



مهر و ماه



هومان

مرکز تحقیقاتی علوم انسانی



• درسنامه های جامع با موشکافی و تحلیل کامل متن کتاب درسی

• بیش از ۹۳۰ سؤال متنوع امتحانی

خلاصه کپسولی



۱۳ کاربرگ امتحانی



به نام خدای مهربان



• برای دریافت آخرین
امتحان نهایی
این کد رو اسکن کن.



مقدمه

سلام خدمت دانش آموزان پرتلاش

همان طور که می دانید با تغییراتی که صورت گرفته، یعنی حذف دروس عمومی از کنکور و قطعی شدن تأثیر نمرات امتحان نهایی در قبولی دانشگاه، گرفتن نمره کامل در امتحانات نهایی از قبل سخت تر خواهد شد.

پیش بینی می شود که هم سطح دشواری سؤالات تغییر کرده و سؤالات سخت تر می شود و هم رقابت بین دانش آموزان برای برتری (به خصوص دانش آموزانی که در تست ضعیف تر هستند و روی سؤالات تشریحی امتحانات نهایی حساب باز کردند) بیشتر خواهد شد. پس فرض کن که در دوی مارا تن داری می دوی و یک لحظه تردیدت باعث جا ماندن از این مسیر آینده ساز می شود.

خبر خوب اینکه کتابی که پیش روی شماست تلاش کرده تا هر آنچه که برای موفقیت نیاز دارید، فراهم نماید، چه از لحاظ درسنامه های کاربردی و مطابق با رویکرد امتحان نهایی و چه از نظر بانک سؤالات امتحان نهایی و طبقه بندی درس به درس و بخش بندی سؤالات در هر درس. همچنین پاسخنامه های واقعاً تشریحی به همراه نکات امتحانی و جمع بندی، به برطرف شدن ایرادات احتمالی شما کمک می کند.

پس اگر به دنبال کتابی هستید که تمام مطالب کتاب درسی را به همراه بررسی و موشکافی نکات آن، مدنظر قرار داده باشد، توصیه می کنیم خواندن کتاب **بیست و یک** را در اولویت خود قرار دهید. این کتاب از نظر تعداد، تنوع و سطح دشواری سؤالات و نیز از نظر دسته بندی مطالب، هر آنچه را که برای موفقیت دانش آموزان نهایی لازم است، تأمین کرده است. پس با امید و تلاش و توکل به یگانه خالق هستی، این کتاب را شروع کنید و لحظه ای از رسیدن به موفقیت در این مسیر پر فراز و نشیب ولی شیرین از حرکت نایستید.

ساختار کتاب

این کتاب شامل قسمت های متنوع و کاربردی است که در ادامه به صورت مختصر به آن اشاره شده است.

کتاب پرسؤال

مشاوره: هر درس با یک مشاوره کاربردی شروع می شود که در آن علاوه بر بارم درس در امتحانات، عنوان مباحث مهم درس نیز آورده شده است.
درسنامه: درسنامه این کتاب حاوی تمامی مطالب مهم و اسامی کتاب است که با خواندن آن دیگر نیازی به مراجعه به کتاب درسی ندارید.
سؤالات امتحانی: در پایان هر درس سؤالات متنوع و کاملی آورده شده، در طرح سؤالات هم تلاش کردیم از انواع مدل هایی که تاکنون در امتحانات نهایی سؤال طرح شده، استفاده کنیم. همچنین در انتهای هر بخش سؤالات دشوارتر و خلاقانه تر با علامت **+۲۰** مشخص شده که شما را بیشتر به کسب نمره ۲۰ نزدیک می کند.

کتاب کاربردگ امتحانی

آزمون های درس به درس: این آزمون ها را به سبک و سیاق امتحان نهایی طراحی کردیم؛ همچنین سعی کردم تمام نکات مهم امتحان خیز هر درس، در قالب این آزمون ها بیاید. بنابراین پس از خواندن هر درس، یک امتحان نهایی در حد همان درس در انتظارتان است.
آزمون های جامع: پس از آزمون های درس به درس، آزمون های جامع آوردیم. از این آزمون ها، دو آزمون تألیفی نیم سال اول، و مابقی آزمون های جامع شبیه ساز نوبت دوم و آزمون های نهایی برگزار شده است. حتماً پس از مطالعه کل کتاب به این آزمون ها بپردازید.

کتابچه خلاصه کپسولی

اما بچه ها برایتان یک هدیه کوچک، اما بسیار کاربردی گذاشتیم. «خلاصه کپسولی» که در اصل خلاصه کل کتاب است و شامل مهم ترین و پرتکرارترین نکات امتحان نهایی است.

فهرست

فصل اول: آشنایی با استدلال و منطق ریاضی

درس ۱: گزاره‌ها و ترکیب گزاره‌ها

درسنامه	۶
سؤالات امتحانی	۱۵
پاسخ‌نامه	۱۰۲

درس ۲: استدلال ریاضی

درسنامه	۲۳
سؤالات امتحانی	۲۸
پاسخ‌نامه	۱۱۰

فصل دوم: تابع

درس ۱: توابع ثابت، چندضابطه‌ای و همانی

درسنامه	۳۴
سؤالات امتحانی	۴۶
پاسخ‌نامه	۱۱۳

درس ۲: توابع پلکانی و قدم‌مطلق

درسنامه	۵۳
سؤالات امتحانی	۶۱
پاسخ‌نامه	۱۲۰

درس ۳: اعمال بر روی توابع

درسنامه	۶۷
سؤالات امتحانی	۷۵
پاسخ‌نامه	۱۲۶

فصل سوم: آمار

درس ۱: شاخص‌های آماری

درسنامه	۸۰
سؤالات امتحانی	۸۶
پاسخ‌نامه	۱۳۰

درس ۲: سری‌های زمانی

درسنامه	۹۱
سؤالات امتحانی	۹۶
پاسخ‌نامه	۱۳۴

اعمال بر روی توابع



مشاوره: بالاخره رسیدیم به آخرین درس فصل تابع، از نظر مفهومی این درس نیاز به تمرکز بیشتری داره پس وقتی داریم این درس رو می خونید به قول معروف صدتونو بذارین و کاملاً حواستون به درس باشه. در این درس از دامنه توابع خیلی استفاده می کنیم، به همین دلیل اولش اومدم روش پیدا کردن دامنه توابع مختلف رو آموزش دادم. ضمناً اشتراک، اجتماع و تفاضل رو دوباره درس دادم چون در اعمال روی توابع باهاشون کار داریم. (البته فقط با اشتراک و تفاضل کار داریم) در این درس توابع f و g رو یا به شکل زوج مرتبی میدن یا ضابطه ای و یا نموداری و از ما میخوان که توابعی مثل $f+g$ ، $f-g$ ، $f \times g$ و $\frac{f}{g}$ رو به دست بیاریم. البته خیلی وقتها نمودار این توابع رو هم از ما میخوان. شاید بگم ساده ترین نوع سؤال این درس، وقتی هست که f و g به شکل زوج مرتبی داده میشن که در امتحانات نهایی و شبه نهایی، معمولاً از این مدل به شما سؤال میدن، مدل نموداری هم در امتحان نهایی دیده شده ولی تاکنون ضابطه جبری توابع $f \pm g$ ، $f \times g$ و $\frac{f}{g}$ در هیچ امتحانی نیومده پس باید حدس زد که در امتحان شما احتمال اینکه از ضابطه هم سؤال بیاد، هست. چون در جریان هستین که تاکنون امتحانای نهایی زیادی برگزار نشده و ما نمی تونیم همین چند دوره برگزار شده رو ملاک قرار بدیم. ضمناً از این درس در خردادماه حدود ۳ نمره سؤال میاد، پس با درس مهمی طرف هستیم. چیه؟ باز که داریم منو چپ چپ نیگا می کنین. برید سراغ مطالعه این درس دیگه، نکنه منتظر هستین که خودم از توی کتاب پیام بیرون حضوری بهتون آموزش بدم!

تعیین دامنه توابع معروف

قبل از اینکه وارد بحث اصلی بشیم، شما باید بلد باشین دامنه هر تابع چند جمله ای و هر تابع کسری رو به دست بیارین. به توابعی مثل $f(x) = x^2 - 6x + 2$ ، $g(x) = 2x - 3$ و $h(x) = 1$ چند جمله ای گفته میشه و دامنه همه اون ها برابر $\mathbb{R}$ است، یعنی x هر عدد حقیقی دلخواه می تونه باشه. به توابعی مثل $f(x) = \frac{3}{x-1}$ ، $g(x) = \frac{x^2-1}{[x]}$ و $h(x) = \frac{x+2}{|x-1|}$ توابع کسری می گیم که برای پیدا کردن دامنه اون ها، اول مخرجشون رو مساوی با صفر می ذاریم و بعدش از فرمول مقابل استفاده می کنیم:

{ریشه یا ریشه های مخرج} - $\mathbb{R}$ = دامنه

دامنه چند تابع کسری رو با هم تعیین می کنیم:

الف $f(x) = \frac{3}{x-1}$

D_f یعنی دامنه تابع f

مخرج = 0 $\Rightarrow x-1=0 \Rightarrow x=1 \Rightarrow D_f = \mathbb{R} - \{1\}$

ب $g(x) = \frac{x-1}{x^2-4}$

مخرج = 0 $\Rightarrow x^2-4=0 \Rightarrow x^2=4 \xrightarrow{\text{جذر}} x=\pm 2 \Rightarrow D_g = \mathbb{R} - \{-2, +2\}$

ج $h(x) = \frac{2x-4}{|x|}$

مخرج = 0 $\Rightarrow |x|=0 \Rightarrow x=0 \Rightarrow D_h = \mathbb{R} - \{0\}$

د $k(x) = \frac{5x^2-3x+6}{[x]}$

مخرج = 0 $\Rightarrow [x]=0 \Rightarrow 0 \leq x < 1 \Rightarrow D_k = \mathbb{R} - \{0 \leq x < 1\}$

ه $i(x) = \frac{x-3}{x^2+16}$

مخرج = 0 $\Rightarrow x^2+16=0 \Rightarrow x^2=-16 \Rightarrow$ تعریف شده است. $\mathbb{R}$ دامنه در همه توابع و این تابع و این تابع $\mathbb{R}$ تعریف شده است. $\Rightarrow D_i = \mathbb{R}$

و $j(x) = \frac{1}{|x-3|-2}$

مخرج = 0 $\Rightarrow |x-3|-2=0 \Rightarrow |x-3|=2 \Rightarrow x-3=\pm 2 \Rightarrow \begin{cases} x-3=2 \Rightarrow x=5 \\ x-3=-2 \Rightarrow x=1 \end{cases} \Rightarrow D_j = \mathbb{R} - \{1, 5\}$



اعمال روی توابع

۱. f و g به صورت زوج مرتب باشند

اگر f و g دو تابع باشند که به شکل زوج مرتبی به ما داده بشن، برای محاسبه توابعی مثل $f+g$ ، $f-g$ ، $f \times g$ و $\frac{f}{g}$ باید این عملیات رو روی دامنه مشترک f و g انجام بدیم. در مورد $\frac{f}{g}$ باید دقت کنیم که اگر مخرج یعنی g صفر بود باید اون زوج مرتب رو کلاً حذف کنیم، مثلاً فرض کنیم که $f = \{(-1, 2), (4, 2), (10, 20)\}$ و $g = \{(-1, 1), (3, 1), (10, 5)\}$ داده شده باشن. دامنه مشترک (عضوهای اول مشترک) عبارت‌اند از $\{-1, 10\}$ پس خواهیم داشت:

$$\begin{cases} (-1, 2) \in f \\ (-1, 1) \in g \end{cases} \Rightarrow (-1, 2+1) \in f+g \Rightarrow (-1, 3) \in f+g$$

$$\begin{cases} (10, 20) \in f \\ (10, 5) \in g \end{cases} \Rightarrow (10, 20+5) \in f+g \Rightarrow (10, 25) \in f+g$$

$$f+g = \{(-1, 3), (10, 25)\}$$

پس تابع $f+g$ برابر میشه با:

$$\begin{cases} (-1, 2) \in f \\ (-1, 1) \in g \end{cases} \Rightarrow (-1, \frac{2}{1}) \in \frac{f}{g} \Rightarrow (-1, 2) \in \frac{f}{g}$$

حالات تابع $\frac{f}{g}$ رو به دست میاریم:

$$\begin{cases} (10, 20) \in f \\ (10, 5) \in g \end{cases} \Rightarrow (10, \frac{20}{5}) \in \frac{f}{g} \Rightarrow (10, 4) \in \frac{f}{g}$$

$$\frac{f}{g} = \{(-1, 2), (10, 4)\}$$

پس تابع $\frac{f}{g}$ برابر میشه با:

نکته نهایی: اگر تابع f به شکل زوج مرتبی بود و تابع f^2 از ما خواسته شد فقط کافیست عضوهای دوم زوج مرتب‌ها رو به توان ۲ برسونیم، مثلاً:

$$f = \{(1, 6), (2, 3), (7, -8)\} \Rightarrow f^2 = \{(1, 36), (2, 9), (7, 64)\}$$

همچنین اگر f داده شد و حاصل kf از ما خواسته شد (k عددی حقیقیه) باید تمام عضوهای دوم زوج مرتب‌ها رو در عدد k ضرب کنیم، مثلاً در تابع $f = \{(1, 6), (2, 3), (7, -8)\}$ می‌خوایم حاصل $3f$ رو به دست بیاریم:

$$3f = \{(1, 18), (2, 9), (7, -24)\}$$

مثال: با فرض آنکه $f = \{(-4, 2), (0, 3), (11, 0), (20, 4)\}$ و $g = \{(-4, 4), (11, 2), (23, 5)\}$ باشند، توابع زیر را تشکیل دهید:

الف f^2

ب g^2

ج $4f$

د $\frac{g}{2}$

ه $f-g$

و $f \times g$

ز $\frac{g}{f}$

ح $f+g$

ط $(f+g) \times (f-g)$

ی $\frac{f+g}{f-g}$

ک $f^2 + g^2$

ل $4f + \frac{g}{2}$

م $\frac{1}{f}$

حل:

$$f^2 = \{(-4, 4), (0, 9), (11, 0), (20, 16)\}$$

الف عضوهای دوم زوج مرتب‌های f رو به توان ۲ می‌رسونیم:

$$g^2 = \{(-4, 16), (11, 4), (23, 25)\}$$

ب این بار عضوهای دوم g رو به توان ۲ می‌رسونیم:

$$4f = \{(-4, 8), (0, 12), (11, 0), (20, 16)\}$$

ج عضوهای دوم f رو در عدد ۴ ضرب می‌کنیم:

$$\frac{g}{2} = \{(-4, 2), (11, 1), (23, \frac{5}{2})\}$$

د عضوهای دوم g رو بر ۲ تقسیم می‌کنیم:

$$f-g = \{(-4, 2-4), (11, 0-2)\} = \{(-4, -2), (11, -2)\}$$

ه در دامنه مشترک، عضوهای دوم f رو منهای عضوهای دوم g می‌کنیم:

$$f \times g = \{(-4, 2 \times 4), (11, 0 \times 2)\} = \{(-4, 8), (11, 0)\}$$

و در دامنه مشترک، عضوهای دوم f رو در عضوهای دوم g ضرب می‌کنیم:

$$\frac{g}{f} = \{(-4, \frac{4}{2}), (11, \frac{2}{0})\}$$

ز در دامنه مشترک، عضوهای دوم g رو بر عضوهای اول f تقسیم می‌کنیم:

$$\frac{g}{f} = \{(-4, 2)\}$$

ولی کسر $\frac{2}{0}$ تعریف نشده است، پس زوج مرتب $(11, \frac{2}{0})$ کلاً حذف میشه:



$$f + g = \{(-4, 2+4), (11, 0+2)\} = \{(-4, 6), (11, 2)\}$$

ج در دامنه مشترک، عضوهای دوم f رو با عضوهای دوم g جمع می‌کنیم:

ب $f + g$ و $f - g$ رو در قسمت‌های «ح» و «ه» به دست آوردیم حالا اون‌ها رو در هم ضرب می‌کنیم:

$$(f + g) \times (f - g) = \{(-4, 6 \times (-2)), (11, 2 \times (-2))\} = \{(-4, -12), (11, -4)\}$$

$$\frac{f + g}{f - g} = \left\{(-4, \frac{6}{-2}), (11, \frac{2}{-2})\right\} = \{(-4, -3), (11, -1)\}$$

ی این بار $(f + g)$ رو بر $(f - g)$ تقسیم می‌کنیم:

ک هم f^2 و هم g^2 رو در قسمت‌های «الف» و «ب» حساب کردیم، پس فقط کافیه اون‌ها رو با هم جمع کنیم:

$$f^2 + g^2 = \{(-4, 4+16), (11, 0+4)\} = \{(-4, 20), (11, 4)\}$$

ل هم $(4f)$ و هم $(\frac{g}{4})$ رو در قسمت‌های «ج» و «د» به دست آوردیم، حالا کافیه اون‌ها رو با هم جمع کنیم:

$$4f + \frac{g}{4} = \{(-4, 8+2), (11, 0+1)\} = \{(-4, 10), (11, 1)\}$$

م برای ساختن تابع $\frac{1}{f}$ کافیه عدد ۱ رو بر عضوهای دوم f تقسیم کنیم (مؤلفه‌های دوم زوج‌ها رو معکوس می‌کنیم):

$$\frac{1}{f} = \{(-4, \frac{1}{6}), (0, \frac{1}{3}), (11, \frac{1}{2}), (20, \frac{1}{4})\} = \{(-4, \frac{1}{6}), (0, \frac{1}{3}), (20, \frac{1}{4})\}$$

حذف می‌شه

حالا اگه مثلاً $\frac{2}{f}$ رو می‌خواستیم، عدد ۲ رو بر عضوهای دوم f تقسیم می‌کردیم.

مشاوره نهایی: خدا رو شکر تا الان طراحان بیشتر به سراغ توابع زوج مرتبی برای اعمال بینشان رفتن، البته در سال‌های آینده به احتمال زیاد از همه حالت‌های ممکن سؤال میدن. مثال زیر، مشابه امتحانات نهایی چند سال اخیر.

☆ تیب مورد علاقه طراح نهایی

سؤال ؟ با فرض آنکه $f = \{(-2, 4), (1, 0), (3, 8)\}$ و $g = \{(-2, 2), (\frac{3}{4}, 1), (3, -1)\}$ باشند، توابع $f - 2g$ و $\frac{g}{f}$ را تشکیل دهید. (مشابه خرداد ۱۴۰۲ و ۱۴۰۳)

پاسخ دامنه مشترک f و g به صورت $\{-2, 3\}$ است، لذا:

$$\frac{g}{f} = \left\{(-2, \frac{2}{4}), (3, \frac{-1}{8})\right\} = \left\{(-2, \frac{1}{2}), (3, -\frac{1}{8})\right\}$$

$$2g = \{(-2, 4), (\frac{3}{2}, 2), (3, -2)\}$$

$$\Rightarrow f - 2g = \{(-2, 4-4), (3, 8-(-2))\} = \{(-2, 0), (3, 10)\}$$

۲ f و g به صورت ضابطه‌ای باشند

حالا ممکنه توابع f و g به شکل زوج مرتب داده نشن و فرمول اون‌ها در متن سؤال به ما داده بشه، در این صورت از روابط زیر استفاده می‌کنیم:

اشتراک

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) \Rightarrow D_{f+g} = D_f \cap D_g$$

$$(f - g)(x) = f(x) - g(x) \Rightarrow D_{f-g} = D_f \cap D_g$$

$$(f \times g)(x) = f(x) \times g(x) \Rightarrow D_{f \times g} = D_f \cap D_g$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \Rightarrow D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g - \{x | g(x) = 0\}$$

حالا شاید بیرسین D_f و D_g رو از کجا بیاریم؟ ببینین خود متن سؤال، معمولاً دامنه‌های f و g رو به ما میدن ولی اگه ندادن خودمون اون‌ها رو به دست میاریم

(روش‌های تعیین دامنه رو کمی قبل‌تر گفته‌ایم) پس نگران D_f و D_g نباشین. فرض کنین $f(x) = \frac{x-3}{x-2}$ و $g(x) = \frac{1+x}{x}$ باشن، حالا می‌خوایم توابع $f \pm g$.

