



مهر و ماه



هومان

مرکز تخصصی علوم انسانی



• درسنامه های جامع با موشکافی و تحلیل کامل متن کتاب درسی

• بیش از ۱۳۸۰ سؤال متنوع امتحانی

خلاصه کپسولی



۱۵ کاربرگ امتحانی



به نام خدای مهربان



• برای دریافت آخرین
امتحان نهایی
این کد رو اسکن کن.



مقدمه

سلام خدمت دانش آموزان پرتلاش

همان طور که می دانید با تغییراتی که صورت گرفته، یعنی حذف دروس عمومی از کنکور و قطعی شدن تأثیر نمرات امتحان نهایی در قبولی دانشگاه، گرفتن نمره کامل در امتحانات نهایی از قبل سخت تر خواهد شد.

پیش بینی می شود که هم سطح دشواری سؤالات تغییر کرده و سؤالات سخت تر می شود و هم رقابت بین دانش آموزان برای برتری (به خصوص دانش آموزانی که در تست ضعیف تر هستند و روی سؤالات تشریحی امتحانات نهایی حساب باز کردند) بیشتر خواهد شد. پس فرض کن که در دوی مارا تن داری می دوی و یک لحظه تردیدت باعث جا ماندن از این مسیر آینده ساز می شود.

خبر خوب اینکه کتابی که پیش روی شماست تلاش کرده تا هر آنچه که برای موفقیت نیاز دارید، فراهم نماید، چه از لحاظ درسنامه های کاربردی و مطابق با رویکرد امتحان نهایی و چه از نظر بانک سؤالات امتحان نهایی و طبقه بندی درس به درس و بخش بندی سؤالات در هر درس. همچنین پاسخنامه های واقعاً تشریحی به همراه نکات امتحانی و جمع بندی، به برطرف شدن ایرادات احتمالی شما کمک می کند.

پس اگر به دنبال کتابی هستید که تمام مطالب کتاب درسی را به همراه بررسی و موشکافی نکات آن، مدنظر قرار داده باشد، توصیه می کنیم خواندن کتاب **بیست و یک** را در اولویت خود قرار دهید. این کتاب از نظر تعداد، تنوع و سطح دشواری سؤالات و نیز از نظر دسته بندی مطالب، هر آنچه را که برای موفقیت دانش آموزان نهایی لازم است، تأمین کرده است. پس با امید و تلاش و توکل به یگانه خالق هستی، این کتاب را شروع کنید و لحظه ای از رسیدن به موفقیت در این مسیر پرفراز و نشیب ولی شیرین از حرکت نایستید.

ساختار کتاب

این کتاب شامل قسمت های متنوع و کاربردی است که در ادامه به صورت مختصر به آن اشاره شده است.

کتاب پرسؤال

مشاوره: هر درس با یک مشاوره کاربردی شروع می شود که در آن علاوه بر بارم درس در امتحانات، عنوان مباحث مهم درس نیز آورده شده است. **درسنامه:** درسنامه این کتاب حاوی تمامی مطالب مهم و اسامی کتاب است که با خواندن آن دیگر نیازی به مراجعه به کتاب درسی ندارید.

سؤالات امتحانی: در پایان هر درس سؤالات متنوع و کاملی آورده شده، در طرح سؤالات هم تلاش کردیم از انواع مدل هایی که تاکنون در امتحانات نهایی سؤال طرح شده، استفاده کنیم. همچنین در انتهای هر بخش سؤالات دشوارتر و خلاقانه تر با علامت **+۲۰** مشخص شده که شما را بیشتر به کسب نمره ۲۰ نزدیک می کند.

کتاب کاربرگ امتحانی

آزمون های درس به درس: این آزمون ها را به سبک و سیاق امتحان نهایی طراحی کردیم؛ همچنین سعی کردیم تمام نکات مهم امتحان خیز هر درس، در قالب این آزمون ها بیاید. بنابراین پس از خواندن هر درس، یک امتحان نهایی در حد همان درس در انتظارتان است.

آزمون های جامع: پس از آزمون های درس به درس، آزمون های جامع آوردیم. از این آزمون ها، دو آزمون تألیفی نیم سال اول، و مابقی آزمون های جامع شبیه ساز نوبت دوم و آزمون های نهایی برگزار شده است. حتماً پس از مطالعه کل کتاب به این آزمون ها بپردازید.

کتابچه خلاصه کپسولی

اما بچه ها برایتان یک هدیه کوچک، اما بسیار کاربردی گذاشتیم. «خلاصه کپسولی» که در اصل خلاصه کل کتاب است و شامل مهم ترین و پرتکرارترین نکات امتحان نهایی است.

فهرست

فصل اول: آمار و احتمال

درس اول: شمارش

۶	درسنامه
۲۰	سؤالات امتحانی
۱۳۲	پاسخنامه

درس دوم: احتمال

۲۹	درسنامه
۴۴	سؤالات امتحانی
۱۴۶	پاسخنامه

درس سوم: چرخه آمار در حل مسائل

۵۳	درسنامه
۶۰	سؤالات امتحانی
۱۶۱	پاسخنامه

فصل دوم: الگوهای خطی

درس اول: مدل سازی و دنباله

۶۸	درسنامه
۷۵	سؤالات امتحانی
۱۶۷	پاسخنامه

درس دوم: دنباله های حسابی

۸۱	درسنامه
۸۷	سؤالات امتحانی
۱۷۶	پاسخنامه

فصل سوم: الگوهای غیرخطی

درس اول: دنباله هندسی

۹۶	درسنامه
۱۰۳	سؤالات امتحانی
۱۸۹	پاسخنامه

درس دوم: ریشه n م و توان گویا

۱۱۰	درسنامه
۱۱۶	سؤالات امتحانی
۲۰۳	پاسخنامه

درس سوم: تابع نمایی

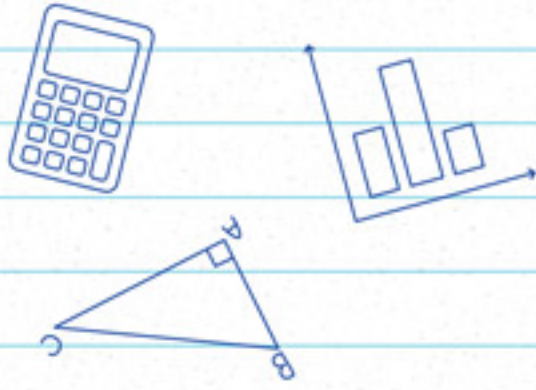
۱۲۱	درسنامه
۱۲۵	سؤالات امتحانی
۲۱۲	پاسخنامه

فصل اول آمار و احتمال



درس دوم

احتمال



مشاوره: امیدوارم حالتون خوب باشه انسانی‌ها، البته وقتی ریاضی رو انقدر براتون ساده کردیم نبایدم حالتون بد باشه.

خب شما در درس ۱ یک سری مفاهیم بنیادین رو یاد گرفتین که وصل میشن به مطالب درس ۲. در این درس شما ابتدا با مفهوم آزمایش قطعی و تصادفی، فضای نمونه و پیشامد آشنا میشین. آشنایی‌تون با این دوستان که تموم شد دوباره با یه عده دوستان جدید ملاقات می‌کنین که عبارتند از: احتمال رخ دادن یک پیشامد، کاربرد تبدیل و ترکیب در احتمال و احتمال پیشامد متمم. پس خیالتون راحت باشه که با درس خیلی خیلی مهمی مواجه هستین و اصلاً دست کم نگیریدش. بازم یک سری کلیدواژه‌های جالب داریم، یکیش اینه که میگن «فلان پیشامد رخ دهد» یا «فلان دو پیشامد با هم رخ دهند» یا «فلان پیشامد رخ دهد ولی بهمان پیشامد رخ ندهد» به همین منظور، من مجدداً تمام تعاریف اجتماع، اشتراک و تفاضل مجموعه‌ها رو که در سال‌های قبل داشتین، دوباره آموزش دادم. از این درس در خردادماه حدود ۴ نمره و درنوبت اول حدود ۸ نمره سؤال میاد. به خدا دستم درد گرفت انقدر براتون مشاوره نوشتم، برید شروع کنین درس خوندن رو دیگه. آفرین!

پیشامدهای قطعی و تصادفی

فرض کنین فاطمه هر روز با مترو به محل کار خودش میره و معمولاً قبل از ساعت ۸ به مقصد می‌رسه، آیا می‌تونیم بگیم فردا فاطمه به طور قطعی قبل از ساعت ۸ به محل کارش می‌رسه؟ معلومه که نه، چون هزارتا اتفاق ممکنه بیفته تا فاطمه تأخیر داشته باشه مثل تأخیر یا خرابی مترو. به این جور وقایع، پدیده تصادفی یا آزمایش تصادفی گفته میشه. به تعریف کتاب درسی توجه کنین:

◀ **آزمایش تصادفی:**

به پدیده‌ها یا آزمایش‌هایی که نتیجه آن‌ها قبل از اجرای آزمایش به طور قطعی مشخص نیست پدیده یا آزمایش تصادفی می‌گویند. در پدیده‌های تصادفی، از همه نتیجه‌های ممکن اطلاع داریم اما از اینکه کدام حالت قطعاً رخ می‌دهد اطمینان نداریم. به هر یک از نتایج ممکن برای یک آزمایش تصادفی، برآمد می‌گوییم. در مثال اول درس، همه نتایج رو می‌دونیم یعنی یک حالت اینه که فاطمه قبل از ساعت ۸ برسه و یک حالت دیگه اینه که فاطمه بعد از ساعت ۸ برسه و یک حالت هم اینه که خدای نکرده اتفاقی برای فاطمه رخ بده و اصلاً اون روز نتونه به محل کارش برسه. به هر کدوم از این حالت‌ها، یک برآمد گفته میشه.

◀ **مثالی دیگر از پدیده تصادفی:**

فرض کنین داخل کیسه‌ای، چند مهره سفید و چند مهره سیاه وجود داره و شما با چشم بسته، یک مهره رو خارج می‌کنین. آیا می‌تونین به طور قطعی بگین مهره‌ای که بیرون میاد چه رنگیه؟ قطعاً خیر، پس این آزمایش هم تصادفی محسوب میشه. البته بازم همه نتایج ممکن رو می‌دونیم، یعنی می‌دونیم که مهره خارج شده، بالاخره یا سفیده یا سیاه.

پدیده‌های قطعی

وقایعی هستن که نتیجه اون‌ها قبل از رخ دادنشون، به طور قطع مشخصه، مثلاً قبل از پرتاب یک سنگ به داخل یک استخر، قطعاً می‌دونیم که سنگ به داخل آب فرو میره پس این آزمایش، قطعی نام داره.



مثال: کدام یک از پدیده‌های زیر، تصادفی و کدام یک قطعی است؟

(کار در کلاس کتاب درسی)

الف وجود دانش آموزی در کلاس پایه دوازدهم که سن او بیشتر از ۱۰ سال باشد

ب پرتاب سکه توسط داور مسابقه فوتبال برای مشخص شدن زمین هرکدام از تیم‌ها

ج مشاهده دو مهره سفید، پس از خارج کردن دو مهره از جعبه‌ای که در آن ۱۰ مهره سفید وجود دارد

د پیش‌بینی نتیجه بازی بسکتبال، قبل از بازی

ه در یک بازی بین ۲ نفر سکه‌ای پرتاب می‌شود و به دنبال آن تاسی انداخته می‌شود. اگر شخصی سکه‌اش «پشت» و تاسش «فرد» بیاید برنده است. آیا قبل از بازی می‌توان فرد برنده را مشخص کرد؟



حل: الف قطعاً در کلاس دوازدهم، حداقل یک نفر وجود داره که بیشتر از ۱۰ سال سن داشته باشه (چون تمام یا اکثر بچه‌های دوازدهمی سنشون ۱۷ یا ۱۸ ساله) پس این پدیده قطعی است.

ب نمی‌دونیم سکه رو میاد یا پشت، پس این پدیده تصادفیه.

ج هر دو مهره، قطعاً سفید هستن، پس این پدیده قطعیه.

د نمیشه قبل از بازی به طور قطعی برنده رو مشخص کرد، پس این پدیده تصادفیه.

ه این پدیده هم تصادفیه، چون نمیشه از قبل گفت کدوم شخص برنده میشه.



☆ تپ مورد علاقه طراح نهایی

(مشابه خرداد ۱۴۰۱)

؟ سؤال: کدام یک از پدیده‌های زیر، تصادفی و کدام یک قطعی است؟

الف مشاهده عدد ۵ در پرتاب یک تاس که روی هر شش وجه آن عدد ۵ حک شده است.

ب نتیجه یک آزمون ۲ گزینه‌ای با ۱۰۰ سؤال که به ۹۰ سؤال آن به‌طور قطعی و بقیه سؤالات را به‌صورت شانسی پاسخ دادیم.

پاسخ الف پدیده قطعی، چون قبل از پرتاب تاس، می‌دونیم ۵ میاد. ب تصادفی، چون ۱۰ سؤال باقی‌مانده رو شانسی جواب داده‌ایم.

● نام‌گذاری برآمدها در یک آزمایش تصادفی

فرض کنیم ۴ کتاب ریاضی و ۳ کتاب عربی در یک قفسه وجود دارند و با چشم بسته یک کتاب رو انتخاب می‌کنیم، الان همیشه گفت مجموعه {عربی، ریاضی} همه برآمدها رو نشون میده، بلکه باید کتاب‌ها رو نامگذاری کنیم تا مشخص بشه دقیقاً کدام کتاب انتخاب شده. اگه ریاضی رو با R و عربی رو با A نشون بدیم، مجموعه همه برآمدهای ممکن، برابر میشه با:

$$\{ \underbrace{R_1, R_2, R_3, R_4}_{\text{ریاضی‌ها}}, \underbrace{A_1, A_2, A_3}_{\text{عربی‌ها}} \}$$

$$\{ \underbrace{a, b, c, d, e}_{\text{ریاضی‌ها}}, \underbrace{f, g, h}_{\text{عربی‌ها}} \}$$

البته برای نامگذاری برآمدها همیشه حروف مختلف لاتین یا فارسی رو هم در نظر گرفت (انتخاب با خود ماست).

فضای نمونه یک آزمایش تصادفی (Sample Space)

همه نتایج (برآمدهای) ممکن برای یک آزمایش تصادفی، مجموعه‌ای رو تشکیل میدن که به آن، فضای نمونه می‌گیم و با حرف S نمایش داده میشه، مثلاً در پرتاب یک تاس، فضای نمونه برابر میشه با:

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

تعداد اعضای فضای نمونه یعنی تعداد برآمدها رو با نماد $n(S)$ نشون میدیم، پس در پرتاب یک تاس $n(S)$ برابر ۶ خواهد بود. حالا فرض کنیم یک سکه رو پرتاب می‌کنیم. در این صورت داریم:

$$S = \{R, P\} \Rightarrow n(S) = 2$$

پشت رو
رو

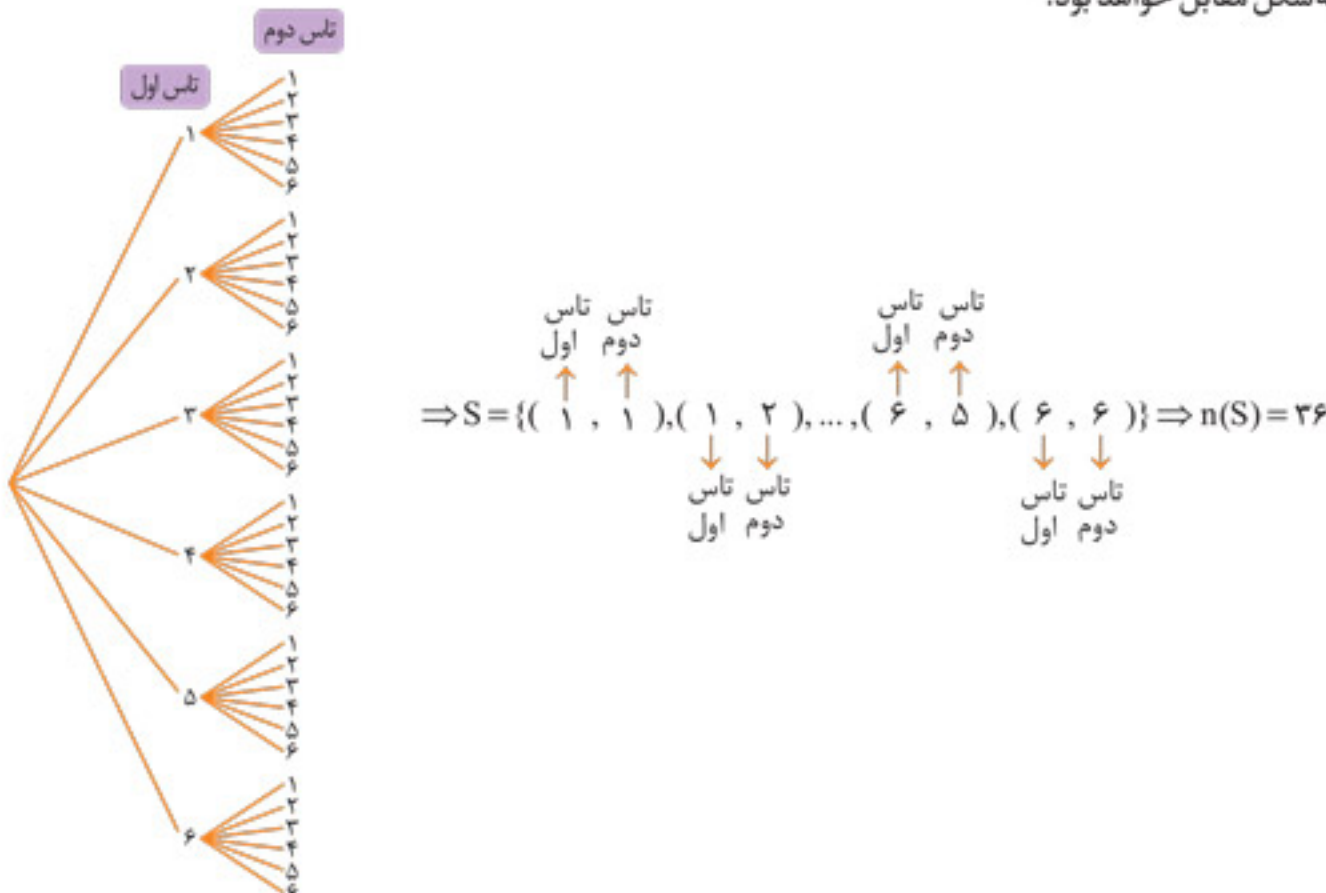
البته به جای $S = \{R, P\}$ میشه نوشت $S = \{r, p\}$.

➕ نکته نهایی: اگه چند سکه یا چند تاس،

پشت سر هم یا با هم پرتاب بشن و بخوایم همه برآمدها رو مشخص کنیم، بهتره از روش شاخه‌بندی (نمودار درختی) استفاده کنیم. مثلاً اگه دو سکه رو پرتاب کنیم (یا اینکه یک سکه رو دوبار پرتاب کنیم) نمودار درختی به شکل مقابل خواهد بود:

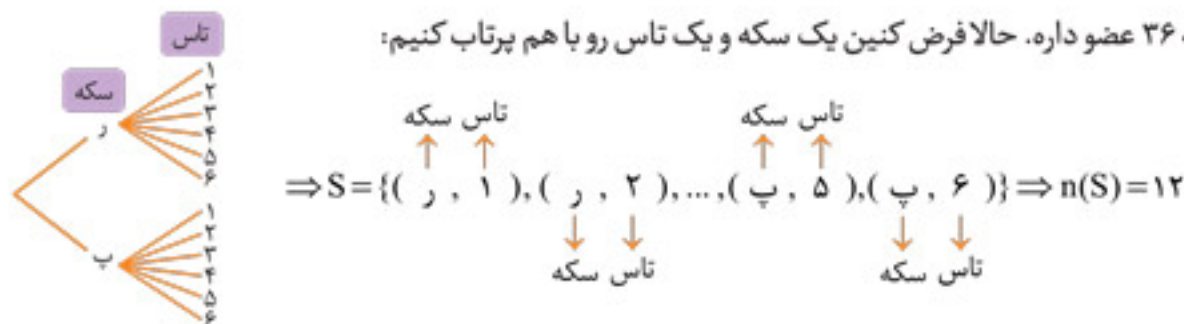


در مثال قبل دیدین که هر یک از برآمدها، به شکل یک زوج مرتب بود و در کل چهارتا زوج مرتب ایجاد شد. حالا فرض کنیم دوتا تاس رو با هم پرتاب کنیم (یا اینکه ۱ تاس رو دو بار بندازیم) نمودار درختی به شکل مقابل خواهد بود:





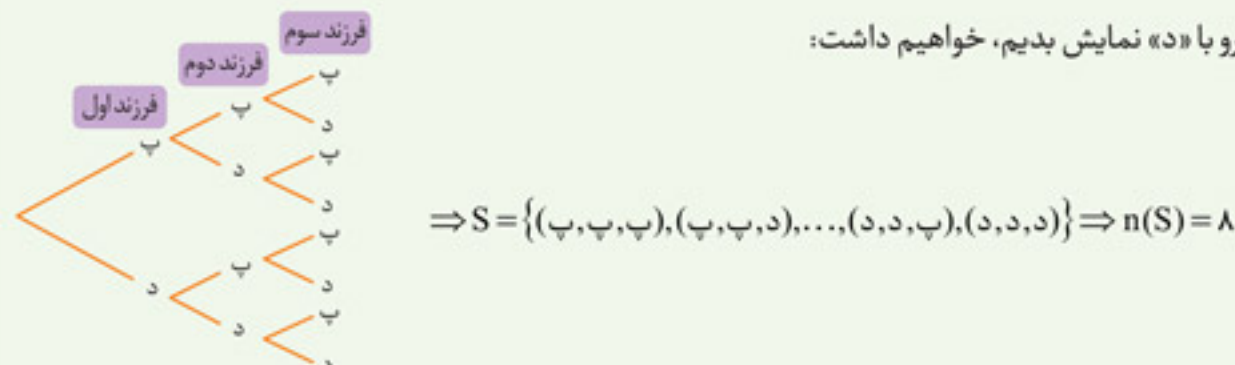
الان ۳۶ تا از زوج مرتب‌ها ایجاد شد، پس فضای نمونه ۳۶ عضو دارد. حالا فرض کنیم یک سکه و یک تاس رو با هم پرتاب کنیم:



مثال: خانواده‌ای ۳ فرزند دارد که جنسیت آن‌ها را نمی‌دانیم. به کمک رسم نمودار درختی، فضای نمونه مربوط به این فرزندان را بنویسید.

(مشابه تمرین کتاب درسی)

حل: اگر فرزند پسر رو با «پ» و دختر رو با «د» نمایش بدیم، خواهیم داشت:

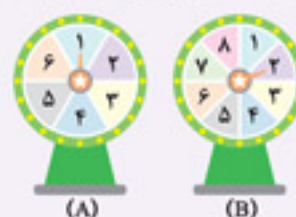


یافتن $n(S)$ بدون نوشتن S

حالا شاید بپرسین آیا لازمه همیشه نمودار درختی رو رسم کنیم و بعدش بیایم کل اعضای S رو بنویسیم؟ جواب اینه که خیر. در اکثر موارد نیازی به رسم نمودار درختی و نوشتن کامل S نیست بلکه معمولاً $n(S)$ رو می‌خوایم که خیلی سریع و راحت به دست میاد. با یک مثال، نحوه یافتن $n(S)$ رو برای آزمایش‌های مختلف توضیح میدم.

مثال: در هر آزمایش تصادفی، تعداد اعضای فضای نمونه را به دست آورید:

- الف** پرتاب ۳ سکه با هم
- ب** پرتاب ۲ تاس با هم
- ج** پرتاب ۳ سکه و ۲ تاس با هم
- د** قرار گرفتن ۴ دوست در یک صف
- ه** انتخاب ۲ مهره از کیسه‌ای شامل ۲ مهره سفید و ۳ مهره آبی و ۴ مهره سیاه
- ز** بررسی جنسیت ۵ فرزند یک خانواده
- ط** چرخاندن دو صفحه عقربه‌دار مقابل
- و** ساختن اعداد ۴ رقمی با ارقام ۰، ۱، ۲، ۳، ۵ و بدون تکرار ارقام
- ح** بررسی ۲ نفر کارمند از لحاظ ماه تولدشان
- ی** انتخاب ۲ کارت از بین ۱۰ کارت که روی هر کارت، یک عدد از ۱ تا ۱۰ نوشته شده است



ب باز هم از اصل ضرب استفاده می‌کنیم: هر تاس ۶ حالت دارد، پس خواهیم داشت:

$$n(S) = \underset{\text{تاس اول}}{6} \times \underset{\text{تاس دوم}}{6} = 6^2 = 36$$

الف چون داریم چندتا کار رو با هم انجام میدیم باید از اصل ضرب استفاده کنیم:

$$n(S) = \underset{\text{سکه اول}}{2} \times \underset{\text{سکه دوم}}{2} \times \underset{\text{سکه سوم}}{2} = 2^3 = 8$$

د ۴ نفر به ۴! حالت می‌تونن کنار هم قرار بگیرن:
 $n(S) = 4! = 24$

ج هر تاس ۶ حالت و هر سکه ۲ حالت دارد، لذا داریم:
 $n(S) = 2^3 \times 6^2 = 8 \times 36 = 288$

و از روش پُر کردن خونه‌های خالی استفاده می‌کنیم:

$$\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 4 & 4 & 3 & 2 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline 2 & 2 & 1 & 1 \\ \hline 3 & 2 & 1 & 1 \\ \hline \end{array} \Rightarrow n(S) = 4 \times 4 \times 3 \times 2 = 96$$

ه در اینجا ترتیب مهم نیست پس از فرمول ترکیب استفاده می‌کنیم. در فضای نمونه باید کلی به قضیه نگاه کنیم؛ یعنی الان رنگ‌ها مهم نیستن و ما فقط می‌خوایم ۲ مهره رو از بین همه مهره‌های یعنی از بین ۹ مهره انتخاب کنیم:

$$n(S) = \binom{9}{2} = \frac{9!}{2! \times 7!} = \frac{9 \times 8 \times 7!}{2! \times 7!} = 36$$





ج هر سال ۱۲ ماه دارد و هر فرد می‌تونه در هر کدوم از اون‌ها به دنیا اومده باشه، پس خواهیم نوشت:

$$n(S) = \overset{\text{نفر اول}}{12} \times \underset{\text{نفر دوم}}{12} = 12^2 = 144$$

ی کاری به اعداد روی کارت‌ها نداریم و فقط می‌خواهیم ۲ کارت از بین ۱۰ کارت انتخاب کنیم، پس داریم:

$$n(S) = \binom{10}{2} = \frac{10!}{8! \times 2!} = \frac{10 \times 9 \times 8!}{8! \times 2} = 45$$

ز

$$n(S) = \overset{\text{فرزند اول}}{2} \times \underset{\text{فرزند دوم}}{2} \times \overset{\text{فرزند سوم}}{2} \times \underset{\text{فرزند چهارم}}{2} \times \overset{\text{فرزند پنجم}}{2} = 2^5 = 32$$

ط صفحه سمت چپ به ۶ قسمت و صفحه سمت راست به ۸ قسمت تقسیم شده، پس طبق اصل ضرب داریم:

$$n(S) = 6 \times 8 = 48$$

مفهوم پیشامد

به هر زیرمجموعه از فضای نمونه، یک پیشامد گفته میشه. مثلاً در پرتاب یک سکه، فضای نمونه برابر $S = \{ر, پ\}$ است. حالا می‌خواهیم تمام پیشامدهای ممکن رو بنویسیم، یعنی در واقع باید تمام زیرمجموعه‌های S رو بنویسیم که عبارت‌اند از: $\emptyset, \{ر\}, \{پ\}, \{ر, پ\}$ ملاحظه می‌کنین که $\emptyset$ و خود S هم دو پیشامد حساب میشن، چون می‌دونیم مجموعه تهی و خود هر مجموعه، زیرمجموعه اون مجموعه هستن. پس ۴ پیشامد برای پرتاب یک سکه وجود داره.

رخ دادن یک پیشامد به چه معناست؟

فرض کنین یک سکه رو پرتاب کردیم و «رو» ظاهر شده. حالا به نظرتون کدوم یکی از پیشامدهای $\{ر\}$ یا $\{پ, ر\}$ رخ داده؟ الان می‌دونم خیلی هاتون می‌گین خب معلومه دیگه، پیشامد $\{ر\}$ رخ داده ولی باید بهتون بگم سخت در اشتباهین. چون الان میشه گفت هم پیشامد $\{ر\}$ رخ داده و هم پیشامد $\{پ, ر\}$ چون پیشامد $\{پ, ر\}$ هم شامل «رو» هست. به نکته‌ای که در کتاب درسی مطرح شده توجه کنین:

نکته: برای اینکه یک پیشامد رخ بده، کافیه که یکی از برآمدهای اون در آزمایش تصادفی اتفاق بیفته، به همین علت گفتیم که در پرتاب یک سکه، اگه «رو» ظاهر بشه هم پیشامد $\{ر\}$ رخ داده و هم پیشامد $\{پ, ر\}$.

مثال: تاسی را پرتاب می‌کنیم، اگر پس از نشستن تاس روی زمین، عدد ۴ نمایان شود به نظر شما در این آزمایش تصادفی، کدام یک از پیشامدهای زیر رخ داده است؟

الف $A = \{4, 5, 6\}$

ب $B = \{4\}$

ج $C = \{3, 4\}$

حل: عدد ۴ در تمام پیشامدهای A, B و C وجود داره؛ پس میشه گفت هر سه تایی این پیشامدها رخ دادن.

دو پیشامد خاص

به مجموعه $\emptyset$ پیشامد غیرممکن یا نشدنی گفته میشه، چون عضوی نداره که بخواد رخ بده. مثلاً در پرتاب یک تاس، پیشامد اینکه عدد بزرگ‌تر از ۶ بیاد، پیشامد غیرممکنه، یعنی الان با مجموعه $\emptyset$ مواجه هستیم چون محاله که عدد بزرگ‌تر از ۶ ظاهر بشه، همچنین به خود مجموعه S ، پیشامد حتمی گفته میشه، چون همیشه رخ میده. مثلاً در پرتاب یک تاس، هر عددی که ظاهر بشه اون عدد در S وجود داره پس میشه گفت که در واقع S هم رخ داده.

مثال: دو تاس را با هم پرتاب می‌کنیم، پیشامدهای زیر را مشخص کنید، پیشامدهای غیرممکن و حتمی را نام ببرید:

الف پیشامد A : اعداد روشده از دو تاس، مانند هم باشند (یکسان باشند). **ب** پیشامد B : مجموع اعداد ظاهر شده از دو تاس، برابر ۹ باشد.

ج پیشامد C : مجموع اعداد ظاهر شده از دو تاس، ۱۳ باشد. **د** پیشامد D : حاصل ضرب اعداد ظاهر شده از دو تاس، کمتر از ۳۷ باشد.

حل: الف $A = \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5), (6,6)\}$

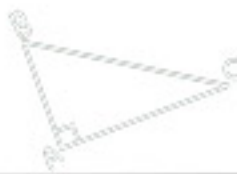
ب $B = \{(4,5), (5,4), (6,3), (3,6)\}$

توجه کنین $(4,5)$ با $(5,4)$ فرق داره. در $(4,5)$ یعنی تاس اول ۴ و تاس دوم ۵ بیاد ولی در $(5,4)$ یعنی تاس اول ۵ و تاس دوم ۴ بیاد.

ج جمع دو عدد تاس‌ها هیچ‌وقت ۱۳ نخواهد شد، پس پیشامد C همون $\emptyset$ است و یک پیشامد غیرممکن است.

د حاصل ضرب اعداد تاس‌ها، همیشه از ۳۷ کمتره پس در واقع پیشامد D همون S یعنی فضای نمونه است که پیشامدی قطعی است.





مشاوره نهایی: خیلی وقتاً نیازی نیست خود پیشامدها رو بنویسیم بلکه فقط تعداد عضوهایشون خواسته میشه. این بستگی به خواسته طراح سؤال داره، پس متن سؤال رو با دقت بخونین تا بفهمین که تعداد اعضای پیشامدها خواسته شده یا خود پیشامدها.

مثال: از بین ۵ دانش آموز دهم، ۴ دانش آموز یازدهم و ۳ دانش آموز دوازدهم می‌خواهیم یک گروه ۳ نفره تشکیل دهیم. تعداد عضوهای پیشامدهای زیر را به دست آورید:

الف) سه نفر از پایه‌های مختلف باشند. (پیشامد A)
ب) حداقل ۲ نفرشان از پایه دهم باشند. (پیشامد B)

حل: الف) چون ترتیب انتخاب‌ها مهم نیست از ترکیب استفاده می‌کنیم. نیازی به نوشتن خود پیشامدهای A و B نیست بلکه فقط تعداد عضوهایشون یعنی $n(A)$ و $n(B)$ خواسته شدن:

$$n(A) = \binom{5}{1} \times \binom{4}{1} \times \binom{3}{1} = 5 \times 4 \times 3 = 60$$

توجه کنین که حاصل $\binom{n}{1}$ همیشه برابر n خواهد بود، پس بدون محاسبه می‌توان گفت:

$$\binom{5}{1} = 5, \binom{4}{1} = 4, \binom{3}{1} = 3$$

ب) باید حداقل ۲ نفر باید از دهم باشن، یعنی ۲ نفر از دهم و ۱ نفر غیردهم یا اینکه هر ۳ نفر از دهم باشن، لذا داریم:

$$n(B) = \binom{5}{2} \times \binom{7}{1} + \binom{5}{3} = 10 \times 7 + 10 = 80$$

تذکر: محاسبات مربوط به ترکیب‌ها رو خودتون انجام بدین دیگه. (قبلاً خیلی کار کردیم اینارو)

☆ تیب مورد علاقه طراح نهایی

سؤال: هر یک از اعداد اول کوچک‌تر از ۳۰ را روی کارت‌هایی نوشته و سپس به طور تصادفی یک کارت برمی‌داریم. پیشامدهای زیر را مشخص کنید: (مشابه خرداد ۱۴۰۳)

الف) عدد روی کارت حداقل ۱۰ باشد.
ب) عدد روی کارت زوج باشد.

