

مجموعه کتاب‌های میکرو قرن جدید



حسابان جامع میکرو

ویژه رشته ریاضی و فیزیک . کنکور

پایه دهم، یازدهم، دوازدهم



۲۷۰۰ تست جدید و متنوع برای ۱۰۰ زدن کنکور

+ درس‌نامه‌های کاربردی و مفید

مؤلفان:
مهندس حبیب شفیعی .
مهندس مجید رفعتی .

چند نکته در مورد این کتاب و نحوه استفاده از آن

- ۱ در نگارش کتاب سعی شده مفاهیم عمیق حسابان با بیانی ساده و قابل فهم ارائه شود طوری که برای هر دانش‌آموز سخت‌کوش و با هر سطح معلوماتی مفید باشد.
- ۲ برای استفاده بهتر دانش‌آموزان، چینش سؤال‌ها در هر مبحث غالباً از ساده به سخت می‌باشد.
- ۳ اگر فرصت زیادی ندارید، می‌توانید فقط با حل تست‌هایی که کنار آن‌ها علامت  قرار دارد، با نصف زمان، تمام مطالب و مفاهیم کتاب را پوشش بدهید.
- ۴ اگر برای پاسخ تستی، چندین روش وجود داشت، قطعاً برای هر کدام هدفی وجود داشته، پس سعی کنید همه روش‌ها را فراگیرید.
- ۵ سطح تست‌های **IQ+** بسیار بالاتر از سطح کتاب درسی است و فقط برای دانش‌آموزان علاقه‌مند توصیه می‌شود.

و در نهایت:

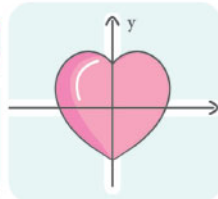
امیدواریم با تحلیل و درک عمیق مفاهیم حسابان به اوج تسلط و آمادگی برسید و خوشحال می‌شویم موفقیت‌تان را با ما به اشتراک بگذارید. خواهشمندیم جهت بهبود کیفیت کتاب، نظرات و پیشنهادات خود را با ما در میان بگذارید.

فهرست مطالب

فصل پنجم:

کاربردهای مشتق

(فصل ۵ دوازدهم)



- درس اول: اکستریم‌های یک تابع و توابع صعودی و نزولی ... ۲۶۸
درس دوم: جهت تقعر نمودار یک تابع و نقطه عطف آن ... ۲۹۶
درس سوم: رسم نمودار توابع ... ۳۱۱
پاسخنامه تشریحی ... ۶۹۲

فصل ششم:

توان‌های گویا و عبارت‌های جبری

(فصل ۳ دهم)



- توان‌های گویا و عبارت‌های جبری ... ۳۲۶
پاسخنامه تشریحی ... ۷۴۳

فصل هفتم:

الگو و دنباله

(فصل ۱ دهم و فصل ۱ یازدهم)



- الگو و دنباله ... ۳۳۸
پاسخنامه تشریحی ... ۷۴۹

فصل هشتم:

جبر و معادله

(فصل ۴ دهم و فصل ۱ یازدهم)

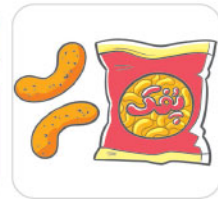


- درس اول: معادلات درجه دوم ... ۳۵۸
درس دوم: معادلات گویا و گنگ ... ۳۷۶
درس سوم: قدرمطلق و ویژگی‌های آن ... ۳۸۵
درس چهارم: آشنایی با هندسه تحلیلی ... ۳۹۷
پاسخنامه تشریحی ... ۷۶۷

فصل نهم:

توابع نمایی و لگاریتمی

(فصل ۳ یازدهم)



- توابع نمایی و لگاریتمی ... ۴۱۰
پاسخنامه تشریحی ... ۸۱۳

فصل اول:

تابع

(فصل ۵ دهم)

فصل ۲ یازدهم و فصل ۱ دوازدهم



- درس اول: مفهوم تابع، دامنه، تساوی دو تابع و برد ... ۶
درس دوم: جزء صحیح ... ۲۸
درس سوم: تابع وارون، اعمال جبری روی توابع و ... ۳۵
درس چهارم: تبدیل نمودار توابع ... ۵۷
درس پنجم: تابع درجه سوم، توابع یکنوا و بخش پذیری ... ۷۲
پاسخنامه تشریحی ... ۴۳۲

فصل دوم:

مثلثات

(فصل ۲ دهم)

فصل ۴ یازدهم و فصل ۲ دوازدهم

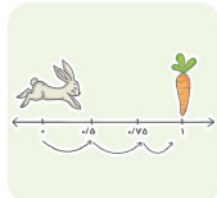


- درس اول: مفاهیم اولیه مثلثات ... ۹۶
درس دوم: اتحادهای مثلثاتی ... ۱۰۹
درس سوم: دوره تناوب ... ۱۲۴
درس چهارم: معادلات مثلثاتی ... ۱۳۳
پاسخنامه تشریحی ... ۵۱۳

فصل سوم:

حد و پیوستگی

(فصل ۵ یازدهم و فصل ۳ دوازدهم)



- درس اول: مفهوم حد، حدهای یک‌طرفه و قضایای حد ... ۱۴۴
درس دوم: رفع ابهام ... ۱۶۱
درس سوم: پیوستگی ... ۱۷۲
درس چهارم: حدهای نامتناهی و مجانب قائم ... ۱۸۵
درس پنجم: حد در بی‌نهایت و مجانب افقی ... ۱۹۶
پاسخنامه تشریحی ... ۵۷۰

فصل چهارم:

مشتق

(فصل ۴ دوازدهم)



- درس اول: آشنایی با مفهوم مشتق ... ۲۱۶
درس دوم: مشتق پذیری و پیوستگی ... ۲۲۱
درس سوم: آهنگ متوسط تغییر و آهنگ لحظه‌ای تغییر ... ۲۶۰
پاسخنامه تشریحی ... ۶۴۵

فصل اول .

۱

حسابان جامع تابع

مفهوم تابع، دامنه، تساوی دو تابع و برد
جزء صحیح
تابع وارون، اعمال جبری روی توابع و ترکیب توابع
تبدیل نمودار توابع
تابع درجه سوم، توابع یکنوا و بخش پذیری و تقسیم

درس اول:
درس دوم:
درس سوم:
درس چهارم:
درس پنجم:



Pythagoras

فصل اول

درس اول: مفهوم تابع، دامنه، تساوی دو تابع و برد

CHAPTER 1

مفهوم تابع



زوج مرتب: به هر دوتایی که برای آن‌ها ترتیبی در نظر گرفته شود، زوج مرتب می‌گوییم. زوج مرتب a و b را با نماد (a, b) نشان می‌دهیم که در آن a مؤلفه اول و b مؤلفه دوم می‌باشد. دو زوج مرتب (a, b) و (c, d) را مساوی می‌گوییم، هرگاه $a = c$ و $b = d$ باشد.

رابطه: به مجموعه دلخواهی از زوج مرتب‌ها که مؤلفه اول آن‌ها از مجموعه A و مؤلفه دوم آن‌ها از مجموعه B انتخاب شود، رابطه‌ای از مجموعه A به مجموعه B گفته می‌شود که به صورت $R: A \rightarrow B$ نمایش داده می‌شود.

تابع: یک تابع از مجموعه A به مجموعه B ، رابطه‌ای بین این دو مجموعه است که به هر عضو A دقیقاً یک عضو از B را نسبت می‌دهد. به طور کلی، اگر f تابعی از مجموعه A به B باشد، می‌نویسیم: $f: A \rightarrow B$.

هر تابع سه عامل مهم دارد: ۱- دامنه ۲- هم دامنه ۳- قانونی که نحوه ارتباط بین اعضای مجموعه اول و دوم، یعنی دامنه و هم دامنه را نشان می‌دهد.

دامنه تابع: به مجموعه تمام مؤلفه‌های اول زوج مرتب‌های تابع $y = f(x)$ دامنه تابع می‌گویند که با D_f نمایش داده می‌شود.

$$D_f = \{x | (x, y) \in f\}$$

به طور کلی در تابع $f: A \rightarrow B$ به مجموعه A ، دامنه تابع و به مجموعه B ، هم دامنه گفته می‌شود.

برد تابع: به مجموعه تمام مؤلفه‌های دوم زوج مرتب‌های تابع $y = f(x)$ برد تابع می‌گویند که با R_f نمایش داده می‌شود.

$$R_f = \{y | (x, y) \in f\}$$

تذکر: هم دامنه تابع را می‌توان هر مجموعه دلخواهی شامل برد تابع در نظر گرفت. بنابراین اگر f تابعی از A به B باشد، لزومی ندارد که برد آن مجموعه B باشد.

برد یک تابع، زیرمجموعه‌ای از هم دامنه آن است و ممکن است مساوی هم دامنه نیز باشد.

؟ برای تابع $\begin{cases} f: [1, 3] \rightarrow [1, +\infty) \\ f(x) = |x - 2| + 1 \end{cases}$ کدام یک از نمایش‌های زیر نیز قابل قبول است؟

الف) $\begin{cases} f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ f(x) = |x - 2| + 1 \end{cases}$

ب) $\begin{cases} f: [1, 3] \rightarrow [1, 2] \\ f(x) = |x - 2| + 1 \end{cases}$

پ) $\begin{cases} f: \mathbb{R} \rightarrow [1, 2] \\ f(x) = |x - 2| + 1 \end{cases}$

ت) $\begin{cases} f: [1, 3] \rightarrow \mathbb{R} \\ f(x) = |x - 2| + 1 \end{cases}$

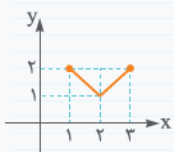
(۴) (ب) و (پ)

(۳) (الف) و (ت)

(۲) (ب) و (ت)

(۱) (الف) و (پ)

🔍 **گزینه ۲** ابتدا نمودار تابع $f(x) = |x - 2| + 1$ با دامنه $[1, 3]$ را رسم می‌کنیم:



با توجه به نمودار، برد تابع بازه $[1, 2]$ است، پس نمایشی قابل قبول است که دامنه آن $[1, 3]$ باشد و هم دامنه آن مجموعه‌ای انتخاب شود که برد تابع یعنی $[1, 2]$ زیرمجموعه آن باشد.

توابع مربوط به (الف) و (پ) دامنه‌شان برابر بازه $[1, 3]$ نمی‌باشد، پس قابل قبول نیستند. اما توابع مربوط به (ب) و (ت) علاوه بر آن‌که دامنه‌شان $[1, 3]$ است، هم دامنه‌شان نیز شامل $[1, 2]$ می‌باشد که هر دو قابل قبول اند. بنابراین گزینه (۲) صحیح است.

انواع نمایش تابع



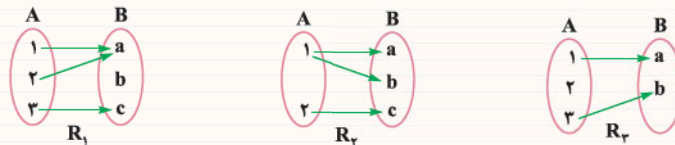
۱ نمایش پیکانی تابع: در یک تابع مانند f با دامنه D و هم دامنه R ، اگر این مجموعه‌ها (R, D) متناهی و کوچک باشند، می‌توان f را به صورت نمودار پیکانی نشان داد.

از تعریف تابع نتیجه می‌شود که اگر تابعی از A به B با نمودار پیکانی نمایش داده شده باشد، آن‌گاه:

(الف) از هر عضو A باید دقیقاً یک پیکان خارج شود.

(ب) لازم نیست که به هر عضو B دقیقاً یک پیکان وارد شود. ممکن است به یک عضو B یک پیکان، یا بیش از یک پیکان وارد شود یا آن‌که اصلاً پیکانی وارد نشود.

❖ کدام یک از روابط زیر یک تابع است؟



❑ رابطه R_1 تابع است، زیرا از تمام اعضای مجموعه A دقیقاً یک پیکان خارج می‌شود. رابطه R_2 تابع نیست، زیرا از عدد ۱ دو پیکان خارج شده است و همچنین R_3 نیز تابع نیست، زیرا از ۲، پیکانی خارج نشده است.

۲ نمایش زوج مرتبی تابع: تابع را می‌توان به کمک زوج مرتب‌هایی نشان داد که مؤلفه اول هر زوج مرتب، یک عضو از دامنه و مؤلفه دوم آن یک عضو از برد است. از تعریف تابع نتیجه می‌شود، اگر تابعی به صورت زوج‌های مرتب نشان داده شده باشد، هیچ دو زوج مرتب متمایزی نباید مؤلفه‌های اول یکسان داشته باشند. به عبارت دیگر اگر در یک تابع، دو زوج مرتب دارای مؤلفه‌های اول مساوی باشند، آن‌گاه مؤلفه‌های دوم آن‌ها یکسان خواهد بود. یعنی:

$$(x, y_1) \in f, (x, y_2) \in f \Rightarrow y_1 = y_2$$

❓ رابطه $A = \{(3, m^2), (2, 1), (-3, m), (-2, m), (3, m+2), (m, 4)\}$ به ازای کدام مقدار m یک تابع است؟

(۱) -۲ (۲) -۱ (۳) ۲ (۴) هیچ مقدار m

🔍 **گزینه ۲:** برای تابع بودن یک رابطه، نباید هیچ دو زوج مرتب متمایزی مؤلفه‌های اول یکسان داشته باشند. پس:

$$(3, m^2) = (3, m+2) \Rightarrow m^2 = m+2 \Rightarrow m^2 - m - 2 = 0 \Rightarrow m = -1, 2$$

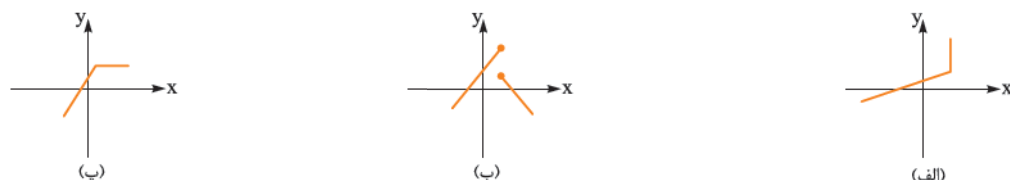
m های به دست آمده را در رابطه قرار می‌دهیم و تابع بودن یا نبودن رابطه A را بررسی می‌کنیم:

$$\begin{cases} m = -1 \Rightarrow A = \{(3, 1), (2, 1), (-3, -1), (-2, -1), (-1, 4)\} \Rightarrow \text{تابع است} \\ m = 2 \Rightarrow A = \{(3, 4), (2, 1), (-3, 2), (-2, 2), (2, 4)\} \Rightarrow \text{تابع نیست} \end{cases}$$

بنابراین گزینه (۲) صحیح است.

۳ نمایش نموداری تابع: اگر نمودار یک رابطه رسم شده باشد، آن رابطه زمانی تابع است که خطوط موازی محور y ها، نمودار را حداکثر در یک نقطه قطع کنند.

به نمودارهای زیر توجه کنید:



ملاحظه می‌شود، فقط نمودار (پ) تابع است، اما (الف) و (ب) تابع نیستند.

مماسبه تعداد توابع: مجموعه‌های $A = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ و $B = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$ را در نظر بگیرید. تعداد توابع از مجموعه A به مجموعه B برابر است با n^m .

دلیل رابطه بالا آن است که چون دامنه تابع، باید تمام اعضای مجموعه A باشد، پس تابع f را به صورت $f = \{(a_1, 0), (a_2, 0), \dots, (a_m, 0)\}$ در نظر می‌گیریم. در هر یک از دایره‌های خالی، عضوهای مجموعه B قرار می‌گیرند که برای هر دایره خالی، n انتخاب داریم. بنابراین طبق اصل ضرب، $n \times n \times n \times \dots \times n = n^m$ حالت مختلف داریم.

مجموعه‌های $A = \{a, b, c\}$ و $B = \{1, 2, 3, 4\}$ را در نظر بگیرید.

الف) تعداد توابعی که از A به B می‌توان نوشت بیشتر است یا از B به A ؟ ب) چند تابع از A به B می‌توان نوشت که $f(b) = 2$ باشد؟

الف) در توابع از A به B ، به هر یک از عضوهای مجموعه A یک عضو B را می‌توان نسبت داد:

$$f: A \rightarrow B: f = \{(a, 1), (b, 2), (c, 3)\}$$

$$4^3 = 64 \Rightarrow 4 \text{ حالت } 4 \times 4 \text{ حالت } 4 \times 4 \text{ حالت}$$

در توابع از B به A ، به هر یک از عضوهای مجموعه B یک عضو A را می‌توان نسبت داد:

$$f: B \rightarrow A: f = \{(1, a), (2, b), (3, c), (4, a)\}$$

$$3^4 = 81 \Rightarrow 3 \text{ حالت } 3 \times 3 \text{ حالت } 3 \times 3 \text{ حالت } 3 \times 3 \text{ حالت}$$

بنابراین ۸۱ تابع از B به A و ۶۴ تابع از A به B می‌توان نوشت که تعداد توابع از B به A ، بیشتر است.

ب) در توابعی که از A به B می‌توان نوشت و $f(b) = 2$ باشد، حتماً به عضو b باید عدد ۲ را نسبت دهیم. یعنی:

$$f = \{(a, 1), (b, 2), (c, 1)\}$$

$$4^2 = 16 \Rightarrow 4 \text{ حالت } 1 \times 4 \text{ حالت } 4 \times 1 \text{ حالت}$$

پس ۱۶ تابع با این شرط می‌توان نوشت.

۴ نمایش ضابطه‌ای تابع: یک تابع را می‌توان به صورت یک عبارت جبری از یک متغیر نشان داد. این نوع نمایش را نمایش ضابطه‌ای تابع می‌گوییم.

معادلاتی که دارای دو متغیر مانند X و Y هستند، یک رابطه را نشان می‌دهند. اما الزاماً یک معادله با دو متغیر برحسب X و Y ، یک تابع را مشخص نمی‌کند.

تشفیص تابع بودن یک معادله: در یک معادله برحسب X و Y اگر بتوان Y را برحسب X به صورت صریح $y = f(x)$ نمایش داد، آن ضابطه حتماً یک تابع است.

بررسی کنید آیا رابطه $y^3 + x^2 - 2x = 0$ تابع است؟

$$y^3 = 2x - x^2 \Rightarrow y = \sqrt[3]{2x - x^2}$$

را به صورت یک تابع صریح از X می‌نویسیم:

چون به ازای هر X ، فقط یک مقدار برای Y وجود دارد، پس رابطه بالا یک تابع است.

بررسی کنید آیا رابطه $y^3 + 6y^2 + 12y + 2 = x$ تابع است؟

از اتحاد مکعب دو جمله‌ای استفاده می‌کنیم:

$$y^3 + 6y^2 + 12y + 8 - 6 = x \Rightarrow (y+2)^3 = x+6 \Rightarrow y+2 = \sqrt[3]{x+6} \Rightarrow y = \sqrt[3]{x+6} - 2$$

چون به ازای هر X فقط یک مقدار برای Y وجود دارد، پس تابع است.

نکته با مثال نقض می‌توان تابع نبودن یک رابطه را اثبات کرد. به خصوص در مواردی که نوشتن رابطه‌ای صریح برحسب x دشوار باشد، استفاده از مثال

نقض روش مناسبی است.

بررسی کنید آیا رابطه $y^3 - y = x^3 + x$ تابع است؟

$$x = 0 \Rightarrow y^3 - y = 0 \Rightarrow y(y^2 - 1) = 0 \Rightarrow y = 0, \pm 1$$

از مثال نقض کمک می‌گیریم. کافی است به X مقدار صفر بدهیم:

چون به ازای $X = 0$ ، بیش از یک مقدار برای Y به دست آمد، پس رابطه بالا تابع نیست.

در کدام گزینه، y تابعی از x می‌باشد؟

$$x = y^3 + y + |y| \quad (۴)$$

$$x = |2y+1| + y \quad (۳)$$

$$x = y^3 - 4y + 1 \quad (۲)$$

$$x + \sqrt{y+2} = y \quad (۱)$$

گزینه ۴ بهتر است از مثال نقض استفاده کنیم:

$$۱) x = -2 \Rightarrow \sqrt{y+2} = y+2 \Rightarrow y = \{-1, -2\} \Rightarrow \text{تابع نیست.}$$

$$۲) x = 1 \Rightarrow y^3 - 4y = 0 \Rightarrow y(y^2 - 4) = 0 \Rightarrow y = \{0, \pm 2\} \Rightarrow \text{تابع نیست.}$$

$$۳) x = 0 \Rightarrow |2y+1| = -y \Rightarrow 2y+1 = \pm y \Rightarrow y = \{-1, \frac{-1}{3}\} \Rightarrow \text{تابع نیست.}$$

بنابراین گزینه (۴) صحیح است.

مماسبه مقدار تابع: اگر تابع را به صورت ضابطه‌ای نمایش دهیم و عبارت برحسب x باشد، برای تعیین مقدار تابع، کافی است به جای x ، عدد یا عبارت مورد نظر را قرار دهیم.