$f \times g$ ، $\frac{f}{g}$ و $\frac{g}{f}$ رو به دست بیاریم.

$$f(x) = \frac{x-2}{x-2}$$

$$\text{مخرج} = 0 \Rightarrow x-2=0 \Rightarrow x=2 \Rightarrow D_f = \mathbb{R} - \{2\}$$

$$g(x) = \frac{1+x}{x}$$

$$\text{مخرج} = 0 \Rightarrow x=0 \Rightarrow D_g = \mathbb{R} - \{0\}$$

$$D_{f+g} = D_{f-g} = D_{f \cdot g} = D_f \cap D_g = (\mathbb{R} - \{2\}) \cap (\mathbb{R} - \{0\}) = \mathbb{R} - \{0, 2\}$$

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) = \frac{x-2}{x-2} + \frac{1+x}{x}$$

$$(f-g)(x) = f(x) - g(x) = \frac{x-2}{x-2} - \frac{1+x}{x}$$

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) = \left(\frac{x-2}{x-2}\right) \left(\frac{1+x}{x}\right)$$

این معادله رو حل می‌کنیم

$$D_{\frac{f}{g}} = \underbrace{D_f \cap D_g}_{\text{قبلاً حساب کردیم}} - \{x | g(x) = 0\} = \mathbb{R} - \{0, 2\} - \{x | \frac{x+1}{x} = 0\}$$

حالا به سراغ دامنه تابع $\frac{f}{g}$ میریم:

برای حل معادله $\frac{x+1}{x} = 0$ توجه کنیم الان حاصل یک کسر برابر صفر شده پس فقط صورت کسر، می‌تونه صفر باشه:

$$x+1=0 \Rightarrow x=-1$$

$$D_{\frac{f}{g}} = \mathbb{R} - \{0, 2\} - \{-1\} = \mathbb{R} - \{-1, 0, 2\}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\frac{x-2}{x-2}}{\frac{x+1}{x}} = \frac{x(x-2)}{(x+1)(x-2)}$$

ضابطه $\frac{f}{g}$ هم به صورت مقابل هست:

$$D_{\frac{g}{f}} = D_f \cap D_g - \{x | f(x) = 0\} = \mathbb{R} - \{0, 2\} - \{x | \frac{x-2}{x-2} = 0\} = \mathbb{R} - \{0, 2\} - \{2\} = \mathbb{R} - \{0, 2, 2\}$$

حالا سراغ دامنه و ضابطه تابع $\frac{g}{f}$ میریم:

$$\frac{g}{f} = \frac{\frac{x+1}{x}}{\frac{x-2}{x-2}} = \frac{(x+1)(x-2)}{x(x-2)}$$

ضابطه $\frac{g}{f}$ هم برابره با:

مثال: اگر $f(x) = [x] - 3$ با دامنه $0 \leq x \leq 1$ و $g(x) = |x| - 2$ با دامنه $-1 \leq x < 1$ باشند، ضابطه، دامنه و نمودار توابع $f+g$ ، $f \times g$ و $\frac{f}{g}$ را

(مشابه تمرین کتاب درسی)

به دست آورید. (نیازی به رسم نمودار $\frac{f}{g}$ نیست.)

حل: ابتدا دامنه، ضابطه و نمودار تابع $f+g$ رو مشخص می‌کنیم، دامنه‌های f و g به ما داده شدن، پس خواهیم داشت:

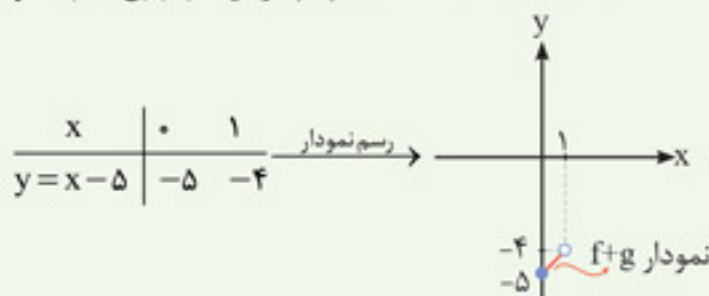
$$\text{دامنه } D_{f+g} = D_f \cap D_g = \{0 \leq x \leq 1\} \cap \{-1 \leq x < 1\} = \{0 \leq x < 1\}$$

$$\text{ضابطه } (f+g)(x) = f(x) + g(x) = [x] - 3 + |x| - 2 = [x] + |x| - 5$$

ولی ضابطه بالا رو میشه ساده‌تر کرد، الان می‌دونیم $0 \leq x < 1$ هست، پس $[x] = 0$ و $|x| = x$ خواهد بود، لذا:

$$y = (f+g)(x) = [x] + |x| - 5 = 0 + x - 5 = x - 5$$

حالا نمودار این تابع رو در دامنه $0 \leq x < 1$ رسم می‌کنیم:



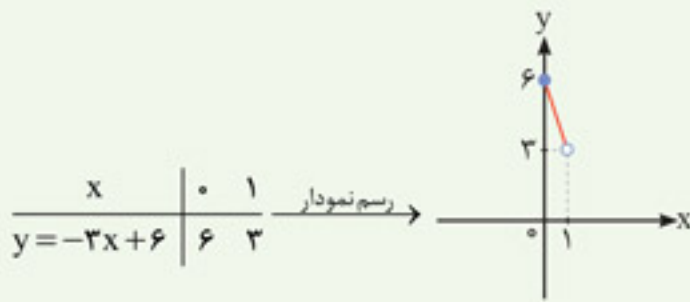
$$\text{دامنه } D_{f \times g} = D_f \cap D_g = \{0 \leq x < 1\}$$

حالا سراغ دامنه، ضابطه و نمودار تابع $f \times g$ میریم:

$$\text{ضابطه } (f \times g)(x) = f(x) \times g(x) = ([x] - 3)(|x| - 2) = (0 - 3)(x - 2) = -3x + 6$$

می‌دونیم برابر
x همیشه
می‌دونیم برابر
صفر همیشه

حالا برای رسم نمودار این تابع، از جدول نقطه یابی استفاده می کنیم:



و در نهایت به سراغ تابع $\frac{f}{g}$ میریم، ابتدا دامنه و سپس ضابطه اون رو به دست میاریم:

$$D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g - \{x | g(x) = 0\} = \{0 \leq x < 1\} - \{x | |x| - 2 = 0\} = \{0 \leq x < 1\} - \{\pm 2\} = \{0 \leq x < 1\}$$

$|x| = 2$
 $x = \pm 2$

توجه کنین اعداد 2 و -2 در محدوده $0 \leq x < 1$ وجود ندارن که بخوایم حذفشون کنیم، پس کلاً اوت شدن و فقط $0 \leq x < 1$ باقی موند.

$$\text{ضابطه: } \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{[x] - 3}{|x| - 2} = \frac{-3}{x - 2}$$

• به دست آوردن f یا g با داشتن f ± g یا f × g و یا $\frac{f}{g}$

خب همیشه هم این طوری نیست که f و g رو به ما بدن و بگن مثلاً $f \times g$ رو حساب کن. بعضی وقتا برعکسه، یعنی فقط یکی از توابع f یا g رو میدن و مثلاً $f \times g$ رو هم میدن و ما باید تابعی رو که نداشتیم، پیدا کنیم. مثلاً فرض کنین $f(x) = x - 2$ و $f \times g = x^2 - 4$ حالا می خوایم تابع g رو به دست بیاریم (دقت کنین منظورمون از g همون $g(x)$ هست):

$$f \times g = x^2 - 4 \Rightarrow (x - 2) \times g = x^2 - 4 \xrightarrow{\text{مزدوج تجزیه می کنیم}} (x - 2) \times g = (x - 2)(x + 2) \Rightarrow g = x + 2$$

حالا این بار فرض کنین $f = \{(2, 6), (5, 0), (10, 12)\}$ و $g - f = \{(1, 7), (2, 9)\}$ باشن و می خوایم تابع g رو به دست بیاریم:

$$g - f = \{(1, 7), (2, 9)\} \Rightarrow g = f + \{(1, 7), (2, 9)\} \Rightarrow g = \{(2, 6), (5, 0), (10, 12)\} + \{(1, 7), (2, 9)\} = \{(2, 6+9)\} = \{(2, 15)\}$$

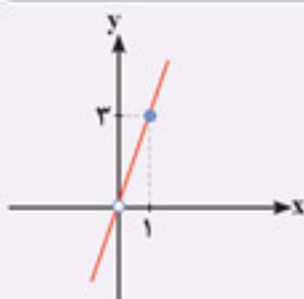
f رو می بریم سمت راست

نکته نهایی: البته دقت کنین در این جور مسائل که زوج مرتب ها رو داریم، جواب نهایی منحصر به فرد نیست، یعنی الان هر تابعی که شامل (2, 15) باشه و اشتراک دامنه اش با f برابر {2} باشه می تونه یک جواب برای تابع g باشه، مثل توابع مقابل:

$$g = \{(1, 6), (2, 15), (3, -1)\}$$

$$g = \{(7, 4), (2, 15)\}$$

پس این جور مسائل، بی شمار جواب دارن که شما هر کدوم رو بنویسین کافیه.



مثال: اگر $f(x) = x^2$ و نمودار تابع $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$ به صورت زیر باشد، ضابطه تابع $g(x)$ و مقدار $g(10)$ را

(مشابه تمرین کتاب درسی)

به دست آورید.

حل: خب الان نمودار $\frac{f}{g}$ داده شده که یک خط هست. پس به کمک دو نقطه از خط، شیب و معادله خط رو می نویسیم تا به ضابطه تابع $\frac{f}{g}$ برسیم:

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, B \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix} \Rightarrow m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{0 - 3}{0 - 1} = \frac{3}{1} = 3$$

$$y - y_1 = m(x - x_1) \Rightarrow y - 3 = 3(x - 1) \Rightarrow y = 3x - 3 + 3 \Rightarrow y = 3x \Rightarrow \frac{f}{g} = 3x$$

$$\xrightarrow{\text{به جای f مقدار } x^2 \text{ رو می داریم}} \frac{x^2}{g} = 3x \xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} 3x \cdot g = x^2 \Rightarrow g = \frac{x^2}{3x} = \frac{x}{3}$$

پس ضابطه یا فرمول تابع $g(x)$ به دست اومد. دقت کنین که تو خالی یا توپر بودن مبدأ در نمودار متن سؤال، به خاطر اینه که $g(0) = 0$ و تابع $\frac{f}{g}$ در

$x = 0$ تعریف نمیشه.



● به دست آوردن مقدار توابع $f \pm g$, $f \times g$ و $\frac{f}{g}$ در یک نقطه خاص

فرض کنیم $f(x) = x^2 - 3x$ و $g(x) = |x - 8|$. حالا اگر بکن مقدار تابع $f + g$ رو در نقطه $x = 3$ به دست بیاریم، می‌تونیم به دو روش عمل کنیم. یکی اینکه ابتدا تابع $(f + g)(x)$ رو بسازیم (تشکیل بدیم) و بعدش به جای همه x هاش عدد ۳ رو بذاریم:

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) = x^2 - 3x + |x - 8| \xrightarrow{x=3} (f + g)(3) = 3^2 - 3(3) + |3 - 8| = 9 - 9 + 5 = 5$$

این طوری خونده میشه: مقدار تابع $f + g$ در نقطه $x = 3$

$$(f + g)(3) = f(3) + g(3) = (3^2 - 9) + |3 - 8| = 5$$

یا اینکه همون اول، جای‌گذاری رو انجام بدیم، یعنی دیگه تابع $f + g$ رو تشکیل ندیم:

شما از هر روشی که دلتون خواست استفاده کنید ولی روش دوم، خیلی بهتره.

مثال: اگر $f = \{(2, 6), (4, 10), (20, 8)\}$ و $g(x) = 3x - 4$ باشند، حاصل $(f - g)(2)$, $(f \times g)(20)$, $(\frac{g}{f})(20)$ و $(\frac{2f + g}{f - g})(4)$ را به دست آورید.

حل:

$$(f - g)(2) = f(2) - g(2) = 6 - \underbrace{3(2) - 4}_2 = 4$$

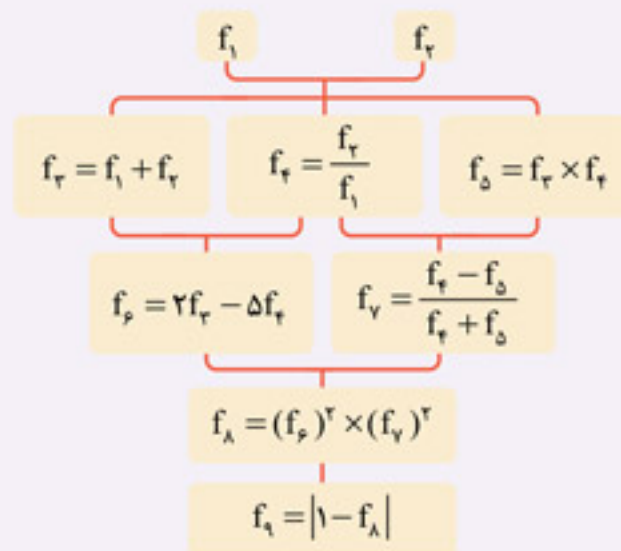
$$(f \times g)(20) = f(20) \times g(20) = 8 \times \underbrace{(3(20) - 4)}_{56} = 448$$

$$(\frac{g}{f})(20) = \frac{g(20)}{f(20)} = \frac{56}{8} = 7$$

$$(\frac{2f + g}{f - g})(4) = \frac{2f(4) + g(4)}{f(4) - g(4)} = \frac{2(10) + 8}{10 - 8} = \frac{28}{2} = 14$$

(مشابه کار در کلاس کتاب درسی)

مثال: با توجه به اینکه $f_1(x) = x + 3$ و $f_2(x) = |4 - x|$ درخت زیر را به ازای $x = 2$ کامل کنید.



حل: در این جور سؤالات، بهتره همون اول، مقدار f_1 و f_2 رو در نقطه داده شده به دست بیاریم:

$$f_1 = x + 3 \xrightarrow{x=2} f_1 = 2 + 3 = 5$$

$$f_2 = |4 - x| \xrightarrow{x=2} f_2 = |4 - 2| = 2$$

حالا بقیه قسمت‌های نمودار درختی رو به دست میاریم:

$$f_3 = f_1 + f_2 = 5 + 2 = 7$$

$$f_4 = \frac{f_2}{f_1} = \frac{2}{5}$$

$$f_5 = f_2 \times f_1 = 2 \times 5 = 10$$

$$f_6 = 2f_3 - 5f_5 = 2(7) - 5(10) = 14 - 50 = -36$$

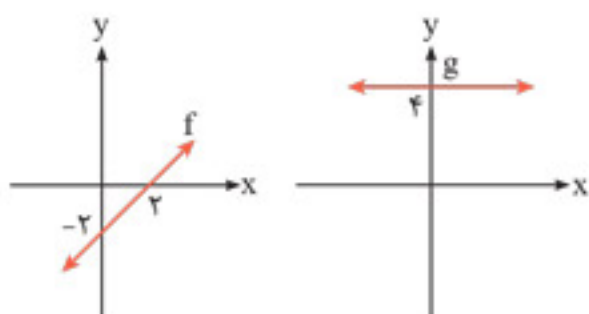
$$f_7 = \frac{f_2 - f_5}{f_1 + f_5} = \frac{2 - 10}{5 + 10} = \frac{-8}{15} = -\frac{8}{15}$$

$$f_8 = (f_6)^2 \times (f_7)^2 = (-36)^2 \times (-\frac{8}{15})^2 = 1296 \times \frac{64}{225} = 368$$

$$f_4 = |1 - f_8| = |1 - 368| = |-367| = 367$$



۳ f و g به صورت نمودار باشند



$$D_f = \mathbb{R}, \quad D_g = \mathbb{R}$$

خب به قسمت آخر اعمال روی توابع رسیدیم. حالا می‌خوایم حالتی رو بررسی کنیم که توابع f و g به صورت نمودار هندسی به ما داده میشن و نمودار توابع $f \pm g$, $f \times g$ و $\frac{f}{g}$ از ما خواسته میشه. نباید بترسین چون مفهوم کار، هیچ فرقی نکرده و فقط حالت‌های نمایش تابع، عوض میشن. فقط باید حواستون باشه که وقتی نمودار تابعی رو بهتون میدن، در واقع خودمون باید دامنه تابع رو از روی نمودار مشخص کنیم. مثلاً فرض کنیم نمودارهای f و g به شکل مقابل باشن:

الان از روی نمودار معلومه که دامنه f و دامنه g هر دو برابر $\mathbb{R}$ هستن:

$$A \begin{vmatrix} 2 \\ -2 \end{vmatrix}, B \begin{vmatrix} 0 \\ -2 \end{vmatrix} \Rightarrow m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-2 - 0}{0 - 2} = 1$$

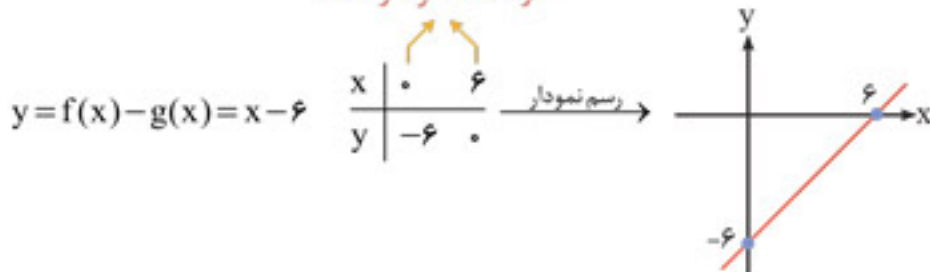
$$y - y_1 = m(x - x_1) \Rightarrow y - 0 = 1(x - 2) \Rightarrow y = x - 2$$

پس ضابطه تابع f هم برابر با $f(x) = x - 2$ شد. حالا به عنوان نمونه، تابع $(f - g)$ رو به دست میاریم:

$$\text{دامنه: } D_{f-g} = D_f \cap D_g = \mathbb{R} \cap \mathbb{R} = \mathbb{R}$$

$$\text{ضابطه: } (f - g)(x) = f(x) - g(x) = (x - 2) - (4) = x - 6$$

دو عدد دلخواه از دامنه



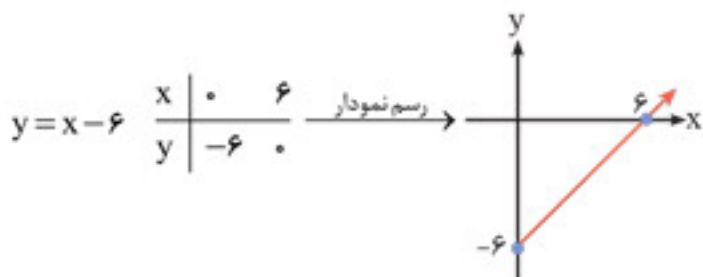
نمودار این تابع هم به راحتی قابل رسم هست:

بچه‌ها اگه در ابتدای حل این سؤال، تابع g به صورت مقابل داده می‌شد، جواب چه تغییری می‌کرد؟

الان بهتون میگم؛ دامنه g الان دیگه $\mathbb{R}$ نیست، بلکه $\{x \geq 0\}$ هست، لذا:

$$\text{دامنه: } D_{f-g} = D_f \cap D_g = \mathbb{R} \cap \{x \geq 0\} = \{x \geq 0\}$$

$$\text{ضابطه: } (f - g)(x) = f(x) - g(x) = (x - 2) - (4) = x - 6$$

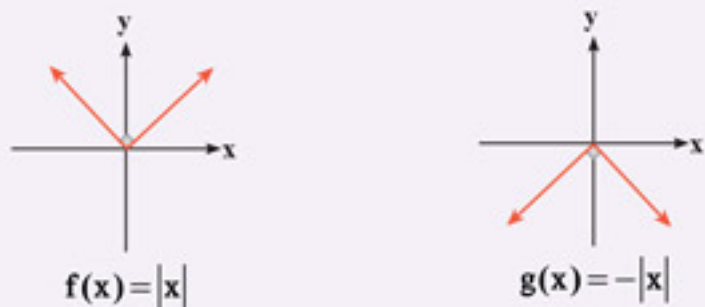


حالا به سراغ نمودار $f - g$ میریم:

ملاحظه می‌کنید که نمودار هم تغییر می‌کنه، یعنی با تغییر دامنه، جواب نهایی هم عوض میشه.

