود دارد:

شروع حرکت $A \xrightarrow{2} B \xrightarrow{4} C \xrightarrow{3} B \xrightarrow{1} A$
(برگشت (مسیر بالا) رفت (مسیر بالا))

تعداد حالتها $= 2 \times 4 \times 3 \times 1 = 24$ (۵/۲۵)

شروع حرکت $A \xrightarrow{2} B \xrightarrow{4} C \xrightarrow{3} D \xrightarrow{4} A$
(برگشت (مسیر پایین) رفت (مسیر بالا))

تعداد حالتها $= 2 \times 4 \times 3 \times 4 = 96$ (۵/۲۵)

شروع حرکت $A \xrightarrow{4} D \xrightarrow{3} C \xrightarrow{2} D \xrightarrow{3} A$
(برگشت (مسیر پایین) رفت (مسیر پایین))

تعداد حالتها $= 4 \times 3 \times 2 \times 3 = 72$ (۵/۲۵)

شروع حرکت $A \xrightarrow{4} D \xrightarrow{3} C \xrightarrow{4} B \xrightarrow{2} A$
(برگشت (مسیر بالا) رفت (مسیر پایین))

تعداد حالتها $= 4 \times 3 \times 4 \times 2 = 96$ (۵/۲۵)

طبق اصل جمع $\rightarrow$ تعداد کل حالتها $= 24 + 96 + 72 + 96 = 288$ (۵/۷۵)

(فصل ۱- شمارش)

(فصل ۱- یادآوری شافنهای مرکزی)

(ب) میانه (۵/۲۵)

$$\frac{8 \times 7 \times 6!}{2! \times 6!} = \frac{8 \times 7 \times 6!}{2 \times 1 \times 6!} = \frac{8}{2} = 4 \quad (۵/۲۵)$$

۲- الف)

(ب) $(n+3)$ بزرگتر از $(n+1)$ است، پس آن را باز می‌کنیم تا به $(n+1)$ برسیم:

$$\frac{(n+3)!}{(n+1)!} = \frac{(n+3)(n+2)(n+1)!}{(n+1)!} = (n+3)(n+2) \quad (۵/۲۵)$$

(فصل ۱- فاکتوریل)

۳- تعداد زیرمجموعه‌های I عضوی یک مجموعه n عضوی برابر است با $\binom{n}{r}$ مجموعه A دارای ۶ عضو است، پس خواهیم نوشت:

$$\text{تعداد زیرمجموعه‌ها} = \binom{6}{3} = \frac{6!}{(6-3)! \times 3!} = \frac{6!}{3! \times 3!} = \frac{6 \times 5 \times 4 \times 3!}{3! \times 3!} = 20 \quad (۵/۲۵)$$

(فصل ۱- ترکیب)

۴- الف) شرط خاص نداریم پس پُر کردن خانه‌ها را از چپ به راست انجام می‌دهیم:

$$\begin{array}{c} 1, 3, 5, 6, 7, 8 \quad \rightarrow \quad 0, 1, 3, 5, 6, 7 \\ \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\ \boxed{6} \quad \boxed{6} \quad \boxed{5} \quad \boxed{4} \\ \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\ 0, 1, 3, 5, 6, 7, 8 \quad \rightarrow \quad 0, 1, 3, 5, 6, 7 \end{array} \Rightarrow \text{تعداد عددهای مطلوب} = 6 \times 6 \times 5 \times 4 = 720 \quad (۵/۲۵)$$

(ب) عددی فرد است که یکان آن فرد باشد، پس

ابتدا خانهٔ مربوط به یکان را پُر می‌کنیم و سپس به سراغ اولین خانهٔ سمت چپ می‌رویم:

$$\begin{array}{c} 0, 3, 5, 6, 7, 8 \quad \rightarrow \quad 0, 1, 3, 5, 6, 7 \\ \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\ \boxed{5} \quad \boxed{5} \quad \boxed{4} \quad \boxed{3} \quad \boxed{4} \\ \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\ 0, 1, 3, 5, 6, 7, 8 \quad \rightarrow \quad 0, 1, 3, 5, 6, 7 \end{array} \Rightarrow \text{تعداد عددهای مطلوب} = 5 \times 5 \times 4 \times 3 \times 4 = 1200 \quad (۵/۲۵)$$