پاسخ: ابتدا فضای نمونه رو می‌نویسیم:

الف) حداقل ۱۰ یعنی ۱۰ به بالا: $A = \{11, 13, 17, 19, 23, 29\}$
ب) تنها عدد زوج مجموعه S عدد ۲ است: $B = \{2\}$

اعمال روی پیشامدها

شما قبلاً اجتماع، اشتراک و تفاضل دو مجموعه رو خوندین، در مورد پیشامدها نیز میشه این قوانین رو مطرح کرد، چون پیشامدها نیز مجموعه هستن. به مثال ساده زیر توجه کنین:

مثال: اگر $S = \{1, 2, 3, \dots, 10\}$ فضای نمونه باشد. یک عدد را به تصادف انتخاب می‌کنیم: پیشامدهای A و B به شکل زیر تعریف می‌شوند:

پیشامد A: عدد زوج باشد. پیشامد B: عدد اول باشد.

ابتدا پیشامدهای A و B و سپس پیشامدهای $A \cup B$, $A \cap B$, $A - B$ و $B - A$ را مشخص کنید.

حل: $B = \{2, 3, 5, 7\}$: اعداد اول موجود در S

$A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$: اعداد زوج موجود در S

برای محاسبه $A \cap B$ فقط عضوهای مشترک A و B رو انتخاب می‌کنیم:

$$A \cap B = \{2\}$$

اجتماع $A \cup B$ باید تمام اعضای A و B رو در یک مجموعه بزرگ‌تر ادغام کنیم (عضوهای تکراری رو فقط یک بار می‌نویسیم):

$$A \cup B = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10\}$$

برای محاسبه $A - B$ عضوهای مشترک A و B رو از A حذف می‌کنیم و نگاه می‌کنیم که از A چه چیزی باقی می‌مونه، همون میشه جواب.

$$A - B = \{4, 6, 8, 10\}$$

برای محاسبه $B - A$ عضوهای مشترک A و B رو از B حذف می‌کنیم و نگاه می‌کنیم که از B چه چیزی باقی می‌مونه، همون میشه جواب.

$$B - A = \{3, 5, 7\}$$

با توجه به توضیحات بالا $B - A$ به شکل زیر به دست میاد:

$$B - A = \{3, 5, 7\}$$

رنگ‌بندی A و B (رنگ‌بندی A و B به گونه‌ای که A و B را متمم یکدیگر نشان دهد)

رنگ‌بندی A و B (رنگ‌بندی A و B به گونه‌ای که A و B را متمم یکدیگر نشان دهد)

رنگ‌بندی A و B (رنگ‌بندی A و B به گونه‌ای که A و B را متمم یکدیگر نشان دهد)

رنگ‌بندی A و B (رنگ‌بندی A و B به گونه‌ای که A و B را متمم یکدیگر نشان دهد)

رنگ‌بندی A و B (رنگ‌بندی A و B به گونه‌ای که A و B را متمم یکدیگر نشان دهد)

حواستون باشه: بعضی جاها «و» به معنی ضرب نیست و همچنین «یا» هم به معنی جمع نیست. مثلاً وقتی گفته میشه در پرتاب یک تاس، «پیشامد اینکه عدد ظاهر شده زوج و اول باشد» به این معناست که عددی که انتخاب می‌کنیم هم زوج باشه و هم اول، یعنی این پیشامد به شکل زیر به دست میاد:

زوج بودن: $A = \{2, 4, 6\}$
 اول بودن: $B = \{2, 3, 5\}$
 $A \cap B = \{2\}$ زوج و اول بودن $\Rightarrow$

چون تنها عددی که هم زوج باشه و هم اول، عدد ۲ هست. حالا فرض کنیم گفته بشه «پیشامد اینکه عدد ظاهر شده زوج یا اول باشد»:

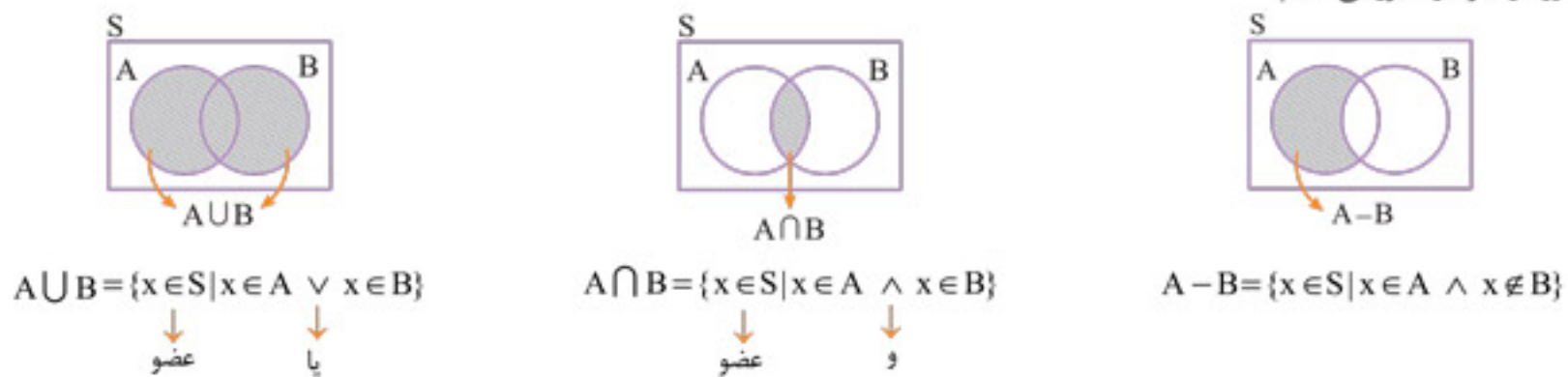
زوج بودن: $A = \{2, 4, 6\}$
 اول بودن: $B = \{2, 3, 5\}$
 $A \cup B = \{2, 3, 4, 5, 6\}$ زوج یا اول بودن $\Rightarrow$

حالا اگه گفته بشه «پیشامد اینکه عدد رو شده زوج باشد ولی اول نباشد» به شکل زیر عمل می‌کنیم:

زوج بودن: $A = \{2, 4, 6\}$
 اول بودن: $B = \{2, 3, 5\}$
 $A - B = \{2, 4, 6\} - \{2, 3, 5\} = \{4, 6\}$ زوج بودن ولی اول نبودن $\Rightarrow$

اعمال روی پیشامدها در نمودار ون

گاهی اوقات اعضای پیشامدها به طور واضح به ما داده نمیشن، بلکه نمودار ون اون‌ها در متن سؤال داده میشه و از ما میخوان پیشامدهایی مثل $A \cup B$ ، $A \cap B$ ، $A - B$ و $(A \cup B) - C$ و امثالهم رو هاشور بزنین. قبل از اینکه به حل مثال از این سؤالات بپردازیم بهتره یک بار دیگه مفاهیم اجتماع، اشتراک و تفاضل رو در نمودارها بررسی کنیم:



ضمناً به پیشامد A' (بخونید A پریم) متمم پیشامد A گفته میشه و برای به دست آوردن اون، باید S رو منهای A بکنیم:

$A' = S - A$
 تعریف ریاضی $A' = \{x \in S \mid x \notin A\}$

مثلاً اگر $S = \{1, 2, 3, \dots, 15\}$ باشد و $A = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14\}$ باشند، مجموعه A' به صورت زیر پیدا میشه (A' یعنی A رخ نده):

$A' = S - A = \{1, 2, 3, \dots, 15\} - \{2, 4, 6, \dots, 14\} = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15\}$

اعداد زوج رواز مجموعه S خط بزن

نکته نهایی: اجتماع هر مجموعه با متممش برابر S است، مثلاً:

$$\begin{cases} A \cup A' = S \\ B \cup B' = S \end{cases}$$

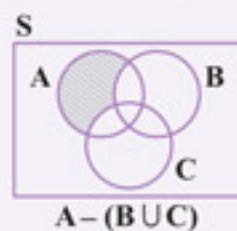
$$\begin{cases} A \cap A' = \emptyset \\ B \cap B' = \emptyset \end{cases}$$

همچنین اشتراک هر مجموعه با متممش برابر $\emptyset$ است، مثلاً:

البته حواستون باشه خیلی وقتاً سه پیشامد A، B و C به ما داده میشن و اعمال روی این سه پیشامد رو باید انجام بدیم. (در مثال بعد متوجه میشین.)

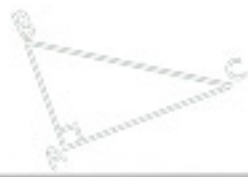
مثال: اگر A، B و C سه پیشامد در فضای نمونه S باشند، هر یک از پیشامدهای زیر را روی نمودار ون، هاشور (سایه) بزنین، سپس عبارت مجموعه‌ای مربوط به هر پیشامد را مانند نمونه زیر بنویسید:

نمونه: فقط پیشامد A رخ دهد و پیشامدهای B یا C رخ ندهند.

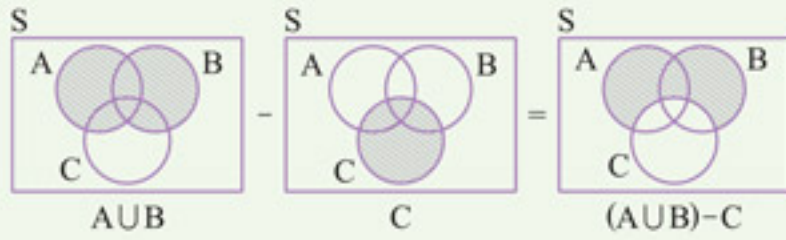


- ب** پیشامدهای A یا B رخ دهند ولی پیشامد C رخ ندهد.
د پیشامدهای A، B و C با هم رخ بدهند.
و پیشامد A رخ دهد ولی B یا C رخ ندهند.

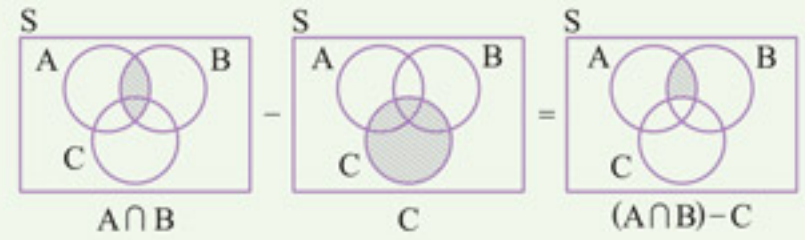
- الف** پیشامدهای A و B رخ دهند ولی پیشامد C رخ ندهد.
ج پیشامدهای A یا B یا C رخ دهند.
ه پیشامد $A \cup B$ رخ ندهد.



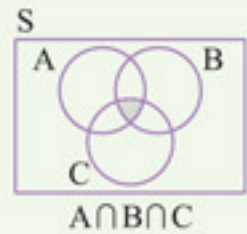
ب گفته شده A یا B رخ بدن (یعنی $A \cup B$ رخ میدهد) بعدش گفته شده C رخ نده، یعنی C رو از $(A \cup B)$ حذف می‌کنیم:



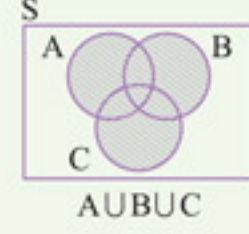
ج **ح: الف** گفته شده A و B رخ بدن (یعنی $A \cap B$)، پس ابتدا $A \cap B$ رو هاشور می‌زنیم، بعدش C رو ازش حذف می‌کنیم:



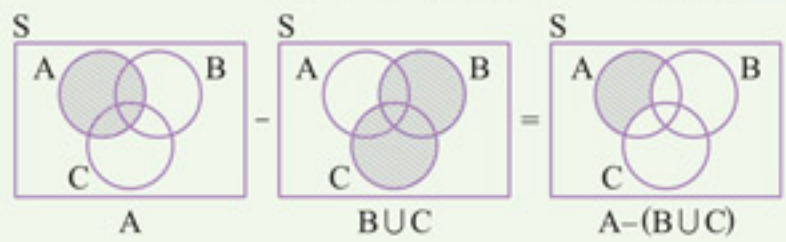
د می‌خواهیم A ، B و C با هم رخ بدن، یعنی باید $A \cap B \cap C$ رو هاشور بزنیم، یعنی جایی که هر سه تا مجموعه A ، B و C مشترک هستن:



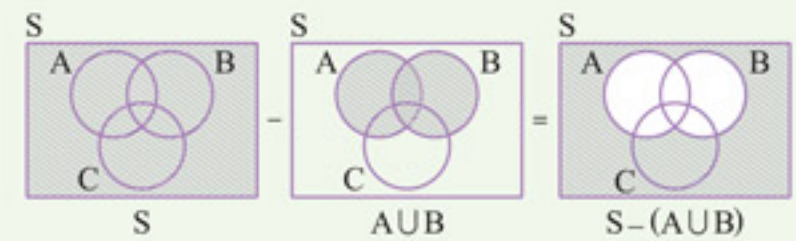
ج باید A یا B یا C رخ بدن (یعنی $A \cup B \cup C$ رخ میدهد)، پس کل A ، B و C رو هاشور می‌زنیم:



9 باید پیشامد A رو منهای $(B \cup C)$ کنیم:



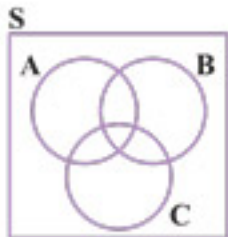
ه وقتی گفته میشه $(A \cup B)$ رخ نده، یعنی متمم اون باید رخ بده. متمم $(A \cup B)$ هم برابر با $(A \cup B)'$ هست. برای پیدا کردن متمم هر مجموعه، باید S رو منهای خود اون مجموعه کنیم. پس الان $(A \cup B)$ رو از S حذف می‌کنیم تا $(A \cup B)'$ به دست بیاد.



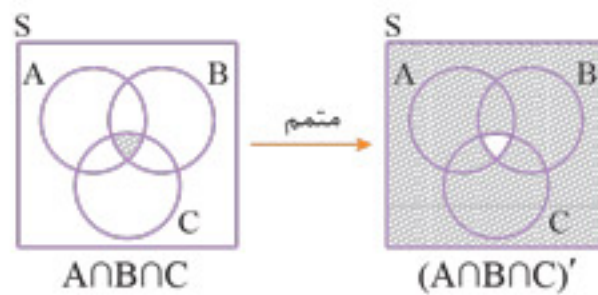
☆ تیب مورد علاقه طراح نهایی

سؤال؟ در شکل مقابل، پیشامد A ، B و C با هم رخ ندهند را هاشور بزنید.

(مشابه دی ۱۴۰۱ و شهریور ۱۴۰۰)

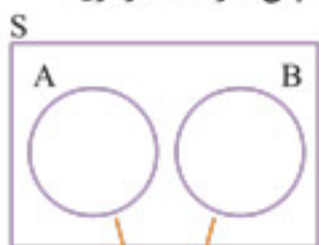


پاسخ در واقع پیشامد $(A \cap B \cap C)'$ از ما خواسته شده است، یعنی متمم پیشامد $A \cap B \cap C$ رو باید هاشور بزنیم:



دو پیشامد ناسازگار

فرض کنیم A و B دو پیشامد در فضای نمونه S باشن و ضمناً A و B هیچ اشتراکی با هم نداشته باشن یعنی $A \cap B = \emptyset$ باشه، در این صورت می‌گیم A و B ناسازگار هستن، مثلاً در پرتاب یک تاس، اگر A پیشامد زوج آمدن و B پیشامد فرد آمدن تاس باشن $A \cap B = \emptyset$ خواهد بود، پس A و B ناسازگارن.



$$\Rightarrow \text{نتایج حاصل از ناسازگار بودن } A \text{ و } B \begin{cases} A - B = A \\ B - A = B \\ A \cap B = \emptyset \end{cases}$$

هیچ اشتراکی با هم ندارن



(کار در کلاس کتاب درسی)

مثال: خانواده‌ای دارای ۳ فرزند است. پیشامدهای زیر را مشخص کنید.

الف پیشامد A: همه فرزندان خانواده، دارای یک جنسیت باشند.

ج پیشامد C: حداقل ۲ فرزند این خانواده دختر باشند.

با توجه به پیشامدهای A، B و C به سؤالات زیر پاسخ دهید:

آیا پیشامدهای A و B ناسازگارند؟ پیشامدهای B و C چطور؟ پیشامدهای A و C چطور؟

ج باید حداقل دوتا از بچه‌ها دختر باشند،

یعنی یا دوتا دختر داریم یا سه‌تا:

$$C = \{(\text{د}, \text{د}, \text{د}), (\text{د}, \text{د}, \text{پ}), (\text{د}, \text{پ}, \text{د}), (\text{پ}, \text{د}, \text{د}), (\text{د}, \text{د}, \text{د})\}$$

دوتا دختر سه‌تا دختر

ب دوتا پسر و ۱ دختر باید داشته باشیم، فقط

باید حواسمون به حالت‌های مختلف و جابه‌جایی

دختر و اون دوتا پسر باشه:

$$B = \{(\text{پ}, \text{پ}, \text{د}), (\text{پ}, \text{د}, \text{پ}), (\text{د}, \text{پ}, \text{پ}), (\text{پ}, \text{پ}, \text{د}), (\text{پ}, \text{د}, \text{پ}), (\text{د}, \text{پ}, \text{پ})\}$$

فرزند سوم فرزند اول فرزند دوم

الف همه بچه‌ها باید دختر یا همه

پسر باشن، پس داریم:

$$A = \{(\text{د}, \text{د}, \text{د}), (\text{پ}, \text{پ}, \text{پ}), (\text{د}, \text{د}, \text{د}), (\text{پ}, \text{پ}, \text{پ})\}$$

فرزند سوم فرزند اول فرزند دوم

$$A \cap B = \emptyset \Rightarrow A \text{ و } B \text{ ناسازگارند}$$

$$B \cap C = \emptyset \Rightarrow B \text{ و } C \text{ ناسازگارند}$$

$$A \cap C = \{(\text{د}, \text{د}, \text{د})\} \Rightarrow A \text{ و } C \text{ ناسازگار نیستند}$$

احتمال رخ دادن یک پیشامد

اگر A یک پیشامد در فضای نمونه S باشد و n(A) و n(S) به ترتیب، تعداد اعضای A و تعداد اعضای S باشند، احتمال اینکه پیشامد A رخ بدهد برابر با:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} \quad \text{به جای } A \text{ هر اسمی می‌تونه باشه}$$

$$\begin{cases} P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} \\ P(E) = \frac{n(E)}{n(S)} \end{cases}$$

$$P(A) = P(\emptyset) = \frac{0}{n(S)} = 0$$

نکته: ۱ اگر $A = \emptyset$ باشد (یعنی A پیشامد غیرممکن یا نشدنی باشد) اون وقت $n(A) = 0$ و لذا:

$$P(A) = P(S) = \frac{n(S)}{n(S)} = 1$$

۲ اگر $A = S$ باشد (یعنی A پیشامد حتمی باشد) در این صورت $n(A) = n(S)$ و لذا:

$$0 \leq P(A) \leq 1$$

۳ اگر A پیشامد دلخواهی در فضای نمونه S باشد، همواره داریم:

یعنی محاله که مثلاً احتمال یک پیشامد، منفی بشه یا عددی بزرگ‌تر از ۱ باشه.

مثال: اعداد ۱ تا ۱۰ را روی ۱۰ کارت یکسان نوشته و از بین آن‌ها یک کارت را به طور تصادفی انتخاب می‌کنیم. احتمال‌های زیر را محاسبه کنید:

(مشابه تمرین کتاب درسی)

الف عدد روی کارت، مضرب ۳ باشد. (پیشامد A)

ب عدد روی کارت، اول باشد. (پیشامد B)

د عدد روی کارت، حداقل ۷ باشد. (پیشامد D)

ه عدد روی کارت، حداکثر ۳ باشد. (پیشامد E)

$$S = \{1, 2, \dots, 10\} \Rightarrow n(S) = 10$$

ب اعداد اول رو از مجموعه S انتخاب می‌کنیم:

$$B = \{2, 3, 5, 7\} \Rightarrow n(B) = 4 \Rightarrow P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{4}{10}$$

اعداد اول

الف همیشه در مسائل احتمال ابتدا n(S) رو به دست میاریم:

از مجموعه S باید اعدادی رو انتخاب کنیم که بر ۳ بخش پذیر باشن:

$$A = \{3, 6, 9\} \Rightarrow n(A) = 3 \Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{3}{10}$$

اعداد مضرب ۳

د حداقل ۷ یعنی خود ۷ یا بیشتر، لذا داریم:

$$D = \{7, 8, 9, 10\} \Rightarrow n(D) = 4 \Rightarrow P(D) = \frac{n(D)}{n(S)} = \frac{4}{10}$$

حداقل ۷

ج اعداد مربع کامل رو از مجموعه S انتخاب می‌کنیم:

$$C = \{1, 4, 9\} \Rightarrow n(C) = 3 \Rightarrow P(C) = \frac{n(C)}{n(S)} = \frac{3}{10}$$

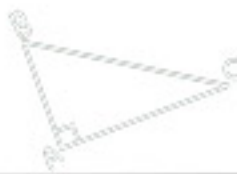
مربع کامل

ه حداکثر ۳ یعنی خود ۳ یا کمتر، لذا داریم:

$$E = \{1, 2, 3\} \Rightarrow n(E) = 3 \Rightarrow P(E) = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{3}{10}$$

حداکثر ۳





(مشابه کار در کلاس کتاب درسی)

مثال: دو تاس را با هم پرتاب می‌کنیم؛ احتمال‌های زیر را به دست آورید:

- الف** هر دو تاس یکسان ظاهر شوند. **ب** هر دو تاس زوج بیایند. **ج** یک تاس زوج و یکی فرد بیاید.
- د** اولی زوج و دومی مربع کامل باشد. **ه** مجموع دو تاس ۱۰ شود. **و** ضرب دو تاس حداقل ۲۵ شود.
- ز** اختلاف دو تاس برابر ۲ باشد.

حل: در تمام حالت‌ها $n(S)$ برابر ۳۶ است، زیرا:

تاس دوم تاس اول

$$n(S) = 6 \times 6 = 36$$

$$A = \{(1,1), (2,2), \dots, (6,6)\} \Rightarrow n(A) = 6 \Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

الف

ب • روش اول: (نوشتن تمام عضوهای پیشامد B)

$$B = \{(2,2), (2,4), (2,6), (4,2), (4,4), (4,6), (6,2), (6,4), (6,6)\}$$

$$\Rightarrow n(B) = 9 \Rightarrow P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$$

• روش دوم: (استفاده از اصل ضرب): هر تاس سه تا عدد زوج دارد، پس چون می‌خواهیم دو تا تاس زوج بیاید، خواهیم داشت:

تاس دوم تاس اول

$$n(B) = 3 \times 3 = 9$$

ج بهتره از اصل ضرب استفاده کنیم (البته اگه دوست دارین می‌تونین پیشامد C رو بنویسین ولی زمان زیادی می‌بره):

اولی زوج اولی فرد

$$n(C) = 3 \times 3 + 3 \times 3 = 18 \Rightarrow P(C) = \frac{n(C)}{n(S)} = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$$

دومی فرد دومی زوج

د بازم بهتره از اصل ضرب استفاده کنیم:

دومی اولی مربع کامل زوج

$$n(D) = 3 \times 2 = 6$$

$$P(D) = \frac{n(D)}{n(S)} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

توجه کنین که در تاس، سه تا عدد زوج وجود داره (اعداد ۲، ۴، ۶) و دو تا عدد مربع کامل (اعداد ۱ و ۴):

ه الان دیگه باید حتماً پیشامد E رو تشکیل بدیم، چون اعداد دو تاس به هم وابسته شدن:

$$E = \{(6,4), (4,6), (5,5)\} \Rightarrow n(E) = 3 \Rightarrow P(E) = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$$

$$F = \{(5,5), (5,6), (6,5), (6,6)\} \Rightarrow n(F) = 4 \Rightarrow P(F) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$$

و ضرب دو تاس باید ۲۵ یا بیشتر بشه:

$$G = \{(1,3), (3,1), (2,4), (4,2), (4,6), (6,4), (3,5), (5,3)\} \Rightarrow n(G) = 8 \Rightarrow P(G) = \frac{8}{36} = \frac{2}{9}$$

ز اختلاف ۲ تاس باید ۲ بشه:

☆ **تیب مورد علاقه طراح نهایی**

(مشابه خرداد ۱۴۰۲)

سؤال: خانواده‌ای ۳ فرزند دارد. با چه احتمالی:

- الف** هر ۳ نفر آن‌ها دختر هستند؟ **ب** هر ۳ نفر آن‌ها هم جنس هستند؟ **ج** دقیقاً دو تا از آن‌ها پسر هستند؟
- د** حداقل دو تا از آن‌ها دختر هستند؟ **ه** اولی و آخری پسر هستند؟

پاسخ: اول به سراغ $n(S)$ میریم: (توجه داشته باشین $n(S)$ به دست اومده برای تمام موارد، یکسانه).

الف $A = \{(د, د, د)\} \Rightarrow n(A) = 1 \Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{1}{8}$

ب $B = \{(د, د, د), (پ, پ, پ)\} \Rightarrow n(B) = 2 \Rightarrow P(B) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$

ج $C = \{(پ, پ, د), (پ, د, پ), (د, پ, پ)\} \Rightarrow n(C) = 3 \Rightarrow P(C) = \frac{3}{8}$

د $D = \{(د, د, د), (د, د, پ), (د, پ, د), (پ, د, د)\} \Rightarrow n(D) = 4 \Rightarrow P(D) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$

سه تا دختر دوتا دختر اولی و آخری پسر هستن

د حداقل ۲ دختر یعنی ۲ دختر یا بیشتر، لذا داریم:

ه $E = \{(پ, د, پ), (پ, پ, پ)\} \Rightarrow n(E) = 2 \Rightarrow P(E) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$



(مشابه شهریور ۱۴۰۰)

مثال: یک سکه و یک تاس را با هم پرتاب می‌کنیم. مطلوب است محاسبه احتمال اینکه:

- الف** تاس زوج بیاید. (پیشامد A)
ب سکه پشت بیاید. (پیشامد B)
ج تاس زوج یا سکه پشت بیاید. (پیشامد C)
د تاس زوج و سکه پشت بیاید. (پیشامد D)

سکه تاس
 $n(S) = 6 \times 2 = 12$

حل: تعداد اعضای S زیاده، پس بهتره که فقط $n(S)$ رو به دست بیاریم: (نوشتن اعضای S از ما خواسته نشده).

الف می‌خوایم تاس زوج بیاد ولی در مورد سکه چیزی گفته نشده، پس سکه می‌تونه هم رو بیاد هم پشت:

$$A = \{(ر, ۲), (ر, ۴), (ر, ۶), (پ, ۲), (پ, ۴), (پ, ۶)\} \Rightarrow n(A) = 6 \Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$$

دقت کنید که $(ر, ۲)$ و $(۲, ر)$ با هم فرقی ندارند و هر کدوم رو استفاده کنیم درسته، ولی نباید جفتشون رو بنویسیم، با این حال اگه مثلاً دو تاس رو پرتاب می‌کردیم و $(۱, ۲)$ رو می‌نوشتیم، اون وقت باید $(۲, ۱)$ رو هم می‌نوشتیم چون دوتا تاس داریم و جابه‌جایی مهم میشه.

ب می‌خوایم سکه پشت بیاد، الان در مورد تاس چیزی گفته نشده، پس تاس می‌تونه از ۱ تا ۶ ظاهر بشه:

$$B = \{(پ, ۱), (پ, ۲), \dots, (پ, ۶)\} \Rightarrow n(B) = 6 \Rightarrow P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$$

ج زوج بودن تاس همون پیشامد قسمت «الف» و پشت آمدن سکه، همون پیشامد قسمت «ب» است و چون بینشون «یا» اومده یعنی باید اجتماع بگیریم: (عضوهای تکراری رو فقط یک بار می‌نویسیم).

$$C = A \cup B = \{(ر, ۲), (ر, ۴), (ر, ۶), (پ, ۱), (پ, ۲), (پ, ۳), (پ, ۴), (پ, ۵), (پ, ۶)\} \Rightarrow n(C) = 9 \Rightarrow P(C) = \frac{n(C)}{n(S)} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$$

د این بار بین پیشامدهای A و B حرف «و» مطرح شده، پس باید اشتراک بگیریم:

$$D = A \cap B = \{(پ, ۲), (پ, ۴), (پ, ۶)\} \Rightarrow n(D) = 3 \Rightarrow P(D) = \frac{n(D)}{n(S)} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$$

کاربرد تبدیل (ترتیب) در احتمال

قبلاً تبدیل رو خوندین، وقتی ترتیب قرار گرفتن اشیا کنار هم مهم باشه باید از تبدیل استفاده کنیم، (پر کردن خونه‌های خالی هم نوعی تبدیل هست همچنین جایگشت هم نوعی تبدیل حساب میشه) البته نیازی به استفاده از فرمول $P(n, r)$ در احتمال نیست و می‌تونیم سؤالات مربوط به اون رو بدون این فرمول هم حل کنیم.

مثال: چهار نفر به نام‌های مهسا، حنا، زهرا و نرگس در یک صف قرار دارند، با چه احتمالی حنا و مهسا همیشه کنار هم هستند؟ (مشابه کار در کلاس کتاب درسی)

حل: اول باید $n(S)$ رو پیدا کنیم. در محاسبه $n(S)$ کاری به محدودیت‌های سؤال نداریم، یعنی الان فقط می‌خوایم جایگشت چهار نفر رو به دست بیاریم:

$$n(S) = 4! = 24$$

حالا حنا و مهسا رو داخل یک بسته قرار میدیم:

$$\begin{array}{c} \text{مهسا} \\ \uparrow \\ \boxed{\text{مهسا, حنا}} \\ \downarrow \\ \text{نرگس} \end{array} \Rightarrow n(A) = 3! \times 2! = 6 \times 2 = 12 \Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{12}{24} = \frac{1}{2}$$

مثال: با ارقام ۰، ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶ تمام اعداد ۴ رقمی ممکن را می‌نویسیم و سپس یکی از آن‌ها را به تصادف انتخاب می‌کنیم. با چه احتمالی این عدد فرد است؟ (تکرار غیرمجاز است).

حل: ابتدا $n(S)$ رو پیدا می‌کنیم، یعنی تعداد اعداد ۴ رقمی رو که میشه با ارقام داده شده ساخت، به دست میاریم:

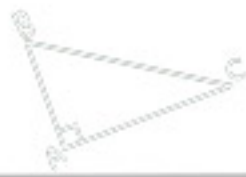
$$\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline ۶ & ۶ & ۵ & ۴ \\ \hline ۱ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۲ & ۱ & ۱ & ۱ \\ ۳ & ۲ & ۲ & ۲ \\ ۴ & ۳ & ۳ & ۳ \\ ۵ & ۴ & ۴ & ۴ \\ \hline \end{array} \Rightarrow n(S) = 6 \times 6 \times 5 \times 4$$

حالا به سراغ خواسته سؤال میریم. گفته شده عدد باید فرد باشه (یعنی باید یکان اون، فرد باشه) پس باز هم خونه‌های خالی رو پر می‌کنیم:

$$\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline ۵ & ۵ & ۴ & ۳ \\ \hline ۱ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۲ & ۱ & ۱ & ۱ \\ ۳ & ۲ & ۲ & ۲ \\ ۴ & ۳ & ۳ & ۳ \\ \hline \end{array} \Rightarrow n(A) = 5 \times 5 \times 4 \times 3$$

$$\Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{5 \times 5 \times 4 \times 3}{6 \times 6 \times 5 \times 4} = \frac{5}{12}$$





مثال: با حروف کلمه «HAMID» تمام کلمات ۵ حرفی ممکن را ساخته و هر کدام را روی یک کارت می‌نویسیم. سپس به تصادف یکی از این کارت‌ها را انتخاب می‌کنیم. با چه احتمالی کلمه نوشته شده روی این کارت «MAHDI» است؟ (تکرار حروف مجاز نیست.)

حل: برای پیدا کردن $n(S)$ از روش پر کردن خونه‌ها استفاده می‌کنیم:

$$\boxed{5} \quad \boxed{4} \quad \boxed{3} \quad \boxed{2} \quad \boxed{1} \Rightarrow \text{تعداد کل کلمات} = n(S) = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$$

حالا برای به دست آوردن احتمال رخ دادن پیشامد A لازم نیست کار خاصی انجام بدیم چون گفته کلمه «MAHDI» ساخته بشه. یعنی فقط ۱ کلمه داریم:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{1}{120}$$

پس $n(A)$ برابر با ۱ است، لذا:

کاربرد ترکیب در احتمال

همون طور که قبلاً گفتیم گاهی اوقات فقط انتخاب افراد یا اشیا مهمه و ترتیب و جابه‌جایی اون‌ها اصلاً مهم نیست، مثل ساختن دسته، گروه، تیم، وتر، مثلث، چندضلعی و یافتن تعداد زیرمجموعه‌ها که همه این‌ها رو قبلاً درس دادیم و چیز جدیدی نیستن.

مثال: در یک ظرف، ۴ مهره سفید، ۲ مهره سیاه و ۳ مهره قرمز وجود دارد. به تصادف ۲ مهره از ظرف خارج می‌کنیم. با چه احتمالی: (مشابه تمرین کتاب درسی)

الف هر ۲ مهره هم‌رنگ هستند. (پیشامد A)

ب رنگ مهره‌ها متفاوت است. (پیشامد B)

ج حداکثر ۱ مهره سفید است. (پیشامد C)

د حداکثر ۱ مهره سفید است. (پیشامد D)

حل: طبق روال همیشه، ابتدا $n(S)$ رو به دست میاریم. الان کاری به رنگ‌ها نداریم و فقط می‌خوایم ۲ مهره رو از بین تمام مهره‌ها ($4+2+3=9$) انتخاب کنیم:

$$n(S) = \binom{9}{2} = \frac{9!}{2! \times 7!} = \frac{9 \times 8 \times 7!}{2 \times 7!} = 36$$

سفید سیاه قرمز

الف $n(A) = \binom{4}{2} + \binom{2}{2} + \binom{3}{2} = 6 + 1 + 3 = 10 \Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{10}{36} = \frac{5}{18}$

سفید سیاه قرمز

ب $n(B) = \binom{4}{1} \times \binom{2}{1} + \binom{4}{1} \times \binom{3}{1} + \binom{2}{1} \times \binom{3}{1} = 4 \times 2 + 4 \times 3 + 2 \times 3 = 8 + 12 + 6 = 26 \Rightarrow P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{26}{36} = \frac{13}{18}$

سفید سیاه قرمز

ج $n(C) = \binom{4}{1} \times \binom{5}{1} + \binom{4}{2} = 4 \times 5 + 6 = 26 \Rightarrow P(C) = \frac{n(C)}{n(S)} = \frac{26}{36} = \frac{13}{18}$

سفید سیاه قرمز

د حداکثر ۱ مهره باید سفید باشه، یعنی یا ۱ مهره باید سفید باشه یا کمتر (هیچ مهره‌ای سفید نباشه).