مثال: نمودار توابع f و g داده شده‌اند. دامنه، ضابطه و نمودار توابع $f \cdot g$

و $\frac{f}{g}$ را به دست آورید.



$$D_f = D_g = \mathbb{R}$$

$$\text{دامنه: } D_{f \cdot g} = D_f \cap D_g = \mathbb{R} \cap \mathbb{R} = \mathbb{R}$$

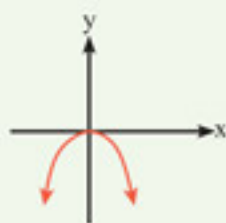
$$\text{ضابطه: } (f \cdot g)(x) = f(x) \times g(x) = |x| \times (-|x|) = -|x| \times |x| = -x^2$$

قبلاً در خواص قدرمطلق گفتیم

حل: از نمودارها معلومه که:

ابتدا سراغ تابع $f \cdot g$ میریم:

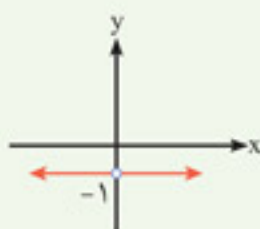
حالا نمودار تابع $y = -x^2$ رو با دامنه $\mathbb{R}$ رسم می‌کنیم:



خب، حالا نوبتی هم باشه نوبت تابع $\frac{f}{g}$ است: دامنه: $D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g - \{x | g(x) = 0\} = \mathbb{R} - \{x | -|x| = 0\} = \mathbb{R} - \{0\}$

ضابطه: $(\frac{f}{g})(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{|x|}{-|x|} = -1$

پس تابع $y = -1$ رو با دامنه $\mathbb{R} - \{0\}$ رسم می‌کنیم:

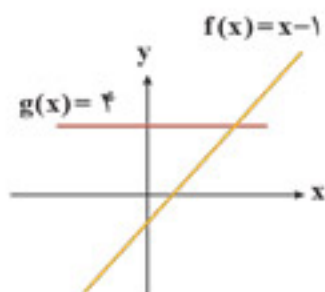


مشاوره نهایی: بعضی وقت‌ها طراح نهایی کمی دلش به حالتون می‌سوزه و میاد سؤال رو ساده‌تر میدره یعنی اولش میاد میگه مثلاً حاصل $f+g$ رو در نقاط $x=1$ و $x=2$ به دست بیار و بعدش میگه نمودار $f+g$ رو رسم کن، یعنی خود طراح داره به ما تقلب می‌رسونه و میگه از این دو نقطه برای رسم نمودار استفاده کن.

☆ تپ مورد علاقه طراح نهایی

سؤال: به کمک نمودارهای رسم‌شده f و g مقدار تابع $f+g$ را در نقاط $x=2$ و $x=3$ به دست آورده و سپس نمودار تابع $f+g$ را رسم کنید.

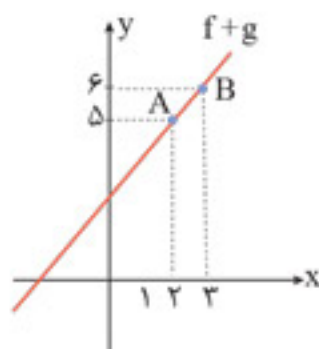
پاسخ



$$(f+g)(2) = f(2) + g(2) = (2-1) + 4 = 5 \Rightarrow A(2, 5)$$

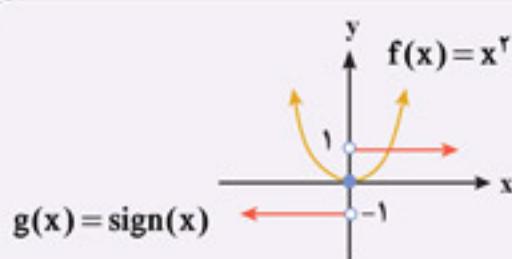
$$(f+g)(3) = f(3) + g(3) = (3-1) + 4 = 6 \Rightarrow B(3, 6)$$

حالا کافیه نقاط A و B رو به هم وصل کرده و از دو طرف امتداد بدیم:



مثال: نمودارهای f و g داده شده‌اند. نمودار توابع $f+g$ و $\frac{f}{g}$ را رسم کنید.

(مشابه فعالیت کتاب درسی)



حل:

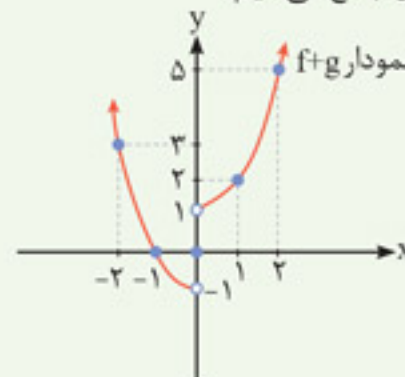
$$f(x) = x^2, g(x) = \text{sign}(x) = \begin{cases} 1 & ; x > 0 \\ 0 & ; x = 0 \\ -1 & ; x < 0 \end{cases}$$

ابتدا سراغ دوست عزیزمون $f+g$ میریم، الان f رو چه جوری باید با g جمع کنیم؟ f فقط یک ضابطه داره ولی g سه تا ضابطه داره. خب کاری نداره، f رو با تک تک ضابطه‌های g جمع می‌کنیم:

$$\text{دامنه: } D_{f+g} = D_f \cap D_g = \mathbb{R} \cap \mathbb{R} = \mathbb{R}$$

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & ; x > 0 \\ x^2 + 0 & ; x = 0 \\ x^2 - 1 & ; x < 0 \end{cases}$$

رسم نمودار





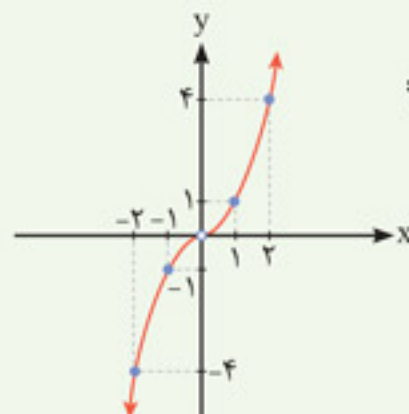
اکنون به سراغ اون یکی دوستمون (یعنی تابع $\frac{f}{g}$) میریم:

دامنه: $D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g - \{x | g(x) = 0\} = \mathbb{R} - \{x | \text{sign}(x) = 0\} = \mathbb{R} - \{0\}$

ضابطه: $(\frac{f}{g})(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \begin{cases} \frac{x^2}{1} & ; x > 0 \\ \frac{x^2}{-1} & ; x < 0 \end{cases}$

$\frac{f}{g} = \begin{cases} x^2 & ; x > 0 \\ -x^2 & ; x < 0 \end{cases}$

رسم نمودار



حالا میریم که نمودار $\frac{f}{g}$ رو به کمک نقطه یابی رسم کنیم:

سؤالات امتحانی

سؤالات جای خالی

۴۰۳. دامنه تابع $y = 5x^2 + x - 1$ است.

۴۰۴. دامنه تابع $y = \frac{x}{x^2 - 4}$ است.

۴۰۵. اگر $A = \{1 \leq x \leq 10\}$ و $B = \{2 \leq x \leq 13\}$ باشد، $A \cap B =$

۴۰۶. $D_{f+g} =$

۴۰۷. $D_{\frac{f}{g}} =$

سؤالات صحیح و غلط

۴۰۸. $A - B = A - (A \cap B)$ است.

۴۰۹. اگر $A = \{2 \leq x \leq 7\}$ و $B = \{2 \leq x < 7\}$ باشد، در این صورت $A - B = \{ \}$ است.

۴۱۰. اگر $f(x) = |x^2 - 1|$ و $g(x) = \frac{1}{x}$ باشد، آنگاه $(f+g)(-1) = -1$ است.

۴۱۱. اگر $f(x) = \begin{cases} x-1 & x \geq 0 \\ 3 & x < 0 \end{cases}$ و $g(x) = \begin{cases} 2-x & x \geq 0 \\ x-1 & x < 0 \end{cases}$ باشد، آنگاه $(f-g)(-5) = -9$ است.

۴۱۲. اگر $f(x) = x^2$ و $D_f = \{1 \leq x \leq 7\}$ و $g(x) = x-1$ و $D_g = \{-1, 1, 2, 3, 5, 8\}$ باشد، آنگاه داریم: $D_{f+g} = \{1, 2, 3, 5\}$ است.

۴۱۳. همیشه دامنه توابع $f+g$ ، $f-g$ ، $f \times g$ با هم برابر است.

سؤالات چهارگزینه‌ای

۴۱۴. دامنه تابع $y = \frac{x}{x^2 - 5x + 6}$ کدام است؟

☐ $\mathbb{R} - \{-1, 6\}$ (۴)

☐ $\mathbb{R} - \{2, 3\}$ (۳)

☐ $\mathbb{R} - \{1, 6\}$ (۲)

☐ $\mathbb{R}$ (۱)

۴۱۵. اگر $f = \{(1, 3), (2, 7), (4, -1)\}$ و $g = \{(3, 1), (2, 4)\}$ باشند، $f-g$ کدام است؟

☐ $\{(0, -3)\}$ (۴)

☐ $\{(0, 3)\}$ (۳)

☐ $\{(2, 3)\}$ (۲)

☐ $\{(2, -3)\}$ (۱)

۴۱۶. اگر $f(x) = x^2 - 1$ و $g(x) = x + 3$ باشد، دامنه تابع $\frac{g}{f}$ کدام است؟

☐ $\mathbb{R} - \{1, -1\}$ (۴)

☐ $\mathbb{R} - \{1\}$ (۳)

☐ $\mathbb{R} - \{-2\}$ (۲)

☐ $\mathbb{R}$ (۱)

۴۱۷. اگر $f = \{(1, 5), (2, 7), (4, 3)\}$ و $g = \{(1, a-1), (2, b+4), (5, 9)\}$ و $g+f$ تابعی همانی باشد، $a+b$ کدام است؟

☐ ۳ (۴)

☐ -۶ (۳)

☐ -۹ (۲)

☐ -۱۲ (۱)

۴۱۸. اگر $f(x) = |x|$ و g تابعی همانی باشد، به ازای کدام مقادیر x تابع $g-f$ ثابت است؟

☐ $x > -1$ (۴)

☐ $x \geq 0$ (۳)

☐ $x \leq 0$ (۲)

☐ $x < 1$ (۱)



سؤالات تشریحی

۴۱۹. اگر $f = \{(1, 2), (3, -1), (4, 7), (8, 0)\}$ و $g = \{(1, -1), (7, 1), (3, 2), (4, -2), (8, 2)\}$ باشد، حاصل عبارت‌های $(\frac{g}{f})(8)$ ، $(g-f)(3)$ ، $(f+g)(1)$ و $(f \cdot g)(4)$ را در صورت وجود به دست آورید.

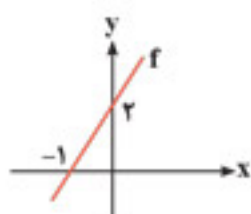
۴۲۰. اگر $f = \{(2, 4), (3, -1), (4, 2), (5, 0)\}$ و $g = \{(1, 2), (2, -2), (3, 4), (4, 1), (5, 9)\}$ باشد، توابع $f+g$ ، $f-g$ ، $f \times g$ ، $\frac{f}{g}$ و $\frac{g}{f}$ را به دست آورید.

۴۲۱. اگر $f = \{(-2, 4), (1, 2), (6, 10), (5, 7)\}$ و $g = \{(1, 4), (3, 9), (6, 5), (5, -7)\}$ باشد، تابع $\frac{f-g}{g+f}$ را به دست آورید.

۴۲۲. اگر $f(x) = x^2 + x^2 + 7x - 1$ و $g = \{(1, -1), (2, 3), (-1, 5), (0, 4)\}$ باشد، حاصل $(\frac{g}{f})(-1)$ ، $(f \times g)(5)$ ، $(g-f)(2)$ ، $(f+g)(1)$ را به دست آورید.

۴۲۳. اگر $f(x) = \text{sign}(x)$ و $g(x) = |1 - x^2|$ باشد، حاصل عبارت‌های $(fg)(0)$ و $(f-g)(-2)$ ، $(f+g)(4)$ را به دست آورید.

۴۲۴. اگر نمودار تابع f به صورت مقابل و $g = \{(-1, 2), (2, 3), (4, 5), (7, -10)\}$ باشد، حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید.



الف) $(f+g)(2)$

ب) $g(f(0))$

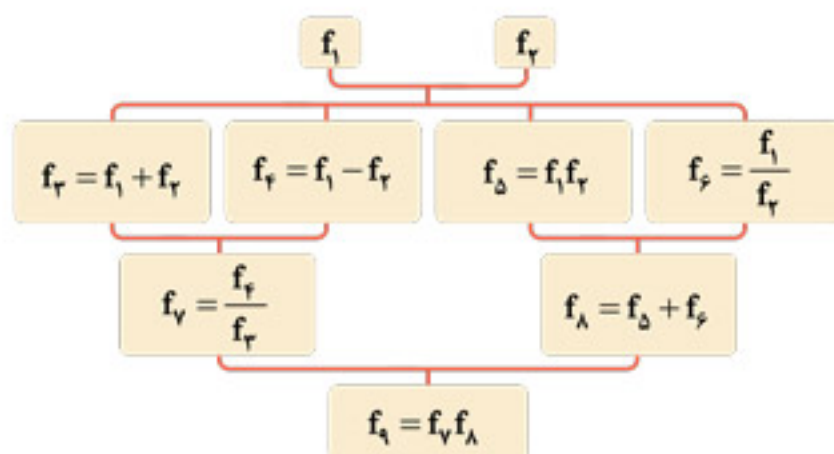
ج) $f(g(4))$

۴۲۵. اگر $f(x) = x - 2$ و $g(x) = x^2 + 4x$ باشد:

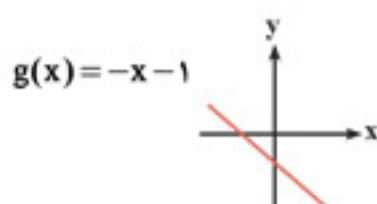
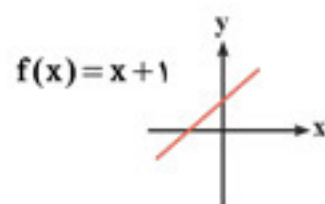
الف) دامنه و ضابطه توابع $(f+g)(x)$ ، $(f-g)(x)$ ، $(f \times g)(x)$ و $(\frac{f}{g})(x)$ را مشخص کنید.

ب) $(f+2g)(1)$ و $(\frac{f}{g})(2)$ را به دست آورید.

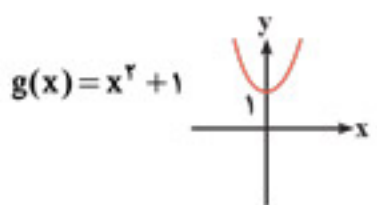
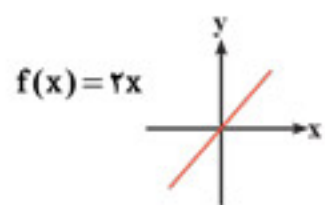
۴۲۶. اگر $f_1(x) = |x+2|$ و $f_2(x) = x - x^2$ باشد، درخت زیر را به ازای $x=2$ کامل کنید.



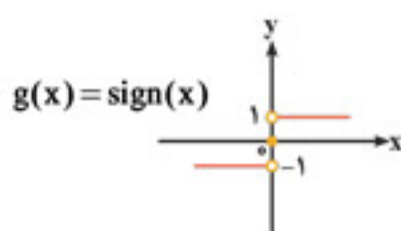
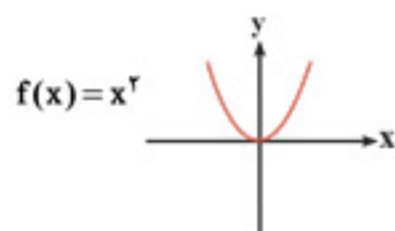
● در هر یک از سؤال‌های ۴۲۷ تا ۴۳۱ ابتدا ضابطه و دامنه تابع خواسته شده را به دست آورید و سپس نمودار آن را رسم کنید.



۴۲۷. $y = (f+g)(x) = ?$



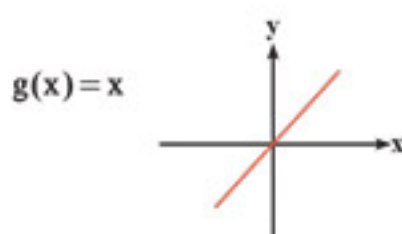
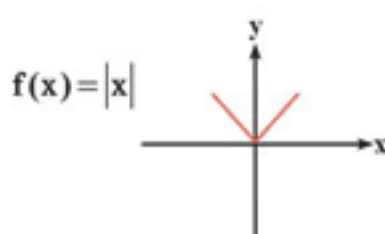
۴۲۸. $y = (f-g)(x) = ?$



۴۲۹. $y = (f \times g)(x) = ?$

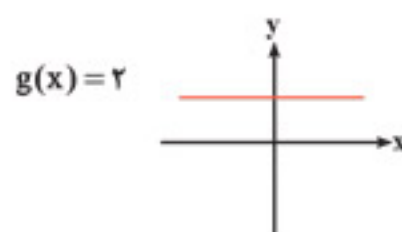
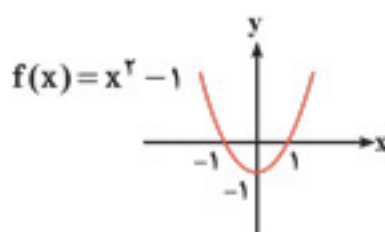


۴۳۰



$$y = \left(\frac{f}{g}\right)(x) = ?$$

۴۳۱



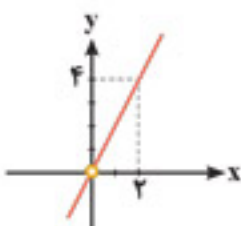
$$y = (f+g)(x) = ?$$

۴۳۲ اگر $f(x) = \begin{cases} x+1 & x \geq 0 \\ x-1 & x < 0 \end{cases}$ و $g(x) = \begin{cases} 2+x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$ باشد:

الف) نمودار تابع $f+g$ را رسم کنید.

ب) بدون تشکیل ضابطه، حاصل $(f \cdot g)(0)$ و $\left(\frac{g}{f}\right)(-3)$ را به دست آورید.

۴۳۳ اگر $f(x) = 8x^2$ و نمودار تابع $\frac{f}{g}$ به صورت مقابل باشد، ضابطه تابع g را مشخص کنید.



۴۳۴ اگر $g(x) = |x| - 2$ با دامنه $2 \leq x \leq 4$ و $f(x) = 4x + x^2$ با دامنه $0 \leq x < 4$ باشد، تابع $y = \frac{f(x)}{g(x)}$ را به دست آورید و سپس رسم کنید.

۴۳۵ اگر $f(1) = 5$ ، $g(2) = 3$ و $f \times g = \{(1, 15), (2, -9)\}$ باشند، $f(2) + g(1)$ را به دست آورید.

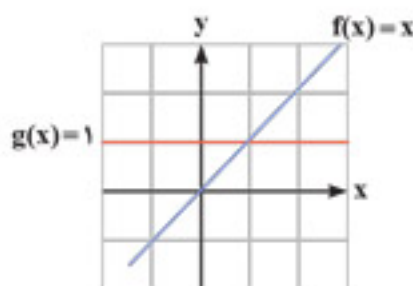
۴۳۶ اگر $f = \{(1, 0), (-1, 2), (3, 7)\}$ و $g = \{(-1, 4), (2, 5), (1, 8)\}$ باشد، توابع زیر را مشخص کنید.