(پ) یکان فقط باید ۷ باشد پس برای آن فقط یک انتخاب وجود دارد. در مورد صدگان نیز فقط یک انتخاب (رقم صفر) داریم، پس ابتدا این دو خانه را پُر می‌کنیم سپس به سراغ اولین خانهٔ سمت چپ می‌رویم و پُر کردن خانه‌ها را ادامه می‌دهیم:

$$\begin{array}{c} \text{رقم ۷} \quad \text{رقم صفر} \\ \downarrow \quad \downarrow \\ \boxed{5} \quad \boxed{4} \quad \boxed{3} \quad \boxed{1} \quad \boxed{2} \quad \boxed{1} \\ \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\ 0, 3, 5, 6, 7, 8 \quad \rightarrow \quad 0, 1, 3, 5, 6, 7, 8 \end{array} \Rightarrow \text{تعداد عددهای مطلوب} = 5 \times 4 \times 3 \times 1 \times 2 \times 1 = 120 \quad (۵/۲۵)$$

(فصل ۱- جایگشت)

۵- الف) بهتر است خانه‌ها را از راست به چپ پُر کنیم چون کلمهٔ «وساطت» به زبان فارسی است:

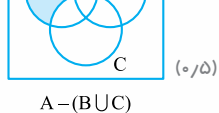
$$\begin{array}{c} \text{«ط»} \quad \text{«و»} \\ \downarrow \quad \downarrow \\ \boxed{1} \quad \boxed{2} \quad \boxed{3} \quad \boxed{4} \quad \boxed{5} \\ \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\ 1 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 1 \end{array} \Rightarrow \text{تعداد کلمات مطلوب} = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120 \quad (۵/۲۵)$$

(ب)

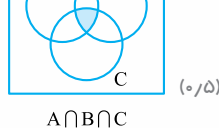
$$\begin{array}{c} \text{«ط»} \quad \text{«و»} \\ \downarrow \quad \downarrow \\ \boxed{1} \quad \boxed{1} \quad \boxed{2} \quad \boxed{3} \quad \boxed{1} \\ \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\ 1 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 1 \end{array} \Rightarrow \text{تعداد کلمات مطلوب} = 1 \times 3 \times 2 \times 1 \times 1 = 6 \quad (۵/۲۵)$$

(فصل ۱- جایگشت)

۶- الف) فقط باید A رخ دهد یعنی باید قسمتی از A را رنگ کنیم که با B یا C اشتراک نداشته باشد:

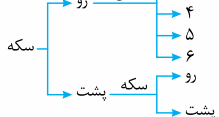


(ب) می‌خواهیم هر ۳ پیشامد با هم رخ دهند. لذا قسمت مشترک A، B و C را رنگ می‌کنیم:



(فصل ۱- اعمال روی پیشامدها)

۷- الف) بهتر است یک نمودار درختی برای این مسئله رسم کنیم:



(ب) $S = \{(1,1), (1,2), \dots, (1,6), (2,1), (2,2), \dots, (6,1), (6,2), \dots, (6,6)\}$ فضای نمونه
 $A = \{(1,2), (1,4), (1,6), (2,1), (2,3), (2,5), (3,2), (3,4), (3,6), (4,1), (4,3), (4,5), (5,2), (5,4), (5,6), (6,1), (6,3), (6,5)\}$ پیشامد مطلوب
حداقل یکی از تاس‌ها پشت بیاید عدد تاس زوج باشد

(فصل ۱- فضای نمونه - پیشامدها)

۸- ابتدا تعداد اعضای فضای نمونه را محاسبه می‌کنیم:

$$n(S) = \binom{14}{3} = \frac{14!}{11! \times 3!} = \frac{14 \times 13 \times 12 \times 11!}{11! \times 3 \times 2 \times 1} = 364 \quad (۵/۲۵)$$

$$n(A) = \binom{10}{3} = \frac{10!}{7! \times 3!} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7!}{7! \times 3 \times 2 \times 1} = 120 \quad (۵/۲۵) \quad \text{الف)}$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{120}{364} \quad (۵/۲۵)$$

$$a_1 = \frac{1^2}{(-1)^1} = \frac{1}{-1} = -1, \quad b_4 = 4, \quad c_7 = 4 + (-1)^7 = 4 + 1 = 5$$

$$\Rightarrow a_1 + b_4 - c_7 = (-1) + 4 - 5 = -2 \quad (0/5)$$

(فصل ۲- اعمال روی دنباله‌ها)