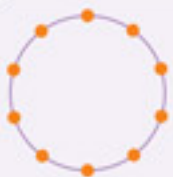
$$n(D) = \binom{4}{1} \times \binom{5}{1} + \binom{4}{0} \times \binom{5}{2} = 4 \times 5 + 1 \times 10 = 20 + 10 = 30 \Rightarrow P(D) = \frac{n(D)}{n(S)} = \frac{30}{36} = \frac{5}{6}$$

سفید سیاه قرمز

نکته نهایی: ۱ همیشه حاصل عبارت‌هایی شبیه $\binom{n}{1}$ برابر n خواهد بود، مثلاً $\binom{4}{1} = 4$.

۲ همچنین حاصل عبارت‌هایی شبیه $\binom{n}{n}$ برابر ۱ است، مانند $\binom{8}{8} = 1$.

۳ بد نیست بدونین حاصل عبارت‌هایی شبیه $\binom{n}{0}$ همیشه برابر ۱ میشه، مثلاً $\binom{9}{0} = 1$.



مثال: با نقاط روی محیط دایره داده شده، تمام مثلث‌ها و وترهای ممکن را می‌سازیم. سپس یکی از شکل‌های ایجاد شده

را به تصادف انتخاب می‌کنیم. با چه احتمالی این شکل، یک مثلث است؟

حل:

$$n(S) = \binom{10}{2} + \binom{10}{3} = \frac{10!}{2! \times 8!} + \frac{10!}{3! \times 7!} = \frac{10 \times 9 \times 8!}{2 \times 8!} + \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7!}{6 \times 7!} = 45 + 120 = 165$$

مثلث وتر

مثلث بودن شکل: $n(A) = \binom{10}{3} = 120 \Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{120}{165} = \frac{22}{33} = \frac{2}{3}$



سؤال: تمام زیرمجموعه‌های ۳ عضوی مجموعه $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ را می‌نویسیم و سپس یکی از آن‌ها را به طور تصادفی انتخاب می‌کنیم. با چه احتمالی این زیرمجموعه، شامل عدد ۷ می‌باشد؟

$$n(S) = \binom{7}{3} = \frac{7!}{4! \times 3!} = \frac{7 \times 6 \times 5 \times 4!}{4! \times 3!} = 35$$

پاسخ: ابتدا مقدار $n(S)$ رو به دست می‌آییم:

حالا برای محاسبه $n(A)$ با توجه به اینکه عضو ۷ قبلاً انتخاب شده باید ۲ عضو باقی‌مونده رو از بین اعضای $1, 2, 3, 4, 5, 6$ انتخاب کنیم:

$$n(A) = \binom{6}{2} = \frac{6!}{4! \times 2!} = \frac{6 \times 5 \times 4!}{4! \times 2} = 15 \Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{15}{35} = \frac{3}{7}$$

محاسبه احتمال پیشامد متمم

می‌دونیم که A' متمم پیشامد A هست. اگر $P(A)$ احتمال رخ دادن A و $P(A')$ احتمال رخ دادن A' باشن، فرمول‌های مقابل همگی درست هستن و شما از هر کدوم که دوست داشتین، می‌تونین استفاده کنین.

$$\begin{aligned} P(A) + P(A') &= 1 \\ P(A') &= 1 - P(A) \\ P(A) &= 1 - P(A') \end{aligned}$$

مثلاً اگر احتمال باران آمدن در روز شنبه $P(A) = \frac{1}{3}$ باشه، احتمال باران نیامدن در روز شنبه $P(A')$ خواهد بود و برابر میشه با:

$$P(A') = 1 - P(A) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

استفاده از پیشامد متمم در مسائلی که تعداد اعضای مجموعه A زیاده، خیلی کاربردی خواهد بود.

مثال: دو تاس را با هم پرتاب می‌کنیم. با چه احتمالی اعداد ظاهر شده، یکسان نیستند؟

حل: الان اگر بخوایم زوج‌هایی شبیه $(1, 2), (1, 3), (1, 4), \dots, (2, 1), (2, 3), \dots$ رو بنویسیم (یعنی اعداد ۲ تاس یکسان نباشن) کاری طولانی خواهد بود، پس از پیشامد متمم استفاده می‌کنیم؛ یعنی: اعداد ظاهر شده یکسان هستند $\xleftarrow{\text{متمم}}$ اعداد ظاهر شده یکسان نیستند

البته می‌تونین نامگذاری رو برعکس انجام بدین، چون مهم نیست. حالا احتمال پیشامد A رو حساب می‌کنیم:

$$A = \{(1, 1), (2, 2), \dots, (6, 6)\} \Rightarrow n(A) = 6 \Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

$$P(A') = 1 - P(A) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$$

حالا به سراغ احتمال A' میریم:

مثال: با ارقام $1, 4, 5, 6, 8$ تمام اعداد ۴ رقمی را می‌نویسیم. با چه احتمالی، در یکی از اعداد ساخته شده که به طور تصادفی آن را انتخاب کرده‌ایم، حداقل ۲ رقم یکسان وجود دارد؟

حل: باز هم نوشتن اعضای پیشامد مطلوب کاری طولانی است، پس از متمم استفاده می‌کنیم:

$$\text{هیچ کدوم از رقم‌ها یکسان نباشن} \xleftarrow{\text{متمم}} \text{حداقل ۲ رقم یکسان باشن}$$

اول $n(S)$ رو حساب می‌کنیم بعدش میریم سراغ $n(A)$ ، چون در متن سؤال چیزی در مورد تکرار گفته نشده، فرض می‌کنیم تکرار ارقام مجازه، پس داریم:

$$\boxed{5} \boxed{5} \boxed{5} \boxed{5} \Rightarrow n(S) = 5 \times 5 \times 5 \times 5$$

حالا به سراغ $n(A)$ میریم، می‌خوایم هیچ کدوم از رقم‌ها یکسان نباشن، یعنی همشون باید متفاوت باشن:

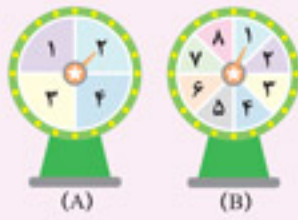
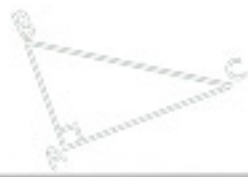
$$\boxed{5} \boxed{4} \boxed{3} \boxed{2} \Rightarrow n(A) = 5 \times 4 \times 3 \times 2$$

$$\Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{5 \times 4 \times 3 \times 2}{5 \times 5 \times 5 \times 5} = \frac{24}{125}$$

$$P(A') = 1 - P(A) = 1 - \frac{24}{125} = \frac{101}{125}$$

حالا به سراغ A' احتمال میریم:





سؤال: دو صفحه عقربه دار A و B را با هم می چرخانیم. با چه احتمالی، دو عقربه روی اعداد یکسان قرار نمی گیرند؟

$$n(S) = 4 \times 8 = 32$$

تعداد ناحیه های صفحه A تعداد ناحیه های صفحه B

$$A = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4)\} \Rightarrow n(A) = 4 \Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{4}{32} = \frac{1}{8} \Rightarrow P(A') = 1 - P(A) = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$$

عقربه A عقربه B عقربه A عقربه B

پاسخ: ابتدا $n(S)$ رو پیدا می کنیم، تعداد تقسیمات هر صفحه رو در هم ضرب می کنیم؛ باز هم بهتره از پیشامد متمم استفاده کنیم. (البته معمولی هم میشه حلش کرد!) دو عقربه روی اعداد یکسان قرار بگیرند $\xleftarrow{\text{متمم}}$ دو عقربه روی اعداد یکسان قرار نگیرند

مسائل مربوط به تاریخ استخدام افراد یا تاریخ تولد آن ها

من نمی دونم چرا تاریخ تولد افراد یا تاریخ استخدامشون برای ما ریاضی دان ها مهمه ولی باور کنین فضول نیستیم فقط میخوایم به کشف واقعیت کمک کنیم. خوبی این مبحث اینه که هیچ فرمولی نداره فقط چندتا کسر رو در هم ضرب می کنیم. مثلاً فرض کنین گفته بشه سه دوست به نام های فاطمه، حمیده و زهرا با چه احتمالی همگی در فصل بهار متولد شدن؟ خب الان هر کدوم از این افراد، فقط یک انتخاب برای فصل تولدشون دارن و اونم بهاره، پس داریم:

$$n(A) = 1 \times 1 \times 1 = 1$$

زهرا حمیده فاطمه

$$n(S) = 4 \times 4 \times 4 = 64 \Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{1}{64}$$

از طرفی تعداد کل فصل ها چهارتا ست، پس:

حالا اگه گفته بشه احتمال اینکه هر سه نفر در یک فصل متولد شده باشن چقدره، ابتدا فرض می کنیم یکی از اون ها (مثلاً فاطمه) در یک فصل نامعلوم (از نظر ما نامعلومه) به دنیا اومده باشه، یعنی چهارتا انتخاب (حالت) داره ولی حمیده و زهرا مجبورن در فصل تولد فاطمه به دنیا اومده باشن لذا یک انتخاب دارن:

$$n(B) = 4 \times 1 \times 1 = 4 \Rightarrow P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{4}{64} = \frac{1}{16}$$

زهرا حمیده فاطمه

این بار فرض کنین بخوایم احتمال اینکه این سه دوست در فصل های مختلف به دنیا اومده باشن رو حساب کنیم خب معلومه که نفر اول (مثلاً فاطمه) 4 تا انتخاب داره، نفر دوم (مثلاً حمیده) 3 تا انتخاب و نفر سوم (زهرا) 2 تا انتخاب:

$$n(C) = 4 \times 3 \times 2 = 24 \Rightarrow P(C) = \frac{n(C)}{n(S)} = \frac{24}{64} = \frac{6}{16} = \frac{3}{8}$$

زهرا حمیده فاطمه

و در نهایت اگه بخوان سؤال رو سختش کنن میگن با چه احتمالی حداقل 2 نفرشون در یک فصل به دنیا اومدن؟ که برای حلش باید از پیشامد متمم استفاده کنیم: حداقل 2 نفرشون در یک فصل به دنیا اومده باشن $\xleftarrow{\text{متمم}}$ هیچ کدومشون در یک فصل به دنیا نیومده باشن

احتمال رخ دادن C رو که کمی قبل حساب کردیم و به جواب $P(C) = \frac{3}{8}$ رسیدیم، پس فقط کافیه $P(C')$ رو محاسبه کنیم: $P(C') = 1 - P(C) = 1 - \frac{3}{8} = \frac{5}{8}$

(مشابه کار در کلاس کتاب درسی)

مثال: 3 نفر به نام های A، B و C در یک شرکت مشغول به کار هستند؛ با چه احتمالی:

- الف** هر 3 نفرشان در روز دوشنبه استخدام شده اند؟ **ب** هر 3 نفرشان در یک روز هفته استخدام شده اند؟
ج در روزهای مختلف هفته استخدام شده اند؟ **د** حداقل 2 نفرشان در یک روز هفته استخدام شده اند؟

$$n(S) = 7 \times 7 \times 7$$

حل: چون در مورد روزهای هفته صحبت شده، پس در تمام قسمت های این سؤال، مقدار $n(S)$ برابر میشه با:

$$n(A) = 1 \times 1 \times 1 = 1 \Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{1}{7 \times 7 \times 7} = \frac{1}{343}$$

A B C

$$n(B) = 7 \times 1 \times 1 = 7 \Rightarrow P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{7}{7 \times 7 \times 7} = \frac{1}{49}$$

A B C

$$n(C) = 7 \times 6 \times 5 = 210 \Rightarrow P(C) = \frac{n(C)}{n(S)} = \frac{210}{7 \times 7 \times 7} = \frac{30}{49}$$

A B C

د از احتمال متمم استفاده می کنیم، پیشامد ذکر شده در این قسمت برابر با متمم پیشامد ذکر شده در قسمت «ج» است، پس داریم: $P(C') = 1 - P(C) = 1 - \frac{30}{49} = \frac{19}{49}$



محاسبه احتمال رخ دادن پیشامد $A \cup B$

قبلاً بهتون گفتم که منظور از پیشامد $A \cup B$ اینه که پیشامد A یا B یا حداقل یکی از اون‌ها رخ بده حالا می‌خوایم احتمال رخ دادنش رو به دست بیاریم که باید از فرمول مقابل استفاده کنیم:

$$P(A \cup B) = \overset{\text{رخ دهد } A}{P(A)} + \overset{\text{رخ دهد } B}{P(B)} - \underset{\text{A و B با هم رخ دهند}}{P(A \cap B)}$$

$\downarrow$ A یا B یا حداقل یکی از آن‌ها رخ دهد $\downarrow$ A و B با هم رخ دهند

البته توجه کنین اگه در متن سؤال، گفته بشه که A و B ناسازگار هستن به این معنی که $A \cap B = \emptyset$ و در نتیجه $P(A \cap B) = 0$ و چون می‌دونین که احتمال رخ دادن پیشامد تهی برابر با صفره. پس در پیشامدهای ناسازگار فرمول بالا به صورت مقابل درمی‌آید: $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

مشاوره نهایی: گاهی اوقات در متن سؤال به فارسی گفته نمیشه که A و B ناسازگار هستن، بلکه میگن $A \subseteq B'$ یا $B \subseteq A'$ که هر دوتاشون به معنی این هستن که A و B ناسازگارن، البته گاهی هم گفته میشه $A - B = A$ و $B - A = B$ که باز به معنای ناسازگار بودن A و B هست.

مثال: اگر $P(A) = \frac{1}{6}$ ، $P(B) = \frac{2}{3}$ و $P(A \cap B) = \frac{1}{12}$ باشند، احتمال رخ دادن پیشامد $A \cup B$ را به دست آورید. (مشابه فعالیت کتاب درسی)

حل: همه اطلاعات لازم رو در اختیار داریم، پس فقط کافیه اون‌ها رو در فرمول جای‌گذاری کنیم:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Rightarrow P(A \cup B) = \frac{1}{6} + \frac{2}{3} - \frac{1}{12} = \frac{2+8-1}{12} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$$

مثال: برای دو پیشامد A و B داریم $A - B = A$ و $B - A = B$. با فرض آنکه $P(A') = \frac{14}{15}$ و $P(B') = \frac{3}{5}$ باشند، $P(A \cup B)$ را به دست آورید.

حل: از روابط $A - B = A$ و $B - A = B$ متوجه میشیم که A و B ناسازگارن، پس $P(A \cap B) = 0$ خواهد بود، الان $P(A')$ و $P(B')$ به ما داده شدن که به کمک اون‌ها باید $P(A)$ و $P(B)$ رو به دست بیاریم:

$$P(A) = 1 - P(A') = 1 - \frac{14}{15} = \frac{1}{15}, \quad P(B) = 1 - P(B') = 1 - \frac{3}{5} = \frac{2}{5}$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Rightarrow P(A \cup B) = \frac{1}{15} + \frac{2}{5} - 0 = \frac{1+6}{15} = \frac{7}{15}$$

مثال: اگر $A \subseteq B'$ ، $P(A) = 2P(B)$ و $P(A \cup B) = \frac{4}{7}$ باشد، حاصل $P(B)$ را به دست آورید.

حل: از عبارت $A \subseteq B'$ می‌فهمیم که A و B ناسازگارن، لذا مقدار $P(A \cap B)$ برابر با صفره. حالا به سراغ فرمول میریم:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \xrightarrow{P(A)=2P(B)} \frac{4}{7} = 2P(B) + P(B) - 0 \Rightarrow \frac{4}{7} = 3P(B) \xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} 21P(B) = 4 \Rightarrow P(B) = \frac{4}{21}$$

حل سؤالات خاص احتمال

کتاب درسی در یکی از تمرینات خود، سؤال خیلی زیبایی رو در مورد پرتاب سکه و تاس مطرح کرده که با همه سؤالات قبلی که خوندین متفاوت و برای حلش حتماً باید از نمودار درختی استفاده کنین. به این سؤال خوب توجه کنین.

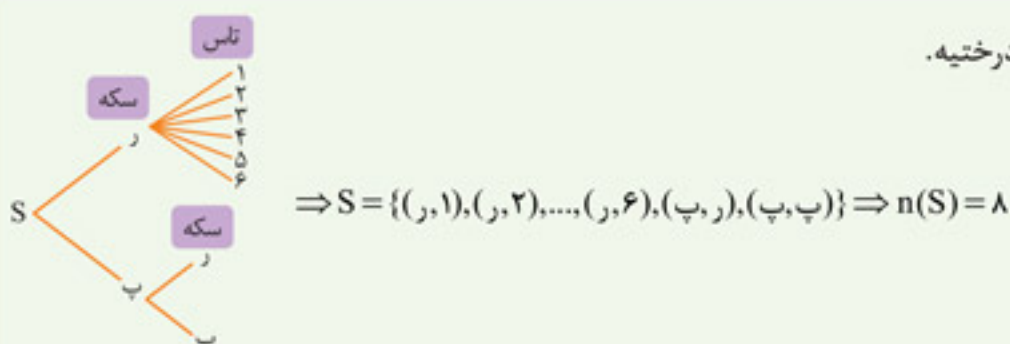
مثال: سکه‌ای را پرتاب می‌کنیم. اگر «رو» ظاهر شد، آنگاه یک تاس را می‌اندازیم، در غیر این صورت یک بار دیگر سکه را می‌اندازیم: (تمرین کتاب درسی)

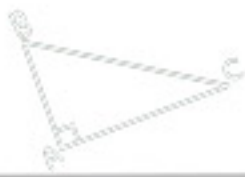
الف: فضای نمونه این آزمایش تصادفی را مشخص کنید.

ب: پیشامد A را که در آن عدد ظاهرشده روی تاس، زوج باشد یا سکه اول پشت بیاید، با اعضا مشخص کنید.

ج: احتمال پیشامد A را به دست آورید.

حل: الف: در این مدل سؤال‌ها بهترین راه، رسم نمودار درختیه.





ب از مجموعه S عضوهایی را انتخاب می‌کنیم که در اون‌ها تاس زوج یا سکه پشت اومده باشه:

$$A = \{ \underbrace{(ر, ۲), (ر, ۴), (ر, ۶)}_{\text{تاس زوج}} , \underbrace{(پ, ر), (پ, پ)}_{\text{سکه پشت}} \}$$

البته می‌شد پیشامد زوج اومدن تاس رو جدا بنویسیم و پیشامد پشت اومدن سکه رو هم جدا بنویسیم و بعدش از شون اجتماع بگیریم.

ج با توجه به قسمت «ب» میشه گفت که:

$$n(A) = 5 \Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{5}{8}$$

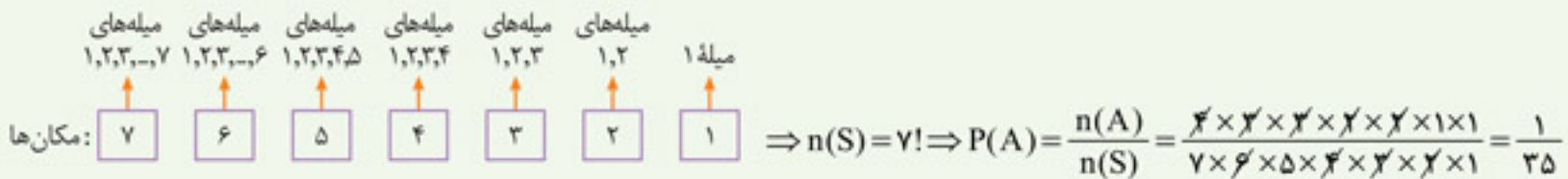
در سؤال بعدی که می‌خوایم بررسی‌اش کنیم قرار گرفتن یک سری اشیاء در مکان‌هایی مشخص، مطرح شده که سؤال بسیار مفهومی و جالبی است و اگه امتحان نهایی، قرار باشه کمی دشوار مطرح بشه حتماً از این جور سؤالات میدان بهتون.

مثال: ۷ پرچم مختلف را به ۷ میله پرچم نصب کرده‌ایم و روی میله‌ها شماره‌های ۱ تا ۷ حک شده است. چنانچه این پرچم‌ها به‌طور تصادفی کنار هم قرار گیرند، مطلوب است احتمال اینکه میله پرچم‌های با شماره‌های غیر اول در مکان‌های زوج قرار گرفته باشند. (تمرین کتاب درسی)

حل: بهتره یک شکل فرضی برای فهم بهتر سؤال رسم کنیم. مکان‌های قرارگیری میله‌ها رو با خونه‌های خالی نمایش میدیم، سپس میله‌ها رو در اون‌ها قرار میدیم، میله‌های غیراول عبارت‌اند از ۴، ۶ و ۲ که در خانه‌های زوج قرار می‌گیرن، بقیه میله‌ها با شماره‌های ۵، ۳، ۱ و ۷ در خانه‌های فرد قرار می‌گیرن:



حالا به محاسبه $n(S)$ توجه کنین (فقط می‌خوایم میله‌ها رو داخل مکان‌ها قرار بدیم):

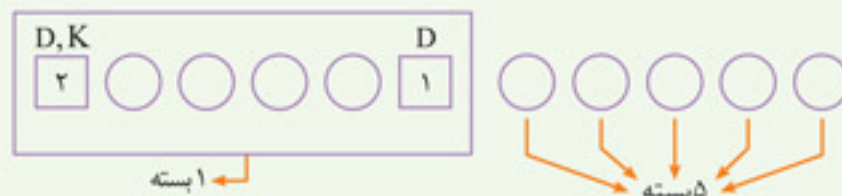


خودمم قبول دارم که این سؤال، خیلی سخته ولی چاره‌ای نیست جز یاد گرفتنش. چون همون‌طور که گفتیم اگه امتحان نهایی دشوار باشه از این سبک سؤال‌ها هم میدن و اما سؤال آخری که حل می‌کنیم مشابه‌اش رو در قسمت قبلی (درس تبدیل و ترکیب) براتون حل کردم. الان فقط به احتمال بهش اضافه میشه.

سؤال: یازده بازیکن فوتبال تیم مدرسه‌ای به‌طور تصادفی کنار یکدیگر قرار می‌گیرند تا عکس یادگاری بیندازند. چنانچه دروازه‌بان و کاپیتان تیم دو نفر متفاوت باشند، مطلوب است محاسبه احتمال اینکه در عکس، دقیقاً ۴ نفر بین دروازه‌بان و کاپیتان حضور داشته باشند؟ (تمرین کتاب درسی)

پاسخ: ابتدا $n(S)$ رو بدون در نظر گرفتن هیچ محدودیتی به دست میاریم:

اگه دروازه‌بان و کاپیتان رو به‌ترتیب با D و K نمایش بدیم، D و K به ۲! حالت جابه‌جا میشن. ۴ نفر بین D و K هم به $\binom{9}{4}$ حالت انتخاب میشن و به ۴! حالت جابه‌جایی دارن. حالا این ۶ نفر یک بسته تشکیل میدن که با ۵ نفر بیرون بسته به ۶! حالت جابه‌جایی دارن، پس داریم:



$$9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$$

$$\Rightarrow n(A) = 2! \times \binom{9}{4} \times 4! \times 6! = 2 \times \frac{9!}{4! \times 5!} \times 4! \times 6! = 2 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 6!$$

$$\Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{2 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 6!}{11!} = \frac{1 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 6!}{11 \times 10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 6!} = \frac{6}{55}$$



سؤالات امتحانی

بخش اول: پیشامدها و اعمال روی آنها

الف) جاهای خالی را با عبارت‌های مناسب کامل کنید.

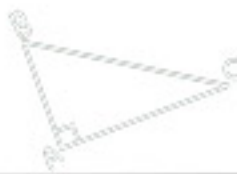
۱۶۸. پیشامد وقتی رخ می‌دهد که پیشامد A رخ دهد و پیشامد B رخ ندهد. (دی ۹۹)
۱۶۹. هرگاه A و B دو پیشامد از فضای نمونه‌ای S باشند به طوری که در این صورت پیشامدهای A و B را ناسازگار می‌گوییم. (خرداد ۱۴۰۰)
۱۷۰. پیشامد A' زمانی رخ می‌دهد که پیشامد رخ ندهد. (شهریور ۱۴۰۰)
۱۷۱. مجموعه زیر مجموعه همه مجموعه‌هاست. (دی ۱۴۰۰)
۱۷۲. فضای نمونه‌ای پرتاب سه سکه عضو دارد.
۱۷۳. اگر $A \cap B = \emptyset$ باشد، دو پیشامد A و B را می‌گوییم. (خرداد ۹۹)
۱۷۴. پیشامد وقتی رخ می‌دهد که پیشامد A رخ ندهد. (خرداد ۹۹)
۱۷۵. فضای نمونه‌ای پرتاب یک تاس و دو سکه عضو دارد. (خرداد ۹۹)
۱۷۶. در پرتاب سه سکه با هم، فضای نمونه‌ای عضو دارد.
۱۷۷. به هر یک از نتایج ممکن برای یک آزمایش تصادفی می‌گوییم.
۱۷۸. پیشامد وقتی رخ می‌دهد که پیشامد A و B هر دو رخ دهند.
۱۷۹. هرگاه A و B دو پیشامد از فضای نمونه‌ای S باشند به طوری که در این صورت پیشامدهای A و B را ناسازگار می‌گوییم.
- پُر تکرار (خرداد ۱۴۰۰ و مشابه خرداد ۹۹ خارج از کشور)
۱۸۰. اگر پیشامد A با فضای نمونه‌ای S برابر باشد A را یک پیشامد می‌گویند. (خرداد ۱۴۰۲)
۱۸۱. مجموعه تهی را پیشامد می‌گویند. (دی ۱۴۰۱)

ب) درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید.

۱۸۲. خارج کردن ۲ مهره سفید از جعبه‌ای که در آن ۵ مهره سفید است، یک پیشامد حتمی است. (خرداد ۹۹) ☒
۱۸۳. در فضای نمونه‌ای پرتاب یک تاس، پیشامد رو شدن عددی بزرگ‌تر از ۶ نشدنی است. (خرداد ۹۹) ☒
۱۸۴. نتیجه حل معادله $(x+1)^2 = 0$ یک پدیده تصادفی است. (خرداد ۹۹) ☒
۱۸۵. نتیجه یک آزمون چهارگزینه‌ای که نیمی از سؤالات آن را شانسی پاسخ داده‌ایم، یک پیشامد حتمی است. (شهریور ۹۹) ☒
۱۸۶. تهی را یک پیشامد حتمی می‌نامیم. (دی ۹۹) ☒
۱۸۷. فضای نمونه‌ای پرتاب سه سکه ۹ عضو دارد. (دی ۱۴۰۰) ☒
۱۸۸. در پرتاب یک تاس، ظاهر شدن عددی بیشتر از شش، یک پیشامد حتمی است. (دی ۱۴۰۰) ☒
۱۸۹. پیشامد $B - A$ وقتی رخ می‌دهد که پیشامد B رخ دهد و پیشامد A رخ ندهد. (خرداد ۱۴۰۲) ☒

ج) گزینه درست را انتخاب کنید.

۱۹۰. فضای نمونه برای ترکیب جنسیت فرزندان خانواده‌ای با ۳ فرزند، چند عضو دارد؟ (خرداد ۱۴۰۱)
- ۱ (۱) ☐ ۶ (۲) ☐ ۸ (۳) ☐ ۹ (۴) ☐ ۱۲
۱۹۱. با فرض $S = \{2, 4, 5, 6\}$ کدام مجموعه زیر یک پیشامد از این فضای نمونه است؟
- ۱ (۱) ☐ $\{1, 5\}$ (۲) ☐ $\{1, 5, 6\}$ (۳) ☐ $\{2, 5, 4\}$ (۴) ☐ $\{3, 6\}$
۱۹۲. در فضای نمونه $S = \{1, 2, 4\}$ چند پیشامد غیر حتمی وجود دارد؟
- ۲ (۱) ☐ ۵ (۲) ☐ ۷ (۳) ☐ ۸ (۴) ☐
۱۹۳. سکه‌ای را ۴ بار می‌اندازیم. پیشامد اینکه در بار دوم و سوم، پشت بیاید چند عضو دارد؟
- ۳۶ (۱) ☐ ۴ (۲) ☐ ۵ (۳) ☐ ۶ (۴) ☐
۱۹۴. دو تاس را با هم پرتاب می‌کنیم. پیشامد اینکه مجموع اعداد دو تاس زوج باشد، چند عضو دارد؟
- ۲۷ (۱) ☐ ۱۸ (۲) ☐ ۳۰ (۳) ☐ ۱۲ (۴) ☐
۱۹۵. اگر A و B دو پیشامد ناسازگار باشند، کدام رابطه زیر نادرست است؟
- ۱ (۱) ☐ $A - B = \emptyset$ (۲) ☐ $A \subseteq B'$ (۳) ☐ $A \cap B = \emptyset$ (۴) ☐ $B - A = B$
۱۹۶. در پرتاب یک تاس و یک سکه، چه تعداد پیشامد وجود دارد؟
- ۲۱۳ (۱) ☐ ۴۸ (۲) ☐ ۴۶ (۳) ☐ ۲۲۴ (۴) ☐



د به سؤالات زیر پاسخ کامل دهید.

۱۹۷. تاسی را پرتاب می‌کنیم. هر یک از پیشامدهای زیر را با اعضا مشخص کنید.

الف) پیشامد اینکه عدد روشده، زوج یا اول باشد.

ب) پیشامد اینکه عدد روشده، زوج و اول باشد.

ج) پیشامد اینکه عدد روشده، زوج باشد ولی اول نباشد.

د) پیشامد اینکه عدد روشده، اول نباشد.

(خرداد ۹۸)

(خرداد ۹۸)

۱۹۸. در پرتاب یک تاس و یک سکه، فضای نمونه چند عضو دارد؟

۱۹۹. تاسی را دو بار پرتاب می‌کنیم. پیشامدهای زیر را مشخص کنید.

الف) پیشامد اینکه مجموع دو عدد روشده برابر چهار باشد.

ب) پیشامد اینکه مجموع اعداد روشده مساوی ۱۰ باشد.

ج) پیشامد اینکه مجموع اعداد روشده بزرگ‌تر از ۱۰ باشد.

د) پیشامد اینکه اعداد روشده از هر دو تاس یکسان و هر دو زوج باشند.

ه) پیشامد اینکه اعداد روشده در هر دو تاس یکسان باشند ولی زوج نباشند.

(دی ۹۸)

(شهریور ۹۹)

(دی ۱۴۰۰)

(شهریور ۹۹)

(دی ۹۸)

(خرداد ۱۴۰۱)

۲۰۰. کدام یک از پدیده‌های زیر تصادفی و کدام یک قطعی است؟

الف) مشاهده عدد ۳ در پرتاب یک تاس که روی هر شش وجه آن، عدد ۳ حک شده باشد.

ب) نتیجه یک آزمون چهار گزینه‌ای که نیمی از سؤالات آن را شانس پاسخ داده‌ایم.

(کاردرکلاس کتاب درسی)

۲۰۱. خانواده‌ای دارای ۳ فرزند است. پیشامدهای زیر را مشخص کنید.

الف) پیشامد A اینکه همه فرزندان خانواده دارای یک جنسیت باشند.

ب) پیشامد B اینکه دو فرزند خانواده پسر و یک فرزند دختر باشند.

ج) پیشامد C اینکه حداقل دو فرزند این خانواده دختر باشند.

(کاردرکلاس کتاب درسی)

۲۰۲. با توجه به پیشامدهای A، B و C در سؤال قبلی، به سؤالات زیر پاسخ دهید:

- آیا پیشامدهای A و B ناسازگارند؟

- آیا پیشامدهای B و C ناسازگارند؟

- آیا پیشامدهای A و C ناسازگارند؟

۲۰۳. خانواده‌ای دارای ۴ فرزند است:

الف) فضای نمونه مناسب برای ترکیب جنسیت فرزندان این خانواده چند عضو دارد؟

ب) پیشامد A را مشخص کنید، به طوری که در آن، دو فرزند سوم و چهارم دختر باشند.

ج) پیشامد C که در آن، تعداد فرزندان دختر بیشتر از تعداد فرزندان پسر باشد.

د) آیا پیشامدهای A و C ناسازگارند؟

۲۰۴. یک تاس را پرتاب می‌کنیم. اگر عدد اول بیاید یک سکه و اگر عدد غیر اول بیاید، یک تاس پرتاب می‌کنیم. فضای نمونه این آزمایش را بنویسید.

۲۰۵. سه دوست با نام‌های علی، پارسا و محمد در یک ردیف کنار هم می‌نشینند. فضای نمونه این آزمایش تصادفی را مشخص کنید. چگونه می‌توان

تعداد همه برآمدهای این آزمایش تصادفی را بدون شمردن، مشخص کرد؟

۲۰۶. در کیسه‌ای ۳ مهره قرمز، ۴ مهره آبی و ۴ مهره سبز وجود دارد. به طور تصادفی ۳ مهره را یک‌جا از کیسه خارج می‌کنیم. تعداد اعضای فضای

نمونه این پدیده تصادفی را مشخص کنید.

۲۰۷. سکه‌ای را پرتاب می‌کنیم. اگر رو ظاهر شد، آنگاه تاس را می‌ریزیم، در غیر این صورت یک‌بار دیگر سکه را می‌اندازیم: (تمرین کتاب درسی)

الف) فضای نمونه این آزمایش تصادفی را مشخص کنید.

ب) پیشامد A را که در آن عدد ظاهر شده روی تاس زوج باشد یا سکه اول پشت بیاید، با اعضا مشخص کنید.

۲۰۸. از بین ۵ دانش‌آموز سال دهم، ۶ دانش‌آموز سال یازدهم و ۴ دانش‌آموز سال دوازدهم، قرار است یک گروه ۳ نفره انتخاب کنیم. تعداد اعضای

پیشامد اینکه سه نفر منتخب از سه پایه مختلف باشد را مشخص کنید.

۲۰۹. هر یک از اعداد طبیعی کوچک‌تر از ۲۰ را روی یک کارت می‌نویسیم و پس از مخلوط کردن کارت‌ها، به طور تصادفی یک کارت را برمی‌داریم، مطلوب است تعیین:

الف) فضای نمونه این آزمایش تصادفی.