ب) $\frac{g}{f}$

الف) $f - g$

(خرداد ۱۴۰۲)

۴۳۷ به کمک نمودارهای رسم شده f و g ، نمودار تابع $f+g$ را در نقاط $x=0$ و $x=1$ مشخص کنید. سپس تابع $f+g$ را رسم کنید. (خرداد ۱۴۰۲)



۴۳۸ اگر $f(x) = 2x - 3$ و $g = \{(1, 0), (-2, 3), (3, 7)\}$ باشد، آنگاه حاصل عبارات زیر را بیابید.

الف) D_{f-g}

ب) $(2f)(-3g)(1)$

(خرداد ۱۴۰۲ - نوبت عصر)

۴۳۹ اگر $f(x) = |x|$ و $g(x) = |x|$ باشد، نمودار $\frac{f}{g}$ را رسم کنید.

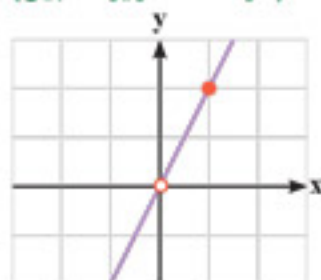
(خرداد ۱۴۰۲ - ویژه غائبین)

۴۴۰ اگر $f = \{(-1, 4), (3, 6), (1, 5)\}$ و $g = \{(-1, 0), (2, 4), (1, 7)\}$ باشند، حاصل توابع زیر را بیابید.

ب) $\frac{f}{g}$

الف) $f - g$

۴۴۱ اگر $f(x) = x^2$ و $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$ به صورت نمودار زیر باشد، ضابطه تابع $g(x)$ را به دست آورید.



(خرداد ۱۴۰۲ - ویژه غائبین)



۴۴۲. اگر $f = \{(-2, 1), (3, 4), (2, -5), (1, 1)\}$ و $g = \{(5, -2), (3, -7), (1, 0)\}$ باشد، آنگاه حاصل توابع زیر را به دست آورید. (خرداد ۱۴۰۲ - نوبت عصر)

الف) $\frac{f}{g}$ ب) $f - g$

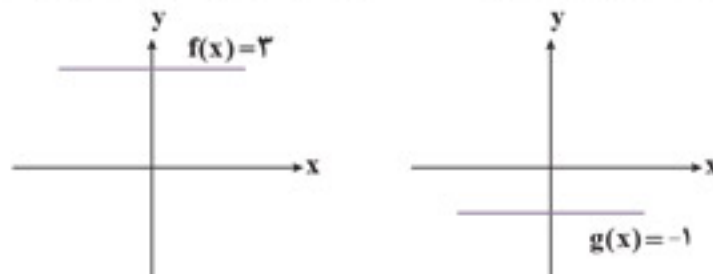
۴۴۳. اگر $f(x) = 3x - 1$ و $g = \{(1, 0), (-1, 3), (3, 7)\}$ باشد، آنگاه حاصل عبارات زیر را بیابید. (خرداد ۱۴۰۲ - نوبت عصر)

الف) D_{f-g} ب) $(2f)(-3g)(1)$

۴۴۴. اگر دو تابع $f = \{(-1, 2), (5, 3), (7, 1)\}$ و $g = \{(4, 2), (-1, 3), (7, 5)\}$ را داشته باشیم: (شهریور ۱۴۰۲ - خارج از کشور)

الف) دامنه تابع $f + g$ را مشخص کنید. ب) تابع $\frac{f}{g}$ را تشکیل دهید.

۴۴۵. با توجه به نمودارهای زیر، ابتدا ضابطه تابع $(f \times g)(x)$ را به دست آورده و سپس نمودار آن را رسم کنید. (شهریور ۱۴۰۲ - خارج از کشور)



۲۰. سوالات ۲۰ ساز

۴۴۶. دامنه تابع $y = \frac{4x}{2x+a}$ به صورت $\mathbb{R} - \{1\}$ است. a کدام است؟

۱) ☐ ۱ ۲) ☐ -۲ ۳) ☐ ۲ ۴) ☐ -۱

۴۴۷. توابع $f(x) = \sqrt{1-x}$ و $g(x) = x^2 - x$ باشد، دامنه تابع $y = \frac{f(x)}{g(x)}$ کدام است؟

۱) ☐ $\mathbb{R} - \{1\}$ ۲) ☐ $\mathbb{R} - \{0, 1\}$ ۳) ☐ $x < 1$ ۴) ☐ $x < 1 - \{0\}$

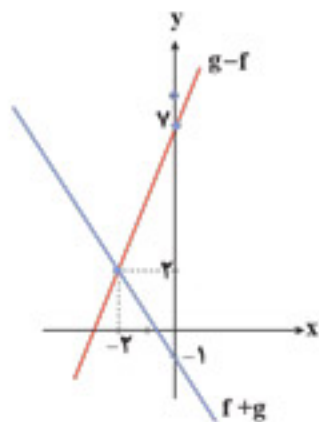
۴۴۸. اگر f تابع همانی و g تابعی ثابت و همچنین g تابع f را در نقطه $(2a+1, 2a)$ قطع کند، مقدار $\frac{(f+g)(-2)}{(f-2g)(-5)}$ کدام است؟

۴۴۹. اگر $f = \{(4, 0), (-2, 6), (1, 8), (2, 9)\}$ و $g = \{(-2, -6), (1, 0), (4, 1), (5, 10)\}$ باشد، تابع $\frac{f^2 - g^2}{(f+g)(g-f)}$ را به دست آورید.

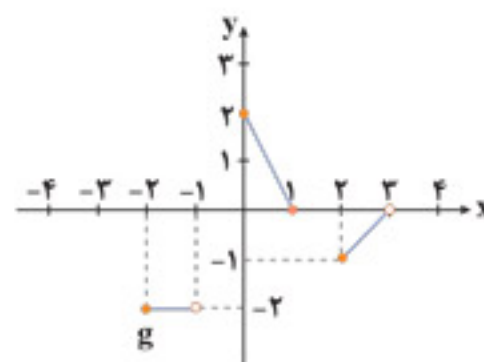
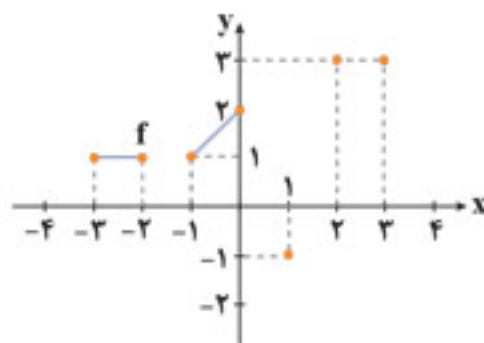
۴۵۰. تابع $f(x) = |2x - k| + x$ را به صورت $f(x) = \begin{cases} ax+b & x \geq 2 \\ cx+d & x < 2 \end{cases}$ نوشته‌ایم. اگر $g(x) = \text{sign}(a-2d)$ باشد، حاصل $(\frac{g}{f})(1)$ کدام است؟

۴۵۱. اگر $f(x) = \begin{cases} x+1 & -3 \leq x \leq 4 \\ 2-x & 4 < x \leq 8 \end{cases}$ و $g(x) = \begin{cases} 1-x & -2 \leq x \leq 1 \\ x+2 & 1 < x \leq 10 \end{cases}$ باشد، ضابطه تابع $(f \times g)(x)$ را به دست آورید.

۴۵۲. نمودار توابع $(f+g)(x)$ و $(g-f)(x)$ به صورت مقابل است. حاصل $(f \times g)(6)$ کدام است؟



۴۵۳. اگر نمودار f و g به صورت زیر باشد، $f + g$ را به دست آورید.



۳۰۶. تابع f ثابت است، پس باید ضابطه آن به صورت $f(x) = k$ باشد.

$$\begin{aligned} 2a^2 + 3a &= a^2 - 5a - 16 \Rightarrow 2a^2 + 3a - a^2 + 5a + 16 = 0 \\ \Rightarrow a^2 + 8a + 16 &= 0 \xrightarrow{\text{انحاد مربع دو جمله‌ای}} (a+4)^2 = 0 \Rightarrow a = -4 \\ \Rightarrow a^2 &= (-4)^2 = 16 \Rightarrow f(a^2) = f(16) = 16 \end{aligned}$$

۳۰۷. از آنجایی که $h(x)$ و $k(x)$ توابعی ثابت هستند، $h(x) = a$ و $k(x) = b$ قرار می‌دهیم و چون $g(x)$ تابعی همانی است، پس $g(x) = x$ ، بنابراین:

$$f(x) = \begin{cases} a-1 & x < 0 \\ x+2 & 0 \leq x < 5 \\ b+1 & x \geq 5 \end{cases}$$

$$f(-1) + f(2) = 4 \Rightarrow a-1+2+2=4 \Rightarrow a=1$$

$$f(7) + f(-2) = 5 \Rightarrow b+1+a-1=5 \xrightarrow{a=1} b=4$$

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ x+2 & 0 \leq x < 5 \\ 5 & x \geq 5 \end{cases}$$

۳۰۸. چون g تابعی همانی است، پس $g(2) = 2$ ، بنابراین:

$$f(g(2)) = 4 \Rightarrow f(2) = 4$$

برای همین چون f تابعی ثابت است، پس $f(x) = 4$ در این صورت داریم:
 $g(-3) + 2f(1) = -3 + 2(4) = 5$

پاسخ سؤالات فصل دوم درس ۲

۳۰۹. چندضابطه‌ای

۳۱۰. $\{-1, 0, 1\}$: با توجه به ضابطه تابع علامت، برد این تابع مجموعه $\{-1, 0, 1\}$ است.

۳۱۱. -۱: می‌دانیم $0 < -1000$ است، پس با توجه به تعریف تابع علامت داریم:
 $\text{sign}(-1000) = -1$

۳۱۲. پلکانی: هر تابع چندضابطه‌ای که در آن ضابطه‌ها به x وابسته نباشند و برابر مقداری ثابت باشند را یک تابع پلکانی می‌گویند.

۳۱۳. درست: با توجه به تعریف تابع $\text{sign}(x)$ داریم:

$$\text{sign}(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$

$$\text{sign}(1) = 1, \text{sign}(0) = 0, \text{sign}(-1) = -1$$

پس در سه حالت مقدار تابع sign در نقطه x با خود x برابر هستند.

$$2 \geq 1 \Rightarrow f(2) = 3(2)^2 - 12 = 12 - 12 = 0 \quad \text{۳۱۴. نادرست}$$

$$\text{sign}(f(2)) = \text{sign}(0) = 0$$

$$[\text{sign}(f(2))] = [\text{sign}(0)] = [0] = 0$$

۳۱۵. نادرست: چون مقدار تابع علامت برابر صفر است، پس:

$$x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = \pm 1$$

۳۱۶. درست: چون عبارت $x^2 + 1$ به ازای هر مقدار x برابر عددی مثبت است پس $\text{sign}(x^2 + 1)$ همواره برابر ۱ است.

۳۱۷. گزینه ۳: چون $\text{sign}(2k - 6) = -1$ است، پس $2k - 6 < 0$ ، پس:

$$2k < 6 \Rightarrow k < 3$$

$$x = 3 \Rightarrow \text{sign}(-x) = \text{sign}(-3) = -1 \quad \text{۳۱۸. گزینه ۴}$$

۳۰۱. تابع f ثابت است، پس باید ضابطه آن به صورت $f(x) = k$ باشد.

$$\begin{aligned} \frac{ax^2 + (b-1)x^2 - cx + 4}{x^2 + 5x - x^2 - 2} &= k \\ \xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} ax^2 + (b-1)x^2 - cx + 4 &= (x^2 + 5x - x^2 - 2)k \\ \Rightarrow ax^2 + (b-1)x^2 - cx + 4 &= kx^2 - kx^2 + 5kx - 2k \end{aligned}$$

پس باید داشته باشیم:

$$\begin{aligned} 4 &= -2k \Rightarrow k = -2 \\ a &= k \xrightarrow{k=-2} a = -2 \\ b-1 &= -k \xrightarrow{k=-2} b-1=2 \Rightarrow b=3 \\ -c &= 5k \xrightarrow{k=-2} -c=-10 \Rightarrow c=10 \end{aligned}$$

۳۰۲. فرض می‌کنیم که ضابطه تابع f به صورت $f(x) = ax + b$ باشد، در

این صورت داریم:

$$\begin{aligned} a(2x-1) + b + a(-x) + b &= 4x - 2 \\ 2ax - a + b - ax + b &= 4x - 2 \\ ax + 2b - a &= 4x - 2 \Rightarrow a=4, 2b-a=-2 \\ \Rightarrow 2b-4 &= -2 \Rightarrow 2b=2 \Rightarrow b=1 \end{aligned}$$

پس ضابطه f به صورت $f(x) = 4x + 1$ است. حال فرض می‌کنیم $g(x) = k$ در این صورت داریم:

$$\begin{aligned} f(g(3)) + g(-1) &= 11 \Rightarrow f(k) + k = 11 \Rightarrow 4k + 1 + k = 11 \\ \Rightarrow 5k + 1 &= 11 \Rightarrow 5k = 10 \Rightarrow k = 2 \end{aligned}$$

در این صورت $g(x) = 2$ و $f(x) = 4x + 1$ پس:

$$f(1) + g(-2) = 4 \times 1 + 1 + 2 = 7$$

۳۰۳

$$\begin{aligned} f(-2) &= 4 \Rightarrow A \begin{vmatrix} -2 \\ 4 \end{vmatrix} \\ f(1) &= -2 \Rightarrow B \begin{vmatrix} 1 \\ -2 \end{vmatrix} \Rightarrow m = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} = \frac{4 - (-2)}{-2 - 1} = \frac{6}{-3} = -2 \end{aligned}$$

$$y - y_A = m(x - x_A) \Rightarrow y - 4 = -2(x - (-2))$$

$$y - 4 = -2(x + 2) \Rightarrow y - 4 = -2x - 4 \Rightarrow y = -2x$$

پس $f(x) = -2x$.

چون g تابعی همانی است و $g(2-m) = 5$ در نتیجه:

$$2-m=5 \Rightarrow -m=5-2 \Rightarrow -m=3 \Rightarrow m=-3$$

$$f(2m+1) = f(-6+1) = f(-5) = -2(-5) = 10$$

۳۰۴. می‌دانیم ضابطه تابع f به صورت $f(x) = x$ است، پس:

$$\begin{aligned} \frac{x^2 + 2x}{(a-1)x^2 + bx + c + 1} &= x \Rightarrow \frac{x^2 + 2x}{(a-1)x^2 + bx + c + 1} = \frac{x}{1} \\ \xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} (a-1)x^2 + bx^2 + (c+1)x &= x^2 + 2x \end{aligned}$$

$$a-1=0 \Rightarrow a=1$$

$$b=1$$

$$c+1=2 \Rightarrow c=1$$

۳۰۵. اگر یک نقطه روی نیمساز ناحیه سوم باشد، باید طول و عرض آن با هم مساوی باشد.

$$-3n+10 = -n^2 + 4n - 2 \Rightarrow n^2 - 4n + 2 - 3n + 10 = 0$$

$$\Rightarrow n^2 - 7n + 12 = 0 \Rightarrow (n-4)(n-3) = 0 \Rightarrow n=3, n=4$$

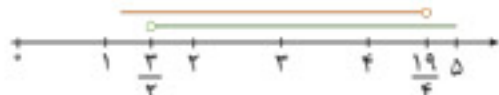
اگر $n=3$ باشد: $(-3(3)+10, -9+4(3)-2) = (1, 1)$ ✓

اگر $n=4$ باشد: $(-3(4)+10, -16+4(4)-2) = (-2, -2)$ ✓



۳۲۵. گزینه ۳ $\text{sign}(2x-3)=1 \Rightarrow 2x-3>0 \Rightarrow 2x>3 \Rightarrow x>\frac{3}{2}$

$\text{sign}(4x-19)=-1 \Rightarrow 4x-19<0 \Rightarrow 4x<19 \Rightarrow x<\frac{19}{4}$



اشتراک می‌گیریم $\frac{3}{2} < x < \frac{19}{4} \Rightarrow x=2, 3, 4$

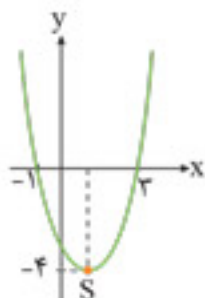
۳۲۶. ابتدا سهمی $y=x^2-2x-3$ را رسم می‌کنیم و محل برخورد آن را با محور x ها به دست می‌آوریم.

$$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{-2}{2} = 1$$

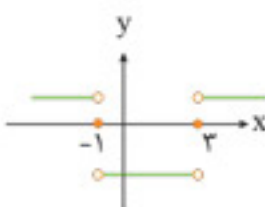
$$y = 1^2 - 2(1) - 3 = 1 - 2 - 3 = -4$$

برای پیدا کردن محل برخورد با محور x ها را برابر صفر قرار می‌دهیم.

$$x^2 - 2x - 3 = 0 \Rightarrow (x-3)(x+1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x-3=0 \Rightarrow x=3 \\ x+1=0 \Rightarrow x=-1 \end{cases}$$



پس نمودار سهمی به صورت مقابل است:



با توجه به نمودار، قسمت‌هایی که پایین محور x ها می‌باشد، (یعنی $-1 < x < 3$) منفی و قسمت‌هایی که بالای محور x ها می‌باشد ($x < -1$ یا $x > 3$) مثبت هستند، پس نمودار $\text{sign}(x^2-2x-3)$ به صورت مقابل است:

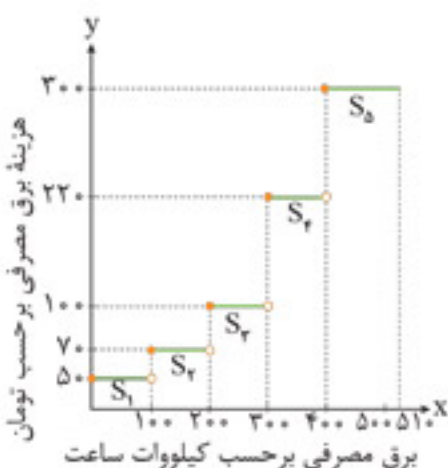
۳۲۷. با توجه به مقدار تابع $\text{sign}(x)$ ، بازه را به سه قسمت تقسیم می‌کنیم:

$$y = (x+1)\text{sign}(x) = \begin{cases} (x+1) \times 1 & x > 0 \\ (x+1) \times 0 & x = 0 \\ (x+1) \times (-1) & x < 0 \end{cases}$$

$$y = \begin{cases} x+1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -x-1 & x < 0 \end{cases}$$



برد: $y > -1$



هزینه برق مصرفی $= S_1 + S_2 + S_3 + S_4 + S_5$

$$= 50 \times 100 + 70 \times 100 + 100 \times 100 + 220 \times 100 + 110 \times 300$$

$$= 5000 + 7000 + 10000 + 22000 + 33000 = 77000$$

۳۱۹. گزینه ۱ $\text{sign}(-4) = -1$, $\text{sign}(\sqrt{\pi}) = 1$, $\text{sign}(0) = 0$

$\Rightarrow$ عبارت $= -1 + 2 \times 1 + 0 = 1$

ضابطه دوم $\frac{-2 \leq -2 \leq 2}{-2 \leq -2 \leq 2} \Rightarrow f(-2) = -3$

ضابطه سوم $\frac{2 > 2}{2 > 2} \Rightarrow f(2) = 7$

$\Rightarrow$ عبارت $= -3 + 7 = 4$

۳۲۱. همان طور که می‌دانید در تابع پلکانی ضابطه‌ها نباید شامل x

باشند، پس باید جملات $(m-2)x^2$ ، $(n+4)x$ و $(p^2-4)x^2$ را حذف کنیم. برای حذف این جملات باید $m-2$ ، $n+4$ و p^2-4 صفر شوند.