آزمون شماره ۲ (نوبت اول)

(فصل ۱- ترکیب)

$$C(n, r) \text{ یا } \binom{n}{r} \quad (0/5)$$

(فصل ۱- احتمال)

۲- الف) چون کلمات ۴ حرفی می‌خواهیم ۴ خانه می‌کشیم و آن‌ها را از راست به چپ پر می‌کنیم:

$$\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 3 & 4 & 5 & 6 \\ \hline \end{array} \Rightarrow \text{تعداد کلمات مطلوب} = 6 \times 5 \times 4 \times 3 = 360 \quad (0/5)$$

ب) ۳ خانه می‌کشیم، در خانه‌های اول و آخر فقط ۱ انتخاب داریم، لذا:

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 4 & 1 \\ \hline \end{array} \Rightarrow \text{تعداد کلمات مطلوب} = 1 \times 4 \times 1 = 4 \quad (0/5)$$

(فصل ۱- بایگشت)

۳- الف) باید از فرمول تبدیل استفاده کنیم:

$$P(9, 4) = \frac{9!}{(9-4)!} = \frac{9!}{5!} = \frac{9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5!}{5!} = 3024 \quad (0/5)$$

ب) باید از فرمول ترکیب استفاده کنیم:

$$C(9, 4) = \binom{9}{4} = \frac{9!}{(9-4)! \times 4!} = \frac{9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5!}{4! \times 5!} = 126 \quad (0/5)$$

(فصل ۱- تبدیل و ترکیب)

۴- الف) فرزندان اول و سوم پسر هستند ولی فرزندان دوم و چهارم می‌توانند دختر یا پسر باشند. (چون در متن سؤال، چیزی در مورد آن‌ها گفته نشده است.)

$$A = \{(پ, پ, پ, پ), (پ, پ, پ, د), (پ, پ, د, پ), (پ, پ, د, د), (پ, د, پ, پ), (پ, د, پ, د), (پ, د, د, پ), (پ, د, د, د)\} \Rightarrow n(A) = 4 \quad (0/5)$$

ب) گفته شده فقط فرزندان اول و سوم پسر هستند، پس فرزندان دوم و چهارم حتماً

$$B = \{(پ, د, پ, د)\} \Rightarrow n(B) = 1 \quad (0/5)$$

$$n(S) = 2^4 = 16 \quad (پ)$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{4}{16} = \frac{1}{4} \quad (0/5)$$

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{1}{16} \quad (0/5)$$

(فصل ۱- احتمال)

۵- ابتدا پیشامدها را با اعضایشان مشخص می‌کنیم:

$$A = \{(1, 1), (1, 3), (1, 5), (3, 1), (3, 3), (3, 5), (5, 1), (5, 3), (5, 5)\} \quad (0/5)$$

$$B = \{(4, 6), (6, 4), (5, 5)\} \quad (0/5)$$

$$C = \{(3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (3, 6)\} \quad (0/5)$$

الف) A و B سازگارند (۰/۵) چون اشتراکشان تهی نیست: $A \cap B = \{(5, 5)\}$

به همین ترتیب A و C هم سازگارند (۰/۵) $A \cap C = \{(3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (3, 5)\}$

ولی B و C ناسازگارند (۰/۵) چون عضو مشترک ندارند.

$$A \cap B = \{(5, 5)\} \Rightarrow n(A \cap B) = 1 \quad (ب)$$

$$B - C = \{(4, 6), (6, 4), (5, 5)\} \Rightarrow n(B - C) = 3$$

ب) وقتی ۲ سیب خراب است پس سیب سوم سالم است؛ لذا داریم:

$$n(A) = \binom{4}{2} \times \binom{1}{1} = 6 \times 1 = 6 \Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6} \quad (0/5)$$