ب) پیشامد B که در آن، عدد روی کارت مربع کامل باشد.

ج) پیشامد A که در آن، عدد روی کارت مضرب ۳ باشد.

د) پیشامدهای $A \cap B$ و $A - B$ را با اعضا مشخص کنید.

۲۱۰. از ۳ مداد و ۵ خودکاری که در یک جعبه قرار دارند، به طور تصادفی یکی از آن‌ها را خارج می‌کنیم:

الف) آیا مجموعه دو عضوی {خودکار، مداد} می‌تواند همه برآمدهای ممکن این آزمایش تصادفی را نشان دهد؟

ب) به نظر شما چگونه می‌توان همه برآمدهای ممکن این آزمایش تصادفی را مشخص کرد؟

۲۱۱. سکه‌ای را یک‌بار پرتاب می‌کنیم. تمام پیشامدهای ممکن برای فضای نمونه را بنویسید.





۲۱۲. مریم، ملیکا و سوگند پول‌هایشان را روی هم گذاشتند و یک کتاب رمان از نمایشگاه کتاب مدرسه خریدند؛ سپس اسامی خود را روی سه کارت متمایز نوشتند و داخل کیسه‌ای انداختند. آن‌ها با هم قرار گذاشتند که یک کارت را به‌طور تصادفی از کیسه خارج کنند و نام هر کسی که روی کارت بود، ابتدا کتاب را به منزل ببرد و مطالعه کند.

الف) فضای نمونه این پدیده تصادفی را بنویسید، سپس تمام زیرمجموعه‌های یک‌عضوی S را مشخص کنید.
ب) اگر قرار باشد دو نفر از آن‌ها بعد از مطالعه کتاب با هم خلاصه آن را در کلاس ارائه کنند، پیشامدهای ممکن را بنویسید.
۲۱۳. خانواده‌ای دارای ۳ فرزند است. پیشامدهای زیر را مشخص کنید.

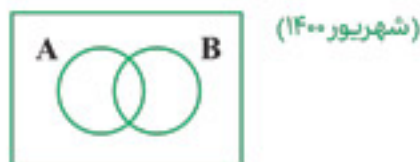
الف) پیشامد A اینکه همه فرزندان خانواده دارای یک جنسیت باشند. ب) پیشامد B اینکه تعداد فرزندان پسر از فرزندان دختر بیشتر باشد.
۲۱۴. دو تاس را پرتاب می‌کنیم. پیشامدهای زیر را مشخص کنید.

الف) اعداد روشده از دو تاس مانند هم باشند. (پیشامد A)
ج) مجموع اعداد برآمده از دو تاس ۱۳ باشد. (پیشامد C)
۲۱۵. تاسی را پرتاب می‌کنیم. اگر پس از نشستن تاس روی زمین عدد ۲ نمایان شود، به نظر شما در این آزمایش تصادفی کدام یک از پیشامدهای زیر رخ داده‌اند؟
(کار در کلاس کتاب درسی)

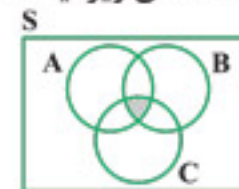
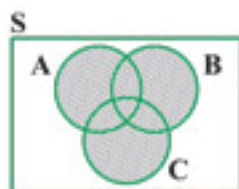
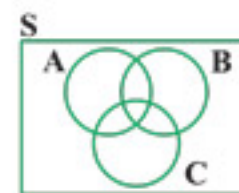
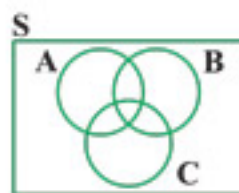
الف) $A = \{۳, ۲, ۵\}$ ب) $B = \{۲\}$ ج) $C = \{۲, ۴, ۶\}$

۲۱۶. هر یک از اعداد دورقمی را که با ارقام ۱، ۲، ۳، ۴ می‌توان نوشت (با تکرار)، روی کارت‌هایی می‌نویسیم و پس از مخلوط کردن کارت‌ها یک کارت را به‌طور تصادفی خارج می‌کنیم:

الف) فضای نمونه این آزمایش تصادفی را مشخص کنید.
ج) پیشامد B که در آن، عدد روی کارت اول باشد.
۲۱۷. در شکل روبه‌رو «پیشامد A یا B رخ دهد» را سایه بزنید.



۲۱۸. فرض کنید A، B و C سه پیشامد در فضای نمونه S باشند. هر یک از پیشامدهای زیر را روی نمودار ون سایه بزنید، سپس عبارت مجموعه‌ای مربوط به هر پیشامد را بنویسید.
الف) پیشامدهای A و B رخ دهند ولی پیشامد C رخ ندهد.
ب) پیشامدهای A یا B رخ دهند ولی پیشامد C رخ ندهد.



۲۱۹. برای هر یک از پیشامدهای زیر، یک عبارت توصیفی و یک عبارت مجموعه‌ای بنویسید.
۲۲۰. در پرتاب یک سکه به همراه یک تاس:

الف) فضای نمونه چند عضو دارد؟
ب) پیشامد رو آمدن سکه و زوج بودن تاس را مشخص کنید.
۲۲۱. در یک برنامه کوهنوردی، ۵ دانش‌آموز سال دهم، ۶ دانش‌آموز سال یازدهم و ۴ دانش‌آموز سال دوازدهم شرکت دارند. قرار است یک گروه پیش‌تاز ۳ نفره از بین آن‌ها برای صعود انتخاب کنیم. تعداد عضوهای پیشامدهای زیر را مشخص کنید:

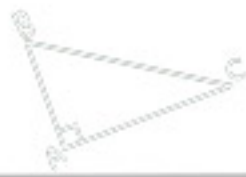
الف) سه دانش‌آموز پیش‌تاز از سه پایه مختلف باشند.
ب) حداقل ۲ دانش‌آموز در این گروه پیش‌تاز از دانش‌آموزان سال یازدهم باشند.
۲۲۲. کدام یک از موارد زیر، یک پدیده قطعی و کدام تصادفی است؟

الف) در ابتدای مسابقه فوتبال، پرتاب سکه‌ای که در یک طرف آن عدد ۱ و در طرف دیگرش عدد ۲ حک شده باشد.
ب) نام ۲۰ دانش‌آموز را روی ۲۰ کارت می‌نویسیم و پس از مخلوط کردن کارت‌ها، به‌طور تصادفی یک کارت بیرون می‌کشیم تا نام یکی از دانش‌آموزان خارج شود.

۲۲۳. دو تاس را هم‌زمان پرتاب می‌کنیم. هر یک از پیشامدهای زیر را مشخص کنید.
الف) حاصل ضرب اعداد روشده از دو تاس بزرگ‌تر یا مساوی ۳۰ باشد.
ب) مجموع اعداد روشده از دو تاس برابر ۱۳ باشد.

۲۲۴. خانواده‌ای دارای ۲ فرزند است.
الف) فضای نمونه مناسب برای ترکیب جنسیتی فرزندان این خانواده را بنویسید.
ب) پیشامد A را که در آن هر دو فرزند خانواده از یک جنس باشند، بنویسید.





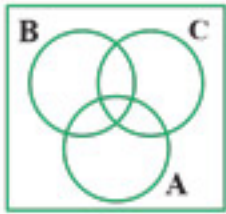
۲۲۵. دو تاس را با هم پرتاب می‌کنیم. A را پیشامد آنکه اعداد آمده از دو تاس یکسان باشند و B را پیشامد آنکه مجموع اعداد آمده از دو تاس مساوی ۸ باشد، در نظر بگیرید.

(دی ۱۴۰۱)

الف) پیشامد A و B را مشخص کنید.

ب) آیا A و B ناسازگارند؟ چرا؟

۲۲۶. اگر A ، B و C سه پیشامد از فضای نمونه S باشند، پیشامد آنکه A یا C رخ دهد ولی B رخ ندهد را در شکل زیر سایه بزنید. (دی ۱۴۰۱ خارج از کشور)



۲۰. سوالات ۲۰ ساز

۲۲۷. خانواده‌ای دارای ۵ فرزند است. پیشامد اینکه تعداد پسرها از تعداد دخترها بیشتر باشد، دارای عضو است.

۲۲۸. سکه‌ای را پرتاب می‌کنیم. اگر «رو» ظاهر شود، تاسی را می‌اندازیم. در غیر این صورت، سکه را می‌اندازیم. پیشامد A که در آن عدد تاس زوج یا سکه‌ها متفاوت ظاهر شوند عضو دارد.

۲۲۹. در زیرمجموعه ۵ عضوی از مجموعه $\{1, 2, 3, \dots, 9\}$ حداقل سه عضو زوج وجود دارد.

۲۳۰. آزمون درس ریاضی انسانی در کنکور دارای ۲۰ سؤال است. پیشامد اینکه دانش آموزی به ۱۸ تای آنها به طور شانس جواب درست بدهد، دارای عضو است.

۲۳۱. در پرتاب ۱ تاس و ۲ سکه، پیشامد وجود دارد.

۲۳۲. کدام یک از نمونه‌های زیر، پدیده تصادفی نیست؟

☐ (۱) جنسیت دانش آموز انتخاب شده از یک مدرسه دخترانه

☐ (۳) تعداد افراد حاضر در مدرسه در روز بعد

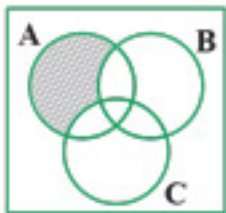
۲۳۳. کدام گزینه زیر، نشان دهنده پیشامد قسمت رنگی است؟

☐ (۱) A رخ بدهد.

☐ (۲) A رخ بدهد ولی $B \cup C$ رخ ندهد.

☐ (۳) A رخ بدهد ولی $B \cap C$ رخ ندهد.

☐ (۴) A رخ بدهد ولی $B - C$ و $C - B$ رخ ندهد.



۲۳۴. اگر متمم مجموعه $(A - B) \cup (B - A)$ برابر $A \cap B$ باشد، کدام عبارت درست است؟

☐ (۱) $A \subseteq B$ ☐ (۲) $A \subseteq B'$ ☐ (۳) $A \cup B = S$ ☐ (۴) $A = \emptyset$ یا $B = \emptyset$

۲۳۵. تعداد زیرمجموعه‌های ۴ عضوی مجموعه $\{0, 1, 2, 4, 6, 8, 9\}$ که شامل عدد ۸ باشد ولی شامل عدد ۴ نباشد، کدام است؟

☐ (۱) ۱۰ ☐ (۲) ۲۰ ☐ (۳) ۴۰ ☐ (۴) ۵۰

۲۳۶. دو تاس را با هم پرتاب می‌کنیم و مشاهده می‌کنیم که هر دو تاس عدد ۳ آمده‌اند. کدام پیشامد زیر رخ داده است؟

☐ (۱) فقط $A = \{(3, 3)\}$ ☐ (۲) فقط $B = \{(1, 3), (3, 1), (3, 3)\}$

☐ (۳) $C = \{(2, 2), (3, 3)\}$ ☐ (۴) همه پیشامدهای A ، B و C رخ داده‌اند.

(خارج ۹۹)

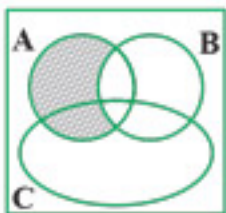
۲۳۷. مطابق شکل مقابل، فرض کنید A ، B و C سه مجموعه باشند. کدام مورد برای قسمت هاشور خورده نادرست است؟

☐ (۱) $(A - B) \cup (A - C)$

☐ (۲) $A \cap (B \cap C)'$

☐ (۳) $A - (B \cap C)$

☐ (۴) $A - (B \cup C)$



۲۳۸. اگر $B \subseteq A'$ باشد، حاصل پیشامد $((A \cap B') - (B \cap A'))'$ را به دست آورید.

۲۳۹. اگر $A \subseteq B'$ باشد، حاصل $((A - B) \cup (B - A))'$ را به دست آورید.

۲۴۰. k سکه و n تاس را با هم پرتاب می‌کنیم. اگر فضای نمونه دارای ۴۸ عضو باشد، حاصل $\frac{k}{n}$ را به دست آورید.





بخش دوم: احتمال

الف) جاهای خالی را با عبارت‌های مناسب کامل کنید.

۲۴۱. احتمال وقوع هر پیشامد، حداقل و حداکثر است.
 ۲۴۲. در پرتاب دو تاس احتمال آمدن عددهای غیرمساوی است.
 ۲۴۳. در پرتاب یک تاس و یک سکه، احتمال آمدن اینکه سکه رو و تاس عدد اول بیاید است.
 ۲۴۴. اگر پیشامد A غیرحتمی باشد، احتمال آن برابر با است.
 ۲۴۵. احتمال اینکه فردا بارانی باشد $\frac{2}{9}$ و احتمال اینکه بارانی نباشد است.
 ۲۴۶. احتمال رو شدن عدد ۷ در پرتاب یک تاس برابر است.
 ۲۴۷. احتمال اینکه سه دانش‌آموز در ماه‌های مختلف به دنیا آمده باشند است.
 ۲۴۸. احتمال اینکه در یک خانواده با سه فرزند، هر سه فرزند هم‌جنس باشند است.
 ۲۴۹. ۵ نفر در یک تاکسی هستند. احتمال اینکه هر ۵ نفر در یک ماه متولد شده باشند است.

ب) درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید.

۲۵۰. احتمال رو شدن عدد ۹ در پرتاب یک تاس برابر صفر است.
 ۲۵۱. در پرتاب دو تاس احتمال اینکه هر دو تاس عدد یکسان بیاید $\frac{6}{36}$ است.
 ۲۵۲. در پرتاب دو تاس و یک سکه، فضای نمونه ۲۴ است.
 ۲۵۳. از بین ۴ مهره سفید و ۳ مهره سیاه، ۲ مهره به تصادف انتخاب می‌کنیم. احتمال اینکه هر دو سفید باشند $\frac{6}{42}$ است.
 ۲۵۴. احتمال اینکه فردا بارانی باشد، برابر $\frac{3}{8}$ است. احتمال اینکه فردا بارانی نباشد $\frac{5}{8}$ است.
 ۲۵۵. خانواده‌ای دارای دو فرزند است. احتمال اینکه هر دو فرزند دختر باشد $\frac{2}{4}$ است.
 ۲۵۶. اگر A و B دو پیشامد ناسازگار باشند، $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.
 ۲۵۷. برای سه سرنشین یک تاکسی احتمال اینکه فصل تولد هر سه پاییز باشد، $(\frac{1}{4})^3$ است.
 ۲۵۸. اگر $P(A) = 0$ باشد، A یک پیشامد نشدنی است.
 ۲۵۹. اگر $A \subseteq B$ باشد آنگاه $P(A) \leq P(B)$ است.

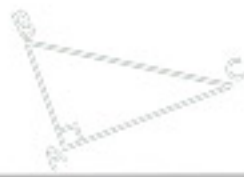
ج) گزینه درست را انتخاب کنید.

۲۶۰. احتمال پیشامد نشدنی برابر کدام است؟
 (۱) صفر ☐ (۲) ۱ ☐ (۳) $\frac{1}{2}$ ☐ (۴) $\frac{1}{6}$ ☐
۲۶۱. اگر پیشامد A نشدنی و پیشامد B حتمی باشد، در این صورت مقادیر $P(A)$ و $P(B)$ به ترتیب از راست به چپ کدام‌اند؟
 (۱) ۰، ۱ ☐ (۲) ۱، ۰ ☐ (۳) ۱، ۱ ☐ (۴) ۰، ۰ ☐
۲۶۲. یک تاس و یک سکه را با هم پرتاب می‌کنیم. احتمال آنکه سکه پشت بیاید کدام است؟
 (۱) $\frac{1}{2}$ ☐ (۲) $\frac{3}{4}$ ☐ (۳) $\frac{1}{4}$ ☐ (۴) $\frac{7}{8}$ ☐
۲۶۳. احتمال اینکه فردا بارانی باشد، ۰/۰۱ است. احتمال اینکه فردا بارانی نباشد، چقدر است؟
 (۱) ۰/۰۹ ☐ (۲) ۰/۱ ☐ (۳) ۰/۹ ☐ (۴) ۰/۹۹ ☐
۲۶۴. در پرتاب دو تاس احتمال اینکه مجموع اعداد دو تاس کمتر از ۷ باشد، کدام است؟
 (۱) $\frac{1}{3}$ ☐ (۲) $\frac{1}{2}$ ☐ (۳) $\frac{7}{12}$ ☐ (۴) $\frac{5}{12}$ ☐
۲۶۵. در پرتاب دو تاس احتمال اینکه در هر دو تاس عددی فرد ظاهر شود، چقدر است؟
 (۱) $\frac{1}{2}$ ☐ (۲) $\frac{1}{8}$ ☐ (۳) $\frac{1}{4}$ ☐ (۴) $\frac{3}{8}$ ☐
۲۶۶. سه تاس متمایز را هم‌زمان پرتاب می‌کنیم. با کدام احتمال هر سه عدد روشده متفاوت هستند؟
 (۱) $\frac{1}{3}$ ☐ (۲) $\frac{4}{9}$ ☐ (۳) $\frac{5}{9}$ ☐ (۴) $\frac{2}{3}$ ☐
۲۶۷. چقدر احتمال دارد در بین ۳ فرزند یک خانواده، فصل تولد هیچ دو فرزندی یکسان نباشد؟
 (۱) $\frac{1}{2}$ ☐ (۲) $\frac{1}{8}$ ☐ (۳) $\frac{1}{4}$ ☐ (۴) $\frac{3}{8}$ ☐
۲۶۸. می‌دانیم دو پیشامد A و B ناسازگارند و $P(A) = \frac{2}{5}$ و $P(A \cup B) = \frac{7}{10}$ ، در این صورت $P(A)$ کدام است؟
 (۱) $\frac{1}{5}$ ☐ (۲) $\frac{3}{10}$ ☐ (۳) $\frac{4}{5}$ ☐ (۴) $\frac{1}{2}$ ☐
۲۶۹. با ارقام ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶ یک عدد ۳ رقمی بدون تکرار می‌سازیم. احتمال اینکه زوج باشد، چقدر است؟
 (۱) $\frac{1}{2}$ ☐ (۲) $\frac{2}{6}$ ☐ (۳) $\frac{4}{6}$ ☐ (۴) $\frac{3}{6}$ ☐

(خرداد ۱۴۰۱)

(شهریور ۱۴۰۰)

(خرداد ۱۴۰۱)



د به سؤالات زیر پاسخ کامل دهید.

۲۷۰. دو تاس را با هم پرتاب می‌کنیم؛ مطلوب است محاسبه احتمال اینکه مجموع اعداد روبرو شده بزرگ‌تر از ۹ باشد. (خرداد ۹۹ خارج از کشور)
۲۷۱. می‌خواهیم از جعبه‌ای شامل ۵ مهره قرمز و ۴ مهره آبی، سه مهره را به تصادف خارج کنیم. مطلوب است محاسبه احتمال آنکه ۲ مهره آبی و ۱ مهره قرمز باشد. **پُر تکرار (دی ۱۴۰۰ و دی ۹۹ خارج از کشور)**
۲۷۲. از بین ۴ مهره سفید و ۳ مهره سیاه، به تصادف ۲ مهره انتخاب می‌کنیم. احتمال اینکه هر دو مهره سفید باشد را محاسبه کنید. (خرداد ۱۴۰۱)
۲۷۳. هر یک از اعداد طبیعی ۱ تا ۱۰ را روی یک کارت نوشته و پس از مخلوط کردن کارت‌ها به طور تصادفی یک کارت را برمی‌داریم. مطلوب است احتمال اینکه عدد روی کارت مضرب ۳ باشد. (دی ۱۴۰۰)
۲۷۴. هر یک از اعداد فرد طبیعی ۱ تا ۱۵ را روی یک کارت نوشته و پس از مخلوط کردن کارت‌ها به طور تصادفی یک کارت را برمی‌داریم. مطلوب است محاسبه احتمال اینکه عدد روی کارت مضرب ۳ باشد. (شهریور ۹۹)
۲۷۵. اعداد طبیعی ۲۰ تا ۶۰ را روی کارت‌های یکسان نوشته و به طور تصادفی یک کارت از بین آن‌ها خارج می‌کنیم. مطلوب است محاسبه احتمال اینکه عدد روی کارت مضرب ۵ باشد.
۲۷۶. دو تاس را پرتاب می‌کنیم. ابتدا هر یک از پیشامدهای زیر را نوشته، سپس احتمال هر کدام را محاسبه کنید: (شهریور ۹۸)
- الف) مجموع اعداد برآمده از دو تاس برابر ۱۰ باشد.
- ب) اعداد روبرو شده از هر دو تاس بر ۳ بخش پذیر باشند.
۲۷۷. یک تاس و یک سکه را با هم پرتاب می‌کنیم:
- الف) فضای نمونه‌ای این آزمایش را بنویسید.
- ب) پیشامد A را که در آن سکه پشت و تاس عدد فرد بیاید، بنویسید.
- ج) احتمال آنکه سکه پشت و تاس زوج بیاید را به دست آورید.
- د) احتمال آنکه عدد ظاهر شده برای تاس، حداکثر ۳ باشد را به دست آورید.
- ه) احتمال آنکه تاس، حداکثر ۳ یا سکه رو بیاید را به دست آورید.
- و) احتمال آنکه تاس زوج یا سکه پشت بیاید را به دست آورید.
۲۷۸. دو تاس قرمز و زرد را با هم پرتاب می‌کنیم. مطلوب است محاسبه احتمالات زیر:
- الف) احتمال اینکه تاس قرمز ۲ بیاید.
- ب) احتمال اینکه تاس زرد ۲ بیاید و تاس قرمز زوج بیاید.
۲۷۹. خانواده‌ای دارای ۲ فرزند است:
- الف) فضای نمونه‌ای برای ترکیب جنسیت فرزندان این خانواده را بنویسید.
- ب) احتمال آنکه هر دو فرزند از یک جنس باشند را به دست آورید.
- ج) احتمال آنکه هر دو فرزند دختر باشند را به دست آورید.
- د) احتمال آنکه حداکثر یک فرزند پسر باشد را به دست آورید.
۲۸۰. از بین ۴ کارمند زن و ۶ کارمند مرد می‌خواهیم یک تیم بازرسی ۳ نفره انتخاب کنیم. احتمال اینکه یک زن و دو مرد انتخاب شود را به دست آورید. (شهریور ۱۴۰۱)
۲۸۱. هر یک از دو صفحه عقربه‌دار به ۴ قطاع (قسمت) برابر به شماره‌های ۱، ۲، ۳ و ۴ تقسیم شده‌اند. عقربه مربوط به هر صفحه را می‌چرخانیم. احتمال اینکه عقربه‌ها در نواحی هم‌شماره متوقف شوند را به دست آورید.
۲۸۲. صفحه عقربه‌دار A با شماره‌های ۱، ۲، ۳، ... و ۸ و صفحه عقربه‌دار B با شماره‌های ۱، ۲، ۳، ... و ۱۰ تقسیم‌بندی شده است. هر دو عقربه را می‌چرخانیم، با چه احتمالی عقربه A روی عدد اول و عقربه B روی عدد ۵ می‌ایستد؟
۲۸۳. چهار گوی داریم و روی هر کدام، ارقام ۱ تا ۴ را یادداشت کرده‌ایم. به تصادف یکی از گوی‌ها را از ظرف خارج می‌کنیم و سپس یک گوی دیگر را از گوی‌های باقی‌مانده بیرون می‌کشیم. با چه احتمالی شماره این گوی‌ها دو عدد متوالی‌اند؟
۲۸۴. در یک بازی ۱۱ نفره به هر شخصی یکی از شماره‌های ۱، ۲، ۳، ۴، ... و ۱۲ را نسبت می‌دهیم. سپس با پرتاب دو تاس و بررسی مجموع اعداد برآمده از آن‌ها، نفر برنده مشخص می‌شود، به سؤالات زیر پاسخ دهید:
- الف) احتمال برنده شدن چه شماره‌ای نسبت به بقیه بیشتر است؟
- ب) احتمال برنده شدن کدام شماره‌ها از همه کمتر است؟
- ج) آیا کسی که احتمال برنده شدنش کمتر است، ممکن است در این مسابقه برنده شود؟ چرا؟
- د) احتمال برنده شدن فردی با شماره ۵ چقدر است؟



۲۸۵. عقربه دستگاه چرخنده مقابل، پس از به حرکت درآمدن روی یکی از ۸ ناحیه می‌ایستد و عددی را نشان می‌دهد. چقدر احتمال دارد که:

الف) عقربه روی یک عدد اول بایستد.

ب) عقربه یک عدد اول یا فرد را نشان دهد.

ج) عقربه روی یک عدد مضرب ۳ بایستد.

۲۸۶. اگر ۱۲۰۰ بار عقربه چرخنده مقابل را بچرخانیم، انتظار داریم تقریباً چند بار روی رنگ قرمز بایستد؟



جنسیت	زن	مرد
سن		
۰-۲۰	۲۴	۲۶
۲۰-۴۰	۳۳	۳۷
۴۰-۶۰	۲۳	۲۰
۶۰-۹۰	۲۱	۱۶

۲۸۷. سن و جنسیت افراد یک مجتمع به شکل جدول مقابل است. اگر فقط یک فرد از افراد این مجتمع را به تصادف انتخاب کنیم، با چه احتمالی این فرد، زیر ۴۰ سال سن دارد؟

شماره نانوائی	۱	۲
نوع نان		
ساده	۲۵۰	۴۵۰
کنجدي	۱۰۰	۲۰۰

۲۸۸. توزیع نان‌های «ساده» و «کنجدي» در دو نانوائی «۱» و «۲» به صورت روبه‌رو است. اگر همه نان‌های یک روستا از همین دو نانوائی خریداری شوند:

الف) احتمال اینکه نان «ساده» و از نانوائی «۲» باشد، چقدر است؟

ب) احتمال اینکه نان کنجدي باشد، چقدر است؟

۲۸۹. احتمال اینکه فردا بارانی باشد، برابر $\frac{3}{8}$ است. مطلوب است محاسبه احتمال اینکه فردا بارانی نباشد. (خرداد ۹۹ خارج از کشور)

۲۹۰. احتمال رخ دادن یک پیشامد $\frac{5}{8}$ است. اگر تعداد اعضای این پیشامد ۲۵ باشد، تعداد عضوهای فضای نمونه را به دست آورید.

۲۹۱. اگر احتمال رخ دادن A، برابر $\frac{1}{4}$ ، احتمال رخ دادن B، برابر $\frac{1}{3}$ و احتمال رخ دادن A یا B برابر $\frac{7}{12}$ باشد، احتمال رخ دادن A و B را به دست آورید.

۲۹۲. احتمال وقوع متمم پیشامدی $\frac{2}{5}$ و فضای نمونه دارای ۵۰ عضو است. تعداد نتایج مشاهده شده از وقوع پیشامد چقدر است؟

۲۹۳. اگر A و B دو پیشامد ناسازگار باشند و داشته باشیم $P(A) = 3P(B)$ و ضمناً احتمال اینکه حداقل یکی از دو پیشامد A و B رخ دهد برابر با $\frac{1}{4}$ باشد، مطلوب است محاسبه:

الف) احتمال رخ دادن B

ب) احتمال رخ ندادن A

۲۹۴. یک شرکت تعاونی مسافری در شهر محل زندگی آقای امیری از دو نوع اتوبوس «ولوو» و «اسکانیا» در سه رنگ آبی، سبز و زرد برای جابه‌جایی مسافران به مقصد مشهد مقدس استفاده می‌کند و هر روز در دو نوبت صبح و عصر، اتوبوس به مقصد شهر مشهد مقدس حرکت می‌کند.

الف) در مجموع در یک روز مسافرت به مشهد از این تعاونی به چند حالت ممکن است انجام شود؟

ب) اگر آقای امیری یک بلیط مشهد تهیه کرده باشد، احتمال آنکه وی در نوبت صبح با اتوبوس ولوو به شهر مشهد مسافرت کند چقدر است؟

۲۹۵. از جعبه‌ای که شامل ۹ سیب سالم و ۲ سیب لکه‌دار است، ۴ سیب را به صورت تصادفی برمی‌داریم. مطلوب است محاسبه احتمال اینکه ۳ سیب سالم و یک سیب لکه‌دار باشد. (خرداد ۹۸)

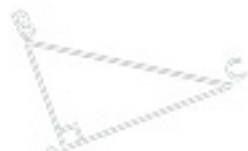
۲۹۶. از جعبه‌ای که شامل ۷ مهره قرمز و ۳ مهره سفید است، ۳ مهره را به طور تصادفی برمی‌داریم. مطلوب است محاسبه احتمال اینکه ۲ مهره قرمز و ۱ مهره سفید باشد. (دی ۹۸)

۲۹۷. از بین ۲ دانش‌آموز رشته ریاضی و ۳ دانش‌آموز رشته تجربی و ۲ دانش‌آموز رشته انسانی، ۳ دانش‌آموز را به طور تصادفی برای اردوی مشهد انتخاب می‌کنیم. چقدر احتمال دارد از هر رشته یک دانش‌آموز انتخاب شود؟ (خرداد ۱۴۰۰)

۲۹۸. در کیسه‌ای ۴ مهره سفید، ۳ مهره زرد و ۲ مهره آبی وجود دارد. ۳ مهره به تصادف از آن خارج می‌کنیم. مطلوب است احتمال اینکه رنگ سه مهره متفاوت باشد. (دی ۹۹)

۲۹۹. می‌خواهیم از جعبه‌ای شامل ۵ مهره قرمز و ۴ مهره آبی، ۳ مهره به تصادف خارج کنیم. مطلوب است محاسبه احتمال آنکه ۲ مهره آبی و ۱ مهره قرمز باشد. (دی ۱۴۰۰)





۳۰۰. انجمن اولیا و مربیان یک دبیرستان ۱۰ عضو دارد. به یک برنامه خاص، ۵ نفر رأی موافق، ۳ نفر رأی مخالف و ۲ نفر رأی ممتنع داده‌اند. از بین آن‌ها به‌طور تصادفی ۳ نفر را انتخاب می‌کنیم. مطلوب است محاسبه احتمال اینکه:

الف) حداقل دو نفر از افراد انتخابی، موافق برنامه باشند. ب) نظر هیچ دو نفری از آن‌ها مانند هم نباشد.

۳۰۱. از بین اعضای مجموعه $\{20, 21, \dots, 30\}$ دو عدد به تصادف انتخاب می‌کنیم. مطلوب است احتمال اینکه هر دو عدد، مضرب ۵ باشند.

۳۰۲. ۵ پرچم مختلف را به پنج میله پرچم نصب کرده‌ایم و روی میله‌ها شماره‌های ۱ تا ۵ را حک کرده‌ایم. چنانچه این پرچم‌ها به‌طور تصادفی کنار هم قرار بگیرند؛ مطلوب است احتمال اینکه میله پرچم‌ها با شماره‌های غیراول در مکان‌های زوج باشند. (مشابه تمرین کتاب درسی)

۳۰۳. یازده بازیکن فوتبال تیم مدرسه‌ای به‌طور تصادفی کنار یکدیگر قرار می‌گیرند تا عکس یادگاری بیندازند. چنانچه دروازه‌بان و کاپیتان تیم، دو نفر متفاوت باشند؛ مطلوب است محاسبه احتمال اینکه در عکس، دقیقاً ۳ نفر بین دروازه‌بان و کاپیتان تیم حضور داشته باشند. (مشابه تمرین کتاب درسی)

۳۰۴. در یک پارک جنگلی حفاظت‌شده ۱۲ قوچ وحشی البرز مرکزی وجود دارند. ۵ تا از آن‌ها را می‌گیرند و پس از نشان‌دار کردن رهایشان می‌کنند. بعد از مدتی محیط‌بانان به‌طور تصادفی ۷ تا از آن‌ها را می‌گیرند و می‌خواهند تعداد قوچ‌های نشان‌دار را بشمارند. مطلوب است احتمال اینکه حداکثر ۲ قوچ نشان‌دار باشند. (تمرین کتاب درسی)

۳۰۵. احتمال اینکه ریحانه امشب سریال شبکه یک سیما را تماشا نکند برابر با $\frac{32}{99}$ است. مطلوب است محاسبه احتمال اینکه ریحانه سریال را تماشا کند. (شهریور ۹۹)

۳۰۶. در خط تولید یک کارخانه از هر ۲۰۰۰ کالا، ۱۰ کالا معیوب هستند. مطلوب است محاسبه احتمال اینکه کالا سالم باشد.

۳۰۷. در بررسی تخلفات ۳۰۰۰ راننده به علت سرعت زیاد، ۱۸ مورد با خطای دید مأمور اشتباه رخ داده است. اگر راننده‌ای با اعمال این تخلف جریمه شود با چه احتمالی تخلف او واقعی است؟

۳۰۸. صفحه عقربه‌دار A به ۴ قطاع (قسمت) مساوی با شماره‌های ۱، ۲، ۳، ۴ و صفحه عقربه‌دار B به ۷ قطاع مساوی با شماره‌های ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷ تقسیم شده است. هر دو عقربه را می‌چرخانیم. با کدام احتمال، لااقل یکی از عقربه‌ها روی ناحیه‌های فرد قرار می‌گیرد؟

۳۰۹. در جعبه‌ای ۴ مداد و ۶ خودکار وجود دارد. از این جعبه به‌طور تصادفی یک شیء خارج می‌کنیم. مطلوب است محاسبه:

الف) احتمال اینکه شیء انتخابی مداد باشد.

ب) احتمال اینکه شیء انتخابی مداد نباشد.

۳۱۰. خانواده‌ای سه فرزند دارد. احتمال‌های زیر را محاسبه کنید:

الف) احتمال اینکه هر سه فرزند در روز جمعه به دنیا آمده باشند. ب) احتمال اینکه هر سه فرزند در یک روز هفته به دنیا آمده باشند.

ج) احتمال اینکه هر سه فرزند در روزهای مختلف به دنیا آمده باشند. د) احتمال اینکه حداقل دو فرزند در یک روز هفته به دنیا آمده باشند.

۳۱۱. احتمال اینکه از بین ۳ همکلاسی، حداقل تولد دو نفرشان از نظر ماه‌های تولد مثل هم باشد چقدر است؟

۳۱۲. یک تاکسی دارای ۵ سرنشین است. مطلوب است محاسبه احتمال اینکه:

الف) هر پنج نفر آن‌ها در یک ماه از سال متولد شده باشند. ب) تولد هیچ دو نفری از آن‌ها در یک ماه نباشد.