$m-2=0 \Rightarrow m=2$

$n+4=0 \Rightarrow n=-4$

$p^2-4=0 \Rightarrow p^2=4 \Rightarrow p=\pm 2$

۳۲۲. با ردیف اول کاری نداریم. ردیف دوم تا هفتم از چند n تشکیل شده

است که مقدار ضابطه آن‌ها ۵ تا ۵ تا اضافه می‌شود، پس یک تابع خطی است، پس از دو نقطه آن کمک می‌گیریم تا معادله تابع خطی را بنویسیم.

$A(7, 5)$, $B(8, 10)$

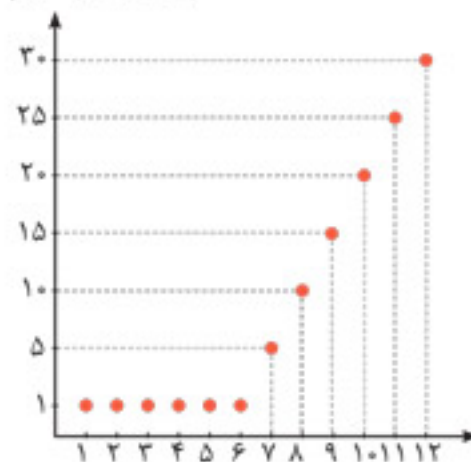
$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} \Rightarrow m = \frac{10 - 5}{8 - 7} = \frac{5}{1} = 5$

$y - y_A = m(x - x_A) \Rightarrow y - 5 = 5(x - 7)$

$\Rightarrow y - 5 = 5x - 35 \Rightarrow y = 5x - 30$

(در ضابطه تابع به جای x ، n می‌گذاریم)

$f(n) = \begin{cases} 1 & 1 \leq n \leq 6 \\ 5n - 30 & 7 \leq n \leq 12 \end{cases} (n \in \mathbb{N})$



۳۲۳. پله‌های مصرف ۱۰۰ تا ۱۰۰ است، لذا ۳۶۰ را ۱۰۰ تا ۱۰۰ تا تقسیم می‌کنیم:

پله‌های مصرف ۳۰ روزه (کیلووات - ساعت)	نرخ (تومان)	مقدار مصرف ۳۰ روزه	مبلغ (تومان)
۱۰۰ تا ۰	۲۰	۱۰۰	$100 \times 20 = 2000$
مازاد ۱۰۰ تا ۲۰۰	۳۰	۱۰۰	$100 \times 30 = 3000$
مازاد ۲۰۰ تا ۳۰۰	۴۵	۱۰۰	$100 \times 45 = 4500$
مازاد ۳۰۰ تا ۴۰۰	۵۵	۶۰	$60 \times 55 = 3300$
جمع کل		مصرف کل = ۳۶۰	جمع کل = ۱۲۸۰۰

۳۲۴. الف چون f پلکانی است پس در ضابطه‌ها باید ضریب x را برابر صفر قرار دهیم. یعنی:

$a=0$, $b-1=0 \Rightarrow b=1$

ب تابع را با داشتن مقدار a و b بازنویسی می‌کنیم:

$$f(x) = \begin{cases} 2 & x \geq 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases} \Rightarrow f(-2) + f(3) = -1 + 2 = 1$$



۳۳۸. صفر؛ کافی است یک عدد صحیح را در داخل آن قرار دهیم، مثلاً $x = 3$. چون ۳ و -۳ اعدادی صحیح هستند، پس از داخل براکت خارج می‌شوند.

۳۳۹. درست؛ براکت یک عدد صحیح برابر خود آن عدد است. مثلاً $[-8] = -8$.

۳۴۰. نادرست؛ فقط زمانی که k عدد صحیح باشد، از براکت خارج می‌شود.

۳۴۱. درست $\pi \approx 3.14$

$$\left. \begin{aligned} -\pi < 0 &\Rightarrow \text{sign}(-\pi) = -1 \\ 3 < 3.14 < 4 &\Rightarrow [\pi] = 3 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{sign}(-\pi) + [\pi] = -1 + 3 = 2$$

۳۴۲. درست؛ خروجی تابع براکت عددی صحیح است، پس برد تابع مجموعه اعداد صحیح است.

۳۴۳. گزینه ۴؛ تابع f را به ازای تک تک اعضای مجموعه داده شده محاسبه می‌کنیم تا برد آن به دست آید. سپس بزرگ‌ترین عضو را انتخاب می‌کنیم:

$$f(x) = \frac{x+1}{[x] - \text{sign}(x)}$$

$$f(0.8) = \frac{0.8+1}{[0.8] - \text{sign}(0.8)} = \frac{1.8}{-1-1} = \frac{1.8}{-2} = -0.9$$

$$f(0.5) = \frac{0.5+1}{[0.5] - \text{sign}(0.5)} = \frac{1.5}{0-1} = -1.5$$

$$f(2) = \frac{2+1}{[2] - \text{sign}(2)} = \frac{3}{2-1} = \frac{3}{1} = 3$$

پس $R_f = \{-0.9, -1.5, 3\}$ که بزرگ‌ترین عضو برد ۳ است.

۳۴۴. گزینه ۱ $[4x-1] = 3 \Rightarrow [4x] - 1 = 3 \Rightarrow [4x] = 4 \Rightarrow 4 \leq 4x < 5$

فقط یک عدد صحیح $x=1$ وجود دارد. $\xrightarrow{+4} 1 \leq x < \frac{5}{4}$

۳۴۵. گزینه ۳ $f(\sqrt{2}) = 2[\sqrt{2}] - [-\sqrt{2}] = 2(1) - (-2) = 2+2=4$

۳۴۶. گزینه ۱ $-1 \leq x < 0 \Rightarrow [x] = -1 \Rightarrow y = [x] + 1 = -1+1=0$

۳۴۷. گزینه ۴

• بررسی گزینه‌ها:

گزینه ۱: می‌دانیم جزء صحیح اعداد صحیح برابر با خودشان است.

$[-2] = -2$ ✓

$2 \leq 2/1 < 3 \Rightarrow [2/1] = 2$ ✓

$\sqrt{2} \approx 1/4 \Rightarrow [\sqrt{2}] = [1/4] = 1$ ✓

$1 \leq 1/5 < 2 \Rightarrow [1/5] = 1 \neq 2$ ✗

$2 < 2/91 < 3 \Rightarrow [2/91] = 2$

$-4 < -3/2 < -3 \Rightarrow [-3/2] = -4$

$-1 < -0/2 < 0 \Rightarrow [-0/2] = -1$

$\Rightarrow [2/91] - [-3/2] + [-0/2] = 2 - (-4) + (-1) = 2+4-1=5$

$\sqrt{5} \approx 2/2 \Rightarrow 2 \leq \sqrt{5} < 3 \Rightarrow [\sqrt{5}] = 2$

$\sqrt{2} \approx 1/4 \Rightarrow \sqrt{2}-1 = 0/4 > 0 \Rightarrow \text{sign}(\sqrt{2}-1) = 1$

$\sqrt{3} \approx 1/7 \Rightarrow 0 \leq \frac{\sqrt{3}}{2} < 1 \Rightarrow \left[\frac{\sqrt{3}}{2}\right] = 0$

$A = [\sqrt{5}] + \text{sign}(\sqrt{2}-1) + \left[\frac{\sqrt{3}}{2}\right] = 2+1+0=3$

۳۳۹. $A(1,3), B(-1,1) \Rightarrow m_{AB} = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} = \frac{3-1}{1-(-1)} = \frac{2}{2} = 1$

$y - y_A = m(x - x_A) \Rightarrow y - 3 = 1(x - 1) \Rightarrow y - 3 = x - 1 \Rightarrow y = x + 2$

حال با توجه به ضابطه $g(x) = \text{sign}(x)$ داریم:

(در بازه $x > 0$ نیست.) $x > 0 \Rightarrow \frac{f(x)=x+2}{\text{sign}(x)=1} \Rightarrow 1 = x+2 \Rightarrow x = -1$ ✗

$x < 0 \Rightarrow \frac{f(x)=x+2}{\text{sign}(x)=-1} \Rightarrow -1 = x+2 \Rightarrow x = -3$ ✓

$x = 0 \Rightarrow \frac{f(x)=x+2}{\text{sign}(x)=0} \Rightarrow x+2=0 \Rightarrow x = -2$ ✗

۳۴۰. چون تابع f پلکانی است پس باید تک تک ضابطه‌ها عدد ثابت باشند. در این صورت در ضابطه اول داریم: $\frac{ax^2+bx+A}{2x+4} = k \Rightarrow 2kx+4k = ax^2+bx+A$

$ax^2+bx+A = 2kx+4k \Rightarrow 4k = A \Rightarrow k = 2$

$b = 2k \Rightarrow b = 4$

$a = 0$

و در ضابطه دوم باید ضریب x (یعنی $c-1$) صفر باشد، پس $c=1$.

۳۴۱. فرض می‌کنیم $f(x) = k$ پس:

در این صورت با توجه به اینکه g تابع علامت است، داریم:

$g(-1) = -1, g(4) = 1$

در این صورت خواهیم داشت:

$\frac{f(3)+3g(-1)}{2f(4)-g(4)} = 2 \Rightarrow \frac{k+3(-1)}{2k-1} = 2 \Rightarrow \frac{k-3}{2k-1} = 2$

$\Rightarrow 4k-2 = k-3 \Rightarrow 3k = -1 \Rightarrow k = -\frac{1}{3}$

$f(\sqrt{3}) + g(-\frac{\sqrt{2}}{2}) = -\frac{1}{3} - 1 = -\frac{4}{3}$

۳۴۲. چون تابع f یک تابع پلکانی است، پس باید تک تک ضابطه‌ها یک تابع ثابت باشند، پس باید ضابطه‌ها فاقد x باشند.

$f(x) = \begin{cases} (k-4)x+m-1 & x \geq n \\ k+p & x < n \end{cases} \Rightarrow k-4=0 \Rightarrow k=4$

و با توجه به شکل $n=2$ (چون ضابطه تابع در $x=2$ عوض می‌شود) و

با توجه به نمودار $m-1=5$ پس $m=6$.

از طرفی با توجه به نمودار و اینکه $k=4$ است، پس باید:

$k+p = -3 \Rightarrow p = -7$

$4+p = -3 \Rightarrow p = -7$

۳۴۳. $\frac{3}{4}$ ؛ می‌دونیم $0 < 0.5 < 1$ پس $[0.5] = 0$ ، چون عددی صحیح است پس $[3] = 3$ از طرفی $4 < 4/99 < 5$ پس $[4/99] = 4$

پس: $\frac{[0.5] + [3]}{[4/99]} = \frac{0+3}{4} = \frac{3}{4}$

۳۴۴. $3 \leq x < \frac{7}{2}$ ؛ کلاً یادتون باشه که اگر $[O] = k$ باشه، در این صورت

داریم: $k \leq O < k+1$

$[2x] = 6 \Rightarrow 6 \leq 2x < 7 \xrightarrow{+2} 3 \leq x < \frac{7}{2}$

۳۴۵. -۴؛ می‌دونیم $\sqrt{3} \approx 1/7$ پس $\sqrt{3}-5 = 1/7-5 = -3/3$

چون $-4 \leq -3/7 < -3$ است، پس:

$[\sqrt{3}-5] = -4$

۳۴۶. صفر؛ چون $0 \leq x < 1$ پس $[x] = 0$

۳۴۷. -۱؛ کافی است یک عدد غیر صحیح مثلاً $x = 3/5$ را در داخل تابع

جای گذاری کنیم. چون $-4 < -3/5 < -3$ و $3 < 3/5 < 4$ داریم:

$[3/5] + [-3/5] = 3 + (-4) = -1$

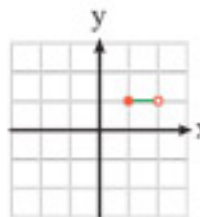


$$[3x] - 1 = 6 \Rightarrow [3x] = 7 \Rightarrow 7 \leq 3x < 8 \xrightarrow{+2} \frac{7}{3} \leq x < \frac{8}{3} \quad .354$$

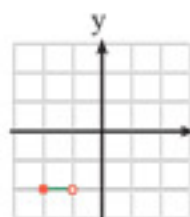
$$[2x] + 8 = 0 \Rightarrow [2x] = -8 \Rightarrow -8 \leq 2x < -7 \Rightarrow -4 \leq x < -\frac{7}{2} \quad .355$$

$$\left[\frac{1}{2}x - 1\right] - 3 = 0 \Rightarrow \left[\frac{1}{2}x - 1\right] = 3 \Rightarrow 3 \leq \frac{1}{2}x - 1 < 4 \quad .356$$

$$\xrightarrow{\text{به طرفین یک واحد اضافه می‌کنیم}} 4 \leq \frac{1}{2}x < 5 \xrightarrow{\times 2} 8 \leq x < 10$$



.358



.357

.359

$$f(x) = \begin{cases} -1 & -1 \leq x < 0 \\ 0 & 0 \leq x < 1 \text{ (الف)} \\ 1 \text{ (ب)} & 1 \leq x < 2 \\ 2 \text{ (ج)} & 2 \leq x < 3 \end{cases}$$

.360. گزینه ۲: چون نقطه $A(3m^2 + 6m - 2, m)$ روی نیمساز ناحیه اول است، پس روی خط $y = x$ قرار دارد و در ضمن طول و عرض هر دو عددی مثبت هستند.

$$3m^2 + 6m - 2 = m \Rightarrow 3m^2 + 5m - 2 = 0$$

$$\Rightarrow 3m^2 + 5m - 2 = 0 \Rightarrow \Delta = 25 + 24 = 49$$

$$x = \frac{-5 \pm 7}{6} \begin{cases} m = \frac{-5 - 7}{6} = \frac{-12}{6} = -2 \\ m = \frac{-5 + 7}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \end{cases}$$

$$m = -2 \Rightarrow A(3(-2)^2 + 6(-2) - 2, -2) = (-2, -2)$$

در ناحیه اول قرار ندارد، پس $m = -2$ غیرقابل قبول است و فقط

$$m = \frac{1}{3} \text{ را می‌پذیریم.} \quad [-4m] = \left[-\frac{4}{3}\right] = -2 \quad .361 \text{ گزینه ۴}$$

$$[-3x + 2] = -1 \Rightarrow -1 \leq -3x + 2 < 0$$

$$\xrightarrow{+2} -3 \leq -3x < -2 \xrightarrow{\div (-3)} 1 \geq x > \frac{2}{3} \Rightarrow D: \frac{2}{3} < x \leq 1$$

.362 ابتدا ریشه‌های معادله $10x^2 + 7x + 1 = 0$ را به دست می‌آوریم:

$$\Delta = 49 - 40 = 9 \Rightarrow x = \frac{-7 \pm 3}{20} \begin{cases} x = -\frac{4}{20} = -\frac{1}{5} \\ x = -\frac{10}{20} = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$[\alpha] + [\beta] = -\left[-\frac{1}{5}\right] + 2\left[-\frac{1}{2}\right] = -(-1) + 2(-1) = +1 - 2 = -1$$

$$-1 < -\frac{1}{5} < 0 \quad -1 < -\frac{1}{2} < 0$$

.363 تابع f ثابت است، پس باید متغیر x حذف شود.

$$a - 3 = 0 \Rightarrow a = 3 \Rightarrow f(x) = b - 1$$

از طرفی تابع g همانی است، پس ضابطه آن به صورت $g(x) = x$ است. در

$$2b + 5 = 1 \Rightarrow 2b = -4 \Rightarrow b = -2$$

این صورت:

$$c - 2 = 0 \Rightarrow c = 2$$

$$h\left(\frac{a+b}{c}\right) = h\left(\frac{3-2}{2}\right) = h\left(\frac{1}{2}\right) = \left[-\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}\right] - 4\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$= \left[-\frac{1}{4}\right] - 2 = -1 - 2 = -3$$

$$\sqrt{3} \simeq 1/7 \Rightarrow -1 < 1 - \sqrt{3} < 0 \Rightarrow [1 - \sqrt{3}] = -1 \quad .350$$

$$\sqrt{7} \simeq 2/5 \Rightarrow \sqrt{7} - 3 < 0 \Rightarrow [\sqrt{7} - 3] = -\sqrt{7} + 3$$

$$\xrightarrow{-2 < 0} \text{sign}(-4) = -1$$

$$B = -1 - \sqrt{7} + 3 - 1 = 1 - \sqrt{7}$$

ضابطه تابع $f(x)$

الف $f(x) = (x-1)[x]$

ب $g(x) = \left[\frac{x}{2}\right]$

ج $h(x) = [x] + [-x]$

مقدار x

$$x = 2$$

الف $x = 1/2$

$$x = -3/4$$

$$x = 5$$

ب $x = -3$

$$x = 5$$

ج $x = 5/1$

مقدار تابع $f(x)$

$$f(2) = (2-1)[2] = 1 \times 2 = 2$$

الف $f(1/2) = (1/2-1)[1/2] = 0/2 \times 1 = 0/2$

$$f(-3/4) = (-3/4-1) \times (-4) = 17/4$$

ب $g(5) = \left[\frac{5}{2}\right] = [2/5] = 2$

ب $g(-3) = \left[\frac{-3}{2}\right] = [-1/5] = -2$

ج $h(5) = [5] + [-5] = 5 + (-5) = 0$

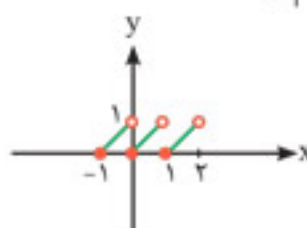
ج $h(5/1) = [5/1] + [-5/1] = 5 + (-6) = -1$

.351 دامنه را به سه قسمت تقسیم می‌کنیم:

$$-1 \leq x < 0 \Rightarrow [x] = -1 \Rightarrow y = x + 1$$

$$0 \leq x < 1 \Rightarrow [x] = 0 \Rightarrow y = x$$

$$1 \leq x < 2 \Rightarrow [x] = 1 \Rightarrow y = x - 1$$



$$[x] = 3 \xrightarrow{[0]=k \Rightarrow k \leq 0 < k+1} 3 \leq x < 4 \quad .352$$

$$2[x] = 5 \xrightarrow{\text{طرفین را بر ۲ تقسیم می‌کنیم}} [x] = 2/5 \quad .353$$

معادله جواب ندارد چون جواب جزء صحیح فقط باید عددی صحیح باشد ولی $2/5$ صحیح نیست.