پ) باید ۲ سیب سالم و ۱ سیب خراب انتخاب شود:

$$n(A) = \binom{3}{2} \times \binom{1}{1} = 3 \times 1 = 3 \Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{3}{36} = \frac{1}{12} \quad (0/5)$$

(فصل ۱- احتمال)

۹- ابتدا تعداد اعضای فضای نمونه را به دست می‌آوریم:

الف) می‌خواهیم دو عدد ظاهر شده، یکسان باشند پس پیشامد مطلوب، به صورت زیر است:

$$A = \{(1, 1), (2, 2), \dots, (6, 6)\} \Rightarrow n(A) = 6 \Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

ب) باید اعدادی از دو تاس را انتخاب کنیم که جمعشان ۴ شود:

$$B = \{(1, 3), (3, 1), (2, 2)\} \Rightarrow n(B) = 3 \Rightarrow P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{3}{36} = \frac{1}{12} \quad (0/5)$$

پ) تاس‌ها هر عددی که ظاهر شوند ضربشان کمتر از ۳۷ است پس C یک پیشامد حتمی (قطعی) است و احتمال وقوع آن ۱ است. (نیاز به هیچ محاسبه‌ای نیست.)

(فصل ۱- احتمال)

۱۰- گام اول: بیان مسئله (فهم مسئله، تعریف دقیق مسئله)

گام دوم: طرح و برنامه‌ریزی (روش اندازه‌گیری، روش نمونه‌گیری، روش انجام کار)

گام سوم: گردآوری و پاک‌سازی داده‌ها

گام چهارم: تحلیل داده‌ها (مرتب کردن داده‌ها، استفاده از شاخص‌های مرکزی و پراکندگی، استفاده از نمودارها و جدول‌ها)

گام پنجم: بحث و نتیجه‌گیری (نتیجه‌گیری، نقد و بررسی، ایده‌های جدید) (هر مورد ۰/۲۵)

(فصل ۱- هرچه آمار در دل مسائلی)

۱۱- الف) مجموعه اعداد طبیعی $(\mathbb{N})$ (۰/۵)

$$a_{n+1} = \frac{-1}{n} a_n, a_1 = 8 \quad (فصل ۲- مدل سازی و دنباله) \quad (0/5)$$

۱۲- هر قسمت را به شکل (هم‌دامنه $\rightarrow$ دامنه) می‌نویسیم سپس دامنه را بررسی می‌کنیم:

کاهش دما $\rightarrow$ ارتفاع از سطح زمین (الف)

زیرمجموعه $\mathbb{R}$: دامنه

میزان ساعات مطالعه $\rightarrow$ شماره هر دانش‌آموز در کلاس (ب)

زیرمجموعه $\mathbb{N}$: دامنه

حجم مکعب $\rightarrow$ اندازه ضلع مکعب (پ)

زیرمجموعه $\mathbb{R}$: دامنه

تغییرات سطح آب $\rightarrow$ شماره سال‌های اخیر (۱۰ سال اخیر) (ت)

زیرمجموعه $\mathbb{N}$: دامنه

میزان مصرف برق $\rightarrow$ شماره آپارتمان‌ها (۱ تا ۱۰۰) (ث)

زیرمجموعه $\mathbb{N}$: دامنه

(هر مورد ۰/۲۵) (فصل ۲- مدل سازی و دنباله)

۱۳- الف) جملات دنباله ۵ تا ۵ تا زیاد می‌شوند، می‌فهمیم جمله عمومی حتماً شامل $5n$ است. حالا به جمله اول که ۲ است نگاه می‌کنیم، ۵ چگونه به ۲ تبدیل می‌شود؟ باید ۳ تا از آن کم کنیم؛ پس جمله عمومی برابر $5n - 3$ می‌شود:

$$a_n = 5n - 3 \quad (جمله عمومی) \quad (0/5)$$

$$a_{n+1} = a_n + 5, a_1 = 2 \quad (رابطه بازگشتی) \quad (0/5)$$

ب) جملات دنباله، به صورت یک‌درمیان ۱۶ و ۳ هستند، لذا یک دنباله دوطرفه‌ای داریم:

$$a_n = \begin{cases} 16 & \text{فرد } n \\ 3 & \text{زوج } n \end{cases} \quad (0/5)$$