۳۱۳. سه تاس را با هم پرتاب می‌کنیم. مطلوب است احتمال اینکه هیچ‌کدام از اعداد ظاهر شده یکسان نباشند.

۳۱۴. اعداد ۱ تا ۲۰ را روی کارت‌های یکسان نوشته، سپس یک کارت را به تصادف بیرون می‌کشیم. مطلوب است محاسبه احتمال آنکه:

الف) عدد روی کارت اول باشد. ب) عدد روی کارت اول نباشد.

۳۱۵. دو تاس را با هم پرتاب می‌کنیم. با چه احتمالی، مجموع دو عدد رو شده کوچک‌تر از ۱۱ است؟

۳۱۶. اگر احتمال قبول شدن در یک امتحان سه برابر احتمال رد شدن در همان امتحان باشد، احتمال قبول شدن و رد شدن را محاسبه کنید.

۳۱۷. از کارمندان یک شرکت در مورد غذای مورد علاقه‌شان سؤال کردیم و اطلاعات

آن‌ها را در جدول مقابل وارد کرده‌ایم. یک کارمند را به‌طور تصادفی انتخاب می‌کنیم:

الف) احتمال اینکه غذای مورد علاقه او قورمه‌سبزی باشد، چقدر است؟

ب) احتمال اینکه غذای مورد علاقه او قورمه‌سبزی نباشد، چقدر است؟

نوع غذا	تعداد کارمندان علاقه‌مند
قورمه‌سبزی	۳۰
فسنجان	۳۵
چلوکباب	۴۰
چلوگوجه	۱۵

۳۱۸. از جعبه‌ای که شامل ۵ مهره آبی و ۷ مهره قرمز است، ۳ مهره را به تصادف انتخاب می‌کنیم. احتمال آن را حساب کنید که حداکثر ۲ مهره از مهره‌های انتخاب‌شده قرمز باشند.

(دی ۱۴۰۱ خارج از کشور)

۳۱۹. از جعبه‌ای که شامل ۳ مداد و ۵ خودکار است، به‌طور تصادفی ۴ شیء خارج می‌کنیم. احتمال اینکه حداقل ۳ شیء انتخابی خودکار باشد، را به دست آورید.

(شهریور ۱۴۰۲)

۳۲۰. احتمال اینکه دانش‌آموزی فردا به کتابخانه مدرسه نرود، $\frac{7}{25}$ است. چقدر احتمال دارد او فردا به کتابخانه مدرسه برود؟

(خرداد ۱۴۰۲)

۳۲۱. می‌خواهیم از بین ۵ فوتبالیست و ۴ والیبالیست یک گروه ۶ نفره به‌طور تصادفی تشکیل دهیم. مطلوب است احتمال اینکه:

الف) حداقل ۴ نفر فوتبالیست باشند. ب) به تعداد مساوی از هر دو رشته ورزشی انتخاب شوند.

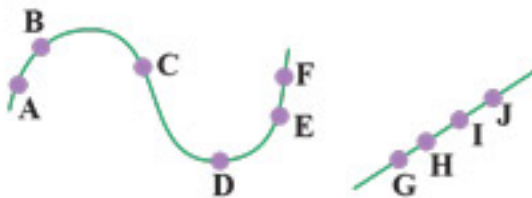




۳۲۲. در ظرفی ۱۰ گوی یکسان با شماره‌های ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸، ۹، ۱۰ قرار دارند. یک گوی به تصادف خارج کرده و شماره آن را یادداشت می‌کنیم و دوباره به ظرف برمی‌گردانیم. گوی دیگری خارج کرده، شماره آن را سمت راست رقم قبلی می‌نویسیم. با چه احتمالی عدد حاصل بزرگ‌تر از ۵۴ می‌شود؟
۳۲۳. اگر $P(A) = 0.2$ ، $P(B) = 0.3$ و $n(B) = 9$ باشد، آنگاه پیشامد A چند عضو دارد؟ (پیشامدهای A و B هر دو روی یک فضای نمونه تعریف شده‌اند).
۳۲۴. انجمن اولیا و مربیان یک دبیرستان ۱۰ عضو دارد. در یک رأی‌گیری، ۵ نفر رأی موافق، ۳ نفر رأی مخالف و ۲ نفر رأی ممتنع داده‌اند. از بین آن‌ها ۳ نفر به‌طور تصادفی انتخاب می‌شوند. احتمال اینکه نظر هیچ دو نفری از آن‌ها مانند هم نباشد، چقدر است؟ (خرداد ۹۹ خارج از کشور)

۲۰. سوالات ۲۰ ساز

۳۲۵. ۴ زوج در یک صف ایستاده‌اند. با احتمال زن و شوهرها کنار هم ایستاده‌اند.
۳۲۶. اگر B و C دو پیشامد در فضای نمونه S باشند و $B \subseteq C'$ باشد و ضمناً $P(B) = \frac{1}{4}$ ، $P(C') = \frac{1}{4}$ باشد، حاصل $P(B \cup C)$ است.
۳۲۷. با نقاط شکل‌های داده‌شده، مثلث می‌توان ساخت.



۳۲۸. از جعبه‌ای شامل ۵ مهره سفید و ۴ مهره آبی، سه مهره به‌طور متوالی و بدون جای‌گذاری برداشته می‌شود. اگر مهره اول سفید باشد، احتمال اینکه مهره سوم هم سفید باشد $\frac{1}{3}$ است.



۳۲۹. از حروف کلمه «DELASHA» به‌طور تصادفی دو حرف را حذف می‌کنیم. با احتمال $\frac{11}{21}$ ، لاقل یکی از حروف حذف‌شده A است.



۳۳۰. با ارقام ۰، ۱، ۲، ۳، ۴ عدد چهاررقمی و بدون تکرار ارقام می‌سازیم. با چه احتمالی این عدد زوج بوده و بین ۹۹۹ و ۴۴۰۰ قرار دارد؟

$\frac{5}{6}$ (۴ ☐)

$\frac{1}{3}$ (۳ ☐)

$\frac{5}{8}$ (۲ ☐)

$\frac{1}{2}$ (۱ ☐)

۳۳۱. از بین ۴ توپ سفید و ۳ توپ سیاه هم‌اندازه که درون کیسه‌ای قرار دارند، ۳ توپ به‌طور متوالی به تصادف انتخاب می‌کنیم. احتمال اینکه فقط رنگ دو توپ اول یکسان باشد، کدام است؟

$\frac{5}{7}$ (۴ ☐)

$\frac{2}{7}$ (۳ ☐)

$\frac{2}{3}$ (۲ ☐)

$\frac{5}{6}$ (۱ ☐)

۳۳۲. از میان پنج جفت کفش موجود، سه لنگه را بیرون می‌کشیم. با کدام احتمال هیچ جفتی در میان این سه لنگه وجود ندارد؟

$\frac{5}{3}$ (۴ ☐)

$\frac{4}{3}$ (۳ ☐)

$\frac{2}{3}$ (۲ ☐)

$\frac{1}{3}$ (۱ ☐)

۳۳۳. در یک امتحان کلاسی، قرار بر این است که دانش‌آموزان به ۹ سؤال از ۱۲ سؤال مطرح‌شده پاسخ دهند. اگر پاسخ به سؤالات اول و آخر اجباری باشد، به چند حالت می‌توان ۹ سؤال از میان این ۱۲ سؤال انتخاب کرد؟

۱۷۵ (۴ ☐)

۱۴۴ (۳ ☐)

۱۲۰ (۲ ☐)

۹۶ (۱ ☐)

۳۳۴. اگر A و B دو پیشامد ناسازگار در فضای نمونه S باشند، با فرض آنکه $P(A-B) = 0.2$ و $P(B-A) = 0.6$ باشد، حاصل $P(A \cup B)$ کدام است؟
۳۳۵. در پرتاب هم‌زمان دو تاس، با کدام احتمال، لاقل یکی از اعداد روشده مضرب ۳ است؟

۳۳۶. از بین سه جفت کفش با رنگ‌های متفاوت، به تصادف سه لنگه کفش انتخاب می‌کنیم. چقدر احتمال دارد این لنگه کفش‌ها جفتی را تشکیل ندهند؟
۳۳۷. هشت نفر عضو یک تیم ورزشی می‌خواهند عکس یادگاری بگیرند. اگر بخواهیم بین دو فرد خاص، دقیقاً ۳ نفر قرار بگیرند. احتمال این پیشامد چیست؟
۳۳۸. از میان ۱۰ نقطه زیر، ۴ نقطه به تصادف انتخاب می‌کنیم. احتمال اینکه با ۴ نقطه انتخاب‌شده بتوان یک چهارضلعی ساخت که هر نقطه یک رأس چهارضلعی ساخته‌شده باشد، را به دست آورید.



۳۳۹. یکی از اعداد طبیعی سه‌رقمی را به تصادف انتخاب می‌کنیم. احتمال آنکه رقم‌های یکان و صدگان این عددها با هم برابر باشند، کدام است؟
۳۴۰. اگر $A \subseteq B'$ باشد، حاصل $((A-B) \cup (B-A))'$ را به دست آورید.

۳۴۱. با ارقام ۱، ۲، ۳، ۶، ۹ عدد سه‌رقمی بدون تکرار ارقام می‌سازیم. احتمال اینکه اعداد سه‌رقمی، زوج و بزرگ‌تر از ۳۰۰ باشد، کدام است؟

۳۴۲. شش نفر به نام‌های A, B, C, D, E, F در یک صف قرار می‌گیرند. احتمال اینکه افراد A و B در ابتدا یا انتهای صف باشند، چیست؟

۳۴۳. در ظرفی ۶ گوی به شماره‌های ۱ تا ۶ داریم. دو گوی با هم انتخاب می‌کنیم. با کدام احتمال مجموع شماره‌های آن فرد است؟



۱۸۰. حتمی

۱۸۱. غیرممکن (نشدنی)

۱۸۲. درست: چون هر ۵ مهره جعبه سفید پس پیشامد خارج کردن مهره سفید، پیشامد حتمیه.

۱۸۳. درست: اعداد تاس بین ۱ تا ۶ هستن، پس پیشامد رو شدن عددی بیشتر از ۶ نشدنی.

۱۸۴. نادرست: با حل کردن معادله داریم:

$$(x+1)^2 = 0 \Rightarrow (x+1) = 0 \Rightarrow x = -1$$

پس جواب این معادله همیشه برابر با -۱ میشه و پدیده قطعی.

۱۸۵. نادرست: چون نیمی از سؤالات رو شانس جواب دادیم و هر کدوم از اون سؤالات ممکنه درست یا نادرست باشه، پس نتیجه آزمون، به طور قطعی معلوم نیست و یک پیشامد تصادفیه.

۱۸۶. نادرست: احتمال رخ دادن تهی برابر با صفره و به همین دلیل، تهی رو یک پیشامد نشدنی می نامیم.

۱۸۷. نادرست: پرتاب هر سکه ۲ حالت داره، بنابراین فضای نمونه پرتاب

$$n(S) = \underbrace{2}_{\text{سکه سوم}} \times \underbrace{2}_{\text{سکه دوم}} \times \underbrace{2}_{\text{سکه اول}} = 2^3 = 8$$

۱۸۸. نادرست: در پرتاب یک تاس آمدن عددی بیشتر از ۶ یک پیشامد غیرممکنه چون اعداد روی تاس از ۱ تا ۶ هستن و امکان نداره که عددی بزرگتر از ۶ بیاد.

۱۸۹. درست

۱۹۰. گزینه ۲: پیشامد جنسیت هر فرزند دو حالت داره (دختر یا پسر) پس فضای نمونه ترکیب جنسیت ۳ فرزند برابره با:

$$2 \times 2 \times 2 = 2^3 = 8$$

۱۹۱. گزینه ۳

• بررسی گزینه ها:

گزینه ۱: $1 \notin S \Leftarrow$ عدد ۱ عضو فضای نمونه نیست.

گزینه ۲: $1 \notin S \Leftarrow$ عدد ۱ عضو فضای نمونه نیست.

گزینه ۳: تمام اعداد این مجموعه، عضو فضای نمونه هستن.

گزینه ۴: $3 \notin S \Leftarrow$ عدد ۳ عضو فضای نمونه نیست.

حواستون باشه: در هر پیشامد از فضای نمونه، باید همه اعضای پیشامد، عضو فضای نمونه باشن.

۱۹۲. گزینه ۳: می دونیم تعداد زیرمجموعه های یک مجموعه n عضوی برابره با: 2^n در هر فضای نمونه فقط یک پیشامد حتمی وجود دارد، پس:

$$2^n - 1 = 2^3 - 1 = 2^3 - 1 = 7 = \text{تعداد پیشامدهای غیرحتمی}$$

نکته نهایی: ۱ اگر n ، تعداد اعضای S باشه، تعداد پیشامد غیرحتمی برابر است با: $2^n - 1$

۲ اگر $n(S)$ تعداد اعضای فضای نمونه باشه، تعداد پیشامدهای این فضای نمونه برابره با: $2^{n(S)}$

۱۹۳. گزینه ۲: چون سکه ها به نوعی به هم ربط پیدا کردن، نمی تونیم از ترکیب استفاده کنیم و باید تمام اعضای پیشامد رو بنویسیم، درباره دفعات اول و چهارم چیزی گفته نشده، پس می تونن هم پشت باشن و هم رو.

$$A = \{(پ, پ, پ), (پ, پ, ر), (پ, ر, پ), (پ, ر, ر), (ر, پ, پ), (ر, پ, ر), (ر, ر, پ), (ر, ر, ر)\}$$

۱۶۶. با توجه به روابط ترکیب می دونیم که $n = a + b \Rightarrow \binom{n}{a} = \binom{n}{b}$ پس

خواهیم داشت: تعداد زیرمجموعه های ۲ عضوی برابر $\binom{n}{2}$ و تعداد

زیرمجموعه های ۴ عضوی برابر $\binom{n}{4}$ است و از تساوی اون ها مقدار n رو به

$$\binom{n}{2} = \binom{n}{4} \Rightarrow n = 4 + 2 = 6$$

دست میاریم.

$$\Rightarrow \binom{n}{2} = \binom{6}{2} \Rightarrow \frac{6(6-1)(6-2)}{6} = 20$$

۱۶۷. می دونیم که:

$$P(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

روش اول:

$$\frac{P(n, r)}{P(n+1, r+1)} = \frac{\frac{n!}{(n-r)!}}{\frac{(n+1)!}{(n+1-(r+1))!}} = \frac{n!(n-r)!}{(n+1)!(n-r)!}$$

$$= \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{1}{n+1}$$

می تونیم $(n+1)!$ رو به صورت $(n+1)(n!)$ باز کنیم، پس داریم:

$$\frac{n!}{(n+1)n!} = \frac{1}{n+1}$$

روش دوم: می تونیم خودمون به n و r دو عدد طبیعی دلخواه نسبت بدیم (فقط باید r رو کوچک تر از n فرض کنیم) مثلاً با فرض $r=2$ و $n=3$ داریم:

$$\frac{P(n, r)}{P(n+1, r+1)} = \frac{P(3, 2)}{P(4, 3)} = \frac{\frac{3!}{(3-2)!}}{\frac{4!}{(4-3)!}} = \frac{3!}{4!} = \frac{1}{4}$$

حالا تو گزینه ها هم به جای r و n به ترتیب اعداد ۲ و ۳ رو قرار میدیم، فقط جواب کسر $\frac{1}{n+1}$ برابر $\frac{1}{4}$ میشه.

درس ۲

پاسخ سؤالات فصل ۱

۱۶۸. $A - B$

۱۶۹. $A \cap B = \emptyset$: دو پیشامد وقتی ناسازگارن که هیچ اشتراکی با هم نداشته باشن.

۱۷۱. $\emptyset$

۱۷۰. A

۱۷۲. ۸: می دونیم پرتاب هر سکه ۲ حالت داره (رو، پشت)، پس برای پرتاب ۳ سکه داریم:

$$n(S) = \underbrace{2}_{\text{سکه سوم}} \times \underbrace{2}_{\text{سکه دوم}} \times \underbrace{2}_{\text{سکه اول}} = 8$$

۱۷۳. ناسازگار: وقتی دو پیشامد هیچ اشتراکی نداشته باشن، با هم ناسازگارن.

۱۷۴. A'

۱۷۵. ۲۴: پرتاب هر تاس ۶ حالت و پرتاب هر سکه ۲ حالت داره، پس در کل داریم:

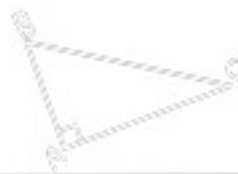
$$= \underbrace{6}_{\text{تاس}} \times \underbrace{2}_{\text{سکه دوم}} \times \underbrace{2}_{\text{سکه اول}} = 24$$

۱۷۷. برآمد

۱۷۶. ۸

۱۷۸. $A \cap B$: حرف «و» در متن سؤال، به معنای اشتراکه.

۱۷۹. $A \cap B = \emptyset$



۲۰۲. می‌دونیم که دو پیشامد در صورتی ناسازگارند که اشتراکشان $\emptyset$ باشد، پس باید اشتراک مجموعه‌هایی که ذکر شده رو بررسی کنیم: دو پیشامد A و B ناسازگارند چون هیچ اشتراکی ندارند.

دو پیشامد B و C ناسازگارند چون اشتراک آنها تهی است.

دو پیشامد A و C سازگارند، زیرا: $A \cap C = \{(د, د, د)\}$

۲۰۳. الف) پیشامد جنسیت هر فرزند دارای دو حالت دختر بودن یا پسر بودن هست، پس برای ۴ فرزند داریم: $n(S) = 2^4 = 16$

ب) فرزند سوم و چهارم باید حتماً دختر باشند اما فرزند اول و دوم می‌تونن پسر یا دختر باشند چون چیزی در مورد اون‌ها گفته نشده؛ پس داریم:

$A = \{(د, د, د, د), (د, د, د, پ), (د, د, پ, د), (د, د, پ, پ), (پ, د, د, د), (پ, د, د, پ), (پ, د, پ, د), (پ, د, پ, پ)\}$

ج) برای اینکه تعداد دخترها بیشتر از پسرها باشد دو حالت داریم، یا باید سه تا دختر و یک پسر داشته باشیم و یا باید هر چهار تا بچه دختر باشند؛ پس داریم:

$C = \{(د, د, د, د), (پ, د, د, د), (د, د, د, پ), (د, د, پ, د), (د, د, پ, پ), (پ, د, پ, د), (پ, د, پ, پ), (پ, د, پ, پ)\}$

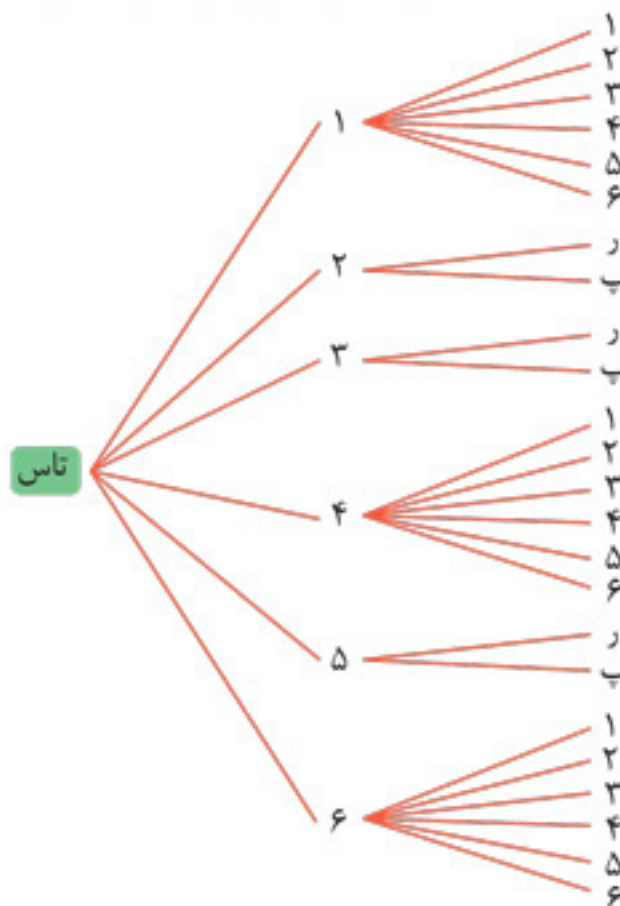
۴ تا دختر ۳ تا دختر، ۱ پسر

د) برای اینکه دو پیشامد ناسازگار باشند، باید هیچ اشتراکی نداشته باشند، پس باید $A \cap C$ رو حساب کنیم:

$A \cap C = \{(د, د, د, د), (د, د, د, پ), (د, د, پ, د), (د, د, پ, پ)\}$

پس همون طور که می‌بینیم A و C اشتراک دارن و سازگارند.

۲۰۴. نمودار درختی رو رسم می‌کنیم. می‌دونیم که اگه تاس ۲ یا ۵ بیاد، سکه و اگه ۱ یا ۴ بیاد، تاس رو پرتاب می‌کنیم؛ پس داریم:



می‌توان از روی نمودار درختی، اعضای فضای نمونه رو بنویسیم:

$S = \{(1,1), (1,2), \dots, (1,6), (2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6), (3,1), (3,2), (3,3), (3,4), (3,5), (3,6), (4,1), (4,2), \dots, (4,6), (5,1), (5,2), (5,3), (5,4), (5,5), (5,6), (6,1), (6,2), \dots, (6,6)\}$

۲۰۵. می‌دونیم که n شیء متمایز رو به n! طریق می‌تونیم کنار هم قرار بدیم، پس ۳ نفر هم به ۳! طریق یعنی به ۶ حالت می‌تونن کنار هم بشینن که این حالت‌ها برابر هستن با:

$S = \{(محمد, علی, پارسا), (پارسا, محمد, علی), (محمد, علی, پارسا), (پارسا, محمد, علی), (محمد, علی, پارسا), (پارسا, محمد, علی), (محمد, علی, پارسا), (پارسا, محمد, علی)\}$

۱۹۴. گزینه ۲: می‌دونیم مجموع دو تاس وقتی زوج که یا هر دو عدد تاس‌ها زوج یا هر دو فرد باشند، لذا: $n(A) = (3 \times 3) + (3 \times 3) = 18$

فرد فرد زوج زوج

۱۹۵. گزینه ۱: اگر A و B ناسازگار باشند با هم هیچ اشتراکی ندارند، لذا: $A \cap B = \emptyset$, $A - B = A$, $B - A = B$

ضمناً با رسم شکل میشه ثابت کرد $A \subseteq B'$ و $B \subseteq A'$.

۱۹۶. گزینه ۳: $n(S) = 2^n = 2^4 = 16$ تعداد پیشامد $\Rightarrow 6 \times 2 = 12$

در گزینه «۳» اگر ۴ رو تجزیه کنیم، خواهیم داشت: $2^{12} = 2^{2 \times 6} = (2^2)^6 = 4^6$

۱۹۷. الف) عدد روشده باید زوج باشد (یعنی از بین ۲ و ۴، ۶ انتخاب بشه). یا اینکه اول باشد (یعنی از بین ۳ و ۵، ۷ انتخاب بشه)؛ پس پیشامد مطلوب برابر میشه با اجتماع اون‌ها: $A = \{2, 4, 6\} \cup \{2, 3, 5\} = \{2, 3, 4, 5, 6\}$

(حواسمون هم هست که ۲ رو نباید دو بار بنویسیم).

ب) این بار می‌خواهیم، عدد زوج و اول باشد. حرف «و» به معنای اشتراک هست، پس داریم: $A = \{2, 4, 6\} \cap \{2, 3, 5\} = \{2\}$

ج) عبارت «عدد روشده زوج باشد ولی اول نباشد» به این معناست که از مجموعه اعداد زوج، اعداد اول را حذف کنیم؛ یعنی داریم:

$A = \{2, 4, 6\} - \{2, 3, 5\} = \{4, 6\}$

د) اعداد اول بین ۱ تا ۶ عبارت‌اند از ۲، ۳ و ۵، حالا می‌خواهیم عدد ما اول نباشه، پس اعداد اول رو از مجموعه S کنار می‌ذاریم:

$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} - \{2, 3, 5\} = \{1, 4, 6\}$

۱۹۸. $n(S) = 6 \times 2 = 12$

۱۹۹. الف) می‌خواهیم مجموع دو عدد، برابر چهار بشه. می‌دونیم که مجموع ۱ و ۳ و مجموع ۲ و ۲ مساوی چهار میشه؛ پس داریم: $A = \{(1,3), (3,1), (2,2)\}$

ب) می‌خواهیم مجموع دو عدد برابر ۱۰ باشه. می‌دونیم که اعداد روی تاس‌ها از ۱ تا ۶ هستن و بین این عددها مجموع ۵ و ۵ و مجموع ۴ و ۶ برابر ۱۰ میشه؛ پس داریم: $B = \{(5,5), (4,6), (6,4)\}$

ج) می‌خواهیم مجموع بیشتر از ۱۰ باشه، یعنی مجموع ۱۱ یا ۱۲ باشه. می‌دونیم که مجموع ۶ و ۵ برابر ۱۱ و مجموع ۶ و ۶ برابر ۱۲ میشه؛ پس داریم: $C = \{(5,6), (6,5), (6,6)\}$

د) اعداد باید با هم یکسان و زوج باشند، یعنی یا هر دو تاس ۲ بیان یا ۴ یا ۶؛ پس داریم: $D = \{(2,2), (4,4), (6,6)\}$

ه) گفته اعداد روشده یکسان باشند ولی زوج نباشن، پس باید یکسان و فرد باشند، لذا داریم: $E = \{(1,1), (3,3), (5,5)\}$

۲۰۰. الف) قطعی ب) تصادفی

۲۰۱. الف) برای اینکه همه بچه‌ها یک جنسیت داشته باشند یا باید هر سه دختر باشند یا هر سه پسر؛ پس داریم: $A = \{(د, د, د), (پ, پ, پ)\}$

ب) برای اینکه دو فرزند پسر و یک فرزند دختر باشد، سه تا حالت وجود داره، ممکنه فرزند اول دختر باشه و بقیه پسر یا فرزند وسط دختر باشه و بقیه پسر یا فرزند آخر دختر باشه و بقیه پسر؛ پس داریم:

$B = \{(د, پ, پ), (پ, د, پ), (پ, پ, د)\}$

ج) برای اینکه حداقل دو فرزند دختر باشند یا باید دو فرزند دختر باشند و یکی پسر و یا هر سه فرزند دختر باشند؛ پس داریم:

$C = \{(د, د, د), (د, د, پ), (د, پ, د), (پ, د, د), (پ, د, پ), (پ, پ, د)\}$

فرزند دختر باشند ۲ فرزند دختر باشند



۲۱۴ الف اعداد هر دو تاس باید یکسان باشند:

$$A = \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5), (6,6)\}$$

ب می‌دونیم که مجموع ۲ و ۵ همین‌طور ۴ و ۳ برابر ۷ می‌شه؛ پس داریم:

$$B = \{(2,5), (5,2), (3,4), (4,3)\}$$

ج می‌دونیم که بیشترین عددی که یک تاس می‌تونه داشته باشه ۶ هست، مجموع دو تا ۶ هم میشه ۱۲؛ پس در هیچ حالتی مجموع اعداد برآمده از دو تاس ۱۳ نمیشه و این پیشامد، یک پیشامد نشدنیه. $C = \emptyset$

د می‌دونیم که بیشترین عددی که تاس می‌تونه داشته باشه ۶ هست، بنابراین حاصل ضرب اعداد برآمده از دو تاس، همیشه از ۳۷ کمتره و این پیشامد یک پیشامد حتمیه:

$$D = \{(1,1), (1,2), \dots, (1,6), (2,1), (2,2), \dots, (2,6), (3,1), (3,2), \dots, (3,6), (4,1), (4,2), \dots, (4,6), (5,1), (5,2), \dots, (5,6), (6,1), (6,2), \dots, (6,6)\}$$

۲۱۵ هر سه پیشامد A، B و C رخ دادن، چون همه آن‌ها، شامل عضو ۲ هستن.

۲۱۶ الف تمام اعداد دورقمی که میشه با ارقام داده شده نوشت به صورت زیره:

$$S = \{11, 12, 13, 14, 21, 22, 23, 24, 31, 32, 33, 34, 41, 42, 43, 44\}$$

پس فضای نمونه دارای ۱۶ عضو است، یعنی: $n(S) = 16$

ب برای اینکه عدد روی کارت مضرب ۶ باشه، باید هم زوج و هم بر ۳ بخش پذیر باشه؛ پس داریم:

$$A = \{12, 24, 42\}$$

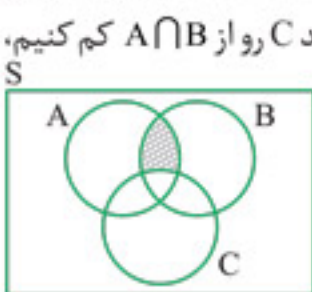
ج عددی اوله که فقط بر خودش و یک، بخش پذیر باشه، پس:

$$B = \{11, 13, 23, 31, 41, 43\}$$



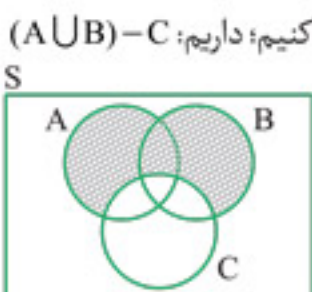
۲۱۷ پیشامد A یا B رخ دهد یعنی پیشامد $A \cup B$ رخ بده؛ پس کافیه $A \cup B$ رو روی شکل سایه بزنیم:

۲۱۸ الف رخ دادن پیشامد A و B یعنی پیشامد $A \cap B$ رخ بده ولی گفته شده پیشامد C رخ نده پس باید پیشامد C رو از $A \cap B$ کم کنیم،



یعنی داریم $(A \cap B) - C$ ؛ پس اول $A \cap B$ رو روی شکل در نظر می‌گیریم، سپس قسمت‌هایی از آن که با C مشترک هست رو حذف می‌کنیم:

ب رخ دادن پیشامد A یا B یعنی پیشامد $A \cup B$ رخ بده ولی پیشامد C نباید رخ بده یعنی باید پیشامد C رو از $A \cup B$ کم کنیم؛ داریم:



پس اول $A \cup B$ رو روی شکل در نظر می‌گیریم و بعد قسمت‌هایی از اون که با C مشترک هست رو حذف می‌کنیم:

۲۱۹ الف عبارت توصیفی: «پیشامدهای A، B و C با هم رخ دهند»

عبارت مجموعه‌ای: $A \cap B \cap C$

ب عبارت توصیفی: «پیشامدهای A یا B یا C یا حداقل یکی از آن‌ها رخ دهند»

عبارت مجموعه‌ای: $A \cup B \cup C$

۲۰۶ باید ۳ مهره رو از بین تمام مهره‌های قرمز، آبی و سبز انتخاب کنیم؛ از طرفی ترتیب یا جابه‌جایی مهره‌ها مهم نیست پس از ترکیب استفاده می‌کنیم:

$$\binom{3+4+4}{3} = \binom{11}{3} = \frac{11!}{3!(11-3)!} = \frac{11!}{3! \times 8!} = \frac{11 \times 10 \times 9 \times 8!}{3 \times 2 \times 1 \times 8!} = 165$$

۲۰۷ برای نوشتن فضای نمونه، نمودار

درختی رو رسم می‌کنیم و از روی این نمودار، فضای نمونه رو می‌نویسیم.



$$\text{الف } S = \{(R,1), (R,2), (R,3), (R,4), (R,5), (R,6), (P,R), (P,P)\}$$

$$\text{ب } A = \{(R,2), (R,4), (R,6), (P,R), (P,P)\}$$

عدد ظاهر شده روی تاس زوج باشد سکه پشت بیاید

۲۰۸ باید از هر پایه، یک نفر رو انتخاب کنیم، ترتیب هم مهم نیست، پس از ترکیب استفاده می‌کنیم:

$$n(A) = \binom{5}{1} \times \binom{6}{1} \times \binom{4}{1} = 5 \times 6 \times 4 = 120$$

۲۰۹ الف فضای نمونه این آزمایش شامل تمام اعداد طبیعی کمتر از ۲۰ است:

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots, 18, 19, 20\}$$

ب باید اعدادی از S که مضرب ۳ هستن رو انتخاب کنیم:

$$A = \{3, 6, 9, 12, 15, 18\}$$

ج به عددی مربع کامل می‌گیم که جذر کامل داشته باشه، لذا خواهیم داشت:

$$B = \{1, 4, 9, 16\}$$

د دو مجموعه A و B فقط در عضو ۹ مشترک هستن: $A \cap B = \{9\}$

برای محاسبه $A - B$ باید از مجموعه A، مجموعه $A \cap B$ رو حذف کنیم،

یعنی عدد ۹ رو از مجموعه A حذف می‌کنیم: $A - B = \{3, 6, 12, 15, 18\}$

۲۱۰ الف خیر، چون مجموعه {خودکار، مداد} فقط ۲ عضو (برآمد) داره. در صورتی که در واقعیت ۸ مداد و خودکار داریم.