❖ اگر $f(x) = x^4 - 3x^2$ و $g(x) = 2x + 1$ باشند، هر یک از مقادیر $f(g(-1))$ و $g(g(f(\sqrt{2})))$ را به دست آورید.

$$g(-1) = 2(-1) + 1 = -1 \Rightarrow f(g(-1)) = f(-1) = (-1)^4 - 3(-1)^2 = 1 - 3 = -2$$

$$f(\sqrt{2}) = (\sqrt{2})^4 - 3(\sqrt{2})^2 = 4 - 6 = -2 ; g(-2) = 2(-2) + 1 = -3 \Rightarrow g(g(f(\sqrt{2}))) = g(g(-2)) = g(-3) = 2(-3) + 1 = -5$$

❖ اگر $f(x) = \frac{2x+3}{2-x}$ و $g(x) = \frac{1-2x}{x+2}$ باشند، ضابطه تابع $g(f(x))$ کدام است؟

$$x+1 \quad (4)$$

$$-x-1 \quad (3)$$

$$-x \quad (2)$$

$$x \quad (1)$$

✔ **گزینه ۳:** در تابع $g(f(x))$ به جای $f(x)$ مقدارش را قرار می‌دهیم:

$$g(f(x)) = g\left(\frac{2x+3}{2-x}\right) = \frac{1-2\left(\frac{2x+3}{2-x}\right)}{\frac{2x+3}{2-x}+2} = \frac{\frac{2-x-6x-9}{2-x}}{\frac{2x+3+4-2x}{2-x}} = \frac{-7x-7}{7} = -x-1$$

بنابراین گزینه (۳) صحیح است.

❖ اگر $f(x) = x^3 + 9x^2 + 27x + 10$ باشد، حاصل $f(f(\sqrt[3]{16}-3))$ کدام است؟

$$-9 \quad (4)$$

$$9 \quad (3)$$

$$-3 \quad (2)$$

$$3 \quad (1)$$

✔ **گزینه ۴:** با استفاده از اتحاد مکعب دو جمله‌ای $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ تابع را به صورت ساده‌تر می‌نویسیم:

$$f(x) = x^3 + 9x^2 + 27x + 10 = (x+3)^3 - 17$$

$$f(\sqrt[3]{16}-3) = (\sqrt[3]{16}-3+3)^3 - 17 = 16 - 17 = -1 \Rightarrow f(f(\sqrt[3]{16}-3)) = f(-1) = (-1+3)^3 - 17 = 8 - 17 = -9$$

بنابراین گزینه (۴) صحیح است.

محاسبه $f(x)$ از روی $f(g(x))$

اگر $f(g(x))$ معلوم باشد، برای تعیین $f(x)$ در بعضی موارد می‌توان با تغییر متغیر t ، $g(x) = t$ را برحسب t به دست آورد، سپس $f(t)$ را برحسب t نوشته و در انتها به جای t ، x را جایگزین کرد.

❖ اگر $f\left(\frac{3x+1}{2}\right) = \frac{2x-1}{x+1}$ باشد، ضابطه $f(x)$ کدام است؟

$$\frac{4x-5}{2x-2} \quad (4)$$

$$\frac{6x}{3x-3} \quad (3)$$

$$\frac{4x-5}{2x+2} \quad (2)$$

$$\frac{6x}{3x+3} \quad (1)$$

✔ **گزینه ۲:** روش اول: با تغییر متغیر $t = \frac{3x+1}{2}$ داریم:

$$\frac{3x+1}{2} = t \Rightarrow 3x+1 = 2t \Rightarrow x = \frac{2t-1}{3}$$

$$f\left(\frac{3x+1}{2}\right) = \frac{2x-1}{x+1} \Rightarrow f(t) = \frac{2\left(\frac{2t-1}{3}\right)-1}{\frac{2t-1}{3}+1}$$

$$f(t) = \frac{2(2t-1)-3}{2t-1+3} = \frac{4t-5}{2t+2} \Rightarrow f(x) = \frac{4x-5}{2x+2}$$

صورت و مخرج کسر را در عدد ۳ ضرب می‌کنیم:

روش دوم (عددگذاری): اگر در معادله $f\left(\frac{3x+1}{2}\right) = \frac{2x-1}{x+1}$ به جای x عدد ۱ را قرار دهیم، آنگاه $f(2) = \frac{1}{2}$ به دست می‌آید. حال اگر گزینه‌ها را بررسی کنیم،

تنها گزینه‌ای که این مقدار در آن صدق می‌کند، گزینه (۲) می‌باشد.

نکته اگر ضوابط $f(g(x))$ و $g(x)$ معلوم باشند، اما با فرض $t = g(x)$ ، x را به سادگی نتوانیم برحسب t به دست آوریم، باید به کمک اتحاد و تجزیه، $f(g(x))$ را به صورت عبارتی از $g(x)$ درآورده و سپس $f(t)$ را به دست آوریم.

❖ اگر $f(x + \frac{1}{x}) = x^3 + \frac{1}{x^3}$ مقدار عددی $f(3)$ را به دست آورید.

📌 **روش اول:** با فرض $x + \frac{1}{x} = t$ به سادگی نمی توان x را برحسب t پیدا کرد. پس سعی می کنیم عبارت $x^3 + \frac{1}{x^3}$ را به صورت تابعی از $x + \frac{1}{x}$ به دست آوریم، با استفاده از اتحاد $a^3 + b^3 = (a+b)^3 - 3ab(a+b)$ داریم:

$$x^3 + \frac{1}{x^3} = (x + \frac{1}{x})^3 - 3(x + \frac{1}{x}) \Rightarrow f(x + \frac{1}{x}) = (x + \frac{1}{x})^3 - 3(x + \frac{1}{x}) \Rightarrow f(t) = t^3 - 3t \Rightarrow f(3) = 3^3 - 3(3) = 27 - 9 = 18$$

روش دوم: ابتدا $x + \frac{1}{x} = 3$ را در نظر گرفته، سپس دو سمت را به توان ۳ می رسانیم. با استفاده از اتحاد $(a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b)$ داریم:

$$x^3 + \frac{1}{x^3} + 3(x + \frac{1}{x}) = 27 \Rightarrow x^3 + \frac{1}{x^3} = 27 - 9 = 18$$

محاسبه $f(x)$ از روی $af(u) + bf(v) = g(x)$



معمولاً در این معادلات طوری باید از تغییر متغیر استفاده کرد که عبارات u و v به هم تبدیل شوند. در این حالت به رابطه جدیدی مثل $a_1f(u) + b_1f(v) = g_1(x)$ می رسیدیم. حال این رابطه را با رابطه اصلی در یک دستگاه قرار داده و به صورت دو معادله دو مجهولی، آن را حل می کنیم.

❖ اگر $2f(x) + 3f(-x) = 2x - 1$ باشد، آنگاه ضابطه $f(x)$ را به دست آورید.

📌 در معادله داده شده، به جای x ، $-x$ قرار می دهیم:

$$2f(-x) + 3f(x) = -2x - 1 \Rightarrow \begin{cases} 2f(x) + 3f(-x) = 2x - 1 \\ 3f(x) + 2f(-x) = -2x - 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4f(x) + 6f(-x) = 4x - 2 \\ -9f(x) - 6f(-x) = 6x + 3 \end{cases}$$

از جمع دو معادله به دست آمده، داریم:

$$-5f(x) = 10x + 1 \Rightarrow f(x) = -2x - \frac{1}{5}$$

❓ اگر $f(\frac{1}{x}) - 2f(x) = x^2 + \frac{1}{x}$ ، حاصل $f(2)$ کدام است؟

$$\begin{matrix} \frac{45}{4} & (2) & \frac{15}{4} & (3) & -\frac{15}{4} & (4) \end{matrix}$$

📌 **گزینه ۴:** یک بار جای x عدد ۲ و یک بار $\frac{1}{2}$ را قرار می دهیم:

$$\begin{cases} x=2 \Rightarrow f(\frac{1}{2}) - 2f(2) = 4 + \frac{1}{2} \\ x=\frac{1}{2} \Rightarrow f(2) - 2f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{4} + 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2f(2) + f(\frac{1}{2}) = \frac{9}{2} \\ f(2) - 2f(\frac{1}{2}) = \frac{9}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -4f(2) + 2f(\frac{1}{2}) = 9 \\ f(2) - 2f(\frac{1}{2}) = \frac{9}{4} \end{cases}$$

از جمع دو معادله به دست آمده، داریم:

$$-3f(2) = \frac{45}{4} \Rightarrow f(2) = -\frac{15}{4}$$

بنابراین گزینه (۴) صحیح است.

❓ اگر $f(2\sin^2 x + 3\sin x) = 1 - \tan^2 x$ باشد، آنگاه $f(2)$ کدام است؟

$$\begin{matrix} \frac{4}{3} & (4) & \frac{2}{3} & (3) & \frac{1}{3} & (2) & 1 & (1) \end{matrix}$$

📌 **گزینه ۳:**

$$2\sin^2 x + 3\sin x = 2 \Rightarrow 2\sin^2 x + 3\sin x - 2 = 0 \Rightarrow \sin x = \frac{-3 \pm \sqrt{9+16}}{4} = \frac{-3 \pm 5}{4} \Rightarrow \begin{cases} \sin x = -2 \text{ (غلق)} \\ \sin x = \frac{1}{2} \end{cases}$$

با فرض $\sin x = \frac{1}{2}$ ، مقدار $1 - \tan^2 x$ را به دست می آوریم:

$$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{1}{1 - \sin^2 x} = \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{4}{3} \Rightarrow \tan^2 x = \frac{4}{3} - 1 = \frac{1}{3} \Rightarrow 1 - \tan^2 x = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

بنابراین گزینه (۳) صحیح است.

توابع چندضابطه‌ای



تعریف تابع چندضابطه‌ای: تابعی که دامنه آن به دو یا چند بخش تقسیم شده و هر بخش با معادلات مختلفی تعریف شود، تابع چندضابطه‌ای گویند. شکل کلی توابع چندضابطه‌ای به صورت روبه‌رو می‌باشد:

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) ; x \in D_1 \\ f_2(x) ; x \in D_2 \\ \vdots \\ f_n(x) ; x \in D_n \end{cases}$$

بدیهی است که هرکدام از ضابطه‌های $f_1, f_2, \dots$ فقط در دامنه خود اعتبار دارند.

در صورتی که در یک تابع چندضابطه‌ای بخواهیم مقدار تابع را به ازای یک ورودی تعیین کنیم، ابتدا باید مشخص کنیم آن ورودی متعلق به کدام محدوده از دامنه می‌باشد و سپس از ضابطه متناظر با آن محدوده استفاده کنیم.

❓ **تابع با ضابطه** $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{\sqrt{1-x}} ; x < 1 \\ 2x - \frac{3}{4} ; x \geq 1 \end{cases}$ مفروض است. $f(f(\frac{3}{4}))$ کدام است؟

$$\frac{9}{4} \quad (4)$$

$$\frac{5}{4} \quad (3)$$

$$\frac{3}{2} \quad (2)$$

$$\frac{3}{4} \quad (1)$$

✔ **گزینه ۴** چون $\frac{3}{4} < 1$ است، پس برای محاسبه $f(\frac{3}{4})$ از ضابطه اول استفاده می‌کنیم:

$$f\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{\frac{3}{4}}{\sqrt{1-\frac{3}{4}}} = \frac{\frac{3}{4}}{\sqrt{\frac{1}{4}}} = \frac{\frac{3}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{3}{2}$$

$$f\left(f\left(\frac{3}{4}\right)\right) = f\left(\frac{3}{2}\right) = 2\left(\frac{3}{2}\right) - \frac{3}{4} = \frac{9}{4}$$

چون $\frac{3}{2} > 1$ است، پس برای محاسبه $f(\frac{3}{2})$ از ضابطه دوم استفاده می‌کنیم:

بنابراین گزینه (۴) صحیح است.

نکته یک رابطه چندضابطه‌ای با دو شرط زیر تابع محسوب می‌شود:

۱ هر کدام از ضابطه‌ها در دامنه خود تابع باشند.

۲ دامنه ضابطه‌ها یا اشتراک نداشته باشند و یا اگر اشتراک داشته باشند، به ازای دامنه‌های مشترک، مقادیر یکسان تولید کنند.

❓ **کدام یک از معادلات زیر، y را به صورت تابعی از x مشخص می‌کند؟**

$$y = \begin{cases} -x+1 ; x \leq 0 \\ 2x ; x > -1 \end{cases} \quad (4)$$

$$y = \begin{cases} -x+3 ; x \leq 1 \\ x+1 ; x \geq 1 \end{cases} \quad (3)$$

$$y = \begin{cases} -x+1 ; x < 2 \\ 2x ; x > 1 \end{cases} \quad (2)$$

$$y = \begin{cases} x+3 ; x \leq 0 \\ x-1 ; x \geq 0 \end{cases} \quad (1)$$

✔ **گزینه ۳** **روش اول:** هر یک از گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

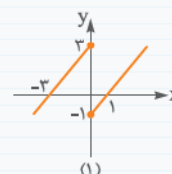
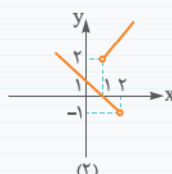
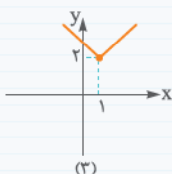
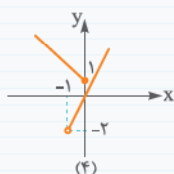
(۱) دامنه دو ضابطه در $x=0$ مشترک می‌باشند. با فرض $x=0$ ، مقدار $y=x+3$ و $y=x-1$ به ترتیب ۳ و -۱ می‌شود، چون به ازای $x=0$ دو مقدار برای y پیدا شد، پس این رابطه تابع نیست.

(۲) دامنه دو ضابطه در بازه $(1,2)$ مشترک هستند. به ازای عددی مانند $x=1/5$ دو مقدار $-5/5$ و 3 به دست می‌آید، پس این رابطه تابع نیست.

(۳) هر یک از ضوابط در دامنه خود تابع‌اند و دامنه دو ضابطه در $x=1$ مشترک است که به ازای آن، مقدار هر دو ضابطه برابر ۲ می‌شود، پس این رابطه، تابع است.

(۴) دو ضابطه در بازه $[-1,0]$ مشترک هستند. به ازای عددی مانند $x=0$ دو مقدار $1/5$ و -۱ به دست می‌آید، پس این رابطه تابع نیست.

روش دوم: نمودار هر یک را رسم می‌کنیم:



تنها گزینه‌ای که خطوط موازی محور عرض‌ها، نمودار را حداکثر در یک نقطه قطع می‌کند، نمودار گزینه (۳) می‌باشد. بنابراین گزینه (۳) صحیح است.

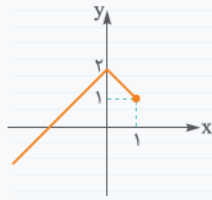
❓ اگر برد تابع $f(x) = \begin{cases} 3x+b & ; x > 1 \\ 2-|x| & ; x \leq 1 \end{cases}$ برابر $\mathbb{R}$ باشد، تمام مقادیر ممکن برای b کدام است؟

$$b \leq 0 \quad (4)$$

$$b \leq -1 \quad (3)$$

$$b \geq -1 \quad (2)$$

$$b \geq 0 \quad (1)$$

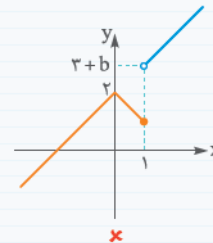
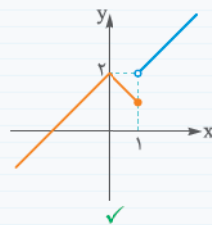
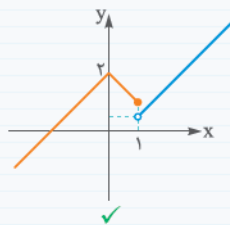


🔗 گزینه ۳ ابتدا نمودار $y = 2 - |x|$ را در بازه $(-\infty, 1]$ رسم می‌کنیم. برای این کار، نمودار $y = |x|$ را نسبت به محور طول‌ها قرینه کرده و سپس ۲ واحد به سمت بالا انتقال می‌دهیم:

مقدار تابع $y = 3x + b$ به ازای $x = 1$ برابر $y = 3 + b$ است. پس برد این قسمت از تابع، بازه $(3 + b, +\infty)$ می‌شود. از طرفی برد تابع $y = 2 - |x|$ به صورت بازه $(-\infty, 2]$ است، پس باید $3 + b \leq 2$ باشد تا برد $f(x)$ تمام اعداد حقیقی را پوشش دهد و برابر $\mathbb{R}$ شود. بنابراین:

$$3 + b \leq 2 \Rightarrow b \leq -1$$

برای درک بهتر، به نمودار $f(x)$ در سه حالت $3 + b < 2$ ، $3 + b = 2$ و $3 + b > 2$ توجه کنید:



همان‌طور که ملاحظه می‌شود از سمت راست، در اولین نمودار $3 + b > 2$ است و برد $f(x)$ برابر $\mathbb{R}$ نمی‌شود ولی در دو حالت بعدی برد تابع برابر $\mathbb{R}$ است. بنابراین گزینه ۳ صحیح است.

انواع تابع

شما تاکنون با توابع مختلفی مانند خطی، چندجمله‌ای، ثابت و همانی آشنا شده‌اید. در این درس، این تعاریف را یادآوری کرده و با انواع دیگری از توابع مهم و مفید آشنا می‌شوید.

تابع ثابت: هر تابعی را که برد آن تنها شامل یک عضو باشد، تابع ثابت می‌نامیم. اگر این عضو را k بنامیم، تابع ثابت را با معادله $f(x) = k$ نمایش می‌دهیم.

برای مثال، هر یک از توابع $f(x) = \frac{3}{4}$ ، $g(x) = \sin^2 x + \cos^2 x$ و $h(x) = \{(3, \sqrt{2}), (5, \sqrt{2})\}$ ثابت‌اند.

تذکر: نمودار هر تابع ثابت، خطی (یا مجموعه نقاط روی خطی) موازی محور x است.

تابع قطبی: هر تابع به صورت $f(x) = ax + b$ را یک تابع خطی می‌نامیم. (اگر $a = 0$ باشد، آن‌گاه تابع به صورت ثابت $f(x) = b$ درمی‌آید).

برای مثال هر یک از توابع $f(x) = \frac{1}{4}x + 2$ ، $g(t) = \sqrt{2}t + 3$ و $r(a) = 5a - 3$ خطی هستند.

تابع چندجمله‌ای: هر تابعی را که نمایش جبری آن یک چندجمله‌ای جبری از یک متغیر باشد، تابع چندجمله‌ای می‌نامیم. هر تابع به صورت

$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ را یک تابع چندجمله‌ای از درجه n می‌گوییم. ($a_n, a_{n-1}, \dots, a_0$ اعدادی حقیقی، n عدد صحیح نامنفی و $a_n \neq 0$)

توابع خطی حالت خاصی از توابع چندجمله‌ای هستند. تابع خطی $f(x) = a_1 x + a_0$ یک تابع چندجمله‌ای درجه اول است.

برای مثال، هر یک از توابع روبه‌رو، چندجمله‌ای هستند:

$$f(x) = 2x^2 + 3x + \sqrt{2}, \quad g(a) = a^3 - 5a, \quad r(t) = \frac{3}{5}t^2 - \sqrt{3}t$$

تابع همانی: اگر تابع $f(x)$ به ازای هر ورودی مجاز x ، خود x را نظیر کند، تابع را همانی گوییم و آن را با $f(x) = x$ نشان می‌دهیم. با توجه به تعریف،

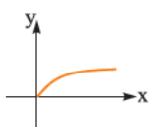
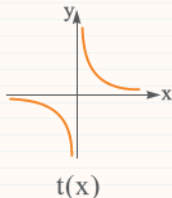
دامنه و برد تابع همانی با هم برابرند. نمودار تابع همانی، خط $y = x$ (نیمساز ربع اول و سوم) یا مجموعه نقاطی روی آن می‌باشد.

توابع گویا: هر تابع به شکل $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ را که در آن $P(x)$ و $Q(x)$ چندجمله‌ای هستند، یک تابع گویا می‌نامیم ($Q(x) \neq 0$).

برای مثال، توابع $f(x) = \frac{5}{x+2}$ و $g(t) = \frac{\sqrt{2}t+1}{t^2-t}$ گویا هستند.

❖ نمودار توابع $\begin{cases} f: \{1, 2, 3\} \rightarrow \mathbb{R} \\ f(x) = \frac{1}{x} \end{cases}$ و $\begin{cases} t: \mathbb{R} - \{0\} \rightarrow \mathbb{R} \\ t(x) = \frac{1}{x} \end{cases}$ را رسم کنید.

❑ با توجه به دامنه، نمودار توابع f و t را رسم می‌کنیم. (نمودار $y = \frac{1}{x}$ را از روش نقطه‌یابی می‌توانید رسم کنید. اما بهتر است نمودار آن را به خاطر بسپارید).