۳۶۴

$$\left. \begin{aligned} -\frac{4}{3} < x < -1 &\Rightarrow [x] = -2 \Rightarrow y = 0 \\ -1 \leq x < 0 &\Rightarrow [x] = -1 \Rightarrow y = 1 \\ 0 \leq x < 1 &\Rightarrow [x] = 0 \Rightarrow y = 2 \\ 1 \leq x < \frac{3}{2} &\Rightarrow [x] = 1 \Rightarrow y = 3 \end{aligned} \right\} \Rightarrow R = \{0, 1, 2, 3\}$$

۳۶۵

$$\begin{aligned} [x+1] + [-x] &= 0 \Rightarrow [x] + 1 + [-x] = 0 \\ \Rightarrow [x] + [-x] &= -1 \Rightarrow x \notin \mathbb{Z} \end{aligned}$$

۳۶۶

$$\begin{aligned} (ax+2)(3x-1) + x^2 &= 3ax^2 - ax + 6x - 2 + x^2 \\ &= (3a+1)x^2 + (6-a)x - 2 \end{aligned}$$

$$3a+1=0 \Rightarrow a = -\frac{1}{3}$$

چون f خطی است، پس:

$$f(x) = (6-a)x - 2 \xrightarrow{a=-\frac{1}{3}} (6-(-\frac{1}{3}))x - 2 = \frac{19}{3}x - 2$$

می‌دانیم تابع $g(x) = bx - f(x)$ ثابت است، پس:

$$g(x) = bx - (\frac{19}{3}x - 2) = (b - \frac{19}{3})x - 2$$

$$g \text{ ثابت} \Rightarrow \text{ضریب } x \text{ برابر صفر} \Rightarrow b - \frac{19}{3} = 0 \Rightarrow b = \frac{19}{3}$$

$$\Rightarrow [a+b] = [-\frac{1}{3} + \frac{19}{3}] = [\frac{18}{3}] = 6$$

۳۶۷. فرض می‌کنیم شیب خط برابر a باشد و با توجه به

اینکه عرض از مبدأ آن ۶ می‌باشد، داریم: $f(x) = ax + 6$

$$f(-1) + f(f(1)) = 12$$

$$\Rightarrow (-a+6) + f(a+6) = 12$$

$$\Rightarrow (-a+6) + a(a+6) + 6 = 12$$

$$\Rightarrow -a+6+a^2+6a=12-6$$

$$\Rightarrow a^2 + 5a = 0 \Rightarrow a(a+5) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = -5 \\ a = 0 \end{cases}$$

چون شیب خط منفی است، $a = -5$ قابل قبول است، پس داریم:

$$f(x) = -5x + 6$$

$$[f(\frac{1}{4})] = [-\frac{5}{4} + 6] = [\frac{19}{4}] = [4.75] = 4$$

۳۶۸. چون $0 < x < 2$ است، پس x مقداری مثبت است پس $|x| = x$

از طرفی اگر از طرفین نامساوی $0 < x < 2$ واحد کم کنیم، داریم:

$$-2 < x-2 < 0 \text{ پس عبارت از قدرمطلق به صورت قرینه بیرون می‌آید:}$$

$$|x-2| = -(x-2) = -x+2$$

$$|x| + |x-2| = x - x + 2 = 2$$

$$|2-x| + |x-3| \xrightarrow{x=1} |2-1| + |1-3|$$

$$= |1| + |-2| = 1+2 = 3$$

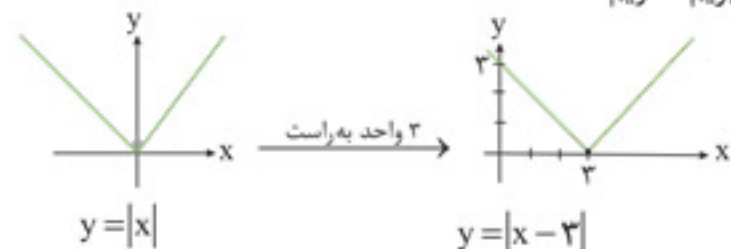
۳.۳۶۹

$$y = -|x| \text{ نمودار داده شده تابعی قدرمطلق با ضابطه } y = -|x|$$

است.

۳۷۱. واحد به راست؛ اگر نمودار $y = |x|$ را به عنوان نمودار مادر در

نظر بگیریم، داریم:



۳۷۲. نادرست؛ کافی است ۲ واحد به پایین ببریم.

۳۷۳. درست؛ چون قدرمطلق هر عبارتی با قرینه‌اش برابر است؛ یعنی:

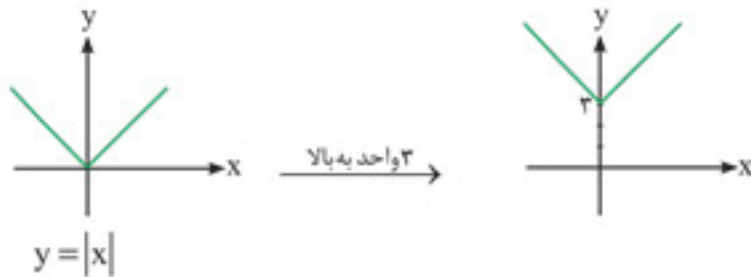
$$|A| = |-A|$$

۳۷۴. نادرست؛ ضابطه نمودار رسم شده به صورت $y = -|x| + 2$ است.

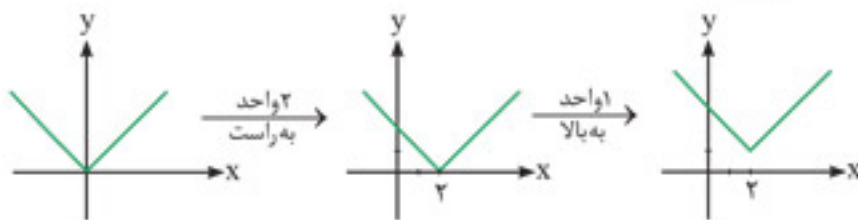
۳۷۵. درست؛ برای دوضابطه‌ای کردن تابع داریم:

$$y = \begin{cases} x+1 & x+1 > 0 \\ -(x+1) & x+1 \leq 0 \end{cases} = \begin{cases} x+1 & x > -1 \\ -x-1 & x \leq -1 \end{cases}$$

۳۷۶. گزینه ۳؛ تابع $y = |x| + 3$ را از روی $y = |x|$ رسم می‌کنیم.



۳۷۷. گزینه ۲



۳۷۸. گزینه ۴

$$|2x-1| = 3 \Rightarrow \begin{cases} 2x-1 = 3 \Rightarrow 2x = 4 \Rightarrow x = 2 \\ 2x-1 = -3 \Rightarrow 2x = -2 \Rightarrow x = -1 \end{cases}$$

۳۷۹. گزینه ۲؛ چون $-\frac{1}{4} < x < 0$ است، پس $|x| = -x$ چون x منفی!

$$y = [x - |x|] - x = [x + x] - x = [2x] - x$$

از طرفی $-\frac{1}{4} < x < 0$ پس $-1 < 2x < 0$ (طرفین تساوی را در ۲ ضرب کردیم)

$$[2x] = -1 \Rightarrow y = [2x] - x = -1 - x$$

بنابراین:

$$۳۸۰. \text{ می‌دانیم } \sqrt{2} \approx 1/4 \text{ پس:}$$

$$3 - 2\sqrt{2} \approx 3 - 2(1/4) = 3 - 2/8 = 0.25 > 0 \Rightarrow |3 - 2\sqrt{2}| = 3 - 2\sqrt{2}$$

$$1 - \sqrt{2} \approx 1 - 1/4 \approx -0.25 < 0 \Rightarrow |1 - \sqrt{2}| = -1 + \sqrt{2}$$

$$|3 - 2\sqrt{2}| + |1 - \sqrt{2}| = 3 - 2\sqrt{2} - 1 + \sqrt{2} = 2 - \sqrt{2}$$

۳۸۱

$$۱۰. f(\sqrt{5}-1) = |2(\sqrt{5}-1)-3| = |2\sqrt{5}-2-3| = |2\sqrt{5}-5|$$

$$\text{می‌دانیم } \sqrt{5} \approx 2/2 \text{ پس } 2\sqrt{5} - 5 < 0 \text{ پس: } f(\sqrt{5}-1) = -2\sqrt{5} + 5$$

$$۱۱. g(-3) = \text{sign}(-3-1) = \text{sign}(-4) = -1$$

$$f(g(-3)) = f(-1) = |2(-1)-3| = |-2-3| = |-5| = 5$$

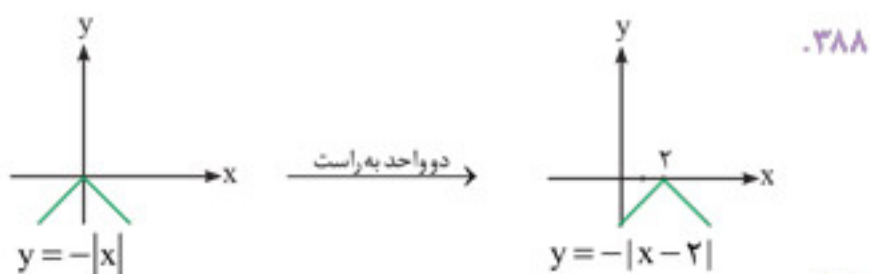
$$۱۲. f(\sqrt{2}) = |2\sqrt{2}-3|$$

$$\text{می‌دانیم } 2\sqrt{2} - 3 < 0 \text{ پس: } f(\sqrt{2}) = -2\sqrt{2} + 3$$

$$g(-2\sqrt{2}+3) = \text{sign}(-2\sqrt{2}+3-1) = \text{sign}(-2\sqrt{2}+2)$$

$$\text{می‌دانیم } -2\sqrt{2} + 2 < 0 \text{ پس: } g(-2\sqrt{2}+3) = \text{sign}(-2\sqrt{2}+2) = -1$$





۳۸۹. $|2x-3| - 5 = 0 \Rightarrow |2x-3| = 5 \Rightarrow \begin{cases} 2x-3=5 \Rightarrow 2x=8 \Rightarrow x=4 \\ 2x-3=-5 \Rightarrow 2x=-2 \Rightarrow x=-1 \end{cases}$

۳۹۰. ریشه داخل قدرمطلق $x=0$ است، پس دامنه را به دو قسمت تقسیم می‌کنیم: $x \geq 0 \xrightarrow{|x|=x} x-2x=9 \Rightarrow -x=9 \Rightarrow x=-9$

این جواب قابل قبول نیست، چون $x=-9$ در دامنه $x \geq 0$ نیست. $x < 0 \xrightarrow{|x|=-x} -x-2x=9 \Rightarrow -3x=9 \Rightarrow x=-3$

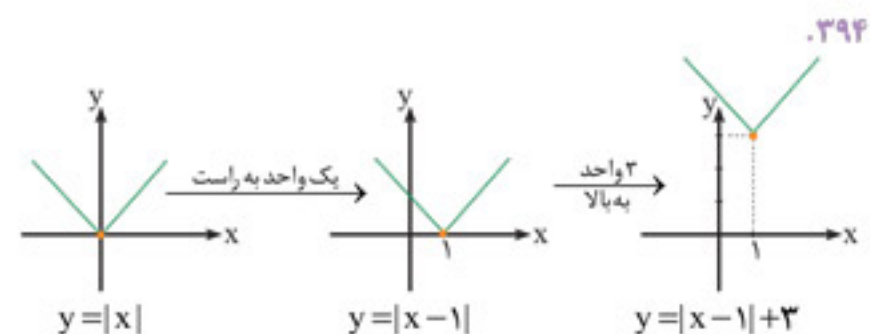
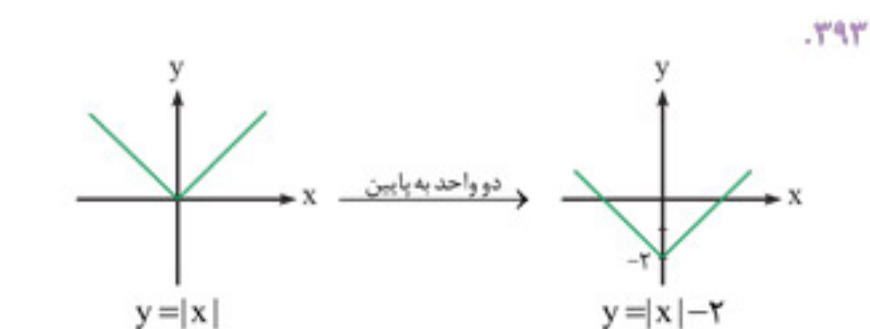
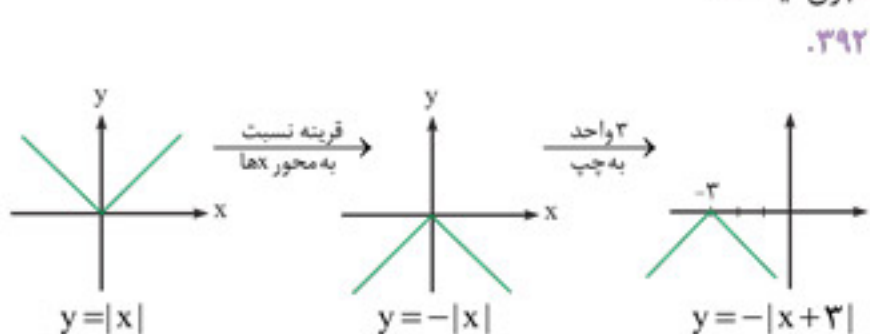
چون $x=-3$ عددی منفی است پس در دامنه $x < 0$ وجود دارد. ۳۹۱. ریشه داخل قدرمطلق $x=0$ است، پس:

$x > 0 \xrightarrow{|x|=x} \frac{x}{x} + 3x = 5 \Rightarrow 1+3x=5 \Rightarrow 3x=4 \Rightarrow x=\frac{4}{3}$

چون $x=\frac{4}{3}$ عددی مثبت است، پس در دامنه $x > 0$ وجود دارد.

$x < 0 \xrightarrow{|x|=-x} \frac{-x}{x} + 3x = 5 \Rightarrow -1+3x=5 \Rightarrow 3x=6 \Rightarrow x=2$

چون $x=2$ عددی مثبت است، در دامنه $x < 0$ قرار ندارد، پس قابل قبول نیست.



۳۹۵. گزینه ۱ $\left. \begin{aligned} \text{sign}(-2[-1/3]) &= \text{sign}(-2 \times -1/3) = \text{sign}(2/3) = 1 \\ 2\text{sign}(-[-1/3]) &= 2\text{sign}(1/3) = 2 \times 1 = 2 \end{aligned} \right\} 1 + (-2) = -1$

۳۸۲. ابتدا ریشه داخل قدرمطلق را به دست می‌آوریم:

$x-1=0 \Rightarrow x=1$

$y = |x-1| = \begin{cases} x-1 & x \geq 1 \\ -x+1 & x < 1 \end{cases}$

$D = \mathbb{R}, R: y \geq 0$

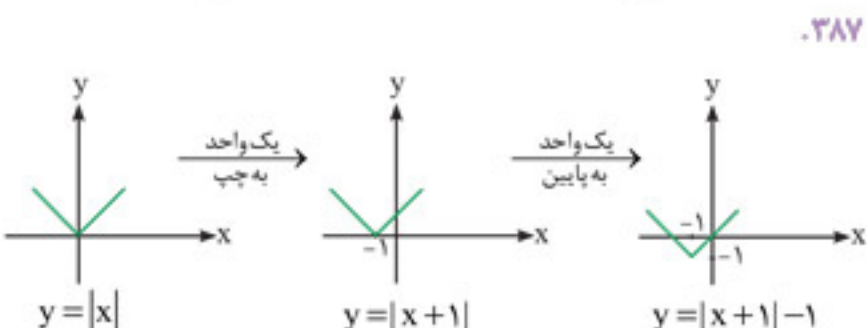
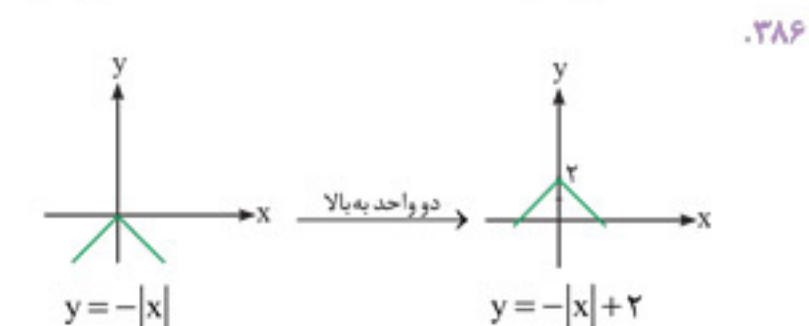
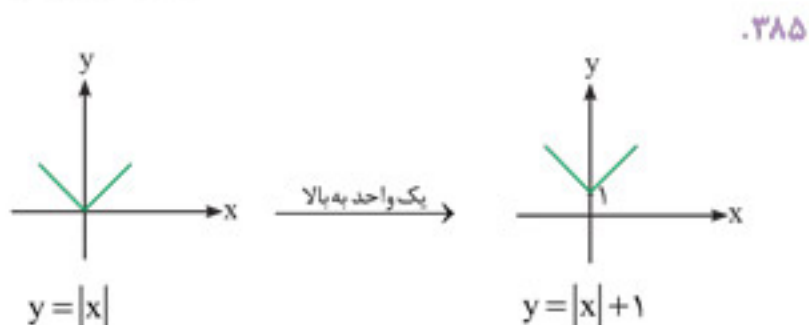
۳۸۳. ابتدا ریشه داخل قدرمطلق را به دست می‌آوریم:

$2x-3=0 \Rightarrow 2x=3 \Rightarrow x=\frac{3}{2}$ $y = |2x-3| = \begin{cases} 2x-3 & x \geq \frac{3}{2} \\ -2x+3 & x < \frac{3}{2} \end{cases}$

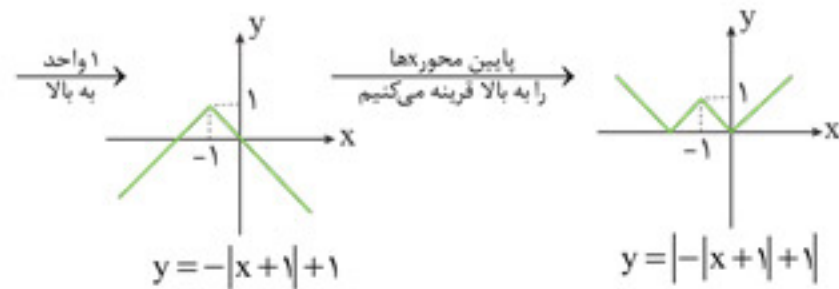
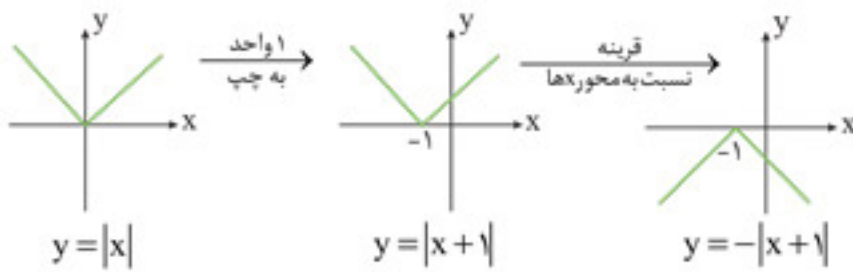
$D = \mathbb{R}, R: y \geq 0$

۳۸۴. ابتدا ریشه داخل قدرمطلق را به دست می‌آوریم:

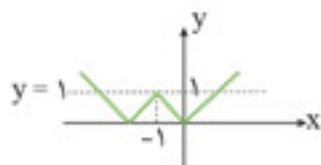
$3x-6=0 \Rightarrow 3x=6 \Rightarrow x=2$ $y = -|3x-6| = \begin{cases} -(3x-6) & x \geq 2 \\ -(-(3x-6)) & x < 2 \end{cases}$ $\Rightarrow \begin{cases} -3x+6 & x \geq 2 \\ 3x-6 & x < 2 \end{cases}$ $D = \mathbb{R}, R: y \leq 0$



۴۰۰. ابتدا تابع $y = |x|$ را رسم می‌کنیم:



تنها خطی که نمودار را در ۳ نقطه قطع می‌کند، $y = 1$ است. پس $k = 1$.

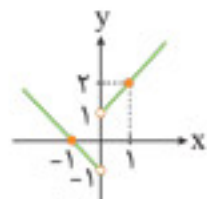


۴۰۱. ابتدا با توجه به ریشه داخل قدرمطلق، تابع را به صورت یک تابع

دوضابطه‌ای می‌نویسیم:

$$g(x) = |x| + \frac{|x|}{x} = \begin{cases} x + \frac{x}{x} & x > 0 \\ -x + \frac{-x}{x} & x < 0 \end{cases}$$

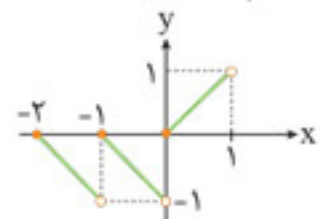
$$g(x) = \begin{cases} x+1 & x > 0 \\ -x-1 & x < 0 \end{cases}$$



۴۰۲. $-2 \leq x < -1 \Rightarrow [x] = -2 \xrightarrow{|x|=-x} y = -x - 2$

$-1 \leq x < 0 \Rightarrow [x] = -1 \xrightarrow{|x|=-x} y = -x - 1$

$0 \leq x < 1 \Rightarrow [x] = 0 \xrightarrow{|x|=x} y = x + 0$



پاسخ سؤالات فصل دوم درس ۳

۴۰۳. $\mathbb{R}$: در توابع چندجمله‌ای مانند $y = 5x^2 + x - 1$ متغیر x هر مقدار حقیقی را می‌تواند اختیار کند، پس دامنه آن $\mathbb{R}$ است.