ب ما ۳ مداد و ۵ خودکار متمایز داریم. اگه مدادها رو با «م» و خودکارها رو با «خ» نشون بدیم، با شماره‌گذاری اون‌ها، فضای نمونه به دست میاد:

$$S = \{1م, 2م, 3م, 1خ, 2خ, 3خ, 4خ, 5خ\}$$

۲۱۱ به هر یک از زیرمجموعه‌های فضای نمونه S یک پیشامد گفته میشه و چون $S = \{R, P\}$ ، همه پیشامدهای ممکن عبارت‌اند از:

$$\{\}, \{R\}, \{P\}, \{R, P\}$$

$$S = \{\text{سوگند, ملیکا, مریم}\}$$

همه زیرمجموعه‌های یک عضو عبارت‌اند از: $\{\text{سوگند}\}, \{\text{ملیکا}\}, \{\text{مریم}\}$

ب در واقع باید زیرمجموعه‌های دو عضوی مجموعه S را بنویسیم که برابرند با: $\{\text{سوگند, مریم}\}, \{\text{سوگند, ملیکا}\}, \{\text{ملیکا, مریم}\}$

$$\text{الف } A = \{(P, P, P), (D, D, D)\}$$

$$\text{ب } B = \{(P, P, D), (P, D, P), (D, P, P), (P, P, P)\}$$





اعداد زوج: ۲, ۴, ۶, ۸

اعداد فرد: ۱, ۳, ۵, ۷, ۹

$$\binom{4}{3} \binom{5}{2} = 4 \times 10 = 40 \Rightarrow 40 + 5 = 45$$

$$\binom{4}{4} \binom{5}{1} = 1 \times 5 = 5$$

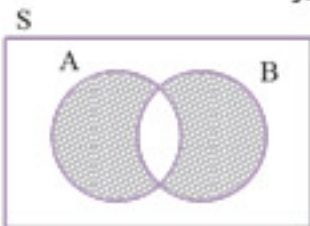
۲۳۰. گفتیم که در آزمون‌های چندگزینه‌ای هم، می‌تونیم $n(A)$ رو از ترکیب به دست بیاریم، پس داریم:

$$n(A) = \binom{20}{18} = \frac{20!}{2!18!} = \frac{20 \times 19 \times 18!}{2 \times 18!} = 190$$

$$n(S) = 6 \times 2 \times 2 = 24 \Rightarrow \text{تعداد پیشامدها} = 2^n(S) = 2^{24} \quad 231$$

۲۳۲. گزینه ۱: می‌دونیم پدیده تصادفی، پدیده‌ای که وقوع نتیجه قطعی اون، قابل پیش‌بینی نیست. گزینه‌های «۲»، «۳» و «۴» از قبل قابل پیش‌بینی نیستن و ما از چگونگی وقوع اون‌ها اطلاعی نداریم. اما جنسیت دانش‌آموزان در مدرسه دخترانه فقط یک حالت داره و اون هم دختره، بنابراین یک پیشامد قطعی خواهد بود.

۲۳۳. گزینه ۲: این نمودار نشون میده که A رخ داده اما هیچ‌کدوم از پیشامدهای B یا C رخ ندادن. پس باید $B \cup C$ رو از A کم کنیم. در این صورت گزینه «۲» بیانگر این نمودار خواهد بود.



۲۳۴. گزینه ۳: یک نمودار ون ترسیم می‌کنیم و مجموعه $(A - B) \cup (B - A)$ رو هاشور می‌زنیم.

چنانچه می‌بینیم متمم این مجموعه متشکل از دو قسمته. یکی $A \cap B$ و دیگری فضای خارج از $(A \cup B)$ یعنی $(A \cup B)'$ از آنجا که طبق فرض سؤال، این مجموعه فقط شامل $(A \cap B)$ است، یعنی $(A \cup B)'$ برابر تهی بوده و S در واقع همون $(A \cup B)$ است.

۲۳۵. گزینه ۱: اگر شرطی در کار نباشه، ۴ انتخاب از میان ۷ شیء داریم اما ۸ باید باشه پس یک انتخاب از ۴ انتخاب ما حذف میشه. پس باید ۳ عضو رو از مجموعه ۶ عضوی باقی‌مونده انتخاب کنیم. از طرفی ۴ هم نباید انتخاب بشه. می‌مونه مجموعه $\{0, 1, 2, 6, 9\}$. در نتیجه ۳ انتخاب از ۵ شیء داریم:

$$\binom{5}{3} = 10$$

۲۳۶. گزینه ۴: زوج مرتب $(3, 3)$ در تمام پیشامدهای A ، B و C دیده میشه، پس همه اون‌ها رخ دادن.

۲۳۷. گزینه ۴: رسم تک‌تک گزینه‌ها واقعاً کاری طولانی و خسته‌کننده است. پس از فرمول‌های مجموعه‌ها (پیشامدها) استفاده می‌کنیم، چون گفته شده کدام گزینه نادرست است، پس ۳ تا از گزینه‌ها درست هستن و در واقع باید دنبال گزینه‌ای بگردیم که با بقیه فرق داشته باشه.

بررسی گزینه‌ها:

$$(A - B) \cup (A - C) = (A \cap B') \cup (A \cap C') = A \cap (B' \cup C') \quad \text{گزینه ۱:}$$

$$A \cap (B \cap C)' = A \cap (B' \cup C') \quad \text{گزینه ۲:}$$

$$A - (B \cap C) = A \cap (B \cap C)' = A \cap (B' \cup C') \quad \text{گزینه ۳:}$$

$$A - (B \cup C) = A \cap (B \cup C)' = A \cap (B' \cap C') \quad \text{گزینه ۴:}$$

$$n(S) = 2 \times 6 = 12 \quad \text{الف} \quad A = \{(r, 2), (r, 4), (r, 6)\} \quad 220$$

۲۲۱. الف: می‌خواهیم ۳ دانش‌آموز از ۳ پایه مختلف باشن؛ یعنی ۱ دانش‌آموز از بین ۵ دانش‌آموز سال دهم، ۱ دانش‌آموز از بین ۶ دانش‌آموز سال یازدهم و ۱ دانش‌آموز از بین ۴ دانش‌آموز سال دوازدهم انتخاب بشه. با استفاده از اصل ضرب داریم:

$$n(A) = \binom{5}{1} \times \binom{6}{1} \times \binom{4}{1} = 5 \times 6 \times 4 = 120$$

ب: برای اینکه حداقل ۲ دانش‌آموز از پایه یازدهم باشن؛ یا باید ۲ دانش‌آموز از پایه یازدهم، ۱ دانش‌آموز از بین پایه‌های دهم و دوازدهم انتخاب بشن یا هر ۳ دانش‌آموز از پایه یازدهم انتخاب بشن، در واقع تعداد عضوهای این دو حالت باید با هم جمع بشن، پس داریم:

$$n(B) = \binom{6}{2} \binom{5+4}{1} + \binom{6}{3}$$

۳ دانش‌آموز پایه یازدهم ۲ دانش‌آموز پایه دهم

$$\Rightarrow n(B) = \frac{6!}{2!(6-2)!} \times 9 + \frac{6!}{3!(6-3)!}$$

$$\Rightarrow n(B) = \frac{6 \times 5 \times 4!}{2 \times 1 \times 4!} \times 9 + \frac{6 \times 5 \times 4 \times 3!}{3 \times 2 \times 1 \times 3!} = 15 \times 9 + 20 = 155$$

۲۲۲. الف: قبل از پرتاب سکه، نمی‌دونیم دقیقاً ۱ میاد یا ۲ پس با پدیده‌ای تصادفی مواجهیم.

ب: این پدیده هم تصادفیه، چون نمی‌دونیم اسم کدوم دانش‌آموز خارج میشه.

$$A = \{(5, 6), (6, 5), (6, 6)\}$$

ب: تهی؛ در بیشترین حالت مجموع اعداد رو شده برابره با: $6 + 6 = 12$

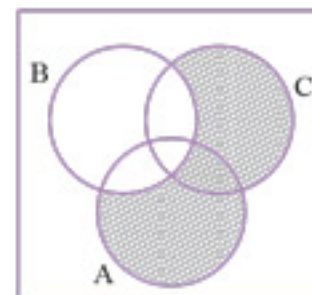
$$\text{الف} \quad A = \{(d, d), (p, p), (d, p), (p, d)\}$$

$$\text{ب} \quad B = \{(d, d), (p, p)\}$$

$$A = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6)\}$$

$$B = \{(2, 6), (6, 2), (3, 5), (5, 3), (4, 4)\}$$

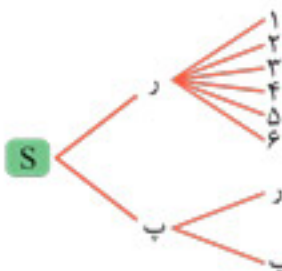
ب: خیر، زیرا عضو مشترک $(4, 4)$ رو دارن.



۲۲۷. ۱۶؛ برای اینکه تعداد پسرها بیشتر باشه، تعدادشان باید ۴، ۳ یا ۵ تا باشه و از ترکیب استفاده می‌کنیم.

$$n(A) = \binom{5}{3} + \binom{5}{4} + \binom{5}{5} = 10 + 5 + 1 = 16$$

۲۲۸. ۴؛ بهتره از نمودار درختی استفاده کنیم.



$$A = \{(r, 2), (r, 4), (r, 6), (p, p)\}$$

سکه‌ها متفاوت تاس زوج بیاید



۲۵۰. درست

$$n(S) = 6 \times 6 = 36$$

$$n(A) = \{(1,1), (2,3), (3,3), (4,4), (5,5), (6,6)\}$$

$$P(A) = \frac{6}{36}$$

حواستون باشه: هرگاه n تاس رو پرتاب کنیم یا یک تاس رو n مرتبه پرتاب کنیم، فضای نمونه اون برابر با:

$$n(S) = 6^n$$

$$n(S) = 6 \times 6 \times 2 = 72$$

۲۵۲. نادرست

نکته نهایی: هرگاه n تاس و k سکه رو پرتاب کنیم، فضای نمونه اون برابر با:

$$n(S) = 2^k \times 6^n$$

۲۵۳. نادرست

$$\begin{cases} n(A) = \binom{4}{2} = \frac{4 \times 3 \times 2!}{2! \times 2 \times 1} = 6 \\ n(S) = \binom{7}{2} = \frac{7 \times 6 \times 5!}{2! \times 5!} = 21 \end{cases} \Rightarrow P(A) = \frac{6}{21}$$

$$P(A') = 1 - P(A) = 1 - \frac{3}{8} = \frac{5}{8}$$

۲۵۴. درست

۲۵۵. نادرست: خانواده دارای ۲ فرزند، پس فضای نمونه اش ۴ حالت داره.

$$n(S) = \{(د, د), (د, پ), (پ, د), (پ, پ)\}$$

احتمال اینکه هر دو دختر باشه $\frac{1}{4}$ است.

$$A \Rightarrow P(A \cap B) = 0$$

۲۵۶. نادرست

$$\frac{1}{4} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \left(\frac{1}{4}\right)^3$$

۲۵۷. درست

۲۵۸. درست: در پیشامد ناممکن یا نشدنی داریم:

$$A \subseteq B \Rightarrow n(A) \leq n(B) \xrightarrow{\text{تقسیم بر } n(S)} \frac{n(A)}{n(S)} \leq \frac{n(B)}{n(S)}$$

۲۵۹. درست

$$\Rightarrow P(A) \leq P(B)$$

۲۶۰. گزینه ۱: می‌دونیم که پیشامد نشدنی هیچ عضوی نداره، در واقع پیشامد نشدنی، همون پیشامد $\emptyset$ است، لذا داریم:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} \Rightarrow P(\emptyset) = \frac{n(\emptyset)}{n(S)} = \frac{0}{n(S)} = 0$$

۲۶۱. گزینه ۲: می‌دونیم که $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$ و $P(B) = \frac{n(B)}{n(S)}$ پیشامد نشدنی، یعنی:

$$A = \emptyset \Rightarrow n(A) = n(\emptyset) = 0$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{0}{n(S)} = 0$$

پس داریم:

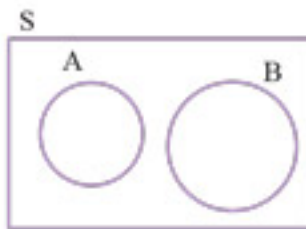
$$B = S \Rightarrow n(B) = n(S)$$

پیشامد B هم حتمیه، یعنی:

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{n(S)}{n(S)} = 1$$

پس داریم:

کلاً وقتی پیشامدی نشدنی یعنی هیچ وقت اتفاق نمی‌افته، پس احتمال رخ دادنش صفره و وقتی پیشامدی حتمیه یعنی حتماً اتفاق می‌افته و احتمال رخ دادنش هم میشه ۱.

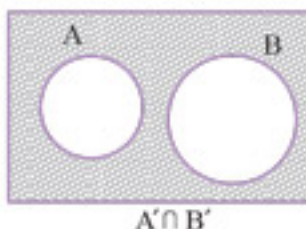


۲۳۸. از فرض $B \subseteq A'$ نتیجه می‌گیریم که A و B دو پیشامد ناسازگار هستن، پس هیچ اشتراکی با هم ندارن. یعنی داریم:

$$\begin{cases} A \cap B' = A \\ B \cap A' = B \end{cases} \Rightarrow [(A \cap B') - (B \cap A')] = (A - B) = A'$$

نکته نهایی: توجه کنیم که وقتی A و B هیچ اشتراکی با هم ندارن می‌توان نتیجه گرفت که $A - B = A$ پس $A - B = A'$ پس $(A - B)' = A'$.

۲۳۹. $A \subseteq B'$ پس A و B اشتراکی ندارن.



$$\begin{aligned} & \Rightarrow [(A - B) \cup (B - A)]' \\ & = (A \cup B)' = A' \cap B' \end{aligned}$$

$$n(S) = 2^k \times 6^n \xrightarrow{n(S)=48} 2^k \times 6^n = 48 \xrightarrow{\text{تجزیه می‌کنیم}} 48 = 2^3 \times 6$$

$$2^k \times 6^n = 2^3 \times 6^1 \xrightarrow{\text{مقایسه می‌کنیم دو طرف}} \begin{cases} k=3 \\ n=1 \end{cases} \Rightarrow \frac{k}{n} = \frac{3}{1} = 3$$

۲۴۱. صفر. ۱: طبق تعریف احتمال، مقدار احتمال همواره عددی بین صفر و یک.

۲۴۲. $\frac{30}{36}$: در پرتاب دو تاس تعداد اعضای فضای نمونه برابر با:

$$6 \times 6 = 36$$

A : پیشامد آمدن عددهای مساوی

$$A = \{(1,1), (2,2), \dots, (6,6)\} \Rightarrow n(A) = 6$$

$$P(A) = \frac{6}{36}$$

A' : پیشامد آمدن عددهای غیرمساوی

$$\Rightarrow P(A') = 1 - \frac{6}{36} = \frac{30}{36}$$

۲۴۳. $\frac{1}{4}$: پیشامد اینکه سکه رو و تاس عددی اول باشه رو می‌نویسیم:

$$A = \{(1,2), (1,3), (1,5)\} \Rightarrow n(A) = 3$$

$$n(S) = 2 \times 6 = 12$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$$

۲۴۴. صفر: احتمال رخ دادن پیشامد تهی برابر صفره.

$$P(A') = 1 - P(A) = 1 - \frac{2}{9} = \frac{7}{9}$$

$$\frac{7}{9}$$

۲۴۶. صفر: در تاس تا عدد ۶ رو داریم و آمدن ۷ یک پیشامد غیرممکنه و احتمال اون صفره.

$$\frac{1}{12} \times \frac{11}{12} \times \frac{1}{12} = \frac{11}{1728}$$

$$\frac{11}{1728}$$

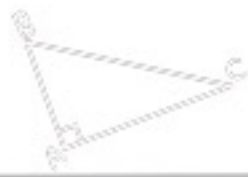
$$n(S) = 2^3 = 8$$

$$\frac{2}{8}$$

$$A = \{(پ, پ, پ), (د, د, د)\} \Rightarrow n(A) = 2 \Rightarrow P(A) = \frac{2}{8}$$

۲۴۹. $\left(\frac{1}{12}\right)^4$: نفر اول در هر ماهی باشه، بقیه هم باید در همون ماه باشن.

$$\frac{1}{12} \times \frac{1}{12} \times \frac{1}{12} \times \frac{1}{12} = \left(\frac{1}{12}\right)^4$$



۲۶۹. گزینه ۱: ابتدا تمام اعداد ۳ رقمی بدون تکرار رو می‌سازیم.

$$n(S) = 6 \times 5 \times 4 = 120$$

حالا اعداد ۳ رقمی زوج بدون تکرار رو می‌سازیم. یکان باید ۲ یا ۴ یا ۶ باشد.

$$n(A) = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 5 & 4 & 3 \\ \hline 1 & & \\ \hline 2 & & 4 \\ \hline 4 & & 2 \\ \hline 5 & & \\ \hline 6 & & \\ \hline \end{array} = 60 \quad P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{60}{120} = \frac{1}{2}$$

$$n(S) = 6^2 = 36$$

$$A = \{(\Delta, \Delta), (\Delta, \square), (\square, \Delta), (\square, \square), (\Delta, \circ), (\square, \circ), (\circ, \Delta), (\circ, \square)\}$$

$$\Rightarrow n(A) = 6 \Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

$$n(S) = \binom{9}{3} = \frac{9!}{(9-3)!3!} = \frac{9 \times 8 \times 7 \times 6!}{6! \times 6} = 84$$

$$n(A) = \binom{4}{2} \times \binom{5}{1} = \frac{4!}{(4-2)!2!} \times \frac{5!}{(5-1)!1!} = 6 \times 5 = 30$$

$$\Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{30}{84} = \frac{15}{42} = \frac{5}{14}$$

$$n(S) = \binom{7}{2} = \frac{7!}{2! \times 5!} = \frac{7 \times 6 \times 5!}{2 \times 5!} = 21$$

$$n(A) = \binom{4}{2} = 6 \Rightarrow P(A) = \frac{6}{21} = \frac{2}{7}$$

۲۷۳. اول تعداد اعضای فضای نمونه رو به دست میاریم. ۱۰ کارت با

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\} \Rightarrow n(S) = 10$$

شماره‌های ۱ تا ۱۰ داریم، لذا: حالا از بین اعضای S مضرب‌های ۳ رو انتخاب می‌کنیم:

$$A = \{3, 6, 9\} \Rightarrow n(A) = 3$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} \Rightarrow P(A) = \frac{3}{10}$$

۲۷۴. ابتدا فضای نمونه رو می‌نویسیم و تعداد اعضای اون رو به دست میاریم:

$$S = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15\} \Rightarrow n(S) = 8$$

حالا مضرب‌های ۳ رو از مجموعه S انتخاب می‌کنیم:

$$A = \{3, 9, 15\} \Rightarrow n(A) = 3$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{3}{8}$$

۲۷۵

نکته: برای محاسبه اعداد طبیعی متوالی که از عدد ۱ شروع نمیشن، میشه از فرمول مقابل استفاده کرد:

$$n(S) = (\text{اولین عدد}) - (\text{آخرین عدد}) + 1$$

اول باید n(S) رو پیدا کنیم که طبق نکته بالا داریم:

$$\Rightarrow n(S) = 60 - 20 + 1 = 41$$

حالا پیشامد اینکه عدد روی کارت، مضرب ۵ باشد رو می‌نویسیم:

$$A = \{20, 25, 30, 35, 40, 45, 50, 55, 60\} \Rightarrow n(A) = 9$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{9}{41}$$

۲۶۲. گزینه ۱: اول باید n(S) رو مشخص کنیم. می‌دونیم که پرتاب هر سکه ۲

حالت و پرتاب هر تاس ۶ حالت داره، پس می‌توان گفت: $n(S) = 2 \times 6 = 12$

می‌خوایم سکه پشت بیاید اما در مورد تاس حرفی زده نشده، پس تاس هر عددی می‌تونه داشته باشه، حالا پیشامد مطلوب رو می‌نویسیم:

$$A = \{(پ, ۱), (پ, ۲), (پ, ۳), (پ, ۴), (پ, ۵), (پ, ۶)\} \Rightarrow n(A) = 6$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$$

۲۶۳. گزینه ۴

$$P(A') = 1 - P(A)$$

احتمال بارانی بودن: A

$$\Rightarrow P(A') = 1 - 0.1 = 0.9$$

احتمال بارانی نبودن: A'

۲۶۴. گزینه ۴: در پرتاب دو تاس، فضای نمونه برابر $n(S) = 6^2 = 36$

است. پیشامد اینکه مجموع اعداد روشده در دو تاس کمتر از ۷ باشد رو می‌نویسیم تا n(A) به دست بیاد.

$$A = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (4, 1), (4, 2), (5, 1)\}$$

$$\Rightarrow n(A) = 15 \Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{15}{36} = \frac{5}{12}$$

راهنمایی: برای راحت حساب کردن n(A)، جدولی طراحی کردیم که

از آن برای مجموع اعداد دو تاس استفاده می‌کنیم.

مجموع دو تاس	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲
n(A)	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۵	۴	۳	۲	۱

۲۶۵. گزینه ۳: تاس اول ۳ حالت برای رو شدن عدد فرد داره (۱, ۳, ۵) و

تاس دوم نیز ۳ حالت برای رو شدن عدد فرد داره (۱, ۳, ۵) سپس طبق اصل ضرب، حالات ممکن رو در هم ضرب می‌کنیم تا n(A) به دست بیاد.

$$n(A) = 3 \times 3 = 9$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$$

۲۶۶. گزینه ۳: تعداد عضوهای فضای نمونه این ۳ تاس به صورت زیره:

$$n(S) = 6^3 = 216$$

$$n(A) = 6 \times 5 \times 4 = 120 \Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{120}{216} = \frac{5}{9}$$

$$n(S) = 4^3 = 64$$

۲۶۷. گزینه ۴

$$n(A) = 4 \times 3 \times 2 = 24 \Rightarrow P(A) = \frac{24}{64} = \frac{3}{8}$$

۲۶۸. گزینه ۱: A و B ناسازگارن، پس خواهیم داشت:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) \xrightarrow{P(A) = \frac{2}{5} P(B)} \frac{7}{10} = \frac{2}{5} P(B) + P(B)$$

$$\xrightarrow{\text{ضرب جملات در } 10} 7 = 4P(B) + 10P(B) \Rightarrow 7 = 14P(B)$$

$$\Rightarrow P(B) = \frac{7}{14} = \frac{1}{2} \Rightarrow P(A) = \frac{2}{5} P(B) = \frac{2}{5} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{5}$$

یادآوری: هرگاه دو پیشامد ناسازگار باشن، آنگاه: $P(A \cap B) = 0$



۲۷۶. اول میریم سراغ محاسبه $n(S)$. برای هر تاس ۶ حالت داریم، لذا:

$$n(S) = 6^2 = 36$$

الف) برای اینکه مجموع اعداد ظاهر شده برابر با ۱۰ باشد یا باید هر دو تاس ۵ باشن و یا یکی ۴ و اون یکی ۶؛ پس پیشامد A برابر میشه با:

$$A = \{(5,5), (4,6), (6,4)\} \Rightarrow n(A) = 3$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$$

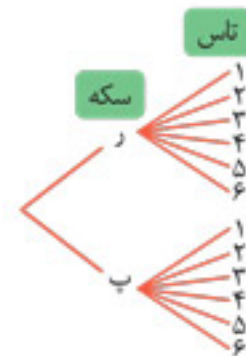
ب) می‌دونیم که بین ۱ تا ۶ دو عدد ۳ و ۶ بر ۳ بخش پذیرن، پس اعداد رو شده باید ۳ یا ۶ باشن و پیشامد خواسته شده برابر میشه با:

$$B = \{(3,3), (3,6), (6,3), (6,6)\} \Rightarrow n(B) = 4$$

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$$

۲۷۷. الف) برای به دست آوردن فضای نمونه،

نمودار درختی رو رسم می‌کنیم. (البته در امتحان نهایی، رسم نمودار درختی، الزامی نیست.)



از روی نمودار درختی فضای نمونه رو می‌نویسیم:

$$S = \{(1,1), (1,2), \dots, (1,6), (2,1), (2,2), \dots, (2,6)\}$$

ب) با توجه به S اعضای مطلوب رو انتخاب می‌کنیم:

$$A = \{(1,1), (1,3), (1,5)\}$$

ج) پرتاب سکه ۲ حالت و پرتاب تاس ۶ حالت داره؛ پس داریم:

$$n(S) = 2 \times 6 = 12$$

حالا باید پیشامد اینکه سکه پشت و تاس زوج بیاد رو بنویسیم. ما به دلخواه این پیشامد رو B می‌نامیم، $n(B)$ رو حساب کنیم:

$$B = \{(1,2), (1,4), (1,6)\} \Rightarrow n(B) = 3$$

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$$

د) عدد تاس باید ۱ یا ۲ یا ۳ باشه. برای سکه هم محدودیتی نداریم؛ پس داریم:

$$C = \{(1,1), (1,2), (1,3), (2,1), (2,2), (2,3)\} \Rightarrow n(C) = 6$$

$n(S)$ رو هم که قبلاً به دست آوردیم؛ پس:

$$\begin{cases} n(C) = 6 \\ n(S) = 12 \end{cases} \Rightarrow P(C) = \frac{n(C)}{n(S)} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$$

ه) گفته شده تاس حداکثر ۳ بیاد (یعنی تاس ۱ یا ۲ یا ۳ باشه و برای سکه محدودیتی نداشته باشیم) یا سکه رو بیاد و برای تاس محدودیتی نداشته باشیم؛ پس هر دو حالت رو می‌نویسیم:

$$D = \{(1,1), (1,2), (1,3), (2,1), (2,2), (2,3),$$

تاس حداکثر ۳ بیاد

$$(3,1), (3,2), (3,3), (4,1), (4,2), (4,3), (5,1), (5,2), (5,3), (6,1), (6,2), (6,3)\}$$

سکه رو بیاد

ولی در مجموعه D بعضی از اعضا تکراری هستن، یعنی $(1,3)$ ، $(2,3)$ و $(3,3)$ دو بار اومدن که باید یک بار نوشته بشن:

$$D = \{(1,1), (1,2), (1,3), (2,1), (2,2), (2,3), (3,1), (3,2), (3,3), (4,1), (4,2), (4,3), (5,1), (5,2), (5,3), (6,1), (6,2), (6,3)\}$$

$$\Rightarrow n(D) = 9$$

$$P(D) = \frac{n(D)}{n(S)} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$$

و) گفته شده تاس زوج بیاد (یعنی تاس ۲ یا ۴ یا ۶ بیاد و برای سکه محدودیت نداشته باشیم) یا سکه پشت بیاد و برای تاس محدودیتی نداشته باشیم؛ پس هر دو حالت رو می‌نویسیم:

$$E = \{(2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6), (4,1), (4,2), (4,3), (4,4), (4,5), (4,6), (6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6)\}$$

تاس زوج

$$(1,2), (1,4), (1,6), (3,2), (3,4), (3,6), (5,2), (5,4), (5,6)\}$$

سکه پشت

ولی همون طور که می‌بینیم در مجموعه بالا زوج‌های $(2,2)$ ، $(4,4)$ و $(6,6)$ دو بار تکرار شدن که باید یکی از این تکرارها حذف بشه و داریم:

$$E = \{(2,1), (2,3), (2,5), (2,6), (4,1), (4,3), (4,5), (4,6), (6,1), (6,3), (6,5), (6,6)\} \Rightarrow n(E) = 9$$

$$P(E) = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$$

۲۷۸. برای محاسبه احتمال، اول باید $n(S)$ رو پیدا کنیم.

$$n(S) = 6 \times 6 = 36$$

پرتاب هر تاس ۶ حالت داره؛ پس:

الف) می‌خواهیم تاس قرمز ۲ باشه و در مورد تاس زرد هم حرفی نزده؛ پس تاس زرد هر عددی می‌تونه داشته باشه و محدودیتی نداره:

تاس زرد تاس قرمز

$$A = \{(1,2), (2,2), (3,2), (4,2), (5,2), (6,2)\} \Rightarrow n(A) = 6$$

$$\Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

ب) می‌خواهیم تاس زرد ۲ و تاس قرمز یکی از عددهای ۲ یا ۴ یا ۶ باشه؛ پس داریم:

تاس زرد تاس قرمز

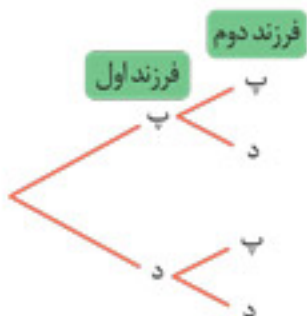
$$B = \{(2,2), (4,2), (6,2)\} \Rightarrow n(B) = 3$$

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$$

۲۷۹. الف) برای به دست آوردن فضای

نمونه، نمودار درختی رو رسم می‌کنیم.

از روی نمودار درختی داریم:



$$S = \{(1,1), (1,2), (1,3), (2,1), (2,2), (2,3), (3,1), (3,2), (3,3)\}$$

$$\Rightarrow n(S) = 4$$

ب) اینکه هر دو فرزند از یک جنس باشن یعنی یا هر دو دختر یا هر دو

$$A = \{(1,1), (2,2), (3,3)\} \Rightarrow n(A) = 3$$

پسر باشن:

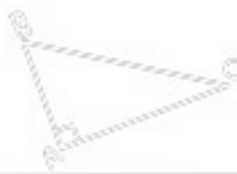
$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{3}{4} = \frac{3}{4}$$

$$B = \{(1,1)\} \Rightarrow n(B) = 1 \Rightarrow P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{1}{4}$$

ج)

د) برای اینکه حداکثر یک فرزند پسر باشه یا باید هر دو فرزند دختر باشن یا یکی پسر و یکی دختر؛ پس داریم:

$$C = \{(1,2), (2,1), (2,3), (3,2)\} \Rightarrow n(C) = 4 \Rightarrow P(C) = \frac{n(C)}{n(S)} = \frac{4}{4} = 1$$



ب اعداد ۲، ۳، ۵ و ۷ در این مجموعه اول و اعداد ۱، ۳، ۵ و ۷ در این مجموعه فرد هستند؛ پس داریم:

$$B = \{\underbrace{۲, ۳, ۵, ۷}_{\text{اول}}, \underbrace{۱, ۳, ۵, ۷}_{\text{فرد}}\} = \{۱, ۲, ۳, ۵, ۷\} \Rightarrow n(B) = ۵$$

$$\Rightarrow P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{۵}{۸}$$

ج اعداد ۳ و ۶ در این مجموعه مضرب ۳ هستند؛ پس داریم:

$$C = \{۳, ۶\} \Rightarrow n(C) = ۲ \Rightarrow P(C) = \frac{n(C)}{n(S)} = \frac{۲}{۸} = \frac{۱}{۴}$$

۲۸۶ اگر یک بار عقربه رو بچرخانیم، احتمال ایستادن روی رنگ قرمز برابر با:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{۳}{۸}$$

حالا چون عقربه رو ۱۲۰۰ بار می چرخانیم، کافیه ۱۲۰۰ رو در این احتمال ضرب کنیم:

$$\text{احتمال کل} = \left(\frac{۳}{۸}\right) \times ۱۲۰۰ = ۴۵۰$$

۲۸۷ اول $n(S)$ رو به دست میاریم. برای این کار باید تعداد کل افراد رو با هم جمع کنیم.

$$n(S) = ۲۴ + ۲۶ + ۳۳ + ۳۷ + ۲۳ + ۲۰ + ۲۱ + ۱۶ = ۲۰۰$$

حالا باید افرادی که زیر ۴۰ سال دارن رو مشخص کنیم، یعنی تعداد مردها و زن های بین ۲۰-۴۰ و ۴۰-۲۰ سال رو با هم جمع کنیم.

افرادی که بین ۲۰-۴۰ سال دارن.

$$n(A) = ۲۴ + ۲۶ + ۳۳ + ۳۷$$

افرادی که بین ۴۰-۲۰ سال دارن.

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{۱۲۰}{۲۰۰} = \frac{۳}{۵}$$

۲۸۸ ابتدا باید تعداد اعضای فضای نمونه یا همون $n(S)$ رو پیدا کنیم. برای این کار کافیه تعداد کل نان ها رو به دست بیاریم.

$$n(S) = ۲۵۰ + ۴۵۰ + ۱۰۰ + ۲۰۰ = ۱۰۰۰$$

الف میخوایم نان «ساده» و از نانوائی (۲) باشه؛ طبق جدول داریم:

$$n(A) = ۴۵۰ \Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{۴۵۰}{۱۰۰۰} = \frac{۹}{۲۰}$$

ب میخوایم «نان کنجدی» باشه، پس باید تعداد نان های کنجدی نانوائی (۱) و (۲) رو با هم جمع کنیم.

نان کنجدی نانوائی (۲) نان کنجدی نانوائی (۱)

$$n(B) = ۱۰۰ + ۲۰۰ = ۳۰۰ \Rightarrow P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{۳۰۰}{۱۰۰۰} = \frac{۳}{۱۰}$$

۲۸۹ (احتمال بارانی بودن فردا) $= ۱ - (\text{احتمال اینکه فردا بارانی نباشد})$

$$P(A') = ۱ - P(A) = ۱ - \frac{۳}{۸} = \frac{۵}{۸}$$

۲۹۰ می دونیم $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$ و در این سؤال داریم $P(A) = \frac{۵}{۸}$ و

$n(A) = ۲۵$. حالا با یک جای گذاری ساده $n(S)$ رو هم به دست میاریم.

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} \Rightarrow \frac{۵}{۸} = \frac{۲۵}{n(S)} \Rightarrow n(S) \times ۵ = ۲۵ \times ۸$$

$$\Rightarrow n(S) = \frac{۲۵ \times ۸}{۵} = ۴۰$$

۲۸۰

$$P(A) = \frac{\binom{۴}{۱} \times \binom{۶}{۲}}{\binom{۱۰}{۳}} = \frac{۴ \times ۱۵}{۱۲۰} = \frac{۶۰}{۱۲۰} = \frac{۱}{۲}$$

۲۸۱ باز هم، مثل همیشه، ابتدا $n(S)$ رو حساب می کنیم. هر صفحه ۴ قسمت داره، حالا چون دوتا صفحه داریم، باید تعداد قسمت هاشون رو در هم ضرب کنیم:

$$n(S) = ۴ \times ۴ = ۱۶$$

$$A = \{(۱, ۱), (۲, ۲), (۳, ۳), (۴, ۴)\} \Rightarrow n(A) = ۴$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{۴}{۱۶} = \frac{۱}{۴}$$

۲۸۲ صفحه A ، دارای ۸ قسمت و صفحه B ، دارای ۱۰ قسمت هست و چون هر دو عقربه رو می چرخانیم، باید از اصل ضرب استفاده کنیم تا $n(S) = ۸ \times ۱۰ = ۸۰$ به دست بیاد:

اعداد اول بین ۱ تا ۸ عبارت اند از ۲، ۳، ۵ و ۷. عقربه صفحه A باید روی یکی از این عددها قرار بگیره، ولی عقربه صفحه B فقط باید روی ۵ قرار بگیره؛ پس داریم:

$$A = \{(۲, ۵), (۳, ۵), (۵, ۵), (۷, ۵)\} \Rightarrow n(A) = ۴$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{۴}{۸۰} = \frac{۱}{۲۰}$$

۲۸۳ اول باید $n(S)$ رو پیدا کنیم، برای انتخاب گوی اول ۴ حالت و برای انتخاب گوی دوم ۳ حالت داریم (چون یک گوی رو کنار گذاشته ایم).

$$n(S) = ۴ \times ۳ = ۱۲$$

حالا باید $n(A)$ رو پیدا کنیم؛ همه حالت هایی که شماره گوی ها اعداد متوالی بشن رو می نویسیم:

$$A = \{(۱, ۲), (۲, ۳), (۳, ۴)\} \Rightarrow n(A) = ۳$$

$$\Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{۳}{۱۲} = \frac{۱}{۴}$$

۲۸۴ برای مجموع دو تاس، می تونیم از جدول زیر استفاده کنیم:

مجموع دو تاس	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲
تعداد حالت ها	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۵	۴	۳	۲	۱

الف طبق جدول رسم شده، شانس برنده شدن فرد با شماره ۷ از بقیه بیشتره، چون تعداد حالت های اون برابر ۶ هست.