(فصل ۲- جمله عمومی - رابطه بازگشتی)

درس نامه توپ برای شب امتحان

ب) این فرد می‌خواهد از A به C برود و حتماً از B هم عبور کند، لذا فقط یک مسیر وجود دارد.

$$A \rightarrow B \rightarrow C$$

نماد فاکتوریل: فاکتوریل را با نماد «!» نشان می‌دهیم؛ اگر n عدد طبیعی باشد n! به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \dots \times 3 \times 2 \times 1$$

یعنی برای محاسبه n! عدد n را در تمام اعداد طبیعی کوچک‌تر از خودش ضرب می‌کنیم. مثلاً:

$$2! = 2 \times 1 = 2, 3! = 3 \times 2 \times 1 = 6, 4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$$

ضمناً توجه کنید که $0! = 1$ و $1! = 1$ می‌باشد. هم‌چنین اگر بخواهیم کسری مانند

$\frac{10!}{8!}$ را حساب کنیم لزومی ندارد $10!$ را تا ۱ باز کنیم، چون وقت‌گیر خواهد بود بلکه بهتر است $10!$ را تا ۸ باز کنیم، فقط حواستان باشد موقع باز کردن یک عدد هر جا

$$\frac{10!}{8!} = \frac{10 \times 9 \times \cancel{8!}}{\cancel{8!}} = 90$$

متوقف شدیم، باید علامت! بگذاریم:

$$5! - 3! = ?$$

$$\frac{4! \times 5! \times 0!}{8! \times 1!} = ?$$

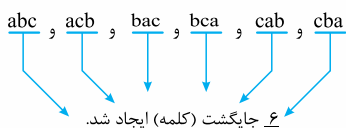
$$\left\{ \begin{array}{l} 5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120 \\ 3! = 3 \times 2 \times 1 = 6 \end{array} \right. \Rightarrow 5! - 3! = 120 - 6 = 114 \quad (\text{الف})$$

دقت کنید که $(5! - 3!)$ با $2!$ برابر نمی‌شود.

$$\frac{4! \times 5! \times 0!}{8! \times 1!} = \frac{(\cancel{4} \times \cancel{3} \times \cancel{2} \times 1) \times \cancel{5} \times 1}{(\cancel{8} \times \cancel{7} \times \cancel{6} \times \cancel{5} \times \cancel{4} \times \cancel{3} \times \cancel{2} \times 1) \times 1} = \frac{1}{14} \quad (\text{ب})$$

در این سؤال، دیدیم ۸ به ۵ نزدیک‌تر است تا ۸ نسبت به ۴. پس ۸ را تا ۵ باز کردیم.

جایگشت: به هر یک از حالت‌های کنار هم قرار گرفتن n شیء متمایز، یک جایگشت آن n شیء می‌گوییم و تعداد آن‌ها برابر با n! می‌باشد. مثلاً با حروف a, b و c می‌توانیم کلمات زیر را بسازیم (بدون توجه به بامعنی یا بی‌معنی بودن کلمات):



البته اگر فقط تعداد جایگشت‌ها را بخواهیم، می‌گوییم چون ۳ حرف متمایز داریم، تعداد جایگشت‌ها (کلمات) برابر با $3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$ می‌باشد:

۵ نفر به چند حالت می‌توانند در یک صف قرار گیرند؟

طبق درس‌نامه گفته‌شده، ۵ نفر به ۵! حالت می‌توانند در یک صف قرار گیرند و می‌دانید که:

$$5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$$

روش کلی ساختن اعداد و کلمات: معمولاً برای ساختن اعداد و کلمات از روش پرکردن خانه‌ها استفاده می‌کنیم. اگر بخواهیم کلمات فارسی بسازیم، خانه‌ها را از راست به چپ پر می‌کنیم، ولی اگر بخواهیم کلمات لاتین یا اعداد را بسازیم، خانه‌ها را از چپ به راست پر می‌کنیم. البته باید به شرایط و محدودیت‌های سؤال، حتماً توجه کنیم؛ مثلاً اگر گفته شود عدد زوج بسازید، در جایگاه یکان (اولین خانه سمت راست) باید رقم‌های زوج قرار دهیم، سپس به سراغ اولین خانه سمت چپ می‌رویم و پرکردن خانه‌ها را ادامه می‌دهیم.