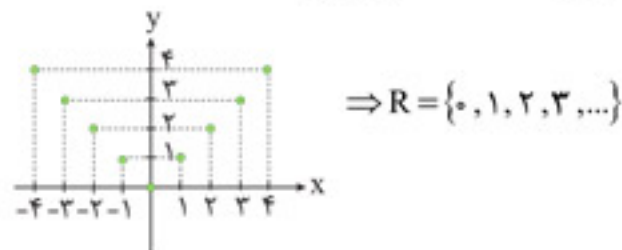
۴۰۴. $\mathbb{R} - \{-2, 2\}$: این تابع گویا است چون در مخرج کسر x وجود دارد.

پس ابتدا ریشه‌های مخرج را (در صورت وجود) به دست می‌آوریم:

$$x^2 - 4 = 0 \Rightarrow (x-2)(x+2) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x-2=0 \Rightarrow x=2 \\ x+2=0 \Rightarrow x=-2 \end{cases} \Rightarrow D = \mathbb{R} - \{-2, 2\}$$

۳۹۶. گزینه ۱: طبق نمودار تابع $y = |x|$ با دامنه اعداد صحیح، برد اعداد $\{0, 1, 2, \dots\}$ یعنی مجموعه اعداد حسابی می‌باشد.



$$1 - \sqrt{3} \approx 1 - 1.7 = -0.7$$

$$\xrightarrow{-0.7 \geq -3} f(1 - \sqrt{3}) = [1 - \sqrt{3} - 2] = [-\sqrt{3} - 1] = -3$$

(زیرا $-3 < -\sqrt{3} - 1 < -2$)

$$-\frac{9}{2} < -3 \Rightarrow f(-\frac{9}{2}) = |-\frac{9}{2} + 2| = |-\frac{9+4}{2}| = |-\frac{5}{2}| = \frac{5}{2}$$

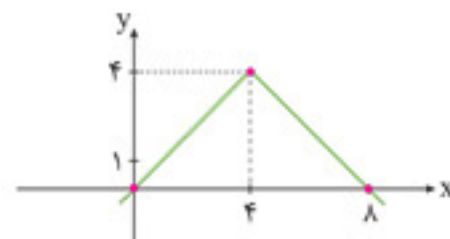
$$f(1 - \sqrt{3}) - f(-\frac{9}{2}) = -3 - \frac{5}{2} = \frac{-6-5}{2} = -\frac{11}{2}$$

۳۹۸. نمودار تابع $y = -|x-4| + 4$ را رسم می‌کنیم. توجه کنید چون

مساحت خواسته شده، باید با حل معادله $y = 0$ نقاط برخورد تابع با محور x ها را هم به دست آوریم.

$$y = 0 \Rightarrow -|x-4| + 4 = 0 \Rightarrow |x-4| = 4 \Rightarrow x-4 = \pm 4$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x-4=4 \Rightarrow x=8 \\ x-4=-4 \Rightarrow x=0 \end{cases}$$



$$\text{مساحت مثلث} = \frac{8 \times 4}{2} = \frac{32}{2} = 16$$

۳۹۹. ابتدا تابع g را با توجه به ریشه داخل قدرمطلق، دوضابطه‌ای

می‌کنیم:

$$x \geq 0 \Rightarrow g(x) = \frac{|x|}{x} = \frac{x}{x} = 1$$

حالت اول:

$$x < 0 \Rightarrow g(x) = \frac{|x|}{x} = \frac{-x}{x} = -1$$

حالت دوم:

حالا معادله تلاقی $f = g$ را در دو حالت بالا حل می‌کنیم:

$$x \geq 0 \Rightarrow f = g \Rightarrow x^2 - x = 1 \Rightarrow x^2 - x - 1 = 0$$

حالت اول:

$$\Delta = (-1)^2 - 4(1)(-1) = 1 + 4 = 5 \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \checkmark \\ x = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \times \end{cases}$$

ولی جواب باید در دامنه $x \geq 0$ موجود باشد، لذا فقط $\frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ قابل قبول است.

$$x < 0 \Rightarrow f = g \Rightarrow x^2 - x = -1$$

حالت دوم:

$$x^2 - x + 1 = 0 \Rightarrow \Delta = (-1)^2 - 4(1)(1) = 1 - 4 = -3$$

دلته منفی شد، پس معادله جواب ندارد. لذا تنها نقطه تلاقی f و g نقطه

$$A(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}, 1) \text{ است.}$$

ریاضی و آمار ۲

کاربرگی امتحانی

از خودت امتحان بگیر!

مجموعه کتاب‌های
پرست‌پیک



۱۳ امتحان شامل:

۷ امتحان درس به درس در سطح استاندارد

۴ امتحان شبیه‌ساز نهایی نوبت اول و دوم

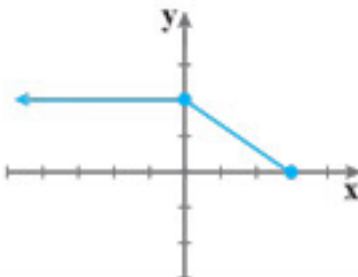
۲ امتحان نهایی

• پاسخ‌نامه تشریحی به همراه ریزبارم و نکات آموزشی و مشاوره‌ای



امتحان ۱۱: پایان سال		سؤالات شبیه‌ساز نهایی		مهرماه
رشته: ادبیات و علوم انسانی	پایه: یازدهم دوره دوم متوسطه	مدت امتحان: ۱۰۰ دقیقه	ساعت شروع: ۷:۳۰ صبح	
سؤالات درس: ریاضی و آمار (۲)	نام و نام خانوادگی:	تاریخ امتحان:	تعداد صفحه: ۲	

ردیف	سؤالات	صفحه ۱ از ۲	نمره
------	--------	-------------	------

۱	درستی یا نادرستی هر یک از عبارت‌های زیر را مشخص کنید. الف) جمله «عدد $\sqrt{5}$ یک عدد گویاست» بیانگر یک گزاره است. ب) برای رسم نمودار تابع $y = x - 1$ کافی است نمودار تابع $y = x $ را یک واحد به سمت راست منتقل کنیم. پ) خانم‌های خانه‌دار جزء جمعیت بیکار جامعه محسوب می‌شوند. ت) شاخص‌ها واقعیت‌های مفیدی از جامعه را به سادگی به ما نشان می‌دهند و امکان مقایسه را فراهم می‌کنند.	درست ☐ نادرست ☐ درست ☐ نادرست ☐ درست ☐ نادرست ☐ درست ☐ نادرست ☐	۱
۲	جاهای خالی را با عدد یا عبارت مناسب کامل کنید. الف) شاخص پایه آموزش براساس و تعریف می‌شود. ب) عمل جمع توابع در دامنه می‌تواند انجام شود. پ) با توجه به ضابطه تابع علامت، مقدار $\text{sign}(-2) + \text{sign}(3/5)$ برابر است با		۱
۳	در سؤالات زیر گزینه صحیح را انتخاب کنید. الف) معادل ریاضی عبارت «حاصل ضرب دو عدد طبیعی برابر مجموع آن‌ها می‌شود» کدام است؟ ب) حاصل $[-7/3]$ برابر کدام گزینه است؟ پ) نمودار تابع ثابت: ت) اگر گزاره $p \sim q$ درست و گزاره q نادرست باشد، آنگاه ارزش گزاره‌های $p \wedge q$ و $p \vee q$ به ترتیب از راست به چپ چگونه است؟	$xy = x - y$ (۱) ☐ $x^2 = xy$ (۲) ☐ $xy = x + y$ (۳) ☐ $x + y = x - y$ (۴) ☐ -4 (۱) ☐ -7 (۲) ☐ -8 (۳) ☐ -5 (۴) ☐ (۱) از مبدأ مختصات عبور می‌کند. ☐ (۲) موازی محور طول‌هاست. ☐ (۳) نیمساز ربع اول و سوم است. ☐ (۴) نیمساز ربع دوم و چهارم است. ☐ (۱) درست - نادرست ☐ (۲) نادرست - نادرست ☐ (۳) درست - درست ☐ (۴) نادرست - درست ☐	۱
۴	الف) نقیض گزاره «قله دماوند در اصفهان قرار دارد» را بنویسید. ب) ارزش گزاره «عدد ۱۲۵ زوج است اگر و تنها اگر عدد ۱۸ مربع کامل باشد» را مشخص کنید.		۱/۲۵
۵	نام استدلال زیر چیست؟ آیا روش استفاده‌شده در آن صحیح است؟ آیا نتیجه آن صحیح است؟ مقدمه ۱: اگر قیمت فولاد گران شود، آنگاه قیمت خودرو هم گران می‌شود. مقدمه ۲: قیمت فولاد گران شد. ∴ قیمت خودرو گران شده است.		۰/۷۵
۶	با استفاده از جدول ارزشی، درستی هم‌ارزی داده‌شده را بررسی کنید. $(p \wedge \sim q) \vee (p \Rightarrow q) \equiv T$		۱
۷	ثابت کنید هرگاه n عدد صحیح و n^2 مضرب ۳ باشد، آنگاه n نیز مضرب ۳ است.		۱
۸	برد تابع f را به دست آورده و نمودار آن را رسم کنید. $f: A \rightarrow B$ $f(x) = x^2 - 1$ $D_f = A: \{2, -1, -2\}, R_f = B: \{.....\}$		۱/۲۵
۹	ضابطه تابع و نمودار آن را کامل کنید.	$f(x) = \begin{cases} & x < 0 \\ & 0 \leq x \leq 3 \\ 2x + 1 & x > 3 \end{cases}$ 	۱/۵

«ادامه سؤالات در صفحه دوم»

امتحان ۱۱: پایان سال		سؤالات شبیه‌ساز نهایی		مهروماه
رشته: ادبیات و علوم انسانی	پایه: یازدهم دوره دوم متوسطه	مدت امتحان: ۱۰۰ دقیقه	ساعت شروع: ۷:۳۰ صبح	
سؤالات درس: ریاضی و آمار (۲)	نام و نام خانوادگی:	تاریخ امتحان:	تعداد صفحه: ۲	

ردیف	سؤالات	صفحه ۲ از ۲	نمره
------	--------	-------------	------

۱۰	نمودار تابع $y = - x + 3 + 1$ را به کمک انتقال رسم کنید.	۱/۵												
۱۱	در تابع $y = \text{sign}(x)$ مقادیر زیر را حساب کنید. الف) $\text{sign}(\frac{2}{5})$ ب) $\text{sign}(1 - \sqrt{2})$ پ) $\text{sign}(k^2 + 1)$	۱/۵												
۱۲	اگر $f = \{(7, 1), (6, 2), (3, 0)\}$ و $g = \{(7, 4), (3, 3), (1, 2)\}$ دو تابع باشند، توابع زیر را به صورت زوج مرتب بنویسید. الف) $\frac{1}{f}$ ب) g^2 پ) $\frac{1}{f} + g^2$	۱/۷۵												
۱۳	جدول زیر، سبد هزینه گوشت و برنج خانواری را در سال پایه و سال ۱۳۹۹ نشان می‌دهد. شاخص بهای این دو کالا برای مقادیر داده شده در سال ۱۳۹۹ به صورت زیر حساب شده است. با توجه به این رابطه، جدول را کامل کنید. $\text{شاخص} = \frac{(30000 \times 60) + (9000 \times 100)}{(25000 \times 60) + (7000 \times 100)} \times 100 \approx 122/7$ <table border="1" data-bbox="766 1187 1333 1454"> <thead> <tr> <th>سبد</th><th>گوشت</th><th>برنج</th></tr> </thead> <tbody> <tr> <td>قیمت در سال پایه (تومان)</td><td></td><td>۷۰۰۰</td></tr> <tr> <td>قیمت در سال ۱۳۹۹ (تومان)</td><td></td><td></td></tr> <tr> <td>مقادیر مصرفی در سال پایه</td><td>۶۰</td><td></td></tr> </tbody> </table>	سبد	گوشت	برنج	قیمت در سال پایه (تومان)		۷۰۰۰	قیمت در سال ۱۳۹۹ (تومان)			مقادیر مصرفی در سال پایه	۶۰		۱
سبد	گوشت	برنج												
قیمت در سال پایه (تومان)		۷۰۰۰												
قیمت در سال ۱۳۹۹ (تومان)														
مقادیر مصرفی در سال پایه	۶۰													
۱۴	در یک روستا تعداد بیکاران ۷۰۰ و تعداد افراد شاغل ۱۳۰۰ نفر است. الف) شاخص نرخ بیکاری چند درصد است؟ ب) حداقل چند شغل باید ایجاد شود تا شاخص نرخ بیکاری ۲۰٪ شود؟	۱/۵												
۱۵	درآمد دوازده نفر از کارکنان یک شرکت به صورت زیر آمده است. (اعداد برحسب هزار تومان هستند). ۵۰۰، ۷۵۰، ۱۰۰۰، ۱۲۰۰، ۱۱۰۰، ۱۵۰۰، ۷۵۰، ۳۰۰۰، ۲۵۰۰، ۱۷۵۰، ۲۲۵۰، ۵۰۰۰ الف) میانه را به دست آورید. ب) خط فقر برحسب میانه را به دست آورید. پ) چند نفر از افراد این شرکت زیر خط فقر هستند؟	۱												
۱۶	با توجه به نمودار سری زمانی مقابل: الف) قیمت کالا را در سال سوم درون یابی کنید. ب) قیمت کالا را در سال دهم برون یابی کنید. پ) اگر قیمت واقعی در سال سوم ۷۰ دلار باشد، خطای درون یابی را تعیین کنید.	۲												
۲۰	جمع نمرات	موفق باشید												

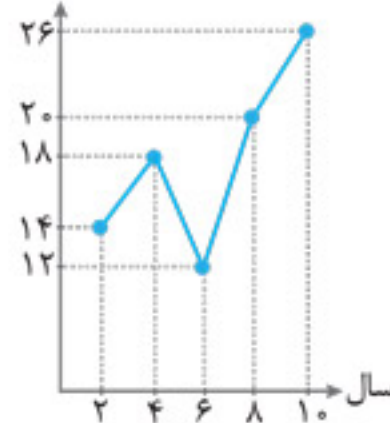
۱۷

$$\begin{aligned} \text{تورم} &= \frac{\left(\text{شاخص بهای گوشت در سال ۹۷} \right) - \left(\text{شاخص بهای گوشت در سال ۹۵} \right)}{\text{شاخص بهای گوشت در سال ۹۵}} \times ۱۰۰ \quad (۰/۲۵) \\ &= \frac{۱۲۵ - ۱۲۰}{۱۲۰} \times ۱۰۰ \quad (۰/۲۵) = \frac{۵}{۱۲۰} \times ۱۰۰ \quad (۰/۲۵) = ۴/۱۶\% \quad (۰/۲۵) \end{aligned}$$

(فصل ۳ - درس ۱)

۱۸ الف (۰/۵)

فروش بر حسب (میلیارد)

(ب) چون سال نهم بین سال هشتم و دهم است، پس از دو نقطه $A(۸, ۲۰)$ و

$$B(۱۰, ۲۶) \text{ استفاده می‌کنیم: } m = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} = \frac{۲۰ - ۲۶}{۸ - ۱۰} = \frac{-۶}{-۲} = ۳ \quad (۰/۲۵)$$

$$y - y_A = m(x - x_A) \Rightarrow y - ۲۰ = ۳(x - ۸) \Rightarrow y = ۳x - ۲۴ + ۲۰$$

$$\Rightarrow y = ۳x - ۴ \quad (۰/۲۵)$$

$$y = ۳x - 4 \xrightarrow{x=9} y = ۳ \times ۹ - ۴ = ۲۷ - ۴ = ۲۳ \quad (۰/۲۵) \quad (\text{فصل ۳ - درس ۲})$$

پاسخ امتحان شماره ۱۱

۱ الف) درست (۰/۲۵) (فصل ۱ - درس ۱) / ب) نادرست (۰/۲۵)؛ چون

$$y = |x| - ۱ \text{ پس ۱ واحد به پایین انتقال می‌دهیم.} \quad (\text{فصل ۲ - درس ۲})$$

دام آموزشی: در انتقال به صورت $y = f(x) + k$ اگر $k > ۰$ باشد، k واحد به بالا و اگر $k < ۰$ باشد، k واحد به پایین انتقال می‌دهیم.

(ب) نادرست (۰/۲۵)؛ خانم‌های خانه‌دار جزء جمعیت بیکار محسوب نمی‌شوند. (فصل ۳ - درس ۱)

دام آموزشی: زنان خانه‌دار، دانش‌آموزان، دانشجویان و افراد سالخورده (بالای ۶۵ سال) جزء جمعیت بیکار محسوب نمی‌شوند و همچنین جزء جمعیت فعال محسوب نمی‌شوند.

(ت) درست (۰/۲۵) (فصل ۳ - درس ۱)

۲ الف) میانگین تعداد کلمات در هر جمله (۰/۲۵) - درصد لغات دشوار (۰/۲۵)

(فصل ۳ - درس ۱) / ب) مشترک (۰/۲۵) (فصل ۲ - درس ۳) / پ) صفر (۰/۲۵)

(فصل ۲ - درس ۲)

$$\left. \begin{aligned} \text{sign}(-۲) &= -۱ \\ \text{sign}(۳/۵) &= ۱ \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{sign}(۳/۵) + \text{sign}(-۲) = ۱ + (-۱) = ۰$$

یادآوری:

$$\text{sign}(x) = \begin{cases} ۱ & x > ۰ \\ ۰ & x = ۰ \\ -۱ & x < ۰ \end{cases}$$

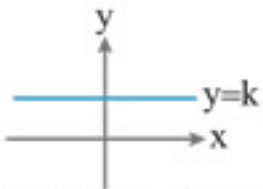
۳ الف) گزینه ۳ (۰/۲۵) (فصل ۱ - درس ۲)

(ب) گزینه ۳ (۰/۲۵)

$$-۸ < -۷/۳ < -۷ \Rightarrow [-۷/۳] = -۸$$

(فصل ۲ - درس ۲)

(پ) گزینه ۲ (۰/۲۵)؛ نمودار تابع ثابت خطی موازی محور x هاست. (فصل ۲ - درس ۲)

(ت) گزینه ۲ (۰/۲۵)؛ $p \sim q$ درست است، پس p نادرست است و چون q نادرست است، $p \wedge q$ نادرست و $p \vee q$ نیز نادرست است. (فصل ۲ - درس ۱)

۴ الف) قله دماوند در اصفهان قرار ندارد. (۰/۵)

(ب) عدد ۱۲۵ زوج است اگر و تنها اگر عدد ۱۸ مربع کامل باشد.

$$\frac{F(۰/۲۵)}{T(۰/۲۵)}$$

(فصل ۱ - درس ۱)

۵ نام استدلال: قیاس استثنایی (۰/۲۵) - روش این استدلال: صحیح (۰/۲۵) -

نتیجه این استدلال: صحیح (۰/۲۵) (فصل ۱ - درس ۲)

۶

p	q	$\sim q$	$p \wedge \sim q$	$p \Rightarrow q$	$(p \wedge \sim q) \vee (p \Rightarrow q)$
T	T	F	F	T	T
T	F	T	T	F	T
F	T	F	F	T	T
F	F	T	F	T	T

(۰/۲۵) (۰/۲۵) (۰/۲۵) (۰/۲۵)

(فصل ۱ - درس ۱)

۷ از استدلال عکس نقیض برای اثبات حکم استفاده می‌کنیم. فرض می‌کنیم n مضرب ۳ نباشد، پس $n = ۳k + ۱$ یا $n = ۳k + ۲$ است. (۰/۲۵) در نتیجه:

$$n^2 = (۳k + ۱)^2 = ۹k^2 + ۶k + ۱ = ۳k' + ۱ \quad (۰/۲۵)$$

حالت اول:

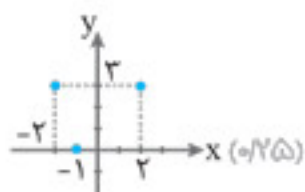
$$n^2 = (۳k + ۲)^2 = ۹k^2 + ۱۲k + ۴ = ۳k'' + ۱ \quad (۰/۲۵)$$