توابع رادیکالی: تابعی که هر عدد نامنفی را به ریشه دوم نامنفی آن نسبت می‌دهد، تابع ریشه دوم می‌نامند که به صورت $f(x) = \sqrt{x}$ نمایش داده می‌شود. دامنه و برد این تابع، مطابق شکل روبه‌رو، بازه $[0, +\infty)$ می‌باشد. تابع $f(x) = \sqrt{x}$ یک تابع رادیکالی است.

روش‌های به دست آوردن دامنه توابع

موارد زیادی پیش می‌آید که توابع را فقط با ارائه ضابطه معرفی می‌کنند و اشاره‌ای به دامنه نمی‌شود. در این موارد، طبق قرارداد، دامنه تابع، بزرگ‌ترین مجموعه‌ای است که ضابطه ارائه شده روی آن مجموعه تعریف شده باشد. برای مثال، اگر $f(x) = \sqrt{4-x^2}$ ، به عنوان تابع ارائه شده باشد، طبق قرارداد، دامنه آن بازه $[-2, 2]$ است.

❶ **دامنه توابع چندجمله‌ای:** دامنه توابع چندجمله‌ای به فرم کلی $f(x) = ax^n + bx^{n-1} + \dots$ برابر با $\mathbb{R}$ است.

❷ **دامنه توابع گویا:** دامنه توابع کسری که صورت و مخرجشان چندجمله‌ای باشد (توابع گویا)، برابر با مجموعه اعداد حقیقی به جز ریشه‌های مخرج خواهد بود.

❸ **دامنه توابع رادیکالی:** بستگی به زوج یا فرد بودن فرجه، دو حالت در نظر می‌گیریم:

$$y = \sqrt[k]{f(x)} \Rightarrow D_y = D_f ; \quad (k \in \mathbb{N})$$

(الف) اگر فرجه رادیکال فرد باشد، دامنه تابع همان دامنه زیر رادیکال است:

$$y = \sqrt[k]{f(x)} \Rightarrow f(x) \geq 0 ; \quad (k \in \mathbb{N})$$

(ب) اگر فرجه رادیکال زوج باشد، باید زیر رادیکال مثبت یا صفر باشد:

بنابراین در این حالت، دامنه تابع محدوده‌ای است که $x \in D_f$ و $f(x) \geq 0$ باشد.

❹ **دامنه توابع چندضابطه‌ای:** دامنه توابع چندضابطه‌ای از اجتماع دامنه ضابطه‌ها به دست می‌آید.

$$y = \log_{g(x)} f(x) \Rightarrow D_y = \{x | g(x) > 0, g(x) \neq 1, f(x) > 0\}$$

❺ **دامنه توابع لگاریتمی:** برای توابع لگاریتمی داریم:

❖ دامنه توابع زیر را بیابید.

الف) $f(x) = \frac{\sqrt{3-x}}{x^2-16}$

ب) $f(x) = \sqrt{\frac{x^2-2x+1}{x^2-4x}}$

پ) $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x+1} & ; x \geq -1 \\ \frac{2x}{x-2} & ; -2 < x < -1 \end{cases}$

❑ (الف) محدوده‌ای که عبارت زیر رادیکال، بزرگ‌تر یا مساوی صفر است را به دست آورده و ریشه‌های مخرج کسر را از آن کم می‌کنیم:

$$3-x \geq 0 \Rightarrow x \leq 3 ; x^2-16=0 \Rightarrow x=\pm 4 \Rightarrow D_f = (-\infty, 3] - \{-4\}$$

(ب) با استفاده از جدول تعیین علامت، دامنه تابع را به دست می‌آوریم:

$$\frac{x^2-2x+1}{x^2-4x} \geq 0 \Rightarrow \frac{(x-1)^2}{x(x^2-4)} \geq 0$$

x	-2	0	1	2
$\frac{(x-1)^2}{x(x^2-4)}$	-	+	-	+
	تن	تن	تن	تن

پس دامنه تابع به صورت $(-2, 0) \cup \{1\} \cup (2, +\infty)$ می‌باشد.

(پ) دامنه تابع از اجتماع دامنه هر یک از ضابطه‌ها یعنی $[-1, +\infty)$ و $(-2, -1)$ به دست می‌آید. بنابراین دامنه تابع برابر بازه $(-2, +\infty)$ می‌شود.

❓ دامنه تابع $y = \sqrt{4 - \sqrt{1 - 2x}}$ شامل چند عدد صحیح است؟

۸ (۴)

۹ (۳)

۷ (۲)

۶ (۱)

✔️ **گزینه ۴** باید دو شرط $1 - 2x \geq 0$ و $4 - \sqrt{1 - 2x} \geq 0$ برقرار باشند:

$$\begin{cases} 1 - 2x \geq 0 \Rightarrow 2x \leq 1 \Rightarrow x \leq \frac{1}{2} \\ 4 - \sqrt{1 - 2x} \geq 0 \Rightarrow \sqrt{1 - 2x} \leq 4 \Rightarrow 1 - 2x \leq 16 \Rightarrow 2x \geq -15 \Rightarrow x \geq -\frac{15}{2} \end{cases} \xrightarrow{\text{اشتراک}} -\frac{15}{2} \leq x \leq \frac{1}{2}$$

پس دامنه تابع بازه $[-7/5, 0/5]$ می باشد که شامل ۸ عدد صحیح $\{-7, -6, \dots, -1, 0\}$ است. بنابراین گزینه (۴) صحیح می باشد.

❓ اگر دامنه تابع $f(x) = \frac{2x+1}{\sqrt{(m-1)x^2 + 2\sqrt{2}x + m}}$ برابر $\mathbb{R}$ باشد، تمام مقادیر ممکن برای m کدام است؟

$m > 2$ (۴)

$m > 1$ (۳)

$1 < m < 2$ (۲)

$m < -1$ (۱)

✔️ **گزینه ۴** زمانی دامنه تابع برابر $\mathbb{R}$ می شود که همواره $(m-1)x^2 + 2\sqrt{2}x + m > 0$ باشد. می دانیم شرط همواره مثبت بودن عبارت درجه دوم آن است که Δ منفی و ضریب x^2 مثبت باشد. بنابراین:

$$\begin{cases} x^2 \text{ ضریب} > 0 \Rightarrow m-1 > 0 \Rightarrow m > 1 \\ \Delta < 0 \Rightarrow (2\sqrt{2})^2 - 4(m-1)(m) < 0 \Rightarrow 8 - 4m^2 + 4m < 0 \xrightarrow{+(-4)} m^2 - m - 2 > 0 \Rightarrow (m+1)(m-2) > 0 \Rightarrow m < -1 \text{ یا } m > 2 \end{cases}$$

از اشتراک محدوده های به دست آمده، مجموعه جواب به صورت $m > 2$ حاصل می شود. پس گزینه (۴) صحیح است.

❓ اگر دامنه $y = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{4-x-2|-x-4|}}$ به صورت بازه (α, β) باشد، مقدار $\alpha\beta$ کدام است؟

۸ (۴)

۵ (۳)

۶ (۲)

۳ (۱)

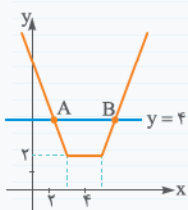
✔️ **گزینه ۳** روش اول: باید شرط $4 - |x-2| - |x-4| > 0$ برقرار باشد. با توجه به ریشه های عبارات درون قدرمطلق، در سه حالت زیر این نامعادله را حل می کنیم:

$$\begin{cases} x < 2: 4 + x - 2 + x - 4 > 0 \Rightarrow 2x > 2 \Rightarrow x > 1 \xrightarrow{x < 2} 1 < x < 2 \\ 2 \leq x \leq 4: 4 - x + 2 + x - 4 > 0 \Rightarrow 2 > 0 \Rightarrow \text{بدیهی است.} \xrightarrow{2 \leq x \leq 4} 2 \leq x \leq 4 \xrightarrow{\text{اجتماع}} 1 < x < 5 \\ x > 4: 4 - x + 2 - x + 4 > 0 \Rightarrow 2x < 10 \Rightarrow x < 5 \xrightarrow{x > 4} 4 < x < 5 \end{cases}$$

پس دامنه تابع، بازه $(1, 5)$ است و در نتیجه $\alpha\beta = 5$ می باشد.

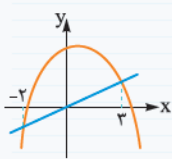
روش دوم: نامعادله $4 - |x-2| - |x-4| > 0$ را به صورت $|x-2| + |x-4| < 4$ نوشته و با رسم نمودارهای

و $y = 4$ از روش هندسی مجموعه جواب را به دست می آوریم:



$$\begin{cases} x > 4: y = 2x - 6, y = 4 \xrightarrow{\text{تلاقی}} 2x - 6 = 4 \Rightarrow x_B = 5 \\ x < 2: y = -2x + 6, y = 4 \xrightarrow{\text{تلاقی}} -2x + 6 = 4 \Rightarrow x_A = 1 \end{cases} \Rightarrow (\alpha, \beta) = (1, 5) \Rightarrow \alpha\beta = 5$$

بنابراین گزینه (۳) صحیح است.



❓ شکل رویه‌رو نمودار تابع $y = f(x)$ و نیمساز ناحیه اول و سوم است. دامنه تابع $y = \sqrt{\frac{-x^2 + x + 12}{x - f(x)}}$ کدام است؟

$$[-3, -2) \cup (3, 4] \quad (2)$$

$$(-\infty, -3] \cup [4, +\infty) \quad (1)$$

$$(3, +\infty) \quad (4)$$

$$(-2, 3) \quad (3)$$

✔️ **گزینه ۲** باید دو شرط $\frac{-x^2 + x + 12}{x - f(x)} \geq 0$ و $x - f(x) \neq 0$ برقرار باشد. ابتدا ریشه‌های صورت و مخرج کسر را مشخص می‌کنیم:

$$-x^2 + x + 12 = 0 \Rightarrow -(x^2 - x - 12) = 0 \Rightarrow -(x+3)(x-4) = 0 \Rightarrow x = -3, 4$$

$$x - f(x) = 0 \Rightarrow x = f(x) \Rightarrow x = -2, 3$$

x	-3	-2	-3	4
$-x^2 + x + 12$	-	+	+	-
$x - f(x)$	+	+	-	+
P	-	+	-	-

با توجه به شکل، در بازه $(-2, 3)$ نمودار $y = f(x)$ بالاتر از خط $y = x$ و در بیرون این بازه، نمودار خط $y = x$ بالاتر یا روی نمودار $y = f(x)$ است. پس علامت عبارت $x - f(x)$ در بازه $(-2, 3)$ منفی و در بیرون این بازه نامنفی است.

حال جدول تعیین علامت را برای عبارت $P = \frac{-x^2 + x + 12}{x - f(x)}$ رسم می‌کنیم:

با توجه به جدول تعیین علامت، دامنه تابع به صورت $[-3, -2) \cup (3, 4]$ می‌شود. بنابراین گزینه (۲) صحیح است.

تساوی دو تابع

دو تابع زمانی با هم برابرند که نمودارهای آن‌ها بر هم منطبق باشند و هیچ نقطه‌ای پیدا نشود که روی یکی از نمودارها باشد، اما روی دیگری نباشد. دو تابع f و g با هم مساوی‌اند، هرگاه دو شرط زیر برقرار باشد:

❶ دامنه آن‌ها با هم مساوی باشند، یعنی $D_f = D_g$.

❷ به ازای هر x از دامنه آن‌ها $f(x) = g(x)$ باشد. (ضابطه‌ها برابر باشند).

اگر دو تابع به صورت مجموعه زوج‌های مرتب داده شده باشند، هنگامی با هم برابرند که به عنوان دو مجموعه با هم برابر باشند.

❶ آیا دو تابع $f(x) = \sqrt{x} \sqrt{x-2}$ و $g(x) = \sqrt{x^2 - 2x}$ با هم برابرند؟

❷ دامنه دو تابع با هم برابر نیستند، زیرا در تابع f هر یک از عبارت‌های x و $x-2$ همواره باید نامنفی باشند، در صورتی‌که در تابع g باید ضربشان یعنی $x(x-2)$ نامنفی باشد:

$$f(x) = \sqrt{x} \sqrt{x-2} : \begin{cases} x \geq 0 \\ x-2 \geq 0 \Rightarrow x \geq 2 \end{cases} \xrightarrow{\text{اشتراک}} D_f = [2, +\infty)$$

$$g(x) = \sqrt{x^2 - 2x} : x^2 - 2x \geq 0 \Rightarrow x(x-2) \geq 0 \Rightarrow D_g = (-\infty, 0] \cup [2, +\infty)$$

پس $D_f \neq D_g$ و در نتیجه دو تابع برابر نیستند.

❸ دو تابع f و g مفروض‌اند. در کدام گزینه دو تابع مساوی‌اند؟

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2}}{|x|}, \quad g(x) = 1(2)$$

$$f(x) = \sqrt{1 - \sin^2 x}, \quad g(x) = \cos x \quad (1)$$

$$f(x) = \frac{x}{|x|}, \quad g(x) = \frac{|x|}{x} \quad (4)$$

$$f(x) = (\sqrt{x})^2, \quad g(x) = x \quad (3)$$

✔️ **گزینه ۴** هر یک از گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

$$1) f(x) = \sqrt{1 - \sin^2 x} = \sqrt{\cos^2 x} = |\cos x| \Rightarrow f(x) \neq g(x)$$

$$2) f(x) = \frac{\sqrt{x^2}}{|x|} = \frac{|x|}{|x|} = 1 \Rightarrow D_f = \mathbb{R} - \{0\}; \quad g(x) = 1 \Rightarrow D_g = \mathbb{R} \Rightarrow D_f \neq D_g$$

$$3) f(x) = (\sqrt{x})^2 = x \Rightarrow D_f = [0, +\infty); \quad g(x) = x \Rightarrow D_g = \mathbb{R} \Rightarrow D_f \neq D_g$$

$$4) f(x) = \frac{x}{|x|} \Rightarrow D_f = \mathbb{R} - \{0\}; \quad g(x) = \frac{|x|}{x} \Rightarrow D_g = \mathbb{R} - \{0\}; \quad f(x) = g(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases} \Rightarrow \text{دو تابع مساوی‌اند.}$$

بنابراین گزینه (۴) صحیح است.

❓ اگر دو تابع $f(x) = x^2 - 2x + 4$ و $g(x) = x^2 - 2x + 4$ برابر باشند، حاصل $a+k$ کدام است؟

(۱) ۱۰ (۲) ۸ (۳) ۶ (۴) ۴

🔍 گزینه ۱) به ازای $x \neq a$ ضابطه دو تابع برابرند، بنابراین:

$$f(x) = g(x) \Rightarrow \frac{x^2 + 8}{x - a} = x^2 - 2x + 4 \Rightarrow \frac{(x+2)(x^2 - 2x + 4)}{x - a} = x^2 - 2x + 4 \Rightarrow a = -2$$

از این که $a = -2$ است، نتیجه می گیریم $f(a) = f(-2) = k$ و چون دو تابع به ازای هر x برابرند، داریم:

$$g(x) = x^2 - 2x + 4 \Rightarrow g(-2) = 12 \xrightarrow{f(-2)=g(-2)} k = 12 \Rightarrow a+k = -2+12 = 10$$

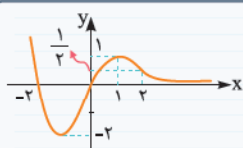
بنابراین گزینه (۱) صحیح است.

روش های به دست آوردن برد توابع

در این قسمت، برای پیدا کردن برد توابع به روش هایی اشاره می کنیم که برای بعضی توابع خاص کارایی دارند. برای تعیین برد یک تابع، ابتدا باید مشخص کنیم کدام یک از روش های زیر برای آن مناسب تر می باشد. بدیهی است روشی که برای یک تابع استفاده می کنیم، ممکن است برای یک تابع دیگر مفید نباشد. (کلی ترین روش برای محاسبه برد، استفاده از مشتق می باشد که در فصل کاربرد مشتق مطالعه خواهید کرد).

۱ تعیین برد با استفاده از رسم نمودار تابع:

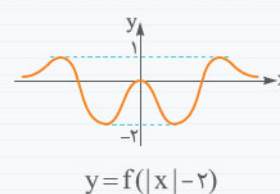
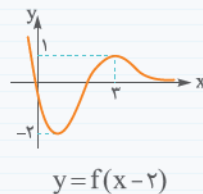
اگر رسم نمودار یک تابع ساده باشد، برای تعیین برد، نمودار تابع را در یک دستگاه مختصات رسم می کنیم. تصویر نمودار بر روی محور y ها محدوده برد تابع را مشخص می کند.



❓ اگر نمودار $y = f(x)$ به صورت روبه رو باشد، برد تابع $y = f(|x| - 2)$ کدام است؟

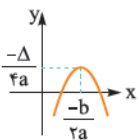
- (۱) $[0, 2]$ (۲) $[0, 1]$ (۳) $[-2, 1]$ (۴) $(0, \frac{1}{2})$

🔍 گزینه ۳) ابتدا نمودار $y = f(x - 2)$ و سپس $y = f(|x| - 2)$ را رسم می کنیم:

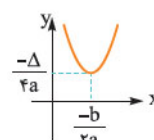


با توجه به شکل به دست آمده، برد تابع، بازه $[-2, 1]$ می باشد. بنابراین گزینه (۳) صحیح است.

تذکر در تابع درجه دوم به شکل کلی $y = ax^2 + bx + c$ ، با توجه به نمودار آن، دو حالت وجود دارد:



۲ اگر $a < 0$ باشد، برد تابع به صورت بازه $(-\infty, -\frac{\Delta}{4a}]$ می باشد.



۱ اگر $a > 0$ باشد، برد تابع به صورت بازه $[-\frac{\Delta}{4a}, +\infty)$ می باشد.

❓ برد تابع $y = \sqrt{-x^2 + 4x + 11}$ شامل چند عدد صحیح است؟

- (۱) ۲ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴) بی شمار

🔍 گزینه ۲) در تابع $f(x) = -x^2 + 4x + 11$ ، چون ضریب x^2 منفی است، پس برد آن به صورت بازه $(-\infty, \frac{\Delta}{4a}]$ می باشد:

$$\frac{-\Delta}{4a} = \frac{-(16 + 44)}{4(-1)} = \frac{-60}{-4} = 15 \Rightarrow -x^2 + 4x + 11 \leq 15$$

$$0 \leq \sqrt{-x^2 + 4x + 11} \leq \sqrt{15} \Rightarrow R_y = [0, \sqrt{15}]$$

چون عبارت زیر رادیکال نمی تواند منفی باشد، داریم:

پس برد تابع، شامل ۴ عدد صحیح $\{0, 1, 2, 3\}$ می باشد. بنابراین گزینه (۲) صحیح است.

۲ تعیین برد با استفاده از نامساوی های مهم:

در محاسبه برد بعضی از توابع، می توان از نامساوی های زیر استفاده کرد: ($n \in \mathbb{N}$)

$$x^{2n} \geq 0, \sqrt[n]{x} \geq 0, |x| \geq 0, -1 \leq \sin^{(2n-1)} x \leq 1, -1 \leq \cos^{(2n-1)} x \leq 1, 0 \leq \frac{|x|}{|x|+1} < 1, 0 \leq \frac{x^2}{x^2+1} < 1$$

$$a > 0 \Rightarrow a + \frac{1}{a} \geq 2, a < 0 \Rightarrow a + \frac{1}{a} \leq -2, a, b \geq 0 \Rightarrow \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}, a, b \leq 0 \Rightarrow \frac{a+b}{2} \leq -\sqrt{ab}$$

تذکر ۱ در نامساوی های $a + \frac{1}{a} \geq 2$ و $(a > 0)a + \frac{1}{a} \geq 2$ و $(a < 0)a + \frac{1}{a} \leq -2$ ، حالت تساوی زمانی رخ می دهد که به ترتیب $a = 1$ و $a = -1$ باشد.

۲ در نامساوی های $a + b \geq 2\sqrt{ab}$ و $(a, b \geq 0)a + b \geq 2\sqrt{ab}$ و $(a, b \leq 0)a + b \leq -2\sqrt{ab}$ ، حالت تساوی زمانی رخ می دهد که $a = b$ باشد.

؟ برد تابع $f(x) = x^6 - 5x^3 + \frac{1}{x}$ کدام است؟

$$\mathbb{R} \quad (4) \quad [-5, +\infty) \quad (3) \quad [-6, +\infty) \quad (2) \quad \left[-\frac{1}{4}, +\infty\right) \quad (1)$$

$$x^6 - 5x^3 + \frac{1}{x} = \left(x^3 - \frac{5}{x}\right)^2 - \frac{25}{x} + \frac{1}{x} = \left(x^3 - \frac{5}{x}\right)^2 - 6$$

✓ **گزینه ۲** تابع $f(x) = x^6 - 5x^3 + \frac{1}{x}$ را به صورت مربع کامل می نویسیم:

می دانیم $\left(x^3 - \frac{5}{x}\right)^2 \geq 0$ است. بنابراین $\left(x^3 - \frac{5}{x}\right)^2 - 6 \geq -6$ و از آن جا برد تابع به صورت بازه $[-6, +\infty)$ می شود. (در نامساوی $\left(x^3 - \frac{5}{x}\right)^2 \geq 0$ ، حالت

تساوی زمانی رخ می دهد که $x = \sqrt[3]{\frac{5}{x}}$ باشد.) بنابراین گزینه (۲) صحیح است.