فصل: آمار و احتمال

درس: شمارش

اصل جمع و اصل ضرب

اصل جمع: اگر بتوان عملی را به m طریق و عمل دیگری را به n طریق انجام داد، به طوری که نتوان این دو عمل را با هم انجام داد، در این صورت این دو عمل را به $(m+n)$ طریق می‌توان انجام داد. حرف «یا» نشان‌دهنده این است که باید از اصل جمع استفاده کنیم. (اصل جمع برای بیشتر از ۲ عمل هم برقرار است.) مثلاً اگر علی بتواند برای رفتن به دانشگاه از ۳ خط تاکسی یا ۴ خط اتوبوس یا ۲ خط مترو استفاده کند، تعداد حالت‌های رفتن او به دانشگاه برابر است با:

اصل ضرب: اگر عملی طی دو مرحله متوالی اول و دوم انجام شود، به طوری که مرحله اول به m طریق و در مرحله دوم، هر یک از حالت‌های مرحله اول به n طریق انجام شود، در کل آن عمل به $m \times n$ طریق، قابل انجام است. حرف «و» نشان می‌دهد که باید از اصل ضرب استفاده کنیم. توجه کنید که در اصل ضرب، ما دو یا چند عمل را به طور متوالی انجام می‌دهیم. یعنی همه کارها (عمل‌ها) با هم انجام می‌شوند.

مثلاً فرض کنید امیر ۲ جفت کفش، ۳ پیراهن و ۵ شلوار دارد. تعداد حالت‌هایی که او می‌تواند از کفش‌ها و پوشاک خود استفاده کند طبق اصل ضرب برابر است با:

$$2 \times 3 \times 5 = 30$$

مدیرعامل یک شرکت برای تصمیم‌گیری درباره توسعه شرکت، ۲۶ نفر از سهامداران را در دو گروه A و B دسته‌بندی می‌کند. ۱۶ نفر آن‌ها در گروه A و بقیه در گروه B قرار می‌گیرند.

الف) مدیرعامل به چند طریق می‌تواند فقط از یکی از این ۲۶ نفر مشورت بگیرد؟
ب) او به چند طریق می‌تواند از هر دو گروه مشورت بگیرد به شرطی که از هر گروه با ۱ نفر مشورت کند؟

نسخه الف) باید از اصل جمع استفاده کنیم. چون مدیرعامل فقط می‌تواند ۱ نفر را از گروه A یا B انتخاب کند: $16 + 10 = 26$

ب) باید از اصل ضرب استفاده کنیم. چون مدیر می‌خواهد هم با گروه A و هم با گروه B مشورت کند؛ یعنی دو عمل را با هم انجام می‌دهد (به طور متوالی): لذا:

$$16 \times 10 = 160$$

استفاده از اصل جمع و اصل ضرب به طور هم‌زمان: در بعضی از سؤالات، مخصوصاً سؤالات مربوط به سفر از یک شهر به یک شهر دیگر، هم از اصل ضرب و هم از اصل جمع استفاده می‌کنیم. به مثال زیر توجه کنید.

مثلاً فردی می‌خواهد از شهر A به شهر C برود. او به چند طریق (حالت) می‌تواند این کار را انجام دهد به شرطی که:

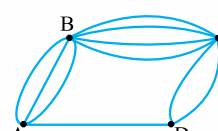
الف) محدودیت خاصی نداشته باشد.

ب) حتماً از شهر B بگذرد.