حالت دوم:

یعنی اگر n مضرب ۳ نباشد، نتیجه می‌گیریم که n^2 نیز مضرب ۳ نیست. با توجه به هم‌ارزی عکس نقیض شرطی $\sim q \Rightarrow \sim p \equiv p \Rightarrow q$ حکم داده شده ثابت می‌شود. (۰/۲۵) (فصل ۱ - درس ۲)

۸

$$\left. \begin{aligned} x=۲ &\Rightarrow f(۲)=۲^2-۱=۴-۱=۳ \quad (۰/۲۵) \\ x=-۱ &\Rightarrow f(-۱)=(-۱)^2-۱=۱-۱=۰ \quad (۰/۲۵) \\ x=-۲ &\Rightarrow f(-۲)=(-۲)^2-۱=۴-۱=۳ \quad (۰/۲۵) \end{aligned} \right\} \Rightarrow R_f = \{۳, ۰\} \quad (۰/۲۵)$$



(فصل ۲ - درس ۱)

۱۳

برنج در سال ۱۳۹۹ + گوشت در سال ۱۳۹۹ = شاخص
برنج در سال پایه + گوشت در سال پایه

$$= \frac{(30000 \times 60) + (9000 \times 100)}{(25000 \times 60) + (7000 \times 100)} \times 100 \approx 122.7$$

برنج	گوشت	سبد
۷۰۰۰	۲۵۰۰۰	قیمت در سال پایه (تومان)
۹۰۰۰	۳۰۰۰۰	قیمت در سال ۱۳۹۹ (تومان)
۱۰۰	۶۰	مقادیر مصرفی در سال پایه

(هر جای خالی ۰/۲۵) (فصل ۳ - درس ۱)

۱۴ الف

(۰/۲۵) جمعیت شاغل + جمعیت بیکار = جمعیت فعال
۷۰۰ + ۱۳۰۰ = ۲۰۰۰

$$\text{نرخ بیکاری} = \frac{\text{جمعیت بیکار}}{\text{جمعیت فعال}} \times 100 = \frac{700}{2000} \times 100 = 35 \quad (۰/۲۵)$$

(ب) فرض کنیم باید x شغل ایجاد شود، پس تعداد بیکاران $700 - x$ می شود:

$$20 = \frac{700 - x}{2000} \times 100 \quad (۰/۲۵) \Rightarrow 20 = \frac{700 - x}{20} \Rightarrow 400 = 700 - x \quad (۰/۲۵)$$

$$\Rightarrow x = 300 \quad (۰/۲۵)$$

(فصل ۳ - درس ۱)

۱۵ ابتدا داده ها را مرتب می کنیم:

(الف) ۵۰۰, ۷۵۰, ۷۵۰, ۱۰۰۰, ۱۱۰۰, ۱۲۰۰, ۱۵۰۰, ۱۷۵۰, ۲۲۵۰, ۲۵۰۰, ۳۰۰۰, ۵۰۰۰

$$Q_2 = \frac{1200 + 1500}{2} = 1350 \quad (۰/۲۵)$$

$$\text{میانۀ} = \frac{1350}{2} = 675 \quad (۰/۲۵) \quad \text{خط فقر}$$

(ب)

(ب) یک نفر زیر خط فقر است. (۰/۲۵)

(فصل ۳ - درس ۱)

۱۶ الف) چون سال سوم بین دو سال دوم و چهارم قرار دارد، از دو نقطه $A(2, 4)$ و $B(4, 80)$ استفاده می کنیم:

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{80 - 4}{4 - 2} = \frac{76}{2} = 38 \quad (۰/۲۵)$$

$$y - y_A = m(x - x_A) \Rightarrow y - 4 = 38(x - 2) \Rightarrow y - 4 = 38x - 76$$

$$\Rightarrow y = 38x - 72 \quad (۰/۲۵)$$

$$y = 38x - 72 \xrightarrow{x=3} y = 38 \times 3 - 72 = 114 - 72 = 42 \quad (۰/۲۵)$$

(ب)

$$\bar{x} = \frac{2 + 4 + 6 + 8}{4} = \frac{20}{4} = 5 \Rightarrow C(5, 49) \quad (۰/۲۵)$$

$$\bar{y} = \frac{4 + 80 + 4 + 108}{4} = \frac{196}{4} = 49$$

حال از دو نقطه $C(5, 49)$ و $D(8, 108)$ استفاده می کنیم:

$$m = \frac{y_D - y_C}{x_D - x_C} = \frac{108 - 49}{8 - 5} = \frac{59}{3} \quad (۰/۲۵)$$

$$y - y_C = m(x - x_C) \Rightarrow y - 49 = \frac{59}{3}(x - 5) \quad (۰/۲۵)$$

$$\xrightarrow{x=10} y - 49 = \frac{59}{3}(10 - 5) \Rightarrow y = 49 + \frac{59}{3} \times 5$$

$$= 49 + \frac{295}{3} = 49 + 98 \frac{1}{3} = 147 \frac{1}{3} \quad (۰/۲۵)$$

$$\text{خطای درون یابی} = |70 - 42| = 28 \quad (۰/۲۵)$$

(ب)

(فصل ۳ - درس ۲)

۹ در محدوده $x < 0$ تابع ثابت $y = 2$ است.

برای یافتن ضابطه در محدوده $0 \leq x \leq 3$ کافیت دو نقطه $A(0, 2)$ و

$$B(3, 0) \text{ را در نظر بگیریم: } m_{AB} = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} = \frac{2 - 0}{0 - 3} = -\frac{2}{3} \quad (۰/۲۵)$$

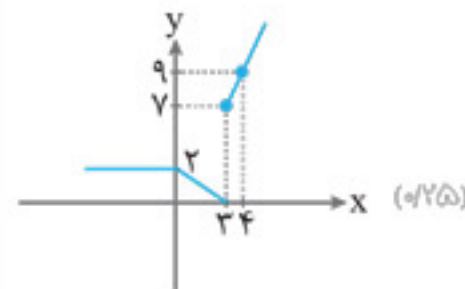
$$\Rightarrow y - y_A = m(x - x_A) \Rightarrow y - 2 = -\frac{2}{3}(x - 0) \Rightarrow y - 2 = -\frac{2}{3}x$$

$$\Rightarrow y = -\frac{2}{3}x + 2 \quad (۰/۲۵)$$

$$\Rightarrow f(x) = \begin{cases} 2 & (۰/۲۵) \quad x < 0 \\ -\frac{2}{3}x + 2 & 0 \leq x \leq 3 \\ 2x + 1 & x > 3 \end{cases}$$

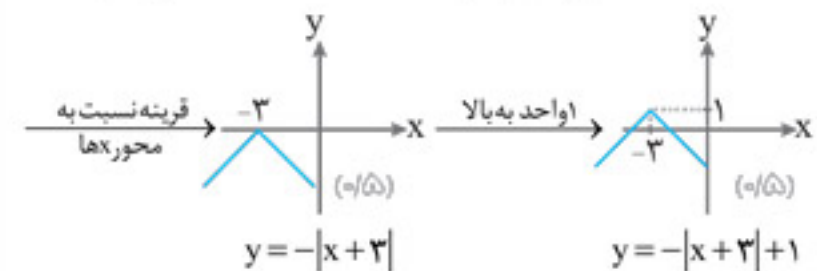
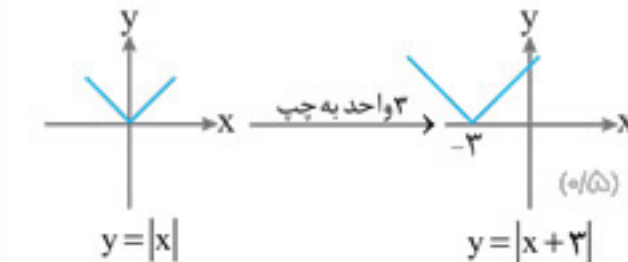
حال برای رسم تابع در محدوده $x > 3$ کافیت دو نقطه به خط $y = 2x + 1$ بدهیم:

$$y = 2x + 1 \begin{cases} x = 3 \Rightarrow y = 2 \times 3 + 1 = 7 \Rightarrow (3, 7) \quad (۰/۲۵) \\ x = 4 \Rightarrow y = 2 \times 4 + 1 = 9 \Rightarrow (4, 9) \quad (۰/۲۵) \end{cases}$$



(فصل ۲ - درس ۱)

۱۰



(فصل ۲ - درس ۲)

۱۱ الف) عددی مثبت است، لذا: $\text{sign}(\frac{2}{5}) = 1 \quad (۰/۵)$

(ب) می دانیم $\sqrt{2}$ تقریباً ۱/۴ است، لذا:

$$\text{sign}(1 - \sqrt{2}) = \text{sign}(-0.4) = -1 \quad (۰/۵)$$

(پ) k هرچه باشد، $(k^2 + 1)$ مثبت می شود، لذا: $\text{sign}(k^2 + 1) = 1 \quad (۰/۵)$

(فصل ۲ - درس ۲)

۱۲ الف) برای ساختن تابع $\frac{1}{f}$ تمام عضوهای دوم f را معکوس می کنیم:

$$D_{\frac{1}{f}} = D_f - \{x | f(x) = 0\} = \{7, 6, 3\} - \{3\} = \{7, 6\} \quad (۰/۲۵)$$

$$\frac{1}{f} = \left\{ (7, 1), (6, \frac{1}{3}) \right\} \quad (۰/۵)$$

(ب) برای ساختن g^2 تمام عضوهای دوم g را به توان ۲ می رسانیم:

$$g^2 = \{(7, 16), (3, 9), (1, 4)\} \quad (۰/۵)$$

(پ) حالا دو تابع $\frac{1}{f}$ و g^2 را با توجه به دامنه مشترک، جمع می کنیم:

$$D_{\frac{1}{f} + g^2} = D_{\frac{1}{f}} \cap D_{g^2} = \{7, 6\} \cap \{7, 3, 1\} = \{7\} \quad (۰/۲۵)$$

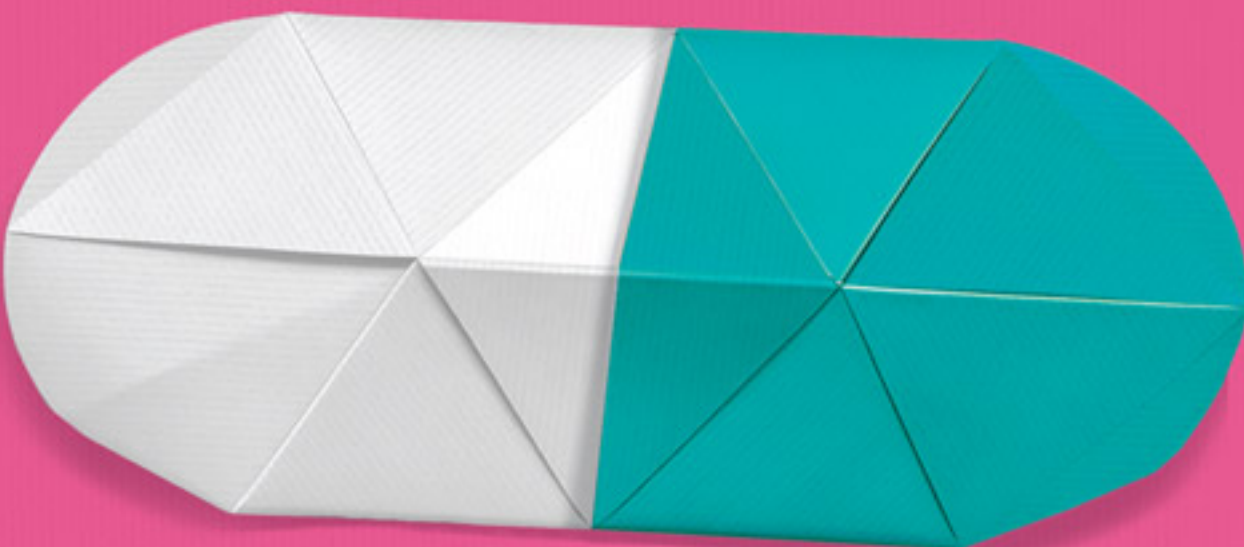
$$\frac{1}{f} + g^2 = \{(7, 17)\} \quad (۰/۲۵)$$

(فصل ۲ - درس ۳)

خلاصه کیسولی ریاضی و آمار ۲

- خلاصه کاربردی مطالب مهم
به صورت درس به درس
- فرمول‌های پرتکرار و مهم نهایی
- نکات مفهومی مرتبط با هر قسمت

۳۱ x ۱۴۰۵
ویژه نهایی



قیمت بسته بیست‌پیک
۲۷۵۰۰۰ تومان



مهروماه



هومان
مرکز تخصصی علوم انسانی

وضعیت توده بدن	مقدار BMI
کمبود وزن شدید	کمتر از ۱۶/۵
کمبود وزن	بین ۱۶/۵ تا ۱۸/۵
عادی	بین ۱۸ تا ۲۵
اضافه وزن	بین ۲۵ تا ۳۰
چاقی کلاس ۱	بین ۳۰ تا ۳۵
چاقی کلاس ۲	بین ۳۵ تا ۴۰
چاقی کلاس ۳	بیش از ۴۰

شاخص پوسیدگی دندان

شاخص پوسیدگی دندان، تعداد دندان کشیده شده، دندان پوسیده و دندان پر شده را نشان می‌دهد. به طور مثال اگر گفته شود شاخص در کشوری برابر ۶ است، به این معناست که به طور متوسط هر نفر در آن کشور ۲ دندان پوسیده، ۲ دندان کشیده و ۲ دندان پر شده دارد.

درس دوم: سری‌های زمانی

* با توجه به اینکه مباحث سری زمانی، درون‌یابی و برون‌یابی در سال‌های اخیر از حذفیات امتحان نهایی بودند، تنها به خلاصه‌ای از این مباحث بسنده کردیم.

• **سری زمانی:** اگر داده‌های آماری را طی فواصل منظمی گردآوری کنیم، یک سری زمانی داریم و اگر داده‌های سری زمانی را با خطوطی به هم وصل کنیم، نمودار سری زمانی به دست می‌آید.

• **سری زمانی متناوب:** اگر در طی فواصل منظم، الگویی تکرارشونده داشته باشیم، نمودار سری زمانی، متناوب خواهد بود.

• **درون‌یابی:** پیدا کردن مقداری نامعلوم بین دو داده مشخص را درون‌یابی می‌گویند. هرچه نمودار بین دو نقطه داده شده به خط نزدیک‌تر باشد، درون‌یابی دقیق‌تر انجام می‌شود.

• **برون‌یابی:** به دست آوردن مقداری نامعلوم که از همه داده‌ها کوچک‌تر یا از همه داده‌ها بزرگ‌تر باشد. در این صورت با استفاده از دو نقطه اول یا آخر و میانگین کل داده‌ها برون‌یابی را انجام می‌دهیم.

در درون‌یابی و برون‌یابی اگر داده‌ای را بین دو نقطه $A(x_1, y_1)$ و $B(x_2, y_2)$ بخواهیم تخمین بزنیم، از فرمول $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ شیب خط واصل AB را به دست آورده و سپس با جای‌گذاری m در فرمول $y - y_1 = m(x - x_1)$ معادله خط گذرنده از A و B را می‌یابیم. در نهایت با جای‌گذاری نقطه مجهول، مقدار آن را به دست می‌آوریم.

• **خطای درون‌یابی و برون‌یابی:** از فرمول زیر به دست می‌آید:

$$| \text{مقدار واقعی} - \text{مقدار تخمین زده شده} | = \text{خطا}$$

خلاصه درس

فصل اول

درس اول: گزاره‌ها و ترکیب گزاره‌ها

تعریف گزاره

جمله خبری که ممکن است درست و یا نادرست باشد. در منطق گزاره‌ها و در جبر گزاره‌ها هر گزاره را با یکی از حروف انگلیسی مانند p یا q یا r ... نشان می‌دهند. در سه جدول زیر وضعیت ارزشی یک، دو و سه گزاره مشخص شده است.

p	q	r
د	د	د
د	ن	د
ن	د	د
ن	ن	د
د	د	ن
د	ن	ن
ن	د	ن
ن	ن	ن

تعداد ردیف: $2^1 = 2$

تعداد ردیف: $2^2 = 4$

تعداد ردیف: $2^3 = 8$

نقیض یک گزاره

نقیض گزاره p را با نماد $\sim p$ نمایش داده و آن را به صورت (نقیض p) یا (چنین نیست که p) می‌خوانیم. به عنوان مثال نقیض گزاره « x منفی است» به صورت « x منفی نیست» بیان می‌شود.

p	$\sim p$
د	ن
ن	د

ترکیب گزاره‌ها

در منطق ریاضی ترکیب گزاره‌ها توسط چهار رابط (و)، (یا)، (شرطی) و (دوشرطی) انجام می‌شود. مانند عبارت « 7 عددی فرد است و 2 عددی اول است.»

ترکیب عطفی دو گزاره

در منطق ریاضی ارزش درستی یا نادرستی گزاره‌های مرکب که با حرف ربط (و) بین دو گزاره ساده ساخته می‌شوند و به آن‌ها ترکیب عطفی گفته می‌شود، مطابق جدول زیر مشخص می‌شود.

p	q	$p \wedge q$
د	د	د
د	ن	ن
ن	د	ن
ن	ن	ن

طبق جدول بالا، ترکیب عطفی دو گزاره فقط وقتی درست است که هر دو گزاره درست باشند.

ترکیب فصلی دو گزاره

در منطق ریاضی ارزش درستی یا نادرستی گزاره‌های مرکب که با حرف ربط (یا) بین دو گزاره ساده ساخته می‌شوند و به آن‌ها ترکیب فصلی گفته می‌شود، مطابق جدول زیر مشخص می‌شوند.

p	q	$p \vee q$
د	د	د
د	ن	د
ن	د	د
ن	ن	ن

طبق جدول بالا ترکیب فصلی دو گزاره فقط وقتی نادرست است که هر دو گزاره نادرست باشند.

نکته نقیض نقیض هر گزاره برابر با خود گزاره است.

ترکیب شرطی دو گزاره

هرگاه بخواهیم از گزاره p گزاره q را نتیجه بگیریم، از نماد $(\Rightarrow)$ استفاده می‌کنیم و می‌نویسیم $p \Rightarrow q$ و آن را به صورت‌های زیر می‌خوانیم:
(اگر p آنگاه q)، (p نتیجه می‌دهد q را)، (q از p نتیجه می‌شود).
در گزاره شرطی $p \Rightarrow q$ ، p را مقدم و q را تالی می‌نامیم.
ارزش گزاره شرطی $p \Rightarrow q$ با توجه به جدول زیر تعیین می‌شود.

p	q	$p \Rightarrow q$
د	د	د
د	ن	ن
ن	د	د
ن	ن	د

نکته گزاره شرطی $p \Rightarrow q$ زمانی نادرست است که مقدم درست و تالی نادرست باشد.

ترکیب دوشروطی

هرگاه بخواهیم از گزاره p گزاره q را نتیجه بگیریم و از گزاره q گزاره p را نتیجه بگیریم، از نماد $(p \Leftrightarrow q)$ استفاده کرده و می‌نویسیم $(p \Leftrightarrow q)$ و آن را به صورت‌های زیر می‌خوانیم:
(اگر p آنگاه q و برعکس)، (p شرط لازم و کافی برای q)، (p اگر و تنها اگر q)
در واقع گزاره دوشروطی $(p \Leftrightarrow q)$ همان گزاره $[(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)]$ است.

p	q	$p \Leftrightarrow q$
د	د	د
د	ن	ن
ن	د	ن
ن	ن	د

نکته ارزش گزاره دوشروطی $(p \Leftrightarrow q)$ زمانی درست است که هر گزاره p و q هم‌ارزش باشند:

یعنی $p \equiv q$.

نکته $(p \Rightarrow q) \equiv (q \vee \sim p)$ ، $(p \Leftrightarrow q) \equiv [(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)]$