ب طبق جدول رسم شده، شانس برنده شدن فرد با شماره ۲ و فرد با شماره ۱۲ از همه کمتره، چون تعداد حالت های اون ها ۱ هست.

ج بله ممکنه؛ چون آزمایش تصادفیه و هر کدوم از برآمدها ممکنه اتفاق بیفتن فقط احتمال رخ دادنشون کمتر یا بیشتره.

د طبق جدولی که در ابتدا رسم کردیم اگر مجموع دو تاس برابر ۵ باشه تعداد حالت ها برابر ۴ است، لذا:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{۴}{۳۶} = \frac{۱}{۹}$$

۲۸۵ اول باید $n(S)$ رو به دست بیاریم. می دونیم که عقربه ممکنه روی هر یک از اعداد ۱ تا ۸ بایسته؛ پس فضای نمونه برابر میشه با:

$$S = \{۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶, ۷, ۸\} \Rightarrow n(S) = ۸$$

الف اعداد ۲، ۳، ۵ و ۷ در این مجموعه اول هستند؛ پس داریم:

$$A = \{۲, ۳, ۵, ۷\} \Rightarrow n(A) = ۴ \Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{۴}{۸} = \frac{۱}{۲}$$



۲۹۶. برای محاسبه $n(S)$ باید ۳ مهره رو از مجموع ۷ مهره قرمز و ۳ مهره سفید انتخاب کنیم؛ پس داریم:

$$n(S) = \binom{7+3}{3} = \binom{10}{3} = \frac{10!}{3!(10-3)!} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{3 \times 2 \times 1 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} = 120$$

حالا باید ۲ مهره قرمز رو از بین ۷ مهره قرمز و ۱ مهره سفید رو از بین ۳ مهره سفید انتخاب کنیم؛

$$n(A) = \binom{7}{2} \times \binom{3}{1} = \frac{7!}{2!(7-2)!} \times \frac{3!}{1!(3-1)!} = \frac{7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{2 \times 1 \times 3 \times 2 \times 1} \times \frac{3 \times 2 \times 1}{1 \times 2 \times 1} = 63$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{63}{120} = \frac{21}{40}$$

۲۹۷. اول باید تعداد اعضای فضای نمونه رو به دست بیاریم. میخوایم در مجموع ۳ دانش آموز رو از بین دانش آموزهای رشته ریاضی، تجربی و انسانی انتخاب کنیم؛ پس داریم:

$$n(S) = \binom{2+3+2}{3} = \binom{7}{3} = \frac{7!}{3!(7-3)!} = \frac{7!}{3! \times 4!} = \frac{7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{3 \times 2 \times 1 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} = 35$$

حالا میخوایم ۱ دانش آموز رو از بین ۲ دانش آموز ریاضی، ۱ دانش آموز رو از بین ۳ دانش آموز تجربی و ۲ دانش آموز انسانی انتخاب کنیم. با استفاده از اصل ضرب داریم:

$$n(A) = \binom{2}{1} \times \binom{3}{1} \times \binom{2}{1} = 2 \times 3 \times 2 = 12$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{12}{35}$$

۲۹۸. برای محاسبه $n(S)$ کاری به رنگ ها نداریم، فقط میگیریم باید ۳ مهره از بین ۹ مهره انتخاب بشن:

$$n(S) = \binom{9}{3} = \frac{9!}{3! \times 6!} = \frac{9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{3 \times 2 \times 1 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} = 84$$

برای اینکه رنگ ۳ مهره متفاوت باشه، باید یکی رو از بین مهره های سفید، یکی رو از بین مهره های زرد و اون یکی رو از بین مهره های آبی انتخاب کنیم؛ پس داریم:

$$n(A) = \binom{4}{1} \times \binom{3}{1} \times \binom{2}{1} = 4 \times 3 \times 2 = 24$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{24}{84} = \frac{2}{7}$$

۲۹۹. همون طور که گفتیم برای محاسبه $n(S)$ کاری به رنگ ها نداریم، فقط میگیریم باید ۳ مهره از بین ۹ مهره انتخاب بشه:

$$n(S) = \binom{9}{3} = \frac{9!}{3! \times 6!} = \frac{9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{3 \times 2 \times 1 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} = 84$$

برای محاسبه $n(A)$ باید ۲ مهره رو از بین ۴ مهره آبی و ۱ مهره رو از بین ۵ مهره قرمز انتخاب کنیم؛ پس:

$$n(A) = \binom{4}{2} \times \binom{5}{1} = \frac{4!}{2! \times 2!} \times 5 = \frac{4 \times 3 \times 2 \times 1}{2 \times 1 \times 2 \times 1} \times 5 = 6 \times 5 = 30$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{30}{84} = \frac{5}{14}$$

۲۹۱. می دونیم که احتمال رخ دادن A یا B برابر $P(A \cup B)$ و احتمال رخ دادن A و B با هم برابر $P(A \cap B)$ هستش؛ پس:

$$P(A) = \frac{1}{3}, P(B) = \frac{1}{3}, P(A \cup B) = \frac{7}{12}$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$\Rightarrow \frac{7}{12} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - P(A \cap B) \Rightarrow P(A \cap B) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{7}{12}$$

$$\Rightarrow P(A \cap B) = \frac{6+6-7}{12} = \frac{5}{12} = \frac{1}{4}$$

۲۹۲. ابتدا با کمک $P(A')$ مقدار $P(A)$ رو محاسبه می کنیم:

$$P(A') = \frac{2}{5} \Rightarrow P(A) = 1 - P(A') = 1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$$

حالا از فرمول احتمال استفاده می کنیم:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} \Rightarrow \frac{3}{5} = \frac{n(A)}{50} \Rightarrow 5n(A) = 3 \times 50$$

$$\Rightarrow n(A) = \frac{3 \times 50}{5} = 30$$

۲۹۳. الف) می دونیم احتمال اینکه حداقل یکی از دو پیشامد A و B رخ بدن برابر با $P(A \cup B)$ است؛ پس داریم:

$$P(A \cup B) = \frac{1}{2}$$

از طرفی گفته شده دو پیشامد ناسازگار و می دونیم دو پیشامد ناسازگار اشتراکی ندارند؛ یعنی:

$$P(A \cap B) = 0$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$\frac{1}{2} = P(A) + P(B) - 0$$

$$\frac{P(A \cap B) = 0}{P(A) = 3P(B)} \Rightarrow \frac{1}{2} = 3P(B) + P(B) \Rightarrow \frac{1}{2} = 4P(B)$$

$$\xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} 1 = 8P(B) \Rightarrow P(B) = \frac{1}{8}$$

$$P(A) = 3P(B) \xrightarrow{P(B) = \frac{1}{8}} P(A) = 3 \times \frac{1}{8} = \frac{3}{8}$$

$$P(A') = 1 - P(A) = 1 - \frac{3}{8} = \frac{5}{8}$$

۲۹۴. الف) برای به دست آوردن کل حالات باید از اصل ضرب استفاده کنیم.

$$\text{تعداد کل حالات} = \underbrace{2}_{\text{نوبت رنگ}} \times \underbrace{3}_{\text{نوع اتوبوس}} \times \underbrace{2}_{\text{نوبت}} = 12$$

ب) پیشامد این سفر رو A تعریف می کنیم. چون نوع اتوبوس و نوبت مشخص شده برای اون ها یک حالت رو در نظر می گیریم.

$$n(A) = \underbrace{1}_{\text{ولوو}} \times \underbrace{3}_{\text{صبح}} \times \underbrace{1}_{\text{نوبت رنگ}} = 3 \Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$$

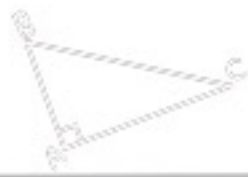
۲۹۵. برای محاسبه $n(S)$ کاری به سالم یا لکه دار بودن سیب ها نداریم. میخوایم ۴ سیب رو از بین ۱۱ سیب انتخاب کنیم؛ پس به کمک فرمول ترکیب خواهیم نوشت:

$$n(S) = \binom{11}{4} = \frac{11!}{4! \times 7!} = \frac{11 \times 10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{4 \times 3 \times 2 \times 1 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} = 11 \times 10 \times 3 = 330$$

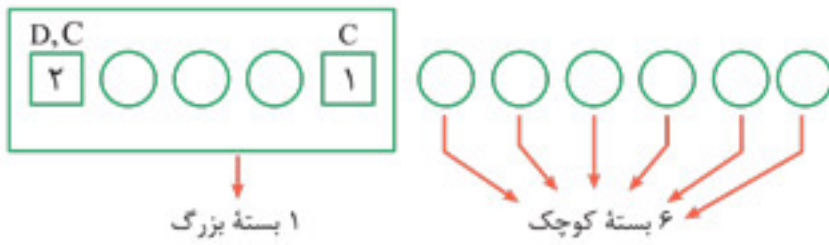
حالا باید ۳ تا سیب از بین ۹ تا سیب سالم و ۱ سیب از بین ۲ تا سیب لکه دار انتخاب کنیم:

$$n(A) = \binom{9}{3} \times \binom{2}{1} = \frac{9!}{3! \times 6!} \times 2 = \frac{9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{3 \times 2 \times 1 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} \times 2 = 168$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{168}{330} = \frac{14}{275}$$



۳۰۳. ابتدا تعداد اعضای فضای نمونه رو به دست میاریم، چون ۱۱ نفر میخوان کنار هم قرار بگیرن؛ به کمک مفهوم جایگشت خواهیم داشت: $n(S) = 11!$ دروازه بان رو با D و کاپیتان رو با C نشون میدیم.



برای نوشتن $n(A)$ گام‌های زیر را انجام میدیم:

۱. خانه‌های مربوط به دروازه بان و کاپیتان به ۲ و ۱ حالت پر میشن، چون برای یکی از خانه‌ها ۲ انتخاب داریم و برای خانه بعدی ۱ انتخاب.
۲. از بین ۹ نفر باقی‌مونده باید ۳ نفر رو انتخاب کنیم که بین دروازه بان و کاپیتان باشن؛ فعلاً ترتیب مهم نیست، پس داریم:

۳. خود این ۳ نفری که انتخاب کردیم به ۳! حالت با هم جایگشت دارن.
۴. اگر مجموعه کاپیتان و دروازه بان و ۳ نفر بینشون روی یک بسته بزرگ و هر کدوم از بقیه بازیکن‌ها رو هم یک بسته کوچک در نظر بگیریم، این ۱ بسته بزرگ و ۶ بسته کوچک به ۷! حالت با هم جابه جایی دارن؛ پس طبق اصل ضرب داریم:

$$n(A) = 2 \times \binom{9}{3} \times 3! \times 7!$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{2 \times \binom{9}{3} \times 3! \times 7!}{11!}$$

تا همین جاتوی امتحان کافیه، ولی اگه بخوایم می‌تونیم جواب رو ساده‌تر کنیم:

$$P(A) = \frac{2 \times \cancel{9} \times \cancel{8} \times \cancel{7} \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{11 \times 10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} = \frac{2}{55}$$

۳۰۴. اول باید تعداد اعضای فضای نمونه رو به دست بیاریم. می‌خوایم ۷ تا قوچ رو از بین ۱۲ تا قوچ بگیریم؛ پس داریم:

$$n(S) = \binom{12}{7} = \frac{12!}{7!(12-7)!} = \frac{12 \times 11 \times 10 \times 9 \times 8 \times 7!}{7! \times 5!} = 792$$

حالا می‌خوایم حداکثر ۲ قوچ نشان دار باشن، پس باید ۲ قوچ یا ۱ قوچ یا هیچ قوچ نشان دار باشن. چون از «یا» استفاده کردیم، باید از اصل جمع کمک بگیریم و این سه حالت رو جمع کنیم.

$$n(A) = \binom{5}{2} \times \binom{7}{5} + \binom{5}{1} \times \binom{7}{6} + \binom{5}{0} \times \binom{7}{7}$$

هیچ قوچی نشان دار نباشه: ۱ قوچ نشان دار باشه: ۲ قوچ نشان دار باشه:

۰ قوچ از ۵ قوچ نشان دار و ۱ قوچ از ۵ قوچ نشان دار و ۲ قوچ از ۵ قوچ نشان دار و ۷ قوچ از ۷ قوچ بی‌نشان ۶ قوچ از ۷ قوچ بی‌نشان ۵ قوچ از ۷ قوچ بی‌نشان

$$\Rightarrow n(A) = \frac{5!}{2! \times 3!} \times \frac{7!}{5! \times 2!} + \frac{5!}{1! \times 4!} \times \frac{7!}{6! \times 1!} + 1 \times 1$$

$$= (10 \times 21) + (5 \times 7) + (1 \times 1) = 246$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{246}{792}$$

تا همین جاتوی امتحان کافیه، اما اگه صورت و مخرج کسر رو به ۶ ساده کنیم، می‌رسیم به $\frac{41}{132}$.

۳۰۰. برای محاسبه احتمال اول باید $n(S)$ رو به دست بیاریم. برای $n(S)$ باید ۳ نفر رو از بین ۱۰ نفر انتخاب کنیم:

$$n(S) = \binom{10}{3} = \frac{10!}{3!(10-3)!} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7!}{3 \times 2 \times 1 \times 7!} = 120$$

الف) می‌خوایم حداقل ۲ نفر موافق باشن، پس یا باید ۲ نفر موافق برنامه باشن یا هر ۳ نفر موافق برنامه باشن؛ بنابراین باید تعداد این دو حالت رو به دست بیاریم و با هم جمع کنیم.

حالت اول: (دو نفر موافق) باید دو نفر رو از بین ۵ نفر موافق و یک نفر رو از بین مجموع افراد مخالف و ممتنع انتخاب کنیم؛ پس داریم:

$$\binom{5}{2} \times \binom{3+2}{1} = \binom{5}{2} \times \binom{5}{1} = \frac{5!}{2! \times 3!} \times 5 = \frac{5 \times 4 \times 3!}{2 \times 1 \times 3!} \times 5 = 50$$

حالت دوم: (سه نفر موافق) فقط کافیه ۳ نفر رو از بین ۵ موافق انتخاب کنیم:

$$\binom{5}{3} = \frac{5!}{3! \times 2!} = 10$$

$$n(A) = \text{مجموع دو حالت} = 50 + 10 = 60 \Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{60}{120} = \frac{1}{2}$$

ب) برای اینکه نظر هیچ دو نفری مثل هم نباشه باید یک نفر موافق، یک نفر مخالف و یک نفر ممتنع انتخاب بشن؛ پس با استفاده از اصل ضرب داریم:

$$n(B) = \binom{5}{1} \times \binom{3}{1} \times \binom{2}{1} = 5 \times 3 \times 2 = 30$$

$$\Rightarrow P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{30}{120} = \frac{1}{4}$$

۳۰۱. اول باید $n(S)$ رو پیدا کنیم. می‌خوایم ۲ عدد رو از بین ۱۱ عدد انتخاب کنیم، پس از فرمول ترکیب استفاده می‌کنیم:

$$n(S) = \binom{11}{2} = \frac{11!}{2! \times 9!} = 55$$

حالا می‌خوایم ۲ عدد انتخاب شده مضرب ۵ باشن؛ یعنی باید از بین اعداد ۲۰، ۲۵ و ۳۰ دو عدد رو انتخاب کنیم؛ پس داریم:

$$n(A) = \binom{3}{2} = 3 \Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{3}{55}$$

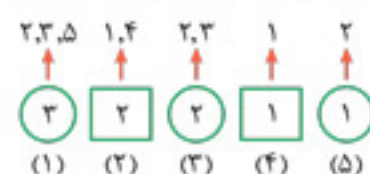
۳۰۲. اول باید تعداد اعضای فضای نمونه رو به دست بیاریم. می‌خوایم ۵ تا پرچم رو توی ۵ تا جایگاه قرار بدیم، پس تعداد جایگشت هاشون رو حساب می‌کنیم:

$$n(S) = 5! = 120$$

مراحل محاسبه $n(A)$ به این شکله:

۱. ابتدا میله‌هایی با شماره‌های غیراول (۴ و ۱) رو در مکان‌هایی که شمارشون زوجه (مکان‌های مربع شکل) قرار میدیم.

۲. حالا میله‌های ۵، ۳ و ۲ رو در مکان‌های باقی‌مونده قرار میدیم:



حالا با استفاده از اصل ضرب، مقدار $n(A)$ و سپس احتمال رو به دست می‌اریم:

$$n(A) = 3 \times 2 \times 2 \times 1 \times 1 = 12$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{12}{120} = \frac{1}{10}$$



۳۱۰. اول سراغ محاسبه تعداد اعضای فضای نمونه می‌ریم. در حالت کلی هر فرزند برای به دنیا آمدن در یکی از روزهای هفته ۷ انتخاب دارد؛ پس:

$$n(S) = 7 \times 7 \times 7$$

الف. هر سه فرزند باید روز جمعه به دنیا بیان، پس هر کدام فقط ۱ انتخاب برای روز تولدشون دارن که همون روز جمعه‌اس، بنابراین داریم:

$$n(A) = 1 \times 1 \times 1$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{1 \times 1 \times 1}{7 \times 7 \times 7} = \frac{1}{343}$$

ب. فرزند اول برای به دنیا اومدن ۷ تا انتخاب دارد چون توی هر یک از روزهای هفته می‌تونه به دنیا اومده باشه، اما این فرزند هر روزی که به دنیا اومده باشه، ۲ فرزند دیگه هم باید همون روز به دنیا بیان؛ یعنی فرزندان دوم و سوم فقط یک انتخاب دارن، لذا داریم:

$$n(B) = \begin{array}{c} \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \\ 7 \times 1 \times 1 \end{array}$$

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{7 \times 1 \times 1}{7 \times 7 \times 7} = \frac{1}{49}$$

ج. فرزند اول برای به دنیا اومدن ۷ تا انتخاب دارد چون توی هر یک از روزهای هفته می‌تونه به دنیا اومده باشه؛ روز تولد فرزند دوم با اولی فرق دارد پس فرزند دوم توی ۶ روز باقی‌مونده از هفته می‌تونه به دنیا اومده باشه (روز تولد فرزند اول حذف میشه). به همین ترتیب فرزند سوم در ۵ روز باقی‌مونده از هفته می‌تونه به دنیا اومده باشه (روز تولد فرزند اول و روز تولد فرزند دوم حذف میشن) پس داریم:

$$n(C) = \begin{array}{c} \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \\ 7 \times 6 \times 5 \end{array}$$

$$P(C) = \frac{n(C)}{n(S)} = \frac{7 \times 6 \times 5}{7 \times 7 \times 7} = \frac{30}{49}$$

د. محاسبه این احتمال به کمک پیشامد متمم راحت‌تره. متمم این پیشامد «حداقل دو فرزند در یک روز هفته به دنیا اومده باشن» میشه «هیچ دو فرزندی در یک روز هفته به دنیا نیومده باشن» = هر سه فرزند در روزهای مختلف هفته به دنیا اومده باشن» پس میشه نوشت:

$$P(\text{متولد شدن حداقل ۲ فرزند در یک روز هفته}) = 1 - P(\text{متولد شدن هر سه فرزند در روزهای مختلف هفته})$$

$P(C)$ رو در قسمت «ج» برابر با $\frac{30}{49}$ به دست آوردیم؛ پس میشه نوشت:

$$P(C') = 1 - P(C) = 1 - \frac{30}{49} = \frac{49 - 30}{49} = \frac{19}{49}$$

۳۱۱. حل این مسئله با استفاده از احتمال پیشامد متمم راحت‌تره. متمم پیشامد «تولد حداقل دو نفر در یک ماه» برابر میشه با «تولد ۳ نفر در ماه‌های مختلف» پس میشه نوشت:

$$P(\text{متولد شدن حداقل ۲ نفر در یک ماه}) = 1 - P(\text{متولد شدن ۳ نفر در ماه‌های مختلف})$$

۳۰۵. اگه تماشا نکردن سریال توسط ریحانه رو A بنامیم، داریم $P(A) = \frac{32}{99}$. احتمال اینکه ریحانه سریال تماشا بکنه میشه $P(A')$ و می‌دونیم که $P(A') = 1 - P(A)$ پس داریم:

$$P(A') = 1 - P(A) \Rightarrow P(A') = 1 - \frac{32}{99} = \frac{99}{99} - \frac{32}{99} = \frac{67}{99}$$

۳۰۶. اگر احتمال معیوب بودن کالا را با $P(A)$ نشان دهیم، داریم:

$$P(A) = \frac{10}{2000} = \frac{1}{200} \Rightarrow P(A') = 1 - \frac{1}{200} = \frac{200 - 1}{200} = \frac{199}{200}$$

۳۰۷. اینکه تخلف واقعی باشه یعنی مأمور اشتباه نکرده باشه:

$$P(\text{اشتباه کردن مأمور}) = 1 - P(\text{اشتباه نکردن مأمور})$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{18}{3000} = \frac{6}{1000}$$

$$\Rightarrow P(A') = 1 - \frac{6}{1000} = \frac{994}{1000} = 0.994$$

۳۰۸. محاسبه احتمال اینکه لااقل یکی از عقربه‌ها روی ناحیه فرد قرار بگیره به صورت مستقیم مشکله (چون شامل حالت‌های زیادی میشه)، برای همین از احتمال متمم استفاده می‌کنیم:

$$P(\text{لااقل یکی از عقربه‌ها روی ناحیه فرد قرار بگیره}) = 1 - P(\text{هیچ کدام از عقربه‌ها روی ناحیه فرد قرار نگیره})$$

خب حالا برای محاسبه $P(A)$ اول $n(S)$ و بعد $n(A)$ رو محاسبه می‌کنیم:

$n(S)$: صفحه اول به ۴ قسمت و صفحه دوم به ۷ قسمت تقسیم شده؛ پس داریم:

$$n(S) = 4 \times 7 = 28$$

$n(A)$: در صفحه اولی عددهای ۲ و ۴ فرد نیستن و در صفحه دومی ۲، ۴ و ۶ فرد نیستن؛ پس داریم:

$$n(A) = 2 \times 3 = 6$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{6}{28} = \frac{3}{14}$$

$$P(A') = 1 - P(A) = 1 - \frac{3}{14} = \frac{14}{14} - \frac{3}{14} = \frac{11}{14}$$

۳۰۹. برای محاسبه احتمال، اول باید تعداد اعضای فضای نمونه رو به دست بیاریم. اگه هر مداد رو با «م» و هر خودکار رو با «خ» نشون بدیم، چون ۴ تا مداد مختلف و ۶ تا خودکار مختلف داریم، می‌نویسیم:

$$S = \{م ۱, م ۲, م ۳, م ۴, خ ۱, خ ۲, \dots, خ ۶\} \Rightarrow n(S) = 10$$

الف. برای اینکه شیء انتخاب شده مداد باشه، خواهیم داشت:

$$A = \{م ۱, م ۲, م ۳, م ۴\} \Rightarrow n(A) = 4$$

$$\Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{4}{10} = 0.4$$

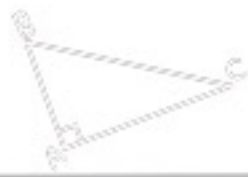
ب. روش اول (استفاده از متمم): برای محاسبه احتمال اینکه شیء انتخابی مداد نباشه می‌تونیم از احتمال متمم استفاده کرد:

$$P(A') = 1 - P(A) = 1 - 0.4 = 0.6$$

↓ ↓
احتمال مداد بودن
احتمال مداد نبودن

روش دوم (بدون استفاده از متمم): اگه بخوایم شیء انتخابی مداد نباشه، باید قطعاً خودکار باشه، لذا داریم:

$$B = \{خ ۱, خ ۲, \dots, خ ۶\} \Rightarrow n(B) = 6, \quad P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{6}{10} = 0.6$$



برای به دست آوردن احتمال پیشامد A، این پیشامد رو می نویسیم:

$$A = \{(1,1,1), (2,2,2), (3,3,3), \dots, (6,6,6)\} \Rightarrow n(A) = 6$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{6}{6 \times 6 \times 6} = \frac{1}{36}$$

$$P(A') = 1 - P(A) \Rightarrow P(A') = 1 - \frac{1}{36} = \frac{36-1}{36} = \frac{35}{36}$$

پس احتمال اینکه اعداد ظاهر شده، یکسان نباشن $\frac{35}{36}$ میشه.

۳۱۴. ابتدا تعداد اعضای فضای نمونه رو به دست میاریم:

$$S = \{1, 2, \dots, 20\} \Rightarrow n(S) = 20$$

الف) باید اعداد اول بین ۱ تا ۲۰ رو از مجموعه S انتخاب کنیم:

$$A = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19\} \Rightarrow n(A) = 8$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{8}{20} = \frac{2}{5}$$

ب) برای محاسبه این قسمت دو روش داریم:

روش اول (استفاده از پیشامد متمم): اگر پیشامد A «اول بودن عدد روی کارت»

باشد، داریم:

$$P(\text{اول بودن عدد روی کارت}) = 1 - P(\text{اول نبودن عدد روی کارت})$$

$$\Rightarrow P(A') = 1 - \frac{2}{5} = \frac{5-2}{5} = \frac{3}{5}$$

روش دوم (روش مستقیم): اعداد غیراول بین ۱ تا ۲۰ رو می نویسیم:

$$B = \{1, 4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16, 18, 20\} \Rightarrow n(B) = 12$$

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{12}{20} = \frac{3}{5}$$

۳۱۵. ابتدا $n(S)$ رو به دست میاریم:

محاسبه این احتمال به کمک پیشامد متمم بسیار آسون تره. متمم

پیشامد «مجموع دو عدد رو شده کوچک تر از ۱۱ باشد» برابر میشه با

«مجموع دو عدد رو شده کوچک تر از ۱۱ نباشد». بنابراین میشه نوشت:

$$P(\text{مجموع دو عدد کوچک تر از ۱۱ نباشد})$$

$$= 1 - P(\text{مجموع دو عدد کوچک تر از ۱۱ باشد})$$

الان به سراغ پیشامد A میریم، مجموع دو عدد یا باید ۱۱ باشه (مجموع ۶

و ۵) یا اینکه ۱۲ باشه (مجموع ۶ و ۶) پس می توان نوشت:

$$A = \{(5,6), (6,5), (6,6)\} \Rightarrow n(A) = 3 \Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$$

$$P(A') = 1 - P(A) = 1 - \frac{1}{12} = \frac{11}{12}$$

۳۱۶. اگر احتمال قبول شدن در امتحان رو $P(A)$ در نظر بگیریم، احتمال رد

شدن در اون امتحان $P(A')$ است، پس خواهیم داشت: $P(A') = 1 - P(A)$

طبق فرض، احتمال قبول شدن یعنی $P(A)$ برابر احتمال رد شدن

(یعنی $P(A')$ است، یعنی:

$$P(A') = 1 - P(A) \xrightarrow{P(A)=3P(A')} P(A') = 1 - 3P(A')$$

$$\Rightarrow P(A') + 3P(A') = 1 \Rightarrow 4P(A') = 1 \Rightarrow P(A') = \frac{1}{4}$$

پس احتمال رد شدن در امتحان $\frac{1}{4}$ است. برای محاسبه احتمال قبول

شدن به شکل زیر عمل می کنیم:

$$P(A) = 3P(A') \Rightarrow P(A) = 3 \times \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

برای محاسبه $P(A)$ اول باید $n(S)$ رو محاسبه کنیم.

هر فرد در حالت کلی برای متولد شدن ۱۲ ماه مختلف رو در اختیار داره؛ پس:

$$n(S) = 12 \times 12 \times 12$$

پیشامد A: اینکه تولد ۳ نفر در ماه های مختلف باشن.

میخوایم ۳ نفر در ماه های مختلف به دنیا بیان. نفر اول برای به دنیا

اومدن ۱۲ انتخاب داره چون توی هر کدوم از ماه های سال می تونه به دنیا

بیاد. نفر دوم توی هر کدوم از ۱۱ ماه باقی مونده از سال می تونه به دنیا بیاد

(ماهی که نفر اول به دنیا اومده حذف میشه). نفر سوم هم توی هر کدوم

از ۱۰ ماه باقی مونده از سال می تونه به دنیا بیاد (ماهی که نفر اول به دنیا

اومده و ماهی که نفر دوم به دنیا اومده هر دو حذف میشن)؛ پس داریم:

$$n(A) = 12 \times 11 \times 10 \Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{12 \times 11 \times 10}{12 \times 12 \times 12} = \frac{110}{144}$$

حالا می تونیم احتمال خواسته شده رو به دست بیاریم:

$$P(A') = 1 - P(A) = 1 - \frac{110}{144} = \frac{144-110}{144} = \frac{34}{144} = \frac{17}{72}$$

۳۱۷. ابتدا تعداد اعضای فضای نمونه رو به دست میاریم. هر فرد برای ماه

تولدش ۱۲ تا انتخاب داره و تا کسی دارای ۵ فرده؛ پس داریم:

$$n(S) = \underbrace{12}_{\text{نفر پنجم}} \times \underbrace{12}_{\text{نفر چهارم}} \times \underbrace{12}_{\text{نفر سوم}} \times \underbrace{12}_{\text{نفر دوم}} \times \underbrace{12}_{\text{نفر اول}} = 12^5$$

الف) میخوایم هر پنج نفر در یک ماه از سال به دنیا اومده باشن. نفر اول

برای به دنیا اومدن ۱۲ تا انتخاب داره. نفر اول در هر کدوم از این ۱۲ ماه که

به دنیا بیاد ۴ نفر بعدی هم باید در همون ماه به دنیا بیان. در واقع ۴ نفر

بعدی فقط یک انتخاب دارن، بنابراین داریم:

$$n(A) = \underbrace{12}_{\text{نفر پنجم}} \times \underbrace{1}_{\text{نفر چهارم}} \times \underbrace{1}_{\text{نفر سوم}} \times \underbrace{1}_{\text{نفر دوم}} \times \underbrace{1}_{\text{نفر اول}} = 12$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{12}{12^5} = \frac{1}{12^4}$$

ب) میخوایم هر ۵ نفر در ماه های مختلف سال به دنیا اومده باشن.

نفر اول برای به دنیا اومدن ۱۲ تا انتخاب داره (در هر یک از ماه های سال

می تونه به دنیا اومده باشه)، چون ماه تولد نفر دوم با نفر اول متفاوت

پس نفر دوم در هر کدوم از ۱۱ ماه باقی مونده از سال می تونه به دنیا اومده

باشه. به همین ترتیب نفر سوم ۱۰ انتخاب، نفر چهارم ۹ انتخاب و نفر

پنجم ۸ انتخاب داره:

$$n(B) = \underbrace{12}_{\text{نفر پنجم}} \times \underbrace{11}_{\text{نفر چهارم}} \times \underbrace{10}_{\text{نفر سوم}} \times \underbrace{9}_{\text{نفر دوم}} \times \underbrace{8}_{\text{نفر اول}}$$

$$\Rightarrow P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{12 \times 11 \times 10 \times 9 \times 8}{12 \times 12 \times 12 \times 12 \times 12} = \frac{55}{144}$$

۳۱۸. اول باید تعداد اعضای فضای نمونه رو به دست بیاریم. هر تاس ۶

حالت داره؛ پس برای ۳ تاس خواهیم داشت:

$$n(S) = 6 \times 6 \times 6$$

به دست آوردن تعداد اعضای پیشامد «اعداد ظاهر شده یکسان باشند»

خیلی راحت تره، پس از احتمال متمم استفاده می کنیم. اگر پیشامد A رو

پیشامد «اعداد ظاهر شده یکسان نباشند» تعریف کنیم، داریم:

$$P(\text{اعداد ظاهر شده یکسان نباشند}) = 1 - P(\text{اعداد ظاهر شده یکسان باشند})$$

A'

A



حداقل ۳ خودکار یعنی ۳ خودکار یا ۴ خودکار، بنابراین:

$$n(B) = \binom{5}{3} \binom{3}{1} + \binom{5}{4} \binom{3}{0} = (10 \times 3) + (5 \times 1) = 35$$

$$P(B) = \frac{35}{70} = \frac{1}{2}$$

$$P(A') = 1 - P(A) = 1 - \frac{7}{25} = \frac{25-7}{25} = \frac{18}{25} \quad ۳۲۰$$

۳۲۱. ابتدا فضای نمونه رو به دست میاریم:

$$n(S) = \binom{9}{6} = \frac{9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4}{6! \times 3! \times 1!} = 84$$

الف) حداقل ۴ فوتبالیست یعنی ۴ یا ۵ یا ۶ فوتبالیست.

$$n(A) = \binom{5}{4} \binom{4}{2} + \binom{5}{5} \binom{4}{1} = 34 \Rightarrow P(A) = \frac{34}{84}$$

$$n(B) = \binom{5}{3} \binom{4}{3} = 10 \times 4 = 40 \Rightarrow P(B) = \frac{40}{84} \quad ب$$

۳۲۲. ابتدا $n(S)$ رو حساب می‌کنیم؛ دوتا گوی به طور متوالی (پشت سرهم) خارج کرده‌ایم؛ پس داریم:

$$n(S) = 10 \times 10 = 100$$

A رو پیشامد ظاهر شدن اعداد بزرگ‌تر از ۵۴ تعریف می‌کنیم؛ یعنی:

$$A = \{55, 56, \dots, 98, 99\}$$

برای به دست آوردن تعداد اعداد طبیعی متوالی از این فرمول استفاده می‌کنیم (۱+ عدد اول - عدد آخر): پس داریم:

$$n(A) = 99 - 55 + 1 = 45$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{45}{100} \quad \text{حالا احتمال رخ دادن A رو حساب می‌کنیم:}$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} \quad \text{و} \quad P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} \quad \text{حالا اطلاعات متن می‌دونیم.} \quad ۳۲۳$$

سؤال رو در این دو فرمول جای‌گذاری می‌کنیم:

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} \Rightarrow 0.3 = \frac{9}{n(S)} \Rightarrow 0.3n(S) = 9$$

$$\Rightarrow n(S) = \frac{9}{0.3} = \frac{9 \times 10}{0.3 \times 10} = \frac{90}{3} = 30$$

(صورت و مخرج رو در ۱۰ ضرب کردیم تا اعشار از بین بره.)

$$P(A) = 0.2 = \frac{n(A)}{30} \Rightarrow n(A) = 0.2 \times 30 = 6$$

۳۲۴. ابتدا تعداد اعضای فضای نمونه را به دست می‌آوریم:

$$n(S) = \binom{10}{3} = \frac{10!}{7! \times 3!} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7!}{7! \times 6} = 120$$

حالا باید از هر گروه فقط ۱ نفر را انتخاب کنیم تا هیچ دو رأیی مثل هم نباشن:

$$n(A) = \binom{5}{1} \times \binom{3}{1} \times \binom{2}{1} = 5 \times 3 \times 2 = 30$$

$$\Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{30}{120} = \frac{1}{4}$$

$$n(S) = 8! : \text{در کل ۸ نفر می‌خوان در یک صف بایستند لذا:} \quad ۳۲۵$$

حالا هر زن و شوهر رو داخل یک بسته قرار میدیم، توجه کنین در داخل

هر بسته زن و شوهر می‌تونن به ۲! حالت با هم جابه‌جا بشن و این ۴

بسته به ۴! حالت می‌تونن جابه‌جا بشن، لذا خواهیم داشت:

$$AB \quad CD \quad EF \quad GH \Rightarrow n(A) = 4! \times 2! \times 2! \times 2! \times 2!$$

$$\Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{4! \times 2! \times 2! \times 2! \times 2!}{8!} = \frac{1}{105}$$

۳۱۷. برای پیدا کردن $n(S)$ باید تعداد کل کارمندان رو به دست بیاریم.