؟ برد تابع $y = x + 5 + \frac{1}{x+3}$ کدام است؟

$$\mathbb{R} - (-2, 2) \quad (4) \quad [-2, 2] \quad (3) \quad \mathbb{R} - (0, 4) \quad (2) \quad [0, 4] \quad (1)$$

✓ **گزینه ۲** سعی می کنیم عبارت را به صورت $a + \frac{1}{a}$ بنویسیم:

$$y = x + 5 + \frac{1}{x+3} = x + 3 + 2 + \frac{1}{x+3} \Rightarrow y = (x+3) + \frac{1}{(x+3)} + 2$$

می دانیم همواره $a + \frac{1}{a} \geq 2$ یا $a + \frac{1}{a} \leq -2$ است. اگر فرض کنیم $a = x+3$ ، آن گاه داریم:

$$\begin{cases} (x+3) + \frac{1}{(x+3)} \geq 2 \Rightarrow (x+3) + \frac{1}{(x+3)} + 2 \geq 4 \Rightarrow y \geq 4 \\ \text{یا} \\ (x+3) + \frac{1}{(x+3)} \leq -2 \Rightarrow (x+3) + \frac{1}{(x+3)} + 2 \leq 0 \Rightarrow y \leq 0 \end{cases} \Rightarrow R_y = (-\infty, 0] \cup [4, +\infty) \Rightarrow R_y = \mathbb{R} - (0, 4)$$

(در نامساوی های $x + 3 + \frac{1}{x+3} \geq 2$ و $x + 3 + \frac{1}{x+3} \leq -2$ ، حالت تساوی زمانی رخ می دهد که به ترتیب $x = -2$ و $x = -4$ باشد.) بنابراین گزینه (۲) صحیح است.

۳ تعیین برد با به دست آوردن x بر مبنای y :

در تابع $y = f(x)$ ، x را بر حسب y می نویسیم. سپس با توجه به مقادیر قابل قبول برای y ، محدوده y و در نتیجه برد تابع را به دست می آوریم. از این روش بیشتر در توابع کسری استفاده می شود.

؟ برد تابع $y = \frac{x^2 - x - 1}{x^2 - x + 1}$ شامل چند عدد صحیح است؟

$$4 \quad (4) \quad 3 \quad (3) \quad 2 \quad (2) \quad 5 \quad (1)$$

✓ **گزینه ۲** طرفین وسطین کرده و معادله را بر حسب توان های نزولی x می نویسیم:

$$y = \frac{x^2 - x - 1}{x^2 - x + 1} \Rightarrow x^2 y - xy + y = x^2 - x - 1 \Rightarrow (y-1)x^2 + (-y+1)x + y+1 = 0$$

با شرط $y \neq 1$ ، یک عبارت درجه دوم داریم که باید دلتای معادله، مثبت یا صفر باشد. بنابراین:

$$\Delta \geq 0 \Rightarrow (-y+1)^2 - 4(y-1)(y+1) \geq 0 \Rightarrow (y-1)(y-1-4y-4) \geq 0 \Rightarrow (y-1)(-3y-5) \geq 0 \Rightarrow -\frac{5}{3} \leq y \leq 1$$

به ازای $y = 1$ ، معادله درجه دوم بالا به معادله درجه اول تبدیل می شود. پس باید شرط $y = 1$ را بررسی کرد:

$$\frac{x^2 - x - 1}{x^2 - x + 1} = 1 \Rightarrow x^2 - x - 1 = x^2 - x + 1 \Rightarrow -1 = 1$$

تناقض $-1 = 1$ پس $y = 1$ در برد تابع قرار ندارد. بنابراین $R_y = [-\frac{5}{3}, 1)$ که شامل دو عدد صحیح می باشد. بنابراین گزینه (۲) صحیح است.

چون در بسیاری از مسائل به تعیین علامت یک عبارت نیاز پیدا می‌کنیم در این قسمت روش تعیین علامت را یادآوری می‌کنیم:

تعیین علامت

برای این‌که معلوم کنیم علامت یک عبارت جبری، مثبت، منفی، صفر یا تعریف نشده است، از جدول تعیین علامت کمک می‌گیریم.

تعیین علامت چندجمله‌ای درجه اول: چندجمله‌ای درجه اول $P(x) = ax + b$ ($a \neq 0$) به ازای $x = -\frac{b}{a}$ ، صفر می‌شود و جدول تعیین علامت آن به صورت روبه‌رو است:

x	$-\frac{b}{a}$
$P(x)$	موافق علامت a • مخالف علامت a

تعیین علامت چندجمله‌ای درجه دوم: جدول تعیین علامت چندجمله‌ای درجه دوم $P(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$)، بستگی به علامت Δ ، به یکی از سه حالت زیر می‌باشد:

۱ اگر $\Delta > 0$ باشد، چندجمله‌ای دو ریشه ساده $x_1, x_2 = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$ دارد. با فرض $x_1 > x_2$ ، جدول تعیین علامت آن به صورت زیر است:

x	x_1	x_2
P(x)	موافق علامت a • مخالف علامت a • موافق علامت a	

۲ اگر $\Delta = 0$ باشد، چندجمله‌ای یک ریشه مضاعف $x_0 = -\frac{b}{2a}$ دارد که جدول تعیین علامت آن به صورت زیر است:

x	$-\frac{b}{2a}$
$P(x)$	موافق علامت a • موافق علامت a

۳ اگر $\Delta < 0$ باشد، چندجمله‌ای ریشه ندارد و جدول تعیین علامت آن به صورت مقابل است:

x	
$P(x)$	موافق علامت a

تعیین علامت عبارات به شکل کلی: اگر $f(x)$ و $g(x)$ چندجمله‌ای باشند، برای تعیین علامت عبارت $\frac{f(x)}{g(x)}$ به صورت زیر عمل می‌کنیم:

۱ ریشه‌های f و g را پیدا کرده و از کوچک به بزرگ در یک جدول قرار می‌دهیم.

۲ از سمت راست، علامت اولین قسمت جدول را تعیین می‌کنیم. این علامت را می‌توان با امتحان یک عدد بزرگ‌تر از بزرگ‌ترین ریشه، تعیین کرد.

۳ در جدول از سمت راست، علامت‌ها را یک در میان عوض می‌کنیم، فقط توجه داشته باشید که علامت در ریشه‌های مکرر مرتبه زوج به شکل $(x-a)^{2n} = 0$ ($n \in \mathbb{N}$) تغییر نمی‌کند.

• عبارت $P(x) = \frac{(x+2)(x-1)^2(3-x)^{15}}{(x-2)^5(x+3)}$ را تعیین علامت کنید.

□ ابتدا ریشه‌ها را در جدول وارد می‌کنیم. برای تعیین علامت در بازه $(3, +\infty)$ علامت $p(4)$ را معلوم می‌کنیم. بنابراین داریم:

x	-3	-2	1	2	3
$P(x)$	-	+	-	+	-

ملاحظه می‌شود که در این عبارت $x=1$ ریشه مضاعف (مکرر مرتبه زوج) می‌باشد و به همین خاطر است که در اطراف آن، عبارت $P(x)$ تغییر علامت نمی‌دهد.

پرسش‌های چهارگزینه‌ای

فصل ۱

مفاهیم مقدماتی تابع

کتاب درسی

۱ برای تابع $f: [0, \frac{1}{3}] \rightarrow [0, +\infty)$ کدام یک از نمایش‌های زیر نیز قابل قبول است؟
 $f(x) = x^2$

- الف) $\begin{cases} f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ f(x) = x^2 \end{cases}$ ب) $\begin{cases} f: [0, \frac{1}{3}] \rightarrow [0, \frac{1}{9}] \\ f(x) = x^2 \end{cases}$ پ) $\begin{cases} f: \mathbb{R} \rightarrow [0, \frac{1}{9}] \\ f(x) = x^2 \end{cases}$ ت) $\begin{cases} f: [0, \frac{1}{3}] \rightarrow \mathbb{R} \\ f(x) = x^2 \end{cases}$
- ۱ (ب) و (ت) ۲ (الف) و (پ) ۳ (الف) و (ت) ۴ (ب) و (پ)

در کدام تابع، مجموعه‌های هم‌دامنه و برد برابرند؟

- ۱ $\begin{cases} f: (0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty) \\ f(x) = |x+1| \end{cases}$ ۲ $\begin{cases} f: (0, +\infty) \rightarrow [-1, +\infty) \\ f(x) = |x+1| \end{cases}$ ۳ $\begin{cases} f: (0, +\infty) \rightarrow (-1, +\infty) \\ f(x) = |x-1| \end{cases}$ ۴ $\begin{cases} f: (0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty) \\ f(x) = |x-1| \end{cases}$

۳ اگر $f: A \rightarrow [0, 3]$ ، آنگاه مجموعه A کدام گزینه می‌تواند باشد؟
 $f(x) = 2x - 1$

- ۱ $\{0, 2\}$ ۲ $\{1, 3\}$ ۳ $[0, 1]$ ۴ $[1, 2]$

۴ ماشین f به عنوان ورودی اعداد حقیقی را قبول می‌کند و پس از دریافت، خودش را با قدرمطلقش جمع می‌کند. نمودار این تابع کدام است؟



۵ اگر $f = \{(2, -1), (a, 4), (2, a^2 - 2a), (1, 2b)\}$ تابع باشد، مقدار $a+b$ کدام است؟

- ۱ ۲ ۲ ۳ ۳ ۴ ۴ ۵

تجربی نوبت دوم ۱۴۰۳

۶ رابطه $f = \{(7, 1-3n^2), (1, -1), (2, n), (7, -2n), (\frac{1}{n}, 2)\}$ تابع است. مقدار تابع f در ۲، کدام است؟

- ۱ $-\frac{1}{3}$ ۲ $\frac{1}{3}$ ۳ -۱ ۴ ۱

۷ رابطه $R = \{(1, -a^2 + a - 1), (2, b), (1, b^2)\}$ به ازای چند مقدار b ، تابع می‌باشد؟

- ۱ صفر ۲ ۱ ۳ ۲ ۴ ۳

۸ اگر $A = \{1, 2, 3\}$ و $B = \{a, b, c\}$ ، آنگاه کدام یک از روابط زیر، تابعی از A به B را نشان می‌دهد؟

$R_1 = \{(1, b), (2, a)\}$; $R_2 = \{(1, a), (2, c), (1, b)\}$; $R_3 = \{(1, a), (2, a), (3, c)\}$; $R_4 = \{(1, a), (2, a), (3, b)\}$

- ۱ R_2, R_1 ۲ R_4, R_3 ۳ R_4, R_1 ۴ R_3, R_2

۹ اگر f به صورت $f = \{(2, 5), (5, a^2 + a + 2), (c, b^2), (5, 4b - 3), (2, c)\}$ معرف یک تابع باشد، b چند مقدار می‌تواند داشته باشد؟

- ۱ صفر ۲ ۱ ۳ ۲ ۴ ۳

کتاب درسی

۱۰ اگر $A = \{a, b, c\}$ و $B = \{d, e\}$ باشد، آنگاه چند تابع از A به B وجود دارد؟

- ۱ ۶ ۲ ۸ ۳ ۹ ۴ ۵

۱۱ اگر $A = \{a, b, c, d\}$ و $B = \{1, 2, 3\}$ باشد، با فرض $f(a) = 2$ ، چند تابع از A به B وجود دارد؟

- ۱ ۱۲ ۲ ۱۶ ۳ ۲۷ ۴ ۵۴

۱۲ اگر $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ و $B = \{a, b, c\}$ باشد، با فرض $f(1) \neq b$ و $f(2) \neq a$ ، چند تابع از A به B وجود دارد؟

- ۱ ۵۴ ۲ ۱۰۸ ۳ ۳۶۰ ۴ ۷۲۹

کتاب درسی

۱۳ چه تعداد از عبارات زیر درست هستند؟

- الف) اگر دامنه و برد دو تابع با یکدیگر برابر باشند، دو تابع برابرند.
 ب) برد و هم‌دامنه تابع می‌توانند یکی باشند.
 پ) هم‌دامنه تابع زیرمجموعه‌ای از برد آن است.
 ت) بی‌شمار تابع وجود دارد که دامنه آن‌ها بازه $[0, 3]$ است.

- ۱ ۱ ۲ ۲ ۳ ۳ ۴ ۴

تجربی داخل ۱۴۰۲

 ۱۴ حداقل چند عضو از مجموعه $f = \{(x, y) | x, y \in \mathbb{Z}, x = \frac{y^2}{y^2 - 1}\}$ حذف شود تا f یک تابع باشد؟

- ۲ ۱ ۳ ۲ ۴ ۳ ۵ ۴

تجربی خارج ۱۴۰۲

 ۱۵ حداقل چند عضو از مجموعه $f = \{(x, y) | x, y \in \mathbb{Z}, x = \frac{y^2}{1 + |y|}\}$ حذف شود تا f یک تابع باشد؟

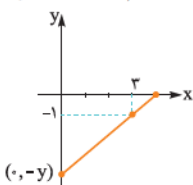
- ۷ ۱ ۶ ۲ ۵ ۳ ۴ ۴

 ۱۶ اگر $f: [1, 5] \rightarrow B$ باشد، آن گاه B کدام گزینه زیر می تواند باشد؟
 $f(x) = -x^2 + 4x - 3$

- ۱ $[-8, 0]$ ۲ $(-\infty, 0]$ ۳ $[-6, 3]$ ۴ $[-9, 1]$

 ۱۷ کدام گزینه تابعی است که مساحت مثلث متساوی الاضلاع (S) را برحسب طول میانه آن (m) نمایش می دهد؟

- ۱ $S = \frac{m^2}{2}$ ۲ $S = \frac{\sqrt{3}}{2} m^2$ ۳ $S = \frac{\sqrt{3}}{4} m^2$ ۴ $S = \frac{\sqrt{3}}{3} m^2$

 ۱۸ مطابق شکل، خطی که از نقطه $(3, -1)$ می گذرد با محورهای مختصات، مثلث قائم الزاویه می سازد. تابع مساحت این مثلث برحسب y کدام است؟ ($y > 1$)


$$S(y) = \frac{2y-2}{3y^2} \quad 1$$

$$S(y) = \frac{3y^2}{2y-2} \quad 2$$

$$S(y) = \frac{3y^2}{y-1} \quad 3$$

$$S(y) = \frac{y-1}{3y^2} \quad 4$$

 ۱۹ اگر S و V به ترتیب مساحت و حجم یک کره باشند، ضابطه تابعی که V را برحسب S بیان کند، کدام است؟

- ۱ $V = \frac{6}{\sqrt{\pi}} S \sqrt{S}$ ۲ $V = \frac{\sqrt{\pi}}{6} S \sqrt{S}$ ۳ $V = \frac{1}{6\sqrt{\pi}} S \sqrt{S}$ ۴ $V = S \sqrt{\frac{S}{\pi}}$

 ۲۰ در درون کره ای به شعاع ۱۰ واحد مخروطی به ارتفاع h محاط کرده ایم. تابع حجم مخروط برحسب h کدام است؟

- ۱ $V(h) = \frac{\pi}{3} (10^2 h^2 - h^3)$ ۲ $V(h) = \frac{\pi}{3} (h^3 - 10^2 h^2)$ ۳ $V(h) = \pi (18h^2 - h^3)$ ۴ $V(h) = \pi (h^3 - 18h^2)$

 ۲۱ اگر در دو تابع $f = \{(2, a), (-1, 1-b), (2, -2)\}$ و $g = \{(c, a^2+1), (2b, 2), (3, 5)\}$ تعداد اعضای دامنه برابر اما تعداد اعضای برد متفاوت باشد، حاصل $a+b+c$ کدام است؟

- ۵ ۱ ۶ ۲ ۳ ۳ ۴ ۴

معادلات و توابع

کتاب درسی

 ۲۲ کدام یک از معادلات زیر، y را به صورت تابعی از x مشخص می کند؟

- ۱ $x - y^2 = 4$ ۲ $x = |y| + 1$ ۳ $-x^2 + y = 4$ ۴ $x^2 = y^2$

 ۲۳ در کدام یک از روابط زیر، y تابعی از x می باشد؟

- ۱ $y^2 + 3y^2 + 3y + x^2 + x = 0$ ۲ $y^2 + 2y = x - 1$

۲۴ کدام یک از روابط زیر، معرف یک تابع می باشد؟

- ۱ $\{(x, y) | x, y \in \mathbb{N}, x^2 + y^2 = 5\}$ ۲ $\{(x, y) | x, y \in \mathbb{Z}, |x| + |y| = 2\}$

- ۳ $\{(x, y) | x, y \in \mathbb{Z}, x + y^2 = 5\}$ ۴ $\{(x, y) | x, y \in \mathbb{N}, x - |y - 3| = 0\}$

۲۵ کدام معادله، بیانگر یک تابع است؟

- ۱ $|y| = x + y$ ۲ $|y| = x + 2y$ ۳ $|y| = x - y$ ۴ $|y| = x + \frac{y}{2}$

 ۲۶ کدام یک از معادلات زیر، y را به صورت تابعی از x مشخص نمی کند؟

- ۱ $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} = -2$ ۲ $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 0$ ۳ $xy = 2x$ ۴ $y^2 + x^2 = 2x + 1$

 ۲۷ اگر $2x^2 + y^2 - 4x + 6y + k = 0$ یک تابع ناتهی باشد، مقدار k کدام است؟

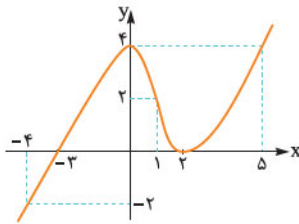
- ۷ ۱ ۹ ۲ ۱۱ ۳ ۱۳ ۴

۲۸ کدام رابطه، یک تابع است؟

- ۱ $y^2 - 2y^2 + x = 0$ ۲ $y + y^2 = x^2 + 1$ ۳ $|y - 1| + x = 0$ ۴ $xy^2 - x = 1$

محاسبه $f(a)$ و $f(x)$

- ۲۹ اگر $f(x) = \sqrt{x+2}|x|$ ، مقدار $f(f(-144))$ کدام است؟
 ۱ تعریف نشده ۲ ۶ ۳ ۸ ۴ ۱۲
- ۳۰ اگر $f(x^2+x) = 2x^2-1$ باشد، حاصل $f(2) + f(10)$ کدام است؟
 ۱ ۲۰۶ ۲ ۱۵۲ ۳ ۸ ۴ ۶
- ۳۱ اگر $f(x) = 6f(x-2) + f(x-1)$ ، $f(1) = 1$ و $f(2) = 2$ باشد، آنگاه $f(4)$ کدام است؟
 ۱ ۱۰ ۲ ۲۰ ۳ ۸ ۴ ۱۶
- ۳۲ اگر $f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x$ و $g(x) = x^3 + 9x^2 + 27x$ باشند، آنگاه حاصل $\frac{g(\sqrt[3]{7}-3)}{f(\sqrt[3]{2}+2)}$ کدام است؟
 ۱ -۲ ۲ ۲ ۳ ۳ -۳
- ۳۳ اگر $f(x) = |x|$ و $g(x) = x^2 + 2x + 1$ باشند، حاصل $f(g(1-\sqrt{2})) - g(f(1-\sqrt{2}))$ کدام است؟
 ۱ $4(1-\sqrt{2})$ ۲ $4(\sqrt{2}-1)$ ۳ $4\sqrt{2}$ ۴ ۴
- ۳۴ در تابع f با ضابطه $f(x) = x^2(2-x)^2$ ، حاصل $f(1+x) - f(1-x)$ کدام است؟
 ۱ صفر ۲ $4x$ ۳ $2x^2$ ۴ $4x^2$
- ۳۵ اگر داشته باشیم $f(x) = 4 - 5x$ ، مقدار $f(-1)$ کدام است؟
 ۱ -۲ ۲ ۲ ۳ ۳ -۳
- ۳۶ اگر $f(x) = 2 - |x-2|$ باشد، ضابطه $f(f(x))$ برابر کدام است؟
 ۱ x ۲ $4-x$ ۳ $f(x)$ ۴ $2-f(x)$
- ۳۷ اگر $f(x-3) = x^2 - 4x + 5$ باشد، آنگاه $f(1-x)$ کدام است؟
 ۱ $x^2 + 1$ ۲ $x^2 + 3$ ۳ $x^2 + 4x + 5$ ۴ $x^2 - 4x + 5$
- ۳۸ اگر $f(x) = \frac{|x|}{|x|+1}$ باشد و داشته باشیم $f(x) = xf(\frac{1}{x})$ ، در این صورت محدوده x کدام است؟
 ۱ $x > 0$ ۲ $x < 0$ ۳ $|x| < 1$ ۴ $|x| > 1$
- ۳۹ اگر $f(x) = x + \sqrt{x}$ و $g = \{(1,2), (5,4), (6,5), (2,3)\}$ باشد و بدانیم $g(f(a)) = 5$ ، آنگاه عدد a کدام است؟
 ۱ ۱ ۲ ۲ ۳ ۳ ۴ ۴
- ۴۰ اگر $f(x) + xf(-x) = x^2 + 1$ ، آنگاه $f(2)$ کدام است؟
 ۱ -۱ ۲ -۲ ۳ ۳ ۴ ۴
- ۴۱ اگر $\frac{f(x)}{\cos x} + \frac{f(-x)}{\sin x} = 2$ ، آنگاه $f(45^\circ)$ کدام است؟
 ۱ $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ۲ $\sqrt{2}$ ۳ صفر ۴ $-\sqrt{2}$
- ۴۲ اگر داشته باشیم $f(\frac{x^2+2}{x}) = x^2 + \frac{4}{x^2}$ ، آنگاه مقدار $f(4)$ کدام است؟
 ۱ ۶ ۲ ۸ ۳ ۱۰ ۴ ۱۲
- ۴۳ اگر $f(\frac{x}{x^2+1}) = 4 + (x - \frac{1}{x})^2$ باشد، حاصل $f(\frac{1}{5}) - f(\frac{1}{3})$ کدام است؟
 ۱ $\frac{1}{10}$ ۲ ۱۲ ۳ ۱۶ ۴ $\frac{1}{6}$
- ۴۴ اگر $f(1+\tan^2 x) = \frac{\cos^2 x - 3}{1-2\cos^2 x}$ باشد، حاصل $f(3)$ کدام است؟
 ۱ ۱۲ ۲ -۱۲ ۳ -۸ ۴ ۸
- ۴۵ اگر $f(\tan x) = \frac{3\sin x - \cos x}{2\sin x - 3\cos x}$ باشد، آنگاه حاصل $f(2)$ کدام است؟
 ۱ ۵ ۲ ۶ ۳ ۳ ۴ ۴
- ۴۶ اگر $2f(x) - f(\frac{1}{x}) = 3x$ و $3g(x) + 4g(-x) = 2x + 1$ باشند، حاصل عبارت $(f+g)(-7)$ کدام است؟
 ۱ صفر ۲ ۱ ۳ -۱ ۴ $\frac{1}{2}$