نسخه الف) برای رفتن از A به C دو مسیر کلی وجود دارد:

$$\begin{cases} A \rightarrow B \rightarrow C \text{ مسیر: تعداد حالت‌ها: } 3 \times 4 = 12 \\ A \rightarrow D \rightarrow C \text{ مسیر: تعداد حالت‌ها: } 1 \times 2 = 2 \end{cases}$$

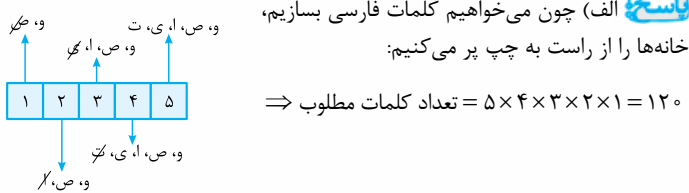
$$\xrightarrow{\text{طبق اصل جمع}} 12 + 2 = 14 = \text{تعداد کل حالت‌ها}$$



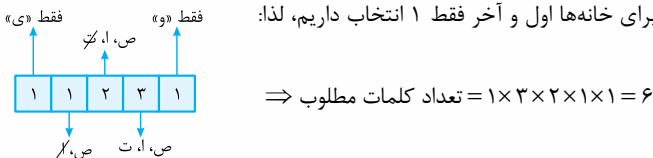
با حروف کلمه «وصایت» و بدون تکرار حروف:

(الف) چند کلمه ۵ حرفی می توان نوشت؟

(ب) چند کلمه ۵ حرفی می توان نوشت که با «و» شروع و به «ی» ختم شود؟



(ب) برای خانه ها اول و آخر فقط ۱ انتخاب داریم، لذا:



تبدیل اشیاء از n شیء

اگر بخواهیم از بین n شیء مختلف، r شیء را انتخاب کنیم، به شرطی که ترتیب قرار گرفتن آن ها کنار هم مهم باشد، می توانیم از فرمول تبدیل استفاده کنیم:

$$P(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

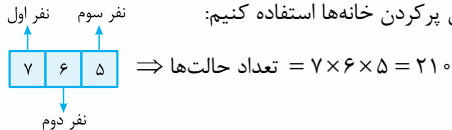
البته به جای استفاده از فرمول بالا، می توانیم از همان روش پر کردن خانه ها نیز استفاده کنیم.

به چند طریق می توانیم از بین ۷ شرکت کننده در یک مسابقه به ۳ نفر اول جایزه دهیم؟

در مسابقات، ترتیب انتخاب ها مهم است، لذا از فرمول تبدیل استفاده می کنیم:

$$P(7, 3) = \frac{7!}{(7-3)!} = \frac{7 \times 6 \times 5 \times 4!}{4!} = 210$$

می توانیم از روش پر کردن خانه ها استفاده کنیم:



ترکیب اشیاء از n شیء

اگر بخواهیم از بین n شیء متمایز، r شیء را انتخاب کنیم و ترتیب انتخاب ها مهم نباشد از فرمول ترکیب استفاده می کنیم:

$$C(n, r) = \binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)! \times r!}$$

از بین ۴ مهره آبی و ۵ مهره قرمز به چند طریق می توانیم ۳ مهره را انتخاب کنیم، به طوری که:

(الف) محدودیتی نداشته باشیم. (ب) هر ۳ مهره آبی باشند.

(پ) حداقل ۲ مهره آبی باشند.

در این جا ترتیب انتخاب مهره ها مهم نیست، پس از فرمول ترکیب استفاده می کنیم:

(الف) ۳ مهره را باید از بین ۹ مهره موجود انتخاب کنیم: $(5 + 4 = 9)$

$$\text{تعداد حالت ها} = \binom{9}{3} = \frac{9!}{6! \times 3!} = \frac{9 \times 8 \times 7 \times 6!}{6! \times 3 \times 2 \times 1} = 84$$

(ب) ۳ مهره آبی را باید از بین ۴ مهره آبی موجود انتخاب کنیم:

$$\text{تعداد حالت ها} = \binom{4}{3} = \frac{4!}{1! \times 3!} = \frac{4 \times 3!}{1 \times 3!} = 4$$

(پ) حداقل ۲ مهره، باید آبی باشند؛ یعنی ۲ مهره آبی و ۱ مهره قرمز باید انتخاب شوند یا هر ۳ مهره، آبی انتخاب شوند، لذا:

$$\text{تعداد حالت ها} = \binom{3}{2} \times \binom{5}{1} + \binom{4}{3} = 6 \times 5 + 4 = 34$$