۴۷ اگر نمودار $y = f(x-3)$ به صورت روبه‌رو باشد، مقدار عددی $f(-\frac{1}{3}f(2))$ کدام است؟

۴ ۱

۲ ۲

-۲ ۳

صفر ۴

توابع دوضابطه‌ای

۴۸ در تابع باضابطه $f(x) = \begin{cases} x - \sqrt{x+4} & ; x > 3 \\ 2x+3 & ; x \leq 3 \end{cases}$ مقدار $f(f(5)) + f(f(1))$ کدام است؟

۹ ۴

۸ ۳

۷ ۲

۶ ۱

۴۹ تعداد صفرهای تابع دوضابطه‌ای $f(x) = \begin{cases} x^3 - 3a^2 & ; x \geq a \\ 1 - 3x & ; x \leq a \end{cases}$ کدام است؟

صفر ۴

۳ ۳

۲ ۲

۱ ۱

۵۰ اگر $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2+3}+2a & ; |x| \leq 1 \\ ax^2+5 & ; |x| \geq 1 \end{cases}$ ضابطه تابع f باشد، مقدار $f(a)$ کدام است؟

۱۴ ۴

۲۵ ۳

۳۲ ۲

۴۶ ۱

۵۱ کدام یک از معادلات زیر y را به صورت تابعی از x مشخص می‌کند؟

$$y = \begin{cases} -x^2 + 2 & ; x < 1 \\ \frac{x}{2} & ; x > 0 \end{cases}$$

۲

$$y = \begin{cases} |x-1| & ; x \geq 0 \\ -x & ; x \leq 0 \end{cases}$$

۱

$$y = \begin{cases} x & ; x < 1 \\ -x+1 & ; x > 0 \end{cases}$$

۴

$$y = \begin{cases} x - |x| + 1 & ; x \geq 0 \\ |x| + 1 & ; x \leq 0 \end{cases}$$

۳

۵۲ اگر $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x & ; x > 0 \\ 1 & ; x \leq 0 \end{cases}$ باشد، مقدار $f(f(-f(x)))$ کدام است؟

$$(x^2+1)^2+2$$

۴

۳ ۳

$$x^2+2$$

۲ ۲

۱ ۱

۵۳ f تابعی است با دامنه اعداد حقیقی که $f(2) = 3$ و $f(-5) = -2$ می‌باشد. این تابع در بازه $[0, 2]$ ثابت و به هر عدد بزرگ‌تر از ۲ مربع آن رانسیب می‌دهد.

هم‌چنین برای اعداد منفی، خطی است و نمودار آن محور x ‌ها را در نقطه‌ای به طول ۳- قطع می‌کند. چه تعداد از مقادیر زیر صحیح است؟ کتاب درسی

$$f(-1) = 2 ; f(1) = 3 ; f(3) = 9 ; f(-3) = 0$$

۴ ۴

۳ ۳

۲ ۲

۱ ۱

۵۴ اگر برد تابع $f(x) = \begin{cases} |x-3|+2 & ; x \geq 2 \\ ax+\frac{1}{4} & ; x < 2 \end{cases}$ برابر $\mathbb{R}$ باشد، تمام مقادیر ممکن برای a کدام است؟

$$a \leq \frac{5}{4}$$

۴

$$a \geq \frac{5}{4}$$

۳

$$a \geq \frac{3}{4}$$

۲

$$a \leq \frac{3}{4}$$

۱

ریاضی نوبت دوم ۱۴۰۳

۵۵ ضابطه تابع قطعه‌ای f به صورت $f(x) = \begin{cases} x^2 - x - 7 & ; x \geq 1 \\ 2x - 1 & ; x < 1 \end{cases}$ است، برای چند مقدار a ، $f(1-|a|) = f(2+|a|)$ است؟

۱ ۴

۲ ۳

۳ ۲

۴ ۱

ریاضی خارج ۱۴۰۳

۵۶ ضابطه تابع قطعه‌ای f به صورت $f(x) = \begin{cases} 7-3x & ; |x| > 1 \\ -2x & ; |x| < 1 \end{cases}$ است. اگر $f(1+a^2) = f(\frac{-a^2}{1+a^2})$ باشد، اختلاف مقادیر a کدام است؟

صفر ۴

۱ ۳

۲ ۲

۳ ۱

۵۷ اگر $f(x) = \begin{cases} \sqrt{2x+1} & ; x \in \mathbb{Q} \\ x^6 + 3x^4 + 3x^2 & ; x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$ باشد، حاصل $f(f(x))$ به ازای $x = \sqrt[3]{5-1}$ کدام است؟

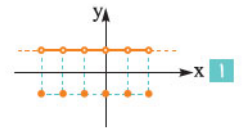
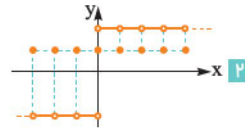
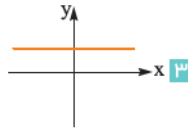
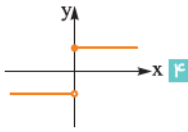
۱۷ ۴

۱۵ ۳

۹ ۲

۳ ۱

۵۸ اگر $f(x) = \begin{cases} -\sqrt{x} & ; x \geq 0 \\ -\frac{1}{x} & ; x < 0 \end{cases}$ و $g(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & ; x \in \mathbb{Z} \\ \frac{3}{x} & ; x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$ باشند، نمودار تابع $y = f(f(x)) + g(g(x))$ کدام است؟



۵۹ اگر $f(x) = \begin{cases} x & ; x \in \mathbb{Q} \\ 1 & ; x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$ باشد، آنگاه حاصل $f(\sqrt{1}) + f(\sqrt{2}) + f(\sqrt{3}) + \dots + f(\sqrt{100})$ کدام است؟

۴ ۲۰۰

۳ ۱۴۵

۲ ۱۳۵

۱ ۹۰

انواع تابع

کتاب درسی

۶۰ کدام یک از خطوط زیر، نمودار $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x+2} & ; x > 0 \\ \sqrt{x+2} & ; -2 \leq x \leq 0 \end{cases}$ را قطع نمی‌کند؟

$$y = \sqrt{5} - 1$$

$$y = 4 - \sqrt{5}$$

$$y = \sqrt{2} - 1$$

$$y = \sqrt{2} + 1$$

۶۱ چه تعداد از توابع زیر ثابت هستند؟

الف $f(x) = \tan x \cot x$

ب $g(x) = \sqrt{x - |x|}$

پ $s(x) = [-x] + x$

ت $t(x) = \frac{\sin x}{\sin x}$

۴ ۴

۳ ۳

۲ ۲

۱ ۱

تجربی داخل ۱۴۰۱

۶۲ دو تابع $f(x) = b - 2ax$ و $g(x) = c - (2b - 3)x$ ثابت هستند. اگر $f + g = 5$ باشد، حاصل bc چقدر است؟

۴ ۶

۳ ۴

۲ -۴

۱ -۶

تجربی خارج ۱۴۰۱

۶۳ اگر $f(x) = (ax + 2)(b - x) - 7x^2$ ضابطه یک تابع ثابت باشد، برد تابع f کدام است؟

۴ ۴/۷

۳ -۴/۷

۲ ۲/۷

۱ -۲/۷

۶۴ کدام تابع ثابت است؟

$$t(x) = \cos(\pi[x])$$

$$h(x) = [\sin^2 x]$$

$$g(x) = \sqrt{[x] - x}$$

$$f(x) = \left[\frac{1}{1+x^2} \right]$$

۴ ۴

۳ ۳

۲ ۲

۱ ۱

۶۵ اگر $f(x)$ یک تابع همانی باشد، آنگاه نقطه تلاقی نمودار دو تابع $y_1 = f(3x - 1)$ و $y_2 = f(2 - 2x)$ کدام است؟

۴ $(\frac{2}{5}, \frac{3}{5})$ ۳ $(\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$ ۲ $(\frac{3}{5}, \frac{2}{5})$ ۱ $(\frac{2}{5}, \frac{2}{5})$

۶۶ معادله $|x-1| - |x-2| = \sqrt{x+1}$ چند جواب دارد؟

۴ صفر

۳ ۳

۲ ۲

۱ ۱

محاسبه دامنه تابع

۶۷ اگر $f(x) = \frac{\frac{1}{x-1} - 1}{\frac{x}{x^2-1} + 1}$ باشد، آنگاه دامنه تابع f شامل چند عدد حقیقی نمی‌باشد؟

۴ ۴

۳ ۳

۲ ۲

۱ ۱

۶۸ اگر دامنه تابع $f(x) = \frac{\sqrt{2x+1}}{x^2 + (m+3)x + n}$ به صورت $\mathbb{R} - \{\frac{1}{p}\}$ باشد، مقدار mn کدام است؟

۴ -۱

۳ -۲

۲ ۲

۱ ۱

۶۹ به ازای چند مقدار صحیح m ، دامنه تابع $y = \frac{x^2 - 2}{\sqrt{2x^2 + (m+2)x + \sqrt{2}}}$ برابر $\mathbb{R}$ است؟

۴ ۴

۳ ۵

۲ ۶

۱ ۷

۷۰ دامنه تابع $y = \sqrt{3 - \sqrt{1 - 4x}}$ شامل چند عدد صحیح است؟

۳ ۱

۲ ۲

۴ ۳

۵ ۴

۷۱ دامنه تابع با ضابطه $y = \sqrt{-x^2(x^2 - 4)}$ چند عضو دارد؟

۱ ۲

۱ ۲

۳ ۳

بی شمار ۴

۷۲ دامنه تابع $f(x) = \sqrt{\frac{x-1}{x-3}} + \sqrt{\frac{2-x}{x}}$ کدام فاصله است؟

۱ $(0, 1]$

۲ $(0, 3)$

۳ $[1, 2]$

۴ $(2, 3)$

۷۳ اگر دامنه تابع $f(x) = \frac{x^2 - 1}{2x^2 + (\log_7 a)x + b}$ به صورت $\mathbb{R} - \{-3, 1\}$ باشد، مقدار $\frac{b}{a}$ کدام است؟

۱ $-\frac{3}{8}$

۲ $-\frac{1}{24}$

۳ $\frac{3}{8}$

۴ $\frac{1}{24}$

۷۴ اگر عبارت $\sqrt[4]{\frac{2}{x^2} - \frac{9}{y}} + \sqrt{2x - x^2}$ عدد حقیقی باشد، مجموعه مقادیر x در کدام بازه است؟

۱ $[\frac{2}{3}, 2]$

۲ $[-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}]$

۳ $[-\frac{2}{3}, 0) \cup (0, 2]$

۴ $[-\frac{2}{3}, 0) \cup (0, \frac{2}{3}]$

۷۵ اگر دامنه تابع $f(x) = \sqrt{ax^2 + x + a}$ برابر $\mathbb{R}$ باشد، حدود a کدام است؟

۱ $|a| \leq \frac{1}{4}$

۲ $|a| \geq \frac{1}{4}$

۳ $a \geq \frac{1}{4}$

۴ $a \leq -\frac{1}{4}$

۷۶ دامنه تابع $y = \sqrt{\frac{x-1}{x+2}}$ با دامنه کدام یک از توابع زیر برابر است؟

۱ $y = \log(\frac{x-1}{x+2})$

۲ $y = \sqrt[4]{(x-1)(x+2)}$

۴ $y = \sqrt{(x-1)(x+2)} + \frac{x+2}{x+2}$

۳ $y = \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+2}}$

۷۷ دامنه تابع با ضابطه $y = \sqrt[4]{\frac{x}{6} + 4 - |x|}$ شامل چند عدد صحیح است؟

۱ ۹

۲ ۷

۳ ۶

۴ ۸

۷۸ اگر $f(x) = \sqrt{x + |x+2|}$ باشد، دامنه تابع $f(-x)$ کدام است؟

۱ $x \leq -1$

۲ $x \geq -1$

۳ $x \leq 1$

۴ $x \geq 1$

۷۹ دامنه تابع $y = \sqrt{|x-1| - 3| - 2}$ شامل چند عدد صحیح نمی باشد؟

۱ ۳

۲ ۶

۳ ۲

بی شمار ۴

۸۰ اگر $f(x) = x - 1$ و $g(x) = x^2 + 2x$ باشند، دامنه ای برابر $\mathbb{R}$ دارد؟

۱ $y = \frac{f(x)}{g(x)}$

۲ $y = \frac{1}{f(x) + g(x)}$

۳ $y = \frac{g(x)}{g(x) - f(x)}$

۴ $y = \frac{\sqrt[3]{f(x)}}{g(x) + 1}$

۸۱ شکل روبه رو، نمودار تابع $y = f(x)$ است. دامنه تابع $y = \sqrt{xf(x)}$ کدام است؟

۱ $[0, 2]$

۲ $[-3, 2]$

۴ $[-3, 0] \cup [1, 2]$

۳ $[-4, -3] \cup [1, 2]$

۸۲ شکل روبه رو، نمودار تابع با ضابطه $f(x)$ است. دامنه تابع غیرنقطه ای $\sqrt{(x+1)f(x)}$ کدام است؟

۱ $[-3, 2]$

۲ $[-1, +\infty)$

۳ $(-\infty, -1]$

۴ $\mathbb{R} - (-3, 2)$

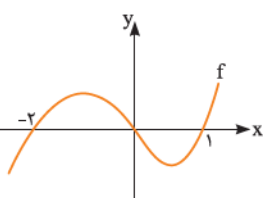
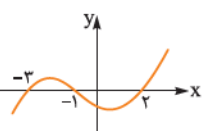
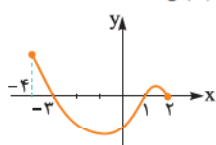
۸۳ نمودار زیر، تابع f را نشان می دهد. دامنه تابع $g(x) = \sqrt{\frac{f(x)}{f(2+x)}}$ شامل چند عدد صحیح است؟

۱ ۳

۲ ۶

۳ ۴

۴ ۵



تجربی داخل ۱۴۰۲

۸۴ اگر دامنه تابع $f(x) = \sqrt{(a^2-4)x^2 + (a+1)x + 1}$ به صورت بازه $(-\infty, b]$ باشد، دامنه تابع $g(x) = \sqrt{(b^2-4)x^2 + (b+1)x + 1}$ کدام است؟

- ۱ $[-\frac{1}{3}, 1]$ ۲ $[-1, \frac{1}{3}]$ ۳ $[-\frac{2}{3}, 1]$ ۴ $[-1, \frac{2}{3}]$

ریاضی داخل ۱۴۰۰

۸۵ دامنه تغییرات تابع $f(x) = \log_6 \frac{1}{6 + \sqrt{|x|-|x|}}$ کدام است؟

- ۱ $(-9, 9)$ ۲ $(-4, 9)$ ۳ $(4, 9)$ ۴ $(-4, 4)$

تجربی داخل ۱۴۰۰

۸۶ دامنه تابع با ضابطه $f(x) = \frac{\log_2(x^2 - x - 2)}{\sqrt{x^2 - 1} + 1}$ کدام است؟

- ۱ $(-\infty, -1) \cup (2, +\infty)$ ۲ $(-1, 2)$ ۳ $(-\infty, -2) \cup (1, +\infty)$ ۴ $(-2, 1)$

تجربی خارج ۱۴۰۰

۸۷ دامنه تابع با ضابطه $f(x) = \log_2(|x^2 - 2| - x)$ کدام است؟

- ۱ $(-\infty, -\sqrt{2}) \cup (2, +\infty)$ ۲ $(-\infty, 1) \cup (\sqrt{2}, +\infty)$ ۳ $(-1, 1) \cup (\sqrt{2}, +\infty)$ ۴ $(-\infty, 1) \cup (2, +\infty)$

۸۸ دامنه تابع $y = \sqrt{\frac{-x}{3}} - 2 + \sqrt{\frac{x}{3} + 2}$ شامل چند عدد صحیح است؟

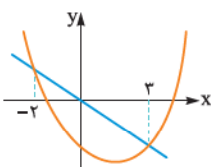
- ۱ ۳ ۲ ۲ ۳ ۵ ۴ ۴

۸۹ دامنه تابع $y = \frac{x+1}{\sqrt{\sqrt{x-2}-\sqrt{x-2}}}$ به صورت بازه (α, β) است. حاصل $2\beta - \alpha$ کدام است؟

- ۱ ۲ ۲ ۴ ۳ ۱ ۳ ۳

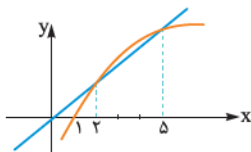
۹۰ شکل روبه‌رو، نمودار تابع $y = f(x)$ و نیمساز ناحیه دوم و چهارم است. دامنه تابع $y = \sqrt{\frac{x+f(x)}{16-x^2}}$ کدام است؟

- ۱ $(-4, -2] \cup [3, 4)$ ۲ $(-4, -2) \cup (4, +\infty)$ ۳ $(-2, 4)$ ۴ $(-\infty, -2]$



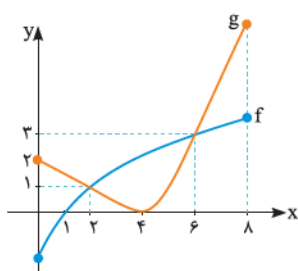
۹۱ شکل روبه‌رو، نمودار تابع $y = f(x)$ و نیمساز ناحیه اول و سوم است. دامنه تابع $y = \sqrt{\frac{x-f(x)}{(4-x)f(x)}}$ کدام است؟

- ۱ $(1, 2] \cup [5, +\infty)$ ۲ $(2, 4) \cup [5, +\infty)$ ۳ $(1, 2] \cup (4, 5]$ ۴ $(-\infty, 1) \cup (4, 5]$



۹۲ نمودار توابع f و g به شکل مقابل است. دامنه تابع $y = \sqrt{\frac{f(x) \cdot g(x)}{x - 2f(x)}}$ شامل چند عدد طبیعی است؟

- ۱ ۵ ۲ ۴ ۳ ۳ ۴ ۲



۹۳ اگر دامنه $y = \frac{\sqrt{|x+2|+3}}{\sqrt{5-|x-1|-|x-4|}}$ به صورت بازه (α, β) باشد، مقدار $\beta - 2\alpha$ کدام است؟

- ۱ ۲ ۲ ۳ ۳ ۳ ۴ ۵

۹۴ دامنه تابع به معادله $\sqrt[3]{x-1} + \sqrt{y+1} = 3$ کدام است؟

- ۱ $[1, +\infty)$ ۲ $[1, 82]$ ۳ $[1, 3]$ ۴ $[1, 9]$

۹۵ اگر دامنه تابع $f(x) = \sqrt{ax^2 + 2x + c}$ برابر مجموعه $\{\frac{1}{p}\}$ باشد، مقدار $a - 2c$ کدام است؟

- ۱ ۱ ۲ ۲ ۳ -۱ ۴ -۲

۹۶ اگر دامنه تابع $f(x) = \frac{x}{ax^2 + 2x + a} + \frac{\sqrt[3]{x}}{x}$ فقط شامل یک عدد حقیقی نباشد، a چند مقدار صحیح را شامل نمی‌شود؟

- ۱ صفر ۲ ۱ ۳ ۲ ۴ بی‌شمار

۹۷ اگر دامنه تابع $f(x) = \frac{\sqrt{x^2 + x}}{x^2 + ax + 1}$ به صورت بازه $[0, +\infty)$ باشد، تمام مقادیر ممکن برای a کدام است؟

- ۱ $a > -2$ ۲ $-2 < a < 2$ ۳ $a < 2$ ۴ $a > -4$

تساوی دو تابع

کتاب درسی

۹۸ کدام یک از جفت توابع زیر با هم مساوی اند؟

۱ $g(x) = |x|$, $f(x) = \sqrt{x^2}$

۳ $g(x) = 1$, $f(x) = \frac{x}{x}$

۲ $g(x) = |x|$, $f(x) = (\sqrt{x})^2$

۴ $g(x) = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$, $f(x) = \frac{|x|}{|x|}$

۹۹ کدام یک از جفت توابع زیر با هم مساوی هستند؟

۱ $g(x) = \frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x-2}}$, $f(x) = \sqrt{\frac{x+2}{x-2}}$

۳ $g(x) = x+3$, $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-9}{x-3} & ; x \neq 3 \\ 5 & ; x = 3 \end{cases}$

۲ $g(x) = -\sqrt{-x^3}$, $f(x) = x\sqrt{-x}$

۴ $g(x) = |x^2-2|$, $f(x) = (\sqrt{x^2-2})^2$

۱۰۰ دو تابع f و g مفروض اند. در کدام گزینه، دو تابع مساوی اند؟

۱ $f(x) = 2 \log x$, $g(x) = \log x^2$

۳ $f(x) = (\sqrt{x})^2$, $g(x) = x$

۲ $f(x) = \frac{\sqrt{x^2}}{|x|}$, $g(x) = 1$

۴ $f(x) = \frac{x}{|x|}$, $g(x) = \frac{|x|}{x}$

۱۰۱ کدام یک از جفت توابع زیر با هم مساوی نیستند؟

۱ $g(x) = \frac{x^2}{1+\sqrt{1+x^2}}$, $f(x) = \sqrt{1+x^2} - 1$

۳ $g(x) = |x|\sqrt{x^2-1}$, $f(x) = \sqrt{x^4-x^2}$

۲ $g(x) = |x|-1$, $f(x) = \frac{x^2-1}{|x|+1}$

۴ $g(x) = \frac{\sqrt{x}}{x}$, $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2}}$

۱۰۲ کدام تابع با ضابطه زیر، با تابع $y = 2x-1$ برابر است؟

۱ $y = \sqrt{4x^2-1}$

۲ $y = \frac{4x^2-1}{2x+1}$

۴ $y = \sqrt{4x^2-4x+1}$

۳ $y = \frac{4x^3-2x^2+2x-1}{2x^2+1}$

۱۰۳ کدام یک از جفت توابع زیر با هم مساوی نیستند؟

۱ $g(x) = 1$, $f(x) = \sin^2 x + \cos^2 x$

۳ $g(x) = \frac{1}{\cos x}$, $f(x) = \sqrt{1+\tan^2 x}$

۲ $g(x) = \cos^2 x + \sin^2 x$, $f(x) = \sin^2 x + \cos^2 x$

۴ $g(x) = 2 \sin x$, $f(x) = \frac{4 \sin^2 x - 2 \sin x}{2 \sin x - 3}$

۱۰۴ کدام یک از توابع زیر با تابع $y = \log \frac{x-2}{x}$ برابر است؟

۱ $y = \log(x-2) - \log x$

۲ $y = \log \frac{x^2-4}{x^2+2x}$

۳ $y = \frac{1}{2} \log \left(\frac{x-2}{x} \right)^2$

۴ $y = 2 \log \sqrt{\frac{x-2}{x}}$

۱۰۵ به ازای چند مقدار k ، توابع $g(x) = k^2 - 2k + 3$ و $f(x) = \frac{3x^2 + 3x - 3k}{x^2 + x - k}$ با هم مساوی می باشند؟

۱ صفر

۲ ۱

۳ ۲

۴ ۳

۱۰۶ اگر دو تابع $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x-2}}{x-a} & ; x \neq a \\ k & ; x = a \end{cases}$ و $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+2\sqrt{x}+4}}$ برابر باشند، آنگاه حاصل ak کدام است؟

۱ ۱

۲ $\frac{1}{3}$

۳ $\frac{2}{3}$

۴ $\frac{4}{3}$

۱۰۷ اگر دو تابع $f(x) = \frac{a}{x-3}$ و $g(x) = \frac{2x+b}{x^2+cx+d}$ مساوی باشند، آنگاه مقدار $a+b+c+d$ کدام است؟

۱ صفر

۲ -۱

۳ ۱

۴ -۲

۱۰۸ به ازای چند مقدار طبیعی a ، دو تابع $f(x) = |x-4|\sqrt{x-a}$ و $g(x) = \sqrt{(x^2-(4+a)x+4a)(x-4)}$ برابر هستند؟

۱ صفر

۲ بی شمار

۳ ۳

۴ ۴

محاسبه برد توابع

- ۱۰۹ برد تابع $f(x) = \frac{4x+3}{2x-6}$ کدام است؟
 ۱ $\mathbb{R}$ ۲ $\mathbb{R} - \{2\}$ ۳ $\mathbb{R} - \{3\}$ ۴ $\mathbb{R} - \{4\}$
- ۱۱۰ برد تابع $y = 2\sin x + 7|\sin x|$ کدام بازه است؟
 ۱ $[0, 7]$ ۲ $[0, 9]$ ۳ $[-2, 9]$ ۴ $[-5, 9]$
- ۱۱۱ برد تابع $y = 1 + \sqrt{2x - x^2} - \sqrt{x^2 - x - 2}$ شامل چند عدد صحیح است؟
 ۱ صفر ۲ ۱ ۳ ۲ ۴ بی شمار
- ۱۱۲ برد تابع $y = x - 6\sqrt{x}$ چند عدد صحیح منفی را شامل می شود؟
 ۱ ۶ ۲ ۹ ۳ ۳۶ ۴ ۳۶
- ۱۱۳ برد تابع $y = \sqrt{-4x^2 + 4x + 5}$ شامل چند عدد صحیح می باشد؟
 ۱ صفر ۲ ۳ ۳ ۴ ۶
- ۱۱۴ برد تابع $y = \sqrt{3x+1} - |\sqrt{5x-10}|$ به صورت بازه $[a, b]$ است. حاصل $a^2 + b^2$ کدام است؟
 ۱ ۷ ۲ ۸ ۳ ۹ ۴ ۱۰
- ۱۱۵ اگر برد تابع $y = f(x)$ ، بازه $[-\frac{1}{4}, 3]$ باشد، برد تابع $y = \frac{3}{f(x)}$ شامل چند عدد صحیح نمی باشد؟
 ۱ ۳ ۲ ۴ ۳ ۱۱ ۴ ۱۲
- ۱۱۶ برد تابع $f(x) = \sqrt{2x - 2x^2} + \sqrt{x^2 - x} + \frac{\sqrt{2}}{x}$ کدام است؟
 ۱ $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}] - \{0\}$ ۲ $[-\sqrt{2}, 0)$ ۳ $(0, \sqrt{2}]$ ۴ $\{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\}$
- ۱۱۷ برد تابع $f(x) = x^2 + 2 + \frac{1}{x^2 + 1}$ کدام است؟
 ۱ $(0, +\infty)$ ۲ $[2, +\infty)$ ۳ $[3, +\infty)$ ۴ $(2, +\infty)$
- ۱۱۸ کدام عدد در برد تابع $f(x) = \frac{|3x|}{x} + \frac{x+1}{|x+1|}$ قرار ندارد؟
 ۱ ۲ ۲ -۲ ۳ ۴
- ۱۱۹ برد تابع با ضابطه $f(x) = (x + |x|)\sqrt{\frac{2-x}{x}}$ کدام است؟
 ۱ $(0, 1]$ ۲ $[0, 2]$ ۳ $[1, 2]$ ۴ $(1, 3)$
- ۱۲۰ برد تابع $f(x) = \frac{x+3}{(x-1)^2}$ کدام است؟
 ۱ $[0, +\infty)$ ۲ $[-\frac{1}{16}, +\infty)$ ۳ $[-1, +\infty)$ ۴ $[-\frac{1}{25}, +\infty)$
- ۱۲۱ برد تابع $y = \frac{x^2 - x + \frac{1}{4}}{x^2 - x + 1}$ شامل چند عدد صحیح است؟
 ۱ ۱ ۲ ۲ ۳ ۳ صفر
- ۱۲۲ برد تابع $y = \frac{2x^2 - 1}{x^2 + 3}$ کدام است؟
 ۱ $\mathbb{R} - [-1, 2)$ ۲ $[-\frac{1}{3}, 2]$ ۳ $\mathbb{R} - (-1, 2]$ ۴ $[-\frac{1}{3}, 2)$
- ۱۲۳ برد تابع $f(x) = \frac{\sqrt{\cos x}}{\cos x + 2}$ شامل چند عدد صحیح است؟
 ۱ ۹ ۲ ۸ ۳ ۱۰ ۴ ۷
- ۱۲۴ برد تابع با ضابطه $y = x + \sqrt{2x - x^2}$ کدام بازه است؟
 ۱ $[0, 1 + \sqrt{2}]$ ۲ $[-\frac{1}{4}, \sqrt{2}]$ ۳ $[1 - \sqrt{2}, 1 + \sqrt{2}]$ ۴ $[0, 2]$

. فصل آخر.

حسابان جامع پاسخ نامه



پاسخنامه تشریحی فصل اول

۱ ۱

 ابتدا نمودار تابع $f(x) = x^2$ با دامنه $[0, \frac{1}{3}]$ را رسم می‌کنیم:

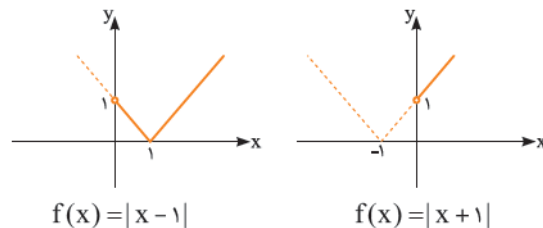
با توجه به نمودار، برد تابع بازه $[0, \frac{1}{9}]$ است، پس نمایشی قابل قبول است که دامنه آن $[0, \frac{1}{3}]$ باشد و هم دامنه آن مجموعه‌ای انتخاب شود که برد تابع یعنی $[0, \frac{1}{9}]$ زیرمجموعه آن باشد.

توابع مربوط به (الف) و (پ) دامنه‌شان برابر بازه $[0, \frac{1}{3}]$ نمی‌باشد، پس قابل قبول نیستند. اما توابع مربوط به (ب) و (ت) دامنه‌شان $[0, \frac{1}{3}]$ است و هم دامنه‌شان به گونه‌ای است که $[0, \frac{1}{9}]$ زیرمجموعه آن است. بنابراین هر دو قابل قبول اند.

به جای این‌که نمودار تابع رو واسه پیدا کردن برد رسم کنی، این‌طوری هم همیشه برد رو حساب کرد:

$$0 \leq x \leq \frac{1}{3} \Rightarrow 0 \leq x^2 \leq \frac{1}{9} \Rightarrow R_f = [0, \frac{1}{9}]$$

۲ ۴

 توابع $f(x) = |x-1|$ و $f(x) = |x+1|$ را در $x > 0$ رسم می‌کنیم:


ملاحظه می‌شود برد تابع $f(x) = |x+1|$ بازه $(1, +\infty)$ و برد تابع $f(x) = |x-1|$ بازه $[0, +\infty)$ می‌باشد. بین گزینه‌ها، فقط در گزینه (۴) برد و هم دامنه با هم برابرند.

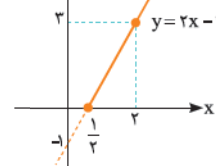
۳ ۴

ابتدا معلوم می‌کنیم به ازای چه عددی مقدار تابع برابر صفر و ۳ می‌شود:

$$2x-1=0 \Rightarrow x=\frac{1}{2}; 2x-1=3 \Rightarrow x=2$$

حال نمودار تابع را رسم می‌کنیم:

می‌دانیم هم دامنه تابع هر مجموعه دلخواهی شامل برد است. یعنی برد تابع باید زیرمجموعه هم دامنه باشد، بنابراین با توجه به شکل، A می‌تواند بازه $[\frac{1}{2}, 2]$ یا هر زیرمجموعه‌ای از آن باشد. در بین گزینه‌ها فقط گزینه (۴) این شرط را دارد.



۴ ۳

با توجه به فرض سؤال، نمایش تابع به صورت $f(x) = x + |x|$ است. اگر دو حالت $x \geq 0$ و $x < 0$ را برای آن در نظر بگیریم، تابع به صورت دو ضابطه‌ای $f(x) = \begin{cases} 2x & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$ در می‌آید و در نتیجه نمودار آن به صورت گزینه (۳) می‌باشد.

۵ ۲

برای تابع بودن یک رابطه، نباید هیچ دو زوج مرتب متمایزی مؤلفه‌های اول یکسان داشته باشد، پس:

$$\begin{aligned} (2, -1) &= (2, a^2 - 2a) \Rightarrow a^2 - 2a = -1 \Rightarrow a^2 - 2a + 1 = 0 \\ \Rightarrow (a-1)^2 &= 0 \Rightarrow a=1 \Rightarrow f = \{(2, -1), (1, 4), (1, 2b)\} \\ (1, 4) &= (1, 2b) \Rightarrow 2b=4 \Rightarrow b=2 \Rightarrow a+b=3 \end{aligned}$$

۶ ۱

برای تابع بودن یک رابطه، نباید هیچ دو زوج مرتب متمایزی مؤلفه‌های اول یکسان داشته باشند، پس:

$$(7, 1-3n^2) = (7, -2n) \Rightarrow 1-3n^2 = -2n \Rightarrow 3n^2 - 2n - 1 = 0$$

$$\xrightarrow[\text{صفر است.}]{\text{مجموع ضرایب}} \begin{cases} n=1 \\ n=\frac{c}{a} = -\frac{1}{3} \end{cases}$$

n های به دست آمده را در رابطه قرار می‌دهیم و تابع بودن یا نبودن رابطه f را بررسی می‌کنیم:

$$n=1 \Rightarrow f = \{(7, -2), (1, -1), (2, 1), (1, 2)\} \Rightarrow \text{تابع نیست}$$

$$n=-\frac{1}{3} \Rightarrow f = \{(7, \frac{2}{3}), (1, -1), (2, -\frac{1}{3}), (-3, 2)\} \Rightarrow \text{تابع هست}$$

$$\text{بنابراین } f(2) = -\frac{1}{3} \text{ می‌شود.}$$

۷ ۱

چون دو زوج مرتب با مؤلفه اول ۱ وجود دارد، پس زمانی تابع است که مؤلفه دوم آن‌ها برابر باشد، یعنی $-a^2 + a - 1 = b^2$. از طرفی در عبارت $-a^2 + a - 1$ ضریب a^2 و علامت Δ هر دو منفی اند، پس همواره $-a^2 + a - 1 < 0$ می‌باشد. حال چون $b^2 \geq 0$ ، بنابراین معادله $-a^2 + a - 1 = b^2$ هیچ‌گاه ریشه ندارد.

۸ ۲

رابطه‌ای تابع است که به هر عضو A دقیقاً یک عضو از B را نسبت دهد. بنابراین رابطه R_1 تابع نیست، زیرا زوج مرتبی با مؤلفه اول ۳ وجود ندارد. در R_2 دو زوج مرتب با مؤلفه اول یکسان وجود دارد $((1, b), (1, a))$ پس R_2 نیز تابع نیست. اما روابط R_3 و R_4 تابع هستند.

۹ ۲

با استفاده از تعریف تابع داریم:

$$\begin{cases} (2, 5) \in f \\ (2, c) \in f \end{cases} \Rightarrow c=5 \Rightarrow f = \{(2, 5), (5, a^2+a+2), (5, b^2), (5, 4b-3)\}$$

$$\begin{cases} (5, b^2) \in f \\ (5, 4b-3) \in f \end{cases} \Rightarrow b^2 = 4b-3 \Rightarrow b^2 - 4b + 3 = 0 \Rightarrow b=1 \text{ یا } b=3$$

$$b=1 \Rightarrow f = \{(2, 5), (5, a^2+a+2), (5, 1)\} \Rightarrow a^2+a+2=1$$

$$\Rightarrow a^2+a+1=0 \xrightarrow{\Delta < 0} \text{ برای } a \text{ عدد حقیقی وجود ندارد.}$$

$$b=3 \Rightarrow f = \{(2, 5), (5, a^2+a+2), (5, 9)\} \Rightarrow a^2+a+2=9$$

$$\Rightarrow a^2+a-7=0 \xrightarrow{\Delta > 0} \text{ می‌تواند برقرار باشد.}$$

پس فقط یک مقدار $b=3$ وجود دارد.

به ازای بقیه مقادیر صحیح y ، عدد صحیحی برای x یافت نمی‌شود. بنابراین اعضای مجموعه به صورت زیر می‌باشد:

$$f = \{(-72, 0), (24, 2), (24, -2), (9, 3), (3, 5), (3, -5)\}$$

می‌دانیم یک رابطه زمانی تابع است که به ازای هر x از دامنه، فقط یک مقدار برای y وجود داشته باشد. پس حداقل یکی از زوج‌مرتبه‌هایی که مؤلفه اول آن‌ها یکسان است باید حذف شود، در نتیجه از این مجموعه حداقل سه عضو باید حذف شود.

می‌دونی اگر در صورت سؤال به کلمه حداقل اشاره نمی‌شد، چه اتفاقی می‌افتاد؟
اون وقت جواب منحصر به فردی برای این تست نداشتیم. مثلاً اگر به جای سه عضو، چهار عضو یا پنج عضو حذف می‌کردیم، باز هم f ، تابع می‌شد.

۱۵

ابتدای اعضای مجموعه را می‌نویسیم. برای این کار به جای y ، یک عدد صحیح قرار می‌دهیم طوری که مقدار x به دست آمده، صحیح شود. با توجه

$$\text{به } x = \frac{3^0}{1+|y|} \text{ داریم: } y = \pm 1 \Rightarrow x = 15 \quad ; \quad y = 0 \Rightarrow x = 3^0$$

$$y = \pm 2 \Rightarrow x = 1^0 \quad ; \quad y = \pm 4 \Rightarrow x = 6$$

$$y = \pm 5 \Rightarrow x = 5 \quad ; \quad y = \pm 9 \Rightarrow x = 3$$

$$y = \pm 14 \Rightarrow x = 2 \quad ; \quad y = \pm 29 \Rightarrow x = 1$$

به ازای بقیه مقادیر صحیح y ، عدد صحیحی برای x یافت نمی‌شود. بنابراین اعضای مجموعه به صورت زیر می‌باشد:

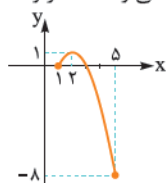
$$f = \{(3^0, 0), (15, \pm 1), (1^0, \pm 2), (6, \pm 4), (5, \pm 5), (3, \pm 9)\}$$

$$(2, \pm 14), (1, \pm 29)\}$$

می‌دانیم یک رابطه زمانی تابع است که به ازای هر x از دامنه، فقط یک مقدار برای y وجود داشته باشد، پس حداقل یکی از زوج مرتبه‌هایی که مؤلفه اول آن‌ها یکسان است باید حذف شود، در نتیجه در مجموعه f با حذف حداقل ۷ عضو می‌توان به یک تابع رسید.

۱۶

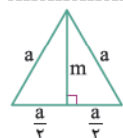
بازه‌ای را باید انتخاب کنیم که برد تابع، زیرمجموعه آن باشد. برای تعیین برد سهمی، چون دامنه آن به صورت بازه $[1, 5]$ محدود شده، بهتر است نمودار آن را رسم کنیم. برای این کار مختصات رأس سهمی و نقاط سر و ته آن را مشخص می‌کنیم:



$$x_S = \frac{-b}{2a} = \frac{-4}{-2} = 2 \Rightarrow y_S = 1$$

با توجه به نمودار، برد تابع، بازه $[-8, 1]$ است. چون این بازه، زیرمجموعه $[-9, 1]$ می‌باشد، پس گزینه (۴) صحیح است.