برای فهم بهتر، به مثال های زیر توجه کنید:

با ارقام ۱, ۲, ۵, ۶, ۷ و بدون تکرار ارقام:

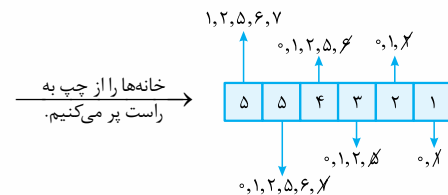
(الف) چند عدد ۶ رقمی می توان ساخت؟

(ب) چند عدد ۵ رقمی و فرد می توان ساخت؟

(پ) چند عدد ۵ رقمی و زوج می توان ساخت؟

(ت) چند عدد ۴ رقمی مضرب ۵ می توان ساخت؟

الف) هیچ عددی با صفر شروع نمی شود، پس برای پر کردن اولین خانه سمت چپ، ۵ انتخاب وجود دارد (یکی از ارقام ۱, ۲, ۵, ۶, ۷) در تمامی سؤالاتی که گفته می شود تکرار ارقام غیر مجاز است، پس از پر کردن هر خانه، باید، یکی از ارقام استفاده شده را به دلخواه خط بزنیم:



$$\Rightarrow 120 = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 \times 1 = \text{تعداد اعداد مطلوب}$$

ب) عددی فرد است که یکان آن فرد باشد، پس

اولین خانه سمت راست به ۳ حالت پر می شود:

(یکی از ارقام ۱, ۵, ۷) سپس به سراغ خانه سمت

چپ می رویم و پر کردن خانه ها را ادامه می دهیم.

(از چپ به راست حرکت می کنیم.)

$$\Rightarrow 288 = 3 \times 4 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = \text{تعداد اعداد مطلوب}$$

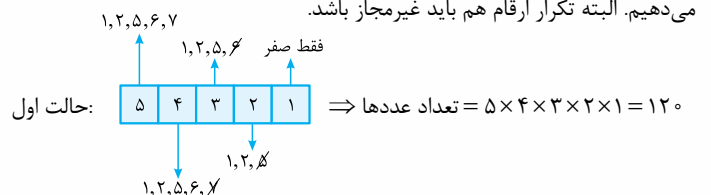
(پ) باید ۲ حالت جداگانه در نظر بگیریم، یک بار حالتی که یکان صفر باشد و بار دیگر

حالتی که یکان صفر نباشد (۲ یا ۶ باشد)، سپس جواب ها را با هم جمع می کنیم.

(اصل جمع) شاید پرسید چه موقع این کار را انجام می دهیم؟ فقط وقتی که صفر

جزء رقم های داده شده باشد و بخواهیم عدد زوج یا مضرب ۵ بسازیم این کار را انجام

می دهیم. البته تکرار ارقام هم باید غیر مجاز باشد.



$$\Rightarrow 120 = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 \times 1 = \text{تعداد اعداد}$$

حالت اول:

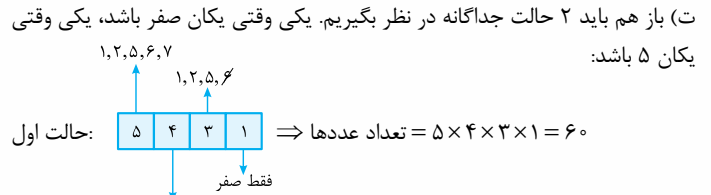
$$\Rightarrow 192 = 2 \times 4 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = \text{تعداد اعداد}$$

حالت دوم:

$$\Rightarrow 312 = 120 + 192 = \text{تعداد کل اعداد مطلوب}$$

(ت) باز هم باید ۲ حالت جداگانه در نظر بگیریم. یکی وقتی یکان صفر باشد، یکی وقتی

یکان ۵ باشد:



$$\Rightarrow 60 = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 \times 1 = \text{تعداد اعداد}$$

حالت اول:

$$\Rightarrow 48 = 4 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 \times 1 = \text{تعداد اعداد}$$

حالت دوم:

$$\Rightarrow 108 = 60 + 48 = \text{تعداد کل اعداد مطلوب}$$