۱۷



در مثلث متساوی‌الاضلاع، ارتفاع و میانه روی هم قرار دارند، پس داریم:

$$S = \frac{1}{2}ma$$

از طرفی با توجه به رابطه فیثاغورس داریم:

$$m^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = a^2 \Rightarrow \frac{ra^2}{4} = m^2 \Rightarrow a = \frac{2m}{\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow S = \frac{1}{2} \times m \times \frac{2m}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} m^2$$

۱۰

روش اول (مفهومی): در توابع از A به B ، به هر یک از عضوهای مجموعه A یک عضو B را می‌توان نسبت داد:

$$f: A \rightarrow B : f = \{(a, 0), (b, 0), (c, 0)\}$$

حالت ۲ حالت ۲ حالت ۲

در هر یک از دایره‌های خالی یکی از دو عضو مجموعه B می‌تواند قرار گیرد. یعنی در هر دایره خالی ۲ انتخاب داریم، پس طبق اصل ضرب داریم:

$$\text{حالت } 2^3 = 8 = 2 \times 2 \times 2 \text{ حالت } 2 \times 2 \times 2 \text{ حالت } 2 \times 2 \times 2$$

روش دوم (فرمولی): طبق مطالب درسنامه اگر A ، m عضو و B ، n عضو داشته باشد، تعداد توابع از مجموعه A به B برابر است با: n^m . پس $2^3 = 8$ حالت وجود دارد.

۱۱

چون $f(a) = 2$ است، پس برای $f(a)$ فقط یک حالت وجود دارد. اما برای $f(b)$ و $f(c)$ سه حالت (۱ یا ۲ یا ۳) امکان دارد، بنابراین طبق اصل ضرب داریم:

$$f: A \rightarrow B : f = \{(a, 2), (b, 0), (c, 0), (d, 0)\}$$

حالت ۳ = ۲۷ حالت ۲ × حالت ۳ × حالت ۱ × حالت ۱

۱۲

چون $f(1) \neq b$ است، پس برای $f(1)$ دو حالت وجود دارد $f(1) = a$ یا $f(1) = c$. همچنین $f(3) \neq a$ می‌باشد، پس برای $f(3)$ نیز دو حالت وجود دارد. اما برای $f(2)$ و $f(4)$ و $f(5)$ سه حالت (a یا b یا c) امکان دارد. بنابراین طبق اصل ضرب داریم:

$$f: A \rightarrow B : f = \{(1, 0), (2, 0), (3, 0), (4, 0), (5, 0)\}$$

حالت ۳ × حالت ۲ × حالت ۲ × حالت ۲ × حالت ۲

پس $1^0 8$ تابع از A به B می‌توان نوشت.

۱۳

ممکن است دامنه و برد دو تابع برابر باشند اما دو تابع برابر نباشند. برای مثال اگر $f(x) = x^2$ و $g(x) = 2x^2$ را در نظر بگیریم، آن‌گاه $D_f = D_g = \mathbb{R}$ و $R_f = R_g = [0, +\infty)$ ، اما چون ضابطه‌های یکسان ندارند، پس برابر نیستند و در نتیجه عبارت (الف) درست نیست.

طبق تعریف، برد یک تابع، زیرمجموعه هم‌دامنه است، بنابراین برد و هم‌دامنه تابع می‌توانند برابر باشند، اما هم‌دامنه زیرمجموعه برد نیست، پس عبارت (ب) درست و عبارت (پ) نادرست است. هم‌چنین به ازای هر دامنه مشخص غیرتهی، بی‌شمار تابع می‌توان مشخص کرد. برای مثال توابع $f_1(x) = \sqrt{x(3-x)}$ و $f_2(x) = 2\sqrt{x(3-x)}$ و $f_3(x) = 3\sqrt{x(3-x)}$ و ... همگی دارای دامنه $[0, 3]$ هستند. بنابراین عبارت (ت) هم درست است.

۱۴

ابتدا اعضای مجموعه را می‌نویسیم. چون در این معادله، x برحسب y نوشته شده، پس به جای y ، یک عدد صحیح قرار می‌دهیم طوری که مقدار x به دست آمده، صحیح شود. با توجه به $x = \frac{y^2 - 1}{y^2 - 1}$ داریم:

$$y = 0 \Rightarrow x = -72 \quad ; \quad y = \pm 1 \Rightarrow x = \text{تعریف نشده}$$

$$y = \pm 2 \Rightarrow x = 24 \quad ; \quad y = \pm 3 \Rightarrow x = 9$$

$$y = \pm 4 \Rightarrow x \notin \mathbb{Z} \quad ; \quad y = \pm 5 \Rightarrow x = 3$$

۲۲ ۳

هر یک از گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

۱ در معادله $x - y^2 = 4$ ، به ازای $x = 5$ داریم: $y = \pm 1$. پس این معادله تابع نیست.

۲ در معادله $x = |y| + 1$ ، به ازای $x = 2$ داریم: $y = \pm 1$. بنابراین این معادله تابع نیست.

۳ از معادله $-x^2 + y = 4$ نتیجه می‌گیریم $y = 4 + x^2$. چون این معادله به صورت صریح $y = f(x)$ نمایش داده شده، پس به ازای هر x فقط یک مقدار برای y وجود دارد. پس معادله تابع است.

۴ در معادله $x^2 = y^2 + 1$ ، به ازای $x = 1$ داریم: $y = \pm 1$. بنابراین این معادله تابع نیست.

۲۳ ۱

رابطه‌ای که تابع است را بررسی می‌کنیم و برای اثبات تابع نبودن بقیه گزینه‌ها مثال نقض می‌آوریم:

$$1 \quad y^3 + 2y^2 + 3y + 1 - 1 + x^3 + x = 0 \Rightarrow (y+1)^3 - 1 + x^3 + x = 0$$

$$\Rightarrow (y+1)^3 = -x^3 - x + 1 \xrightarrow{\sqrt[3]{}} y+1 = \sqrt[3]{-x^3 - x + 1}$$

$$\Rightarrow y = \sqrt[3]{-x^3 - x + 1} - 1$$

چون معادله به صورت $y = f(x)$ بیان شده و به ازای هر x فقط یک مقدار برای y وجود دارد، پس این معادله تابع است.

بررسی سایر گزینه‌ها

۲ تابع نیست. $x = 1 \Rightarrow y^2 + 2y = 0 \Rightarrow y(y+2) = 0 \Rightarrow y = 0$ یا $y = -2$

۳ تابع نیست. $x = 0 \Rightarrow |y-1| = 1 \Rightarrow y-1 = \pm 1 \Rightarrow y = 0$ یا $y = 2$

۴ تابع نیست. $x = 1 \Rightarrow |y| = 1 \Rightarrow y = \pm 1$

۲۴ ۱

توی این روابط حتماً باید به این که x و y متعلق به چه مجموعه‌هایی هستند توجه کرد.

اگر x و y طبیعی باشند، معادله $x^2 + y^2 = 5$ فقط شامل دو زوج مرتب $\{(1,2), (2,1)\}$ می‌باشد که تابع است. حال برای بقیه گزینه‌ها مثال

نقض می‌آوریم:

$$1 \quad x = 0 \Rightarrow y = \pm 2$$

$$2 \quad x = 1 \Rightarrow y = \pm 2$$

$$3 \quad x = 1 \Rightarrow y = 2 \text{ یا } y = 4$$

۲۵ ۲

روش اول: هر یک از معادلات را در دو حالت $y \geq 0$ و $y < 0$ به صورت ساده‌تر نوشته و نمودار آن را رسم می‌کنیم:

$$1 \quad |y| = x + y: \begin{cases} y \geq 0 \Rightarrow y = x + y \Rightarrow x = 0 \\ y < 0 \Rightarrow -y = x + y \Rightarrow -2y = x \Rightarrow y = -\frac{x}{2} \end{cases}$$

$$2 \quad |y| = x + 2y: \begin{cases} y \geq 0 \Rightarrow y = x + 2y \Rightarrow y = -x \\ y < 0 \Rightarrow -y = x + 2y \Rightarrow y = -\frac{x}{3} \end{cases}$$

۱۸ ۲

مساحت مثلث به صورت $S = \frac{1}{2}xy$ می‌باشد. در مثلث ABO ، پاره‌خط CE با OB موازی است، با توجه به قضیه تالس، x را برحسب y به دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} \frac{CE}{OB} &= \frac{AC}{AO} \Rightarrow \frac{1}{y} = \frac{x-3}{x} \\ \Rightarrow \frac{1}{y} &= 1 - \frac{3}{x} \Rightarrow \frac{3}{x} = \frac{y-1}{y} \Rightarrow x = \frac{3y}{y-1} \\ S &= \frac{1}{2} \times \frac{3y}{y-1} \times y \Rightarrow S = \frac{3y^2}{2y-2} \end{aligned}$$

۱۹ ۲

ابتدا در رابطه $S = 4\pi r^2$ ، r را برحسب S به دست می‌آوریم:

$$مساحت کره = S = 4\pi r^2 \Rightarrow r^2 = \frac{S}{4\pi} \Rightarrow r = \frac{\sqrt{S}}{2\sqrt{\pi}}$$

حال در رابطه حجم کره، به جای r عبارت $\frac{\sqrt{S}}{2\sqrt{\pi}}$ قرار می‌دهیم:

$$حجم کره: V = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi \left(\frac{\sqrt{S}}{2\sqrt{\pi}}\right)^3 = \frac{4}{3}\pi \left(\frac{S\sqrt{S}}{4\sqrt{\pi}}\right) = \frac{S\sqrt{S}}{6\sqrt{\pi}} \times \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\pi}}$$

$$\Rightarrow V = \frac{S\sqrt{S}\sqrt{\pi}}{6\pi} \Rightarrow V = \frac{\sqrt{\pi}}{6\pi}(S\sqrt{S})$$

۲۰ ۱

اگر r شعاع مخروط و h ارتفاع مخروط باشد، در مثلث OHB طبق قضیه فیثاغورس داریم:

$$\begin{aligned} OB^2 &= OH^2 + HB^2 \Rightarrow r^2 = (h-1)^2 + r^2 \\ \Rightarrow r^2 &= 1 - (h^2 + 1 - 2h) \Rightarrow r^2 = 2h - h^2 \end{aligned}$$

حجم مخروط برابر $V = \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot h$ می‌باشد که با جای‌گذاری $r^2 = 2h - h^2$ داریم:

$$V(h) = \frac{\pi}{3}(2h^2 - h^3)$$

۲۱ ۴

در تابع f چون دو زوج مرتب $(2, a)$ و $(2, -2)$ وجود دارند، پس باید $a = -2$ باشد. بنابراین داریم:

$$f = \{(2, -2), (-1, 1-b)\}, \quad g = \{(c, 5), (2b, 2), (3, 5)\}$$

برد تابع g شامل دو عضو $\{2, 5\}$ می‌باشد. چون طبق فرض، تعداد اعضای f و g متفاوت است، پس با توجه به تابع f باید تعداد اعضای f برابر ۱ باشد و در نتیجه داریم:

$$1-b = -2 \Rightarrow b = 3 \Rightarrow g = \{(c, 5), (6, 2), (3, 5)\}$$

در آخر این‌که چون تعداد اعضای دامنه f و g برابر است، پس $c = 3$ و در نتیجه $a+b+c = -2+3+3 = 4$ می‌شود.

۲۸ ۲

می‌دانیم با مثال نقض می‌توان تابع نبودن یک رابطه را اثبات کرد. بنابراین داریم:

$$1 \quad x=0 \Rightarrow y^2 - 3y^2 = 0 \Rightarrow y^2(y-3) = 0 \Rightarrow y=0 \text{ یا } y=3 \Rightarrow$$

تابع نیست.

$$3 \quad x=-1 \Rightarrow |y-1|=1 \Rightarrow y-1=\pm 1 \Rightarrow y=0 \text{ یا } y=2 \Rightarrow$$

تابع نیست.

$$4 \quad x=1 \Rightarrow y^2-1=1 \Rightarrow y^2=2 \Rightarrow y=\pm\sqrt{2} \Rightarrow$$

تابع نیست. رابطه گزینه (۲) تابع می‌باشد.

چون فهمیدیم گزینه‌های (۱)، (۳) و (۴) تابع نیستند، دیگه نیازی به اثبات تابع بودن گزینه (۲) نیست. کتاب درسی هم اشاره‌ای به تابع بودن این نوع معادلات نداشته. روش‌های مختلفی برای بررسی این معادلات داریم که بهترینش استفاده از مشتقه که در فصل مشتق می‌خوانید.

۲۹ ۲

$$f(x) = \sqrt{x+2|x|} \Rightarrow f(-144) = \sqrt{-144+2|-144|}$$

$$= \sqrt{-144+2 \times 144} = \sqrt{144} = 12$$

$$f(f(-144)) = f(12) = \sqrt{12+2 \times 12} = \sqrt{36} = 6$$

۳۰ ۳

در رابطه $f(x^2+x) = 2x^2-1$ برای محاسبه $f(2)$ به جای x عدد ۱ و برای محاسبه $f(10)$ به جای x عدد ۲ را می‌گذاریم، پس:

$$\begin{cases} x=1 \Rightarrow f(2) = 2-1=1 \\ x=2 \Rightarrow f(10) = 8-1=7 \end{cases} \Rightarrow f(2) + f(10) = 1+7=8$$

۳۱ ۲

در رابطه $f(x) = 6f(x-2) + f(x-1)$ به جای x عدد ۴ را قرار می‌دهیم:

$$f(4) = 6f(2) + f(3)$$

حال در رابطه قبل به جای x عدد ۳ را قرار می‌دهیم:

$$f(3) = 6f(1) + f(2) = 6(1) + 2 = 8$$

$$\Rightarrow f(4) = 6f(2) + f(3) = 6(2) + 8 = 20$$

۳۲ ۱

با توجه به اتحاد مکعب دوجمله‌ای سعی می‌کنیم عبارات f و g را به صورت ساده‌تری بنویسیم:

$$\begin{cases} f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 8 + 8 \Rightarrow f(x) = (x-2)^3 + 8 \\ \Rightarrow f(\sqrt[3]{2}+2) = (\sqrt[3]{2}+2-2)^3 + 8 = 2+8=10 \\ g(x) = x^3 + 9x^2 + 27x + 27 - 27 \Rightarrow g(x) = (x+3)^3 - 27 \\ \Rightarrow g(\sqrt[3]{27}-3) = (\sqrt[3]{27}-3+3)^3 - 27 = 27-27=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{g(\sqrt[3]{27}-3)}{f(\sqrt[3]{2}+2)} = \frac{0}{10} = 0$$

۳۳ ۱

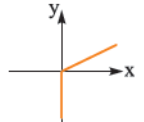
با توجه به توابع $f(x) = |x|$ و $g(x) = x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2$ داریم:

$$g(1-\sqrt{2}) = (1-\sqrt{2}+1)^2 = (2-\sqrt{2})^2 = 4 - 4\sqrt{2} + 2 = 6 - 4\sqrt{2}$$

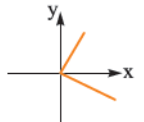
$$\Rightarrow f(g(1-\sqrt{2})) = f(6-4\sqrt{2}) = |6-4\sqrt{2}| = |6-\sqrt{16 \times 2}|$$

$$= |6-\sqrt{32}| = \frac{6-\sqrt{32}}{\sqrt{32}=5.656} = 6 - \sqrt{32} = 6 - 4\sqrt{2}$$

$$3 \quad |y| = x - y: \begin{cases} y \geq 0 \Rightarrow y = x - y \Rightarrow y = \frac{x}{2} \\ y < 0 \Rightarrow -y = x - y \Rightarrow x = 0 \end{cases}$$



$$4 \quad |y| = x + \frac{y}{2}: \begin{cases} y \geq 0 \Rightarrow y = x + \frac{y}{2} \Rightarrow \frac{y}{2} = x \Rightarrow y = 2x \\ y < 0 \Rightarrow -y = x + \frac{y}{2} \Rightarrow \frac{-3y}{2} = x \Rightarrow y = \frac{-2x}{3} \end{cases}$$



همان‌طور که می‌بینید تنها در گزینه (۲) هر خط موازی محور y ها نمودار را حداکثر در یک نقطه قطع می‌کند.

روش دوم (مثال نقض): برای هر یک از گزینه‌های (۱)، (۳) و (۴) مثال نقض می‌آوریم:

$$1 \quad x=0 \Rightarrow |y| = y \Rightarrow y \geq 0 \Rightarrow y \in [0, +\infty)$$

$$3 \quad x=0 \Rightarrow |y| = -y \Rightarrow y \leq 0 \Rightarrow y \in (-\infty, 0]$$

$$4 \quad x=1 \Rightarrow |y| = 1 + \frac{y}{2}: \begin{cases} y \geq 0 \Rightarrow y = 1 + \frac{y}{2} \Rightarrow 2y = 2 + y \Rightarrow y = 2 \\ y < 0 \Rightarrow -y = 1 + \frac{y}{2} \Rightarrow -2y = 2 + y \Rightarrow y = \frac{-2}{3} \end{cases}$$

۳۴ ۳

بررسی گزینه‌ها

۱ y را برحسب x به دست می‌آوریم:

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{x} = -2 \Rightarrow \frac{x^2+y^2}{xy} = -2 \Rightarrow x^2+y^2 = -2xy$$

$$\Rightarrow x^2+y^2+2xy = 0 \Rightarrow (x+y)^2 = 0 \Rightarrow y = -x$$

در رابطه $y = -x$ ، به ازای هر x فقط یک y وجود دارد، پس تابع است.

۲ می‌دانیم مجموع دو عبارت نامنفی زمانی صفر است که تک‌تک آن‌ها هم‌زمان صفر باشند. پس جواب معادله $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 0$ فقط نقطه $(1, 2)$ می‌باشد که تابع است.

۳ معادله $xy = 2x$ را حل می‌کنیم:

$$xy - 2x = 0 \Rightarrow x(y-2) = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ یا } y = 2$$

خط $x = 0$ یک خط عمودی است، پس این رابطه، تابع نیست.

۴ y را برحسب x به دست می‌آوریم:

$$y^3 + x^3 = 2x + 1 \Rightarrow y^3 = -x^3 + 2x + 1 \Rightarrow y = \sqrt[3]{-x^3 + 2x + 1}$$

در این رابطه نیز به ازای هر x فقط یک y وجود دارد، پس تابع است.

۳۵ ۳

عبارت را به صورت مربع کامل می‌نویسیم:

$$2x^2 + y^2 - 4x + 6y + k = 0 \Rightarrow 2(x^2 - 2x) + (y^2 + 6y) + k = 0$$

$$\Rightarrow 2((x-1)^2 - 1) + (y+3)^2 - 9 + k = 0 \Rightarrow 2(x-1)^2 + (y+3)^2 = 11 - k$$

اگر $11 - k > 0$ باشد، به ازای مقداری از x دو جواب برای y به دست می‌آید، پس تابع نیست.

اگر $11 - k < 0$ باشد، معادله جواب ندارد و در نتیجه تابع تهی می‌باشد.

اگر $11 - k = 0$ باشد، تنها جواب معادله، زوج مرتب $(1, -3)$ می‌باشد که تابعی ناتهی است، پس $k = 11$ می‌شود.

۴۰ ۱

 در معادله داده شده به جای x اعداد ۲ و -۲ را قرار می دهیم:

$$f(x) + xf(-x) = x^2 + 1 \Rightarrow \begin{cases} x=2 \Rightarrow f(2) + 2f(-2) = 5 \\ x=-2 \Rightarrow f(-2) - 2f(2) = 5 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\times(-2)} \begin{cases} f(2) + 2f(-2) = 5 \\ -2f(-2) + 4f(2) = -10 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{جمع}} \Delta f(2) = -5 \Rightarrow f(2) = -1$$

۴۱ ۳

 در معادله $\frac{f(x)}{\cos x} + \frac{f(-x)}{\sin x} = 2$ به جای x یک بار 45° و یک بار -45° را قرار می دهیم:

$$\begin{cases} x=45^\circ \Rightarrow \frac{f(45^\circ)}{\frac{\sqrt{2}}{2}} + \frac{f(-45^\circ)}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 2 \xrightarrow{\times \frac{\sqrt{2}}{2}} f(45^\circ) + f(-45^\circ) = \sqrt{2} \\ x=-45^\circ \Rightarrow \frac{f(-45^\circ)}{\frac{\sqrt{2}}{2}} + \frac{f(45^\circ)}{-\frac{\sqrt{2}}{2}} = 2 \xrightarrow{\times \frac{\sqrt{2}}{2}} f(-45^\circ) - f(45^\circ) = \sqrt{2} \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{تفریق}} 2f(45^\circ) = 0 \Rightarrow f(45^\circ) = 0$$

۴۲ ۴

 به کمک اتحاد $a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab$ عبارت $x^2 + \frac{4}{x^2}$ را برحسب $\frac{x^2+2}{x}$ می نویسیم:

$$f\left(\frac{x^2+2}{x}\right) = x^2 + \frac{4}{x^2} \Rightarrow f\left(\frac{x^2}{x} + \frac{2}{x}\right) = x^2 + \left(\frac{2}{x}\right)^2$$

$$\Rightarrow f\left(x + \frac{2}{x}\right) = \left(x + \frac{2}{x}\right)^2 - 4$$

$$\text{با فرض } x + \frac{2}{x} = t \text{ داریم: } f(t) = t^2 - 4 \Rightarrow f(4) = 16 - 4 = 12$$

۴۳ ۳

ابتدا عبارت را به صورت ساده تر می نویسیم:

$$f\left(\frac{x}{x^2+1}\right) = 4 + \left(x - \frac{1}{x}\right)^2 = 4 + \left(x^2 + \frac{1}{x^2} - 2\right) = x^2 + \frac{1}{x^2} + 2$$

$$= \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = \left(\frac{x^2+1}{x}\right)^2 \Rightarrow f\left(\frac{x}{x^2+1}\right) = \left(\frac{x^2+1}{x}\right)^2$$

 حال با فرض $t = \frac{x}{x^2+1}$ ، نتیجه می گیریم $f(t) = \left(\frac{1}{t}\right)^2$ ، بنابراین داریم:

$$f(x) = \left(\frac{1}{x}\right)^2 \Rightarrow f\left(\frac{1}{5}\right) - f\left(\frac{1}{3}\right) = 5^2 - 3^2 = 25 - 9 = 16$$

۴۴ ۳

 اگر فرض کنیم $1 + \tan^2 x = 3$ ، آنگاه به کمک اتحاد مثلثاتی $1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$ داریم:

$$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} = 3 \Rightarrow \cos^2 x = \frac{1}{3}$$

$$f(1 + \tan^2 x) = \frac{\cos^2 x - 3}{1 - 2\cos^2 x} \Rightarrow f(3) = \frac{\frac{1}{3} - 3}{1 - \frac{2}{3}} = \frac{-\frac{8}{3}}{\frac{1}{3}} = -8$$

$$f(1 - \sqrt{2}) = |1 - \sqrt{2}| \frac{1 - \sqrt{2} < 0}{\sqrt{2} = 1,4} - (1 - \sqrt{2}) = \sqrt{2} - 1$$

$$\Rightarrow g(f(1 - \sqrt{2})) = g(\sqrt{2} - 1) = (\sqrt{2} - 1 + 1)^2 = 2$$

$$\Rightarrow f(g(1 - \sqrt{2})) - g(f(1 - \sqrt{2})) = 6 - 4\sqrt{2} - 2 = 4 - 4\sqrt{2} = 4(1 - \sqrt{2})$$

۴۵ ۱

 با توجه به تابع $f(x) = x^2(2-x)^2$ داریم:

$$\begin{cases} f(1+x) = (1+x)^2(2-(1+x))^2 = (1+x)^2(1-x)^2 \\ f(1-x) = (1-x)^2(2-(1-x))^2 = (1-x)^2(1+x)^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(1+x) = f(1-x) \Rightarrow f(1+x) - f(1-x) = 0$$

۴۶ ۱

 ابتدا باید $f(6)$ را تعیین کنیم. برای این منظور کافی است جای x عددی قرار دهیم تا مقدار $x^2 - 2$ هم ۶ شود. بنابراین:

$$f(x^2 - 2) + f(6) = 5x - 4 \xrightarrow{x=2} f(6) + f(6) = 10 - 4$$

$$\Rightarrow 2f(6) = 6 \Rightarrow f(6) = 3$$

 حال معادله را به صورت ساده تر نوشته و برای محاسبه $f(-1)$ به جای x عدد ۱ را قرار می دهیم:

$$f(x^2 - 2) + 3 = 5x - 4 \Rightarrow f(x^2 - 2) = 5x - 7 \xrightarrow{x=1} f(-1) = -2$$

۴۷ ۳

 با توجه به تابع $f(x) = 2 - |x - 2|$ داریم:

$$\begin{aligned} f(f(x)) &= f(2 - |x - 2|) = 2 - |(2 - |x - 2|) - 2| = 2 - ||x - 2|| \\ &= 2 - |x - 2| = f(x) \end{aligned}$$

۴۸ ۴

 برای محاسبه $f(1-x)$ دو بار از تغییر متغیر استفاده می کنیم:

$$x - 3 = t \Rightarrow x = t + 3 \Rightarrow f(t) = (t+3)^2 - 4(t+3) + 5$$

$$t = 1 - x \Rightarrow f(1-x) = (1-x+3)^2 - 4(1-x+3) + 5$$

$$= (4-x)^2 - 4(4-x) + 5 = x^2 - 8x + 16 - 16 + 4x + 5 = x^2 - 4x + 5$$

۴۹ ۱

 عبارت $xf\left(\frac{1}{x}\right)$ را به دست آورده و برابر $f(x)$ قرار می دهیم:

$$xf\left(\frac{1}{x}\right) = x \frac{\left|\frac{1}{x}\right|}{\left|\frac{1}{x}\right|+1} = \frac{x\left(\frac{1}{|x|}\right)}{\frac{1}{|x|}+1} = \frac{\frac{x}{|x|}}{\frac{1+|x|}{|x|}} \stackrel{x \neq 0}{=} \frac{x}{1+|x|}$$

$$f(x) = xf\left(\frac{1}{x}\right) \Rightarrow \frac{|x|}{|x|+1} = \frac{x}{|x|+1} \Rightarrow |x| = x \Rightarrow x > 0$$

۵۰ ۴

 با توجه به تابع g ، $g(6) = 5$ ، بنابراین:

$$g(f(a)) = 5 \xrightarrow{g(6)=5} f(a) = 6 \Rightarrow a + \sqrt{a} = 6$$

 با تغییر متغیر $\sqrt{a} = t$ ، معادله را حل می کنیم:

$$t^2 + t - 6 = 0 \Rightarrow (t+3)(t-2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = -3 \Rightarrow \sqrt{a} = -3 \text{ (غق ق)} \\ t = 2 \Rightarrow \sqrt{a} = 2 \Rightarrow a = 4 \end{cases}$$

حال تابع را با $a=1$ بازنویسی کرده و ریشه‌های معادله $f(x)=0$ را به دست می‌آوریم:

$$f(x) = \begin{cases} x^3 - 3 & ; x \geq 1 \\ 1 - 3x & ; x \leq 1 \end{cases}$$

$$f(x) \Rightarrow \begin{cases} x^3 - 3 = 0 \Rightarrow x^3 = 3 \Rightarrow x = \sqrt[3]{3} \xrightarrow{\sqrt[3]{3} > 1} \text{ قابل قبول} \\ 1 - 3x = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{3} \xrightarrow{\frac{1}{3} < 1} \text{ قابل قبول} \end{cases}$$

پس معادله $f(x)=0$ دو ریشه $x=\sqrt[3]{3}$ و $x=\frac{1}{3}$ دارد.

۲ ۵۰

تابع f را در نظر بگیرید:

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2 + 3} + 2a & ; -1 \leq x \leq 1 \\ ax^2 + 5 & ; x \leq -1 \text{ یا } x \geq 1 \end{cases}$$

باید به ازای هر x فقط یک y داشته باشیم. نقاط مرزی $x=1$ و $x=-1$ در شرط هر دو ضابطه قرار دارند پس برای تعیین a یکی از این اعداد را در ضابطه‌ها قرار داده و برابر هم می‌گیریم:

$$x=1: \sqrt{1^2 + 3} + 2a = a(1)^2 + 5 \Rightarrow 2 + 2a = a + 5 \Rightarrow a = 3$$

برای محاسبه $f(3) = f(a)$ ، از ضابطه دوم استفاده می‌کنیم:

$$f(3) = 3(3)^2 + 5 = 32$$

۳ ۵۱

روش اول: می‌دانیم در توابع چندضابطه‌ای یا دامنه ضوابط اشتراک ندارند و با اگر اشتراک داشته باشند به ازای دامنه مشترک، مقدارشان برابر است. حال هر یک از گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

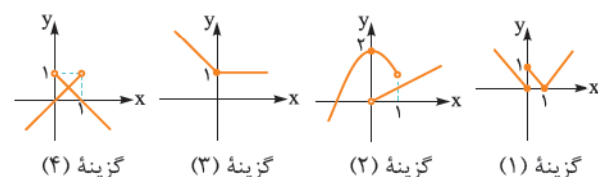
۱) دامنه دو ضابطه در $x=0$ مشترک می‌باشد، با فرض $x=0$ مقدار $y=|x-1|$ و $y=-x$ به ترتیب برابر ۱ و صفر می‌شود. حال چون به ازای $x=0$ دو مقدار برای y پیدا شد، پس این رابطه تابع نیست.

۲) دامنه دو ضابطه در بازه $(0,1)$ مشترک هستند. به ازای عددی مانند $x=\frac{1}{2}$ ، دو مقدار $\frac{1}{4}$ و $\frac{1}{4}$ برای y به دست می‌آید، پس این رابطه تابع نیست.

۳) هر یک از ضوابط تابع‌اند و دامنه دو ضابطه در $x=0$ مشترک می‌باشد که به ازای آن، مقدار هر دو ضابطه برابر ۱ می‌شود، پس این رابطه تابع است.

۴) دامنه دو ضابطه در بازه $(0,1)$ مشترک هستند. به ازای عددی مانند $x=\frac{1}{3}$ دو مقدار $\frac{1}{3}$ و $\frac{2}{3}$ به دست می‌آید، پس این رابطه تابع نیست.

روش دوم: نمودار هر یک از گزینه‌ها را رسم می‌کنیم:



تنها نموداری که خطوط موازی محور عرض‌ها، آن را حداکثر در یک نقطه قطع می‌کند، نمودار گزینه (۳) است.

۱ ۴۵

صورت و مخرج کسر را بر $\cos x \neq 0$ تقسیم می‌کنیم:

$$f(\tan x) = \frac{\frac{3 \sin x}{\cos x} - \frac{\cos x}{\cos x}}{\frac{2 \sin x}{\cos x} - \frac{3 \cos x}{\cos x}} \Rightarrow f(\tan x) = \frac{3 \tan x - 1}{2 \tan x - 3}$$

$$\xrightarrow{\tan x = 2} f(2) = \frac{3(2) - 1}{2(2) - 3} = \frac{5}{1} = 5$$

۱ ۴۶

در رابطه $f\left(\frac{1}{x}\right) - f(x) = 3x$ به جای x ، $\frac{1}{x}$ قرار می‌دهیم و دستگاه را حل می‌کنیم:

$$\times 2 \begin{cases} 2f(x) - f\left(\frac{1}{x}\right) = 2x \\ 2f\left(\frac{1}{x}\right) - f(x) = \frac{3}{x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4f(x) - 2f\left(\frac{1}{x}\right) = 4x \\ 2f\left(\frac{1}{x}\right) - f(x) = \frac{3}{x} \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{جمع}} 3f(x) = 4x + \frac{3}{x} \Rightarrow f(x) = \frac{4}{3}x + \frac{1}{x} \quad (*)$$

در رابطه $3g(x) + 4g(-x) = 2x + 1$ به جای x ، $-x$ قرار می‌دهیم و دستگاه را حل می‌کنیم:

$$\times 3 \begin{cases} 3g(x) + 4g(-x) = 2x + 1 \\ 3g(-x) + 4g(x) = -2x + 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 9g(x) + 12g(-x) = 6x + 3 \\ -12g(-x) - 16g(x) = 8x - 4 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{جمع}} -7g(x) = 14x - 1 \Rightarrow g(x) = -2x + \frac{1}{7} \quad (**)$$

$$(*), (**) \Rightarrow (f+g)(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{7} \Rightarrow (f+g)(-7) = \frac{-1}{7} + \frac{1}{7} = 0$$

۲ ۴۷

اگر فرض کنیم نمودار داده‌شده، نمودار $g(x) = f(x-3)$ باشد، آن‌گاه برای محاسبه $f(2)$ کافی است $g(5)$ را به دست آوریم. زیرا $g(5) = f(5-3) = f(2)$ با توجه به نمودار $g(5) = 4$ است، بنابراین داریم:

$$g(5) = 4 \Rightarrow f(2) = 4 \Rightarrow f\left(-\frac{1}{4}f(2)\right) = f\left(-\frac{1}{4} \times 4\right) = f(-1)$$

هم‌چنین برای محاسبه $f(-2)$ داریم:

$$\begin{cases} g(x) = f(x-3) \xrightarrow{x=1} g(1) = f(-2) \\ \Rightarrow f(-2) = 2 \\ g(1) = 2: \text{با توجه به نمودار داده‌شده} \end{cases}$$

۴ ۴۸

با توجه به شرط هر ضابطه، مقادیر خواسته شده را به دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} f(5) &= 5 - \sqrt{5+4} = 5-3=2 \Rightarrow f(f(5)) = f(2) = 2(2)+3=7 \\ f(1) &= 2(1)+3=5 \Rightarrow f(f(1)) = f(5) = 5 - \sqrt{5+4} = 5-3=2 \\ \Rightarrow f(f(5)) + f(f(1)) &= 7+2=9 \end{aligned}$$

۲ ۴۹

چون طبق صورت سؤال رابطه داده شده تابع است، پس باید به ازای $x=a$ مقدار دو ضابطه با هم برابر باشد. بنابراین:

$$\begin{cases} x^3 - 3a^2 \stackrel{x=a}{=} a^3 - 3a^2 \\ 1 - 3x \stackrel{x=a}{=} 1 - 3a \end{cases} \Rightarrow a^3 - 3a^2 = 1 - 3a \Rightarrow a^3 - 3a^2 + 3a - 1 = 0 \Rightarrow (a-1)^3 = 0 \Rightarrow a=1$$

۵۵ ۳

چون $|a| \geq 0$ است، پس $|a| \geq 2$ و $|a| \leq 1$ می‌شود. بنابراین برای محاسبه $f(2+|a|)$ از ضابطه اول استفاده می‌کنیم:

$$f(2+|a|) = (2+|a|)^2 - (2+|a|) - 7 = |a|^2 + 4|a| + 4 - 2 - |a| - 7 = |a|^2 + 3|a| - 5$$

از طرفی $|a| \leq 1$ است، پس برای محاسبه $f(1-|a|)$ اگر $a = 0$ باشد از ضابطه اول و اگر $a \neq 0$ باشد از ضابطه دوم استفاده می‌کنیم:

$$a = 0 \Rightarrow f(1-|a|) = f(1) \stackrel{\text{ضابطه اول}}{=} 1 - 1 - 7 = -7$$

$$a \neq 0 \Rightarrow f(1-|a|) \stackrel{\text{ضابطه دوم}}{=} 2(1-|a|) - 1 = -2|a| + 1$$

در دو حالت $a = 0$ و $a \neq 0$ ، معادله $f(1-|a|) = f(2+|a|)$ را حل می‌کنیم:

$$a = 0 \Rightarrow -7 = |a|^2 + 3|a| - 5 \Rightarrow -7 = -5$$

$$a \neq 0 \Rightarrow -2|a| + 1 = |a|^2 + 3|a| - 5 \Rightarrow |a|^2 + 5|a| - 6 = 0$$

$$\Rightarrow (|a| + 6)(|a| - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} |a| = -6 \\ |a| = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{غلق} \\ |a| = 1 \Rightarrow a = \pm 1 \end{cases}$$

پس به ازای دو مقدار $a = 1$ و $a = -1$ ، رابطه داده شده برقرار است.

۵۶ ۲

تابع f را به صورت ساده تر می‌نویسیم:

$$f(x) = \begin{cases} 7 - 3x & ; x > 1 \text{ یا } x < -1 \\ -2x & ; -1 < x < 1 \end{cases}$$

ملاحظه می‌شود که این تابع به ازای $x = 1$ و $x = -1$ تعریف نمی‌شود.

برای محاسبه مقادیر $f(1+a^2)$ و $f(\frac{-a^2}{1+a^2})$ ابتدا باید محدوده‌های $1+a^2$ و $\frac{-a^2}{1+a^2}$ را مشخص کنیم:

$$1+a^2 \geq 1 \quad \frac{-a^2}{1+a^2} \leq 0$$

اگر $a = 0$ ، آن‌گاه $f(1+a^2) = f(1)$ می‌شود، می‌دانیم تابع f در $x = 1$ تعریف نمی‌شود پس با شرط $a \neq 0$ ، عبارت $1+a^2$ همواره بزرگتر از یک شده و در نتیجه برای محاسبه $f(1+a^2)$ از ضابطه اول استفاده می‌کنیم:

$$f(1+a^2) = 7 - 3(1+a^2) = -3a^2 + 4$$

حال کسر $\frac{a^2}{1+a^2}$ را در نظر بگیرید. چون عبارت صورت و مخرج نامنفی و عبارت مخرج همواره از صورت کسر بزرگتر است، داریم:

$$0 \leq \frac{a^2}{1+a^2} < 1 \Rightarrow -1 < \frac{-a^2}{1+a^2} \leq 0$$

پس برای محاسبه $f(\frac{-a^2}{1+a^2})$ از ضابطه دوم استفاده می‌کنیم:

$$f(\frac{-a^2}{1+a^2}) = -2(\frac{-a^2}{1+a^2}) = \frac{2a^2}{1+a^2}$$

در انتها با حل معادله، مقادیر a را تعیین می‌کنیم:

$$f(1+a^2) = f(\frac{-a^2}{1+a^2}) \Rightarrow -3a^2 + 4 = \frac{2a^2}{1+a^2}$$

$$\Rightarrow -3a^2 - 3a^2 + 4 + 4a^2 = 2a^2$$

$$\Rightarrow 3a^2 + a^2 - 4 = 0 \xrightarrow{\substack{\text{مجموع ضرایب} \\ \text{صفر است}}} 3t^2 + t - 4 = 0 \quad \begin{cases} t_1 = 1 \\ t_2 = \frac{c}{a} = -\frac{4}{3} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a^2 = 1 \Rightarrow a = \pm 1 \\ a^2 = -\frac{4}{3} \end{cases} \quad \text{غلق}$$

اختلاف مقادیر $a = 1$ و $a = -1$ برابر ۲ است.

۵۲ ۳

به ازای هر x ، مقدار $f(x)$ همواره مثبت می‌باشد، پس حاصل $-f(x)$ همواره منفی است و برای تشکیل عبارت $f(-f(x))$ باید از ضابطه دوم استفاده کنیم:

$$f(-f(x)) = 1 \Rightarrow f(f(-f(x))) = f(1) = 1 + 2 = 3$$

منفی

۵۳ ۴

تابع f را به صورت چندضابطه‌ای می‌نویسیم. چون $f(2) = 3$ و در بازه $[0, 2]$ تابع ثابت است، پس در این بازه $f(x) = 3$ می‌باشد. از طرفی برای اعداد منفی، خطی است که از نقاط $(-3, 0)$ و $(-5, -2)$ می‌گذرد، حال معادله این خط را به دست می‌آوریم:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-2 - 0}{-5 - (-3)} = \frac{-2}{-2} = 1$$

$$y - y_1 = m(x - x_1) \Rightarrow y - 0 = 1(x + 3) \Rightarrow y = x + 3$$

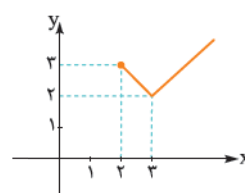
بنابراین داریم:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & ; x > 2 \\ 3 & ; 0 \leq x \leq 2 \\ x + 3 & ; x < 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(-1) = 2; f(1) = 3; f(3) = 9; f(-3) = 0$$

یعنی هر چهار مقدار، صحیح است.

۵۴ ۲

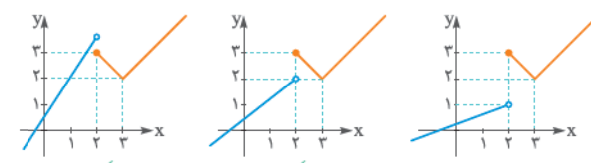


ابتدا نمودار $y = |x-3| + 2$ را در بازه $[2, +\infty)$ رسم می‌کنیم. برای این کار، نمودار $y = |x|$ را ۳ واحد به سمت راست و ۲ واحد به سمت بالا انتقال می‌دهیم:

توجه داشته باشید که اگر شیب خط $y = ax + \frac{1}{p}$ منفی یا صفر باشد، برد تابع نمی‌تواند $\mathbb{R}$ باشد. مقدار تابع $y = ax + \frac{1}{p}$ به ازای $x = 2$ برابر $y = 2a + \frac{1}{p}$ است، پس برد این قسمت از تابع، بازه $(-\infty, 2a + \frac{1}{p})$ می‌شود. از طرفی برد تابع $y = |x-3| + 2$ به صورت بازه $[2, +\infty)$ است، پس باید $2a + \frac{1}{p} \geq 2$ باشد تا برد $f(x)$ تمام مقادیر اعداد حقیقی را پوشش دهد و برابر $\mathbb{R}$ شود. بنابراین:

$$2a + \frac{1}{p} \geq 2 \Rightarrow 2a \geq \frac{3}{p} \Rightarrow a \geq \frac{3}{4}$$

برای درک بهتر، به نمودار $f(x)$ در سه حالت $2a + \frac{1}{p} = 2$ ، $2a + \frac{1}{p} < 2$ و $2a + \frac{1}{p} > 2$ توجه کنید:



همان طور که ملاحظه می‌شود از سمت راست در اولین نمودار $2a + \frac{1}{p} < 2$ است و برد $f(x)$ برابر $\mathbb{R}$ نمی‌شود، ولی در دو حالت بعدی برد تابع برابر $\mathbb{R}$ است.