پس تعداد کارمندان همه ۴ ردیف جدول رو با هم جمع می‌کنیم:

$$n(S) = 30 + 35 + 40 + 15 = 120$$

الف) تعداد کارمندانی که غذای مورد علاقه‌شون قورمه‌سبزیه، طبق

جدول ۳۰ نفره؛ پس داریم:

$$n(A) = 30 \Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{30}{120} = \frac{1}{4}$$

ب) برای محاسبه این قسمت دو راه داریم:

روش اول (روش مستقیم): اگر غذای مورد علاقه کارمند قورمه‌سبزی نباشه، پس یا فسنجان یا چلوکباب یا چلو جوجه، پس داریم:

$$n(B) = 35 + 40 + 15 = 90 \Rightarrow P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{90}{120} = \frac{3}{4}$$

روش دوم (پیشامد متمم): اگر پیشامد «مورد علاقه بودن قورمه‌سبزی» رو با

A نشون بدیم، پیشامد «مورد علاقه نبودن قورمه‌سبزی» میشه A' و داریم:

$$P(A') = 1 - P(A)$$

غذای مورد علاقه
قورمه‌سبزی نباشه.
غذای مورد علاقه
قورمه‌سبزی باشه.

$$P(A') = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \quad \text{پس داریم: محاسبه کردیم:}$$

۳۱۸. ابتدا فضای نمونه رو به دست میاریم. از مجموع ۱۲ مهره ۳ مهره انتخاب

شده که میشه:

$$n(S) = \binom{12}{3} = \frac{12!}{9! \times 3!} = \frac{12 \times 11 \times 10 \times 9!}{9! \times 3 \times 2 \times 1} = 220$$

روش اول: حداکثر ۲ مهره قرمز یعنی ۲ مهره یا ۱ مهره یا صفر مهره قرمز

باشه، بنابراین:

$$\begin{aligned} n(A) &= \binom{7}{2} \binom{5}{1} + \binom{7}{1} \binom{5}{2} + \binom{7}{0} \binom{5}{3} \\ &= \frac{7 \times 6 \times 5!}{2! \times 1!} \times 5 + 7 \times \frac{5 \times 4 \times 3!}{2! \times 1!} + 1 \times \frac{5 \times 4 \times 3!}{3! \times 1!} \\ &= 21 \times 5 + 7 \times 10 + 1 \times 10 \\ &= 105 + 70 + 10 = 185 \end{aligned}$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{185}{220} = \frac{37}{44}$$

روش دوم: می‌تونیم از متمم استفاده کنیم، یعنی بگیریم «حداکثر ۲ مهره

قرمز باشند» متممش میشه «هر سه قرمز باشند»:

$$n(A') = \binom{7}{3} = \frac{7!}{3! \times 4!} = \frac{7 \times 6 \times 5 \times 4!}{3! \times 3 \times 2 \times 1} = 35$$

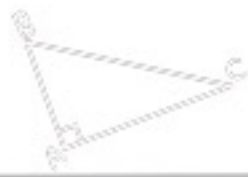
$$\Rightarrow P(A') = \frac{35}{220} \Rightarrow P(A) = 1 - \frac{35}{220} = \frac{185}{220} = \frac{37}{44}$$

حواستون باشه: در مبحث جایگشت و احتمال، حرف «و»

همون ضرب و حرف «یا» همون جمعه.

۳۱۹. ابتدا فضای نمونه یا کل حالت‌های ممکن رو به دست میاریم.

$$n(S) = \binom{8}{4} = \frac{8!}{4! \times 4!} = \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4!}{4! \times 4! \times 1 \times 1} = 70$$



۳۳۰. گزینه ۲: ابتدا تعداد کل اعداد چهاررقمی و بدون تکرار ارقام رو به دست میاریم.

$$n(S) = 4 \times 4 \times 3 \times 2 = 96$$

هر عدد چهاررقمی که بسازیم قطعاً از ۹۹۹ بزرگتره و با توجه به ارقام داده شده از ۴۴۰۰ کوچکتره. چرا که تکرار ارقام وجود نداره و بزرگترین عدد چهاررقمی ای که بدون تکرار ارقام ساخته میشه عدد ۴۳۲۱ است که از ۴۴۰۰ کوچکتره، پس این قسمت سؤال رو کنار میذاریم. حالا با ارقام داده شده باید تعداد حالات زوج بودن عدد چهاررقمی رو به دست بیاریم. چون رقم صفر وجود داره، پس دو حالت رو در نظر میگیریم:

حالت اول (یکان عدد صفر باشه): $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$

حالت دوم (یکان ۲ یا ۴ باشه): $3 \times 3 \times 2 \times 2 = 36$

$$n(A) = 24 + 36 = 60 \Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{60}{96} = \frac{5}{8}$$

۳۳۱. گزینه ۳: ابتدا تعداد کل حالت های ممکن یا تعداد اعضای فضای نمونه رو محاسبه می کنیم.

$$n(S) = 7 \times 6 \times 5 = 210$$

حالا میخوایم ۳ توپ از کیسه خارج کنیم. برای اینکه فقط رنگ دو توپ اول یکسان باشه، باید رنگ دو توپ اول سفید و رنگ توپ سوم سیاه باشه یا رنگ دو توپ اول سیاه و رنگ توپ سوم سفید باشه. پس دو حالت رو در نظر میگیریم و در نهایت جواب هاشون رو با هم جمع می کنیم.

$$n(A) = 4 \times 3 \times 3 + 3 \times 2 \times 4 = 36 + 24 = 60$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{60}{210} = \frac{2}{7}$$

۳۳۲. گزینه ۲: فضای نمونه، انتخاب ۳ لنگه از ۱۰ لنگه (پنج جفت) است.

$$n(S) = \binom{10}{3} = \frac{10 \times 9 \times 8}{6} = 120$$

برای اینکه هیچ جفتی در میان لنگه ها نباشه باید سه جفت از پنج رو انتخاب کنیم و از هر جفت انتخاب شده، یک لنگه بیرون بکشیم.

$$n(A) = \binom{5}{3} \times \binom{2}{1} \times \binom{2}{1} \times \binom{2}{1} = 10 \times 2 \times 2 \times 2 = 80$$

$$\Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{80}{120} = \frac{2}{3}$$

۳۳۳. گزینه ۲: تکلیف سؤالات اول و آخر معلومه و باید حتماً جواب داده بشن، پس از میان ۱۰ سؤال باقی مونده باید ۷ سؤال رو انتخاب کنیم تا با ۲ سؤال اول و آخر مجموعاً ۹ سؤال انتخاب شده باشن. بنابراین تعداد حالات ممکن به صورت زیره:

$$\binom{10}{7} = \frac{10 \times 9 \times 8}{6} = 120$$

۳۳۴. A و B ناسازگارن، یعنی هیچ اشتراکی با هم ندارن، پس:

$$A - B = A, B - A = B$$

$$P(B) = 0.6, P(A) = 0.2 \text{ بنابراین از فرض سؤال نتیجه میگیریم که:}$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = 0.2 + 0.6 = 0.8$$

ولی احتمال متمم پیشامد $(A \cup B)$ خواسته شده:

$$P(A \cup B)' = 1 - P(A \cup B) = 1 - 0.8 = 0.2$$

$$P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$$

$$P(B - A) = P(B) - P(A \cap B)$$

یادآوری:

$$\frac{1}{2} P(C') = \frac{1}{4} \Rightarrow P(C') = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \Rightarrow P(C) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$P(B) = \frac{1}{4}$$

$$B \subseteq C' \Rightarrow B \cap C = \emptyset \Rightarrow P(B \cup C) = P(B) + P(C) - P(B \cap C)$$

$$P(B \cup C) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$$

$$\text{تعداد مثلث ها} = \binom{6}{2} \times \binom{4}{1} + \binom{4}{2} \times \binom{6}{1} + \binom{6}{3} = 15 \times 4 + 6 \times 6 + 20 = 116$$

$$\frac{6 \times 5}{2} \times 4 + \frac{4 \times 3}{2} \times 6 + \frac{6 \times 5 \times 4}{6} = 60 + 36 + 20 = 116$$

دقت کنید که برای ساختن مثلث نمیتوان هر سه نقطه رو از یک خط انتخاب کرد.

نکته نهایی: بهتره برای راحت تر شدن محاسبات، قواعد زیر رو یاد بگیرین:

$$\binom{n}{n} = 1$$

$$\binom{n}{1} = n$$

$$\binom{n}{0} = 1$$

$$\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$$

$$\binom{n}{3} = \frac{n(n-1)(n-2)}{6}$$

ضمناً توجه کنید برای محاسبه عبارتی مثل $\binom{8}{6}$ که عدد پایینی اون به عدد

بالایی نزدیکه، بهتره ۸ رو منهای ۶ کنیم و حاصل $\binom{8}{2}$ رو حساب کنیم که

$$\binom{8}{6} = \binom{8}{2} = \frac{8 \times 7}{2} = 28 \text{ براش قاعده داریم:}$$

۳۳۸. نادرست

راهنمایی: چون صحبتی از مهره دوم نشده، پس فرض می کنیم اصلاً وجود نداره.

چون مهره اول سفیده، پس یک مهره از سفیدها و یک مهره از کل مهره ها کم میشه، یعنی ۴ مهره سفید و ۴ مهره آبی باقی می مونن. پس احتمال سفید بودن مهره خارج شده از ۸ مهره رو حساب می کنیم.

$$P(\text{سفید بودن مهره سوم}) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

۳۳۹. درست: از پیشامد متمم استفاده می کنیم.

A' : لااقل یکی از حروف حذف شده A باشه $\leftarrow$ متمم A : هیچ کدام از حروف حذف شده A نباشه.

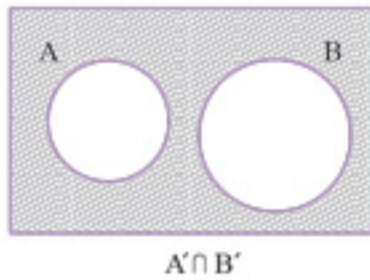
$$n(S) = \binom{7}{2} = \frac{7 \times 6}{2} = 21, n(A) = \binom{5}{2} = \frac{5 \times 4}{2} = 10$$

$$\Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{10}{21}$$

$$P(A') = 1 - P(A) = 1 - \frac{10}{21} = \frac{11}{21}$$



۳۴۰. اگر $A \subseteq B'$ باشد، پس A و B اشتراکی ندارند و ناسازگارند.



$$\Rightarrow ((A \setminus B) \cup (B \setminus A))' \Rightarrow (A \cup B)' = A' \cap B'$$

۳۴۱. ابتدا تعداد اعضای فضای نمونه رو به دست میاریم.

$$5 \times 4 \times 3 = 60$$

برای زوج بودن عدد حاصل، یکان باید ۲ یا ۶ باشد. از طرفی برای بزرگتر از ۳۰۰ بودن عدد، صدگان باید ۳ یا ۶ یا ۹ باشد. چون عدد ۶ در هر دو شرط وجود دارد، باید دو حالت جداگانه در نظر گرفته و جواب‌ها رو با هم جمع کنیم:

حالت اول (یکان ۲ باشد):
$$\begin{array}{|c|} \hline 3 \\ \hline 6 \\ \hline 9 \\ \hline \end{array} \times \begin{array}{|c|} \hline 3 \\ \hline 1 \\ \hline 2 \\ \hline \end{array} \times \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline 2 \\ \hline 3 \\ \hline \end{array} = 3 \times 3 \times 1 = 9$$

حالت دوم (یکان ۶ باشد):
$$\begin{array}{|c|} \hline 2 \\ \hline 9 \\ \hline 3 \\ \hline \end{array} \times \begin{array}{|c|} \hline 3 \\ \hline 1 \\ \hline 6 \\ \hline \end{array} \times \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline 2 \\ \hline 3 \\ \hline \end{array} = 2 \times 3 \times 1 = 6$$

$$n(A) = 9 + 6 = 15 \Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{15}{60} = \frac{1}{4}$$

۳۴۲. تعداد کل حالت‌های قرارگیری ۶ نفر در یک صف برابر با:

$$n(S) = 6! = 720$$

حالا با کمک شکل، $n(A)$ رو به دست میاریم.



$$\Rightarrow n(A) = 2 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 48 \Rightarrow P(A) = \frac{48}{720} = \frac{1}{15}$$

۳۴۳. فضای نمونه، انتخاب ۲ گوی از ۶ گوی موجوده.

$$n(S) = \binom{6}{2} = 15$$

می‌دونیم که برای فرد بودن مجموع دو عدد، باید یکی از اون‌ها فرد و دیگری زوج باشه. در این سؤال سه گوی فرد و سه گوی زوج موجوده، پس خواهیم داشت:

$$n(A) = \binom{3}{1} \times \binom{3}{1} = 9 \Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{9}{15} = \frac{3}{5}$$

راهنمایی: برای اینکه مجموع دو مهره عددی فرد بشه، باید یکی از اعداد زوج و یکی از اعداد فرد باشه و برای اینکه مجموع اعداد دو مهره، عددی زوج بشه، باید هر دو عدد زوج یا هر دو فرد باشن.

$$n(S) = 6^2 = 36$$

۳۳۵

لااقل یکی از اعداد تاس $\leftarrow$ متمم هیچ کدام از اعداد تاس

مضرب ۳ است. (A) مضرب ۳ نیستند. (A')

مضارب ۳ در اعداد تاس برابر با ۳ و ۶. پس برای اینکه در پرتاب تاس مضارب ۶ نیاید، چهار حالت داریم:

$$n(A') = 4 \times 4 = 16 \Rightarrow P(A') = \frac{n(A')}{n(S)} = \frac{16}{36} = \frac{4}{9}$$

$$\Rightarrow P(A) = 1 - P(A') = 1 - \frac{4}{9} = \frac{5}{9}$$

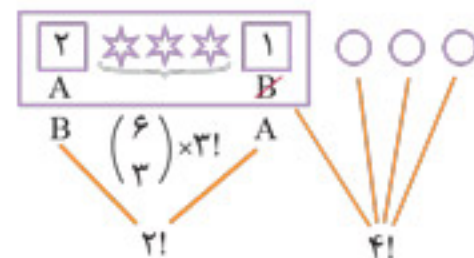
۳۳۶. هر جفت کفش، شامل دو لنگه کفشه. پس در کل شش لنگه کفش داریم. فضای نمونه، انتخاب ۳ لنگه از بین شش لنگه است:

$$n(S) = \binom{6}{3} = \frac{6 \times 5 \times 4}{6} = 20$$

برای اینکه لنگه‌ها تشکیل جفت ندهن و هر لنگه از یک جفت باشه، کافیه که از هر جفت فقط یک لنگه بیرون بیاریم.

$$n(A) = \binom{2}{1} \times \binom{2}{1} \times \binom{2}{1} = 8 \Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{8}{20} = \frac{2}{5}$$

۳۳۷. برای محاسبه $n(S)$ می‌گیریم ۸ نفر به ۸! حالت با هم جابه جایی دارن $n(S) = 8!$ حالا $n(A)$ رو پیدا می‌کنیم. می‌خواهیم بین دو فرد خاص (مثلاً افراد A و B رو خاص فرض می‌کنیم) ۳ نفر دیگر، قرار بگیرن، لذا خواهیم داشت:



$$n(A) = 2! \times \binom{6}{3} \times 3! \times 4! = 2 \times \frac{6 \times 5 \times 4}{6} \times 6 \times 24 = 2 \times 20 \times 6 \times 24$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{2 \times 20 \times 6 \times 24}{8!} = \frac{1}{7}$$

۳۳۸. فضای نمونه یا کل حالات برابر با انتخاب ۴ نقطه از بین ۱۰ نقطه موجود:

$$n(S) = \binom{10}{4} = \frac{10!}{6! \times 4!} = 210$$

برای ساختن پیشامد باید از هر یک از خطوط بالا، پایین، چپ و راست، یک نقطه رو انتخاب کنیم.

$$n(A) = \binom{1}{1} \times \binom{2}{1} \times \binom{3}{1} \times \binom{4}{1} = 24 \Rightarrow P(A) = \frac{24}{210} = \frac{4}{35}$$

۳۳۹. تعداد اعداد طبیعی ۳ رقمی با تکرار ارقام برابر با:

$$9 \times 10 \times 10 = 900$$

حالا به سراغ پیشامد A میریم. رقم صدگان می‌تونه اعداد ۱ تا ۹ باشه. پس صدگان ۹ حالت داره. یکان باید مثل صدگان باشه، سپس فقط یک حالت در یکان می‌تونه قرار بگیره. در دهگان هم، اعداد صفر تا ۹ می‌تونن قرار بگیرن. پس ۱۰ حالت برای دهگان وجود داره.

$$n(A) = 9 \times 10 \times 1 = 90 \Rightarrow P(A) = \frac{90}{900} = \frac{1}{10}$$

ریاضی و آمار ۳

کاربرگی امتحانی

از خود امتحان بگیر!

مجموعه کتاب‌های
پیریتیک



۱۵ امتحان شامل:

۸ امتحان درس به درس در سطح سوالات نهایی

۴ امتحان شبیه‌ساز نهایی نوبت اول و دوم

۳ امتحان نهایی اخیر

• پاسخ‌نامه تشریحی به همراه ریزبارم و نکات آموزشی و مشاوره‌ای



امتحان ۱۴: پایان سال		سؤالات نهایی خرداد ۱۴۰۳		مهر و ماه
رشته: ادبیات و علوم انسانی	پایه: دوازدهم دوره دوم متوسطه	مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه	ساعت شروع: ۷:۳۰ صبح	
سؤالات درس: ریاضی و آمار (۳)	نام و نام خانوادگی:	تاریخ امتحان: خرداد ۱۴۰۳	تعداد صفحه: ۲	

ردیف	سؤالات	صفحه ۱ از ۲	نمره
------	--------	-------------	------

۱	درستی یا نادرستی جمله‌های زیر را مشخص کنید. الف) دنباله $1, 4, 9, 16, \dots$ یک دنباله حسابی است. ب) هرگاه A و B دو پیشامد ناتهی در فضای نمونه S باشند، به طوری که $A - B = A$ و $B - A = B$ در این صورت، دو پیشامد A و B ناسازگار هستند.	درست ☐ نادرست ☐ درست ☐ نادرست ☐	۰/۵
۲	جاهای خالی را با عبارات مناسب پر کنید. الف) به هر یک از نتایج ممکن برای یک آزمایش تصادفی، می‌گویند. ب) احتمال اینکه از بین سه نفر دوست، تولد هیچ دو تای آن‌ها در یک فصل نباشد، برابر است با ج) ریشه‌های چهارم عدد ۷ برابر است با و		۱
۳	گزینه صحیح را انتخاب کنید. الف) تعداد زیرمجموعه‌های ۳ عضوی از مجموعه $A = \{5, 6, 7, 8, 9\}$ که شامل عدد ۷ باشد، کدام است؟ ب) اگر اندازه‌گیری وزن افراد با دو واحد متفاوت (کیلوگرم و پوند) انجام شده باشد، اجرای نادرست کدام گام از چرخه آمار است؟ ج) ضابطه تابعی دنباله $\dots, -\frac{4}{5}, \frac{3}{4}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{2}$ کدام گزینه است؟	☐ ۱۰ (۱) ☐ ۸ (۲) ☐ ۶ (۳) ☐ ۴ (۴) ☐ ۱) بیان مسئله ☐ ۲) طرح و برنامه‌ریزی ☐ ۳) گردآوری و پاک‌سازی داده‌ها ☐ ۴) تحلیل داده‌ها ☐ ۱) $a_n = (-1)^{n+1} \frac{n}{n+1}$ ☐ ۲) $a_n = \frac{-n}{n+1}$ ☐ ۳) $a_n = (-1)^n \frac{n}{n+1}$ ☐ ۴) $a_n = \frac{n}{n+1}$	۰/۷۵
۴	مطابق شکل زیر، میان چهار شهر راه‌هایی وجود دارد. مشخص کنید به چند طریق می‌توان از شهر B به شهر D سفر کرد؟		۰/۷۵
۵	با ارقام ۱، ۰، ۳، ۵، ۷، ۹ و بدون تکرار ارقام، چند عدد چهاررقمی و مضرب ۵ می‌توان نوشت؟		۱/۲۵
۶	هر یک از اعداد طبیعی ۱ تا ۹ را روی کارت‌هایی می‌نویسیم و پس از مخلوط کردن کارت‌ها، به طور تصادفی یک کارت برمی‌داریم. پیشامدهای زیر را مشخص کنید. الف) عدد روی کارت، اول باشد ولی بزرگ‌تر از ۴ نباشد. ب) عدد روی کارت، مجذور کامل و فرد باشد.		۱
۷	گروه المپیاد ادبی شهری، شامل ۵ دانش‌آموز دختر و ۴ دانش‌آموز پسر است. می‌خواهیم به طور تصادفی ۳ نفر را از بین آن‌ها انتخاب کنیم. مطلوب است محاسبه احتمال اینکه: الف) دو دختر و یک پسر انتخاب شود. ب) حداقل ۲ پسر انتخاب شده باشد.		۲
۸	با توجه به نمودارهای جعبه‌ای رسم‌شده، به سؤالات زیر پاسخ دهید. الف) در کدام گروه، گزارش میانگین و انحراف معیار می‌تواند گمراه‌کننده باشد؟ ب) دامنه میان چارکی کدام گروه بزرگ‌تر است؟ ج) در کدام گروه مقدار میانه و میانگین به هم نزدیک‌ترند؟		۰/۷۵

ادامه سؤالات در صفحه دوم»

باسمه تعالی

امتحان ۱۴: پایان سال		سؤالات نهایی خرداد ۱۴۰۳		مهر و ماه
رشته: ادبیات و علوم انسانی		پایه: دوازدهم دوره دوم متوسطه	مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه	ساعت شروع: ۷:۳۰ صبح
سؤالات درس: ریاضی و آمار (۳)		نام و نام خانوادگی:	تاریخ امتحان: خرداد ۱۴۰۳	تعداد صفحه: ۲

ردیف	سؤالات	صفحه ۲ از ۲	نمره
۹	با توجه به دنباله های $a_n = \frac{(-1)^n}{n+1}$ و $b_n = n^2 + 2$ حاصل عبارت $8a_7 + b_7$ را بنویسید.	۰/۷۵	
۱۰	در دنباله بازگشتی $a_{n+1} = 2a_n + n$ با جمله اول $a_1 = 3$ ، چهار جمله اول را به دست آورید.	۰/۷۵	
۱۱	در یک دنباله حسابی، جمله هفتم برابر ۵۳ و جمله بیست و پنجم برابر ۱۰۷ است. الف) جمله اول و اختلاف مشترک دنباله را حساب کنید. ب) جمله پنجاه و یکم دنباله را مشخص کنید.	۱/۵	
۱۲	بین اعداد ۷ و ۲۷ سه عدد را طوری قرار دهید که این پنج عدد با هم، تشکیل دنباله حسابی افزایشی دهند.	۱	
۱۳	مدت زمان مطالعه روزانه دانش آموزی در درس ریاضی و آمار برحسب دقیقه به صورت دنباله زیر است. $10, 15, 20, 25, \dots$ مجموع مدت زمان مطالعه دانش آموز در شانزده روز اول را بیابید. (با استفاده از فرمول مجموع)	۱	
۱۴	برای دنباله هندسی مقابل: الف) نسبت مشترک و جمله عمومی دنباله را بنویسید. ب) رابطه بازگشتی آن را مشخص کنید.	$\frac{1}{2}, \frac{1}{10}, \frac{1}{50}, \frac{1}{250}, \dots$ ۱/۲۵	
۱۵	جمله اول یک دنباله هندسی ۵ و نسبت مشترک آن ۲ است. الف) جمله چندم این دنباله برابر ۶۴۰ است؟ ب) با استفاده از فرمول، مجموع نه جمله اول دنباله را به دست آورید.	۱/۵	
۱۶	عبارت توان دار را به صورت رادیکالی و عبارت رادیکالی را به صورت توان دار بنویسید. الف) $(0/35)^{\frac{1}{4}}$ ب) $\sqrt[4]{4/2}$ ج) $\sqrt[4]{(\frac{1}{6})^3}$ د) $(2\frac{1}{3})^{-\frac{8}{3}}$	۱	
۱۷	حاصل عبارت زیر را به ساده ترین صورت ممکن بنویسید. ($a > 0$) الف) $(\frac{a^{-1}}{a^2})^{-6} \cdot \frac{-1}{a^6}$ ب) $(3)^{\frac{1}{2}} \times (12)^{\frac{1}{2}} \times (0/7)^{-6}$	۱/۵	
۱۸	نمودار تابع نمایی $y = (\frac{1}{3})^x$ را در دستگاه مختصات رسم کنید.	۰/۷۵	
۱۹	شخصی چهل میلیون تومان در یک شرکت تولیدی در راستای حمایت از تولید ملی سرمایه گذاری می کند. اگر در پایان هر سال ۳۰ درصد سود علی الحساب به او پرداخت شود، پس از دو سال سرمایه او چقدر خواهد شد؟	۱	
۲۰	جمع نمرات	«موفق باشید»	

پاسخ امتحان شماره ۱۴

۱ الف) نادرست (۰/۲۵)؛ در دنباله حسابی، مقداری ثابت باید با همه جملات جمع بشه؛ در صورتی که الان چنین اتفاقی رخ نداده:

$$+3 +5 +7 \\ 1, 4, 9, 16, \dots$$

(فصل ۲- درس ۲)

ب) درست (۰/۲۵) (فصل ۱- درس ۲)

۲ الف) برآمد (۰/۲۵)؛ در واقع می توان گفت هر یک از اعضای فضای نمونه، یک برآمد هستند. (فصل ۱- درس ۲)

ب) $\frac{3}{8}$ (۰/۲۵)

$$n(A) = 4 \times 3 \times 2, \quad n(S) = 4 \times 4 \times 4 \Rightarrow P(A) = \frac{4 \times 3 \times 2}{4 \times 4 \times 4} = \frac{3}{8}$$

نفر سوم نفر اول
نفر دوم

(فصل ۱- درس ۲)

ج) $\sqrt[3]{7}$ (۰/۲۵), $-\sqrt[3]{7}$ (فصل ۳- درس ۲)

★ توجه: اگر n عددی زوج و طبیعی و a عددی مثبت باشه، ریشه های n ام عدد a عبارت اند از $\pm \sqrt[n]{a}$. اگر a منفی باشه، ریشه n ام نداره.

۳ الف) گزینه «۳» (۰/۲۵)؛ یک انتخاب اجباری داریم، پس باید ۲ عضو رو از بین اعضای $\{5, 6, 8, 9\}$ انتخاب کنیم که برابر میشه با:

$$\begin{aligned} \text{تعداد زیرمجموعه های مطلوب} &= \binom{4}{2} = \frac{4!}{2! \times 2!} \\ &= \frac{4 \times 3 \times 2!}{2 \times 1 \times 2!} = 6 \end{aligned}$$

(فصل ۱- درس ۱)

ب) گزینه «۲» (۰/۲۵)؛ نحوه انتخاب نمونه تصادفی و شیوه اندازه گیری مربوط به گام دوم چرخه آمار (طرح و برنامه ریزی) است. ضمناً توجه کنیم که حتماً باید از یک واحد اندازه گیری استفاده کنیم نه بیشتر. (فصل ۱- درس ۳)

ج) گزینه «۱» (۰/۲۵)؛ چون جملات به صورت یکی در میان مثبت و منفی هستن، حتماً باید ضریب $(-1)^n$ یا $(-1)^{n+1}$ داشته باشیم، پس گزینه های «۲» و «۴» حذف میشن، حالا کافیه در گزینه «۱» و «۳» به جای n ها اعداد ۱، ۲، ۳ و... رو قرار بدیم. به ترتیب باید به جواب های $\frac{1}{4}$ ، $-\frac{2}{3}$ ، $\frac{3}{4}$ و... برسیم:

$$a_n = (-1)^{n+1} \times \frac{n}{n+1}$$

$$\begin{cases} \xrightarrow{n=1} a_1 = (-1)^2 \times \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2} \\ \xrightarrow{n=2} a_2 = (-1)^3 \times \frac{2}{2+1} = -\frac{2}{3} \\ \xrightarrow{n=3} a_3 = (-1)^4 \times \frac{3}{3+1} = \frac{3}{4} \\ \xrightarrow{n=4} a_4 = (-1)^5 \times \frac{4}{4+1} = -\frac{4}{5} \end{cases}$$

پس همین گزینه درسته و سراغ بررسی گزینه «۳» نمیریم.

(فصل ۲- درس ۱)

۴ طبق شکل داده شده دو مسیر کلی از B به D داریم:

$$\begin{cases} B \xrightarrow{2} A \xrightarrow{2} D: 2 \times 2 = 4 \text{ (۰/۲۵)} \\ B \xrightarrow{2} C \xrightarrow{1} D: 2 \times 1 = 2 \text{ (۰/۲۵)} \end{cases}$$

حال طبق اصل جمع داریم:

$$6 + 2 = 8 \text{ (۰/۲۵): تعداد کل حالت ها}$$

(فصل ۱- درس ۱)

۵ صفر جزء رقم هاست و تکرار هم مجاز نیست، پس باید دو حالت جداگانه در نظر بگیریم:

حالت اول (یکان صفر باشد):

۵	۴	۳	۱
۱	۱	۱	صفر
۳	۳	۳	
۵	۵	۵	
۷	۷	۷	X
۹	X		

$$\Rightarrow \text{تعداد حالت ها} = 5 \times 4 \times 3 \times 1 = 60 \text{ (۰/۵)}$$

حالت دوم (یکان ۵ باشد):

۴	۴	۳	۱
۱	۰	۰	۵
۳	۱	۱	
۷	۳	۳	
۹	۷	X	
	X		

$$\Rightarrow \text{تعداد حالت ها} = 4 \times 4 \times 3 \times 1 = 48 \text{ (۰/۵)}$$

باز هم طبق اصل جمع خواهیم داشت:

$$60 + 48 = 108 \text{ (۰/۲۵): تعداد کل اعداد مطلوب}$$

(فصل ۱- درس ۱)

۶ الف) از بین اعداد ۱ تا ۹ باید اعداد اولی رو انتخاب کنیم که بزرگ تر از ۴ نباشن: $\{2, 3\}$ (۰/۵)

نکته: دقت داریم که عدد ۱ نه اول است و نه مرکب.

ب) عددی مجذور کامله که جذر کامل داشته باشه، یعنی بدون محاسبه از رادیکال خارج بشه. از بین اعداد ۱ تا ۹ اعداد مربع کامل عبارت اند از ۱، ۴، ۹ ولی گفته شده که عدد مطلوب، فرد هم باشد، لذا: $\{1, 9\}$ (فصل ۱- درس ۲)

۷ ابتدا $n(S)$ رو به دست می آوریم:

$$n(S) = \binom{9}{3} = \frac{9!}{6! \times 3!} = \frac{9 \times 8 \times 7 \times 6!}{6! \times 3 \times 2 \times 1} = 84 \text{ (۰/۲۵)}$$

الف)

$$n(A) = \binom{5}{2} \times \binom{4}{1} = 10 \times 4 = 40 \text{ (۰/۵)}$$

$$\Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{40}{84} = \frac{10}{21} \text{ (۰/۲۵)}$$

ب) حداقل ۲ پسر باید انتخاب بشن، یعنی ۲ پسر و ۱ دختر یا ۳ پسر:

$$n(B) = \binom{4}{2} \times \binom{5}{1} + \binom{4}{3} = 6 \times 5 + 4 = 34 \text{ (۰/۲۵)}$$

$$\Rightarrow P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{34}{84} = \frac{17}{42} \text{ (۰/۲۵)}$$

(فصل ۱- درس ۲)

۱۲ گفته شده دنباله، افزایشیه پس ۷ جمله اول و ۲۷ جمله آخر است. برای پیدا کردن d دو راه داریم:

روش اول:

نکته: با داشتن جمله اول (a) و آخر (b) و تعداد واسطه‌ها (k) می‌توان اختلاف مشترک (d) رو از رابطه زیر محاسبه کرد:

$$d = \frac{b-a}{k+1}$$

با استفاده از نکته بالا داریم:

$$d = \frac{b-a}{k+1} = \frac{27-7}{3+1} = \frac{20}{4} = 5 \quad (۰/۲۵)$$

روش دوم: باز کردن جمله آخر:

$$a_5 = 27 \Rightarrow a + 4d = 27 \Rightarrow 7 + 4d = 27 \Rightarrow 4d = 20 \Rightarrow d = 5 \quad (۰/۲۵)$$

روش سوم: استفاده از فرمول $d = \frac{a_m - a_n}{m - n}$

$$d = \frac{27-7}{5-1} = \frac{20}{4} = 5 \quad (۰/۲۵)$$

حالا واسطه‌ها رو به دست میاریم:

$$7, \overset{+5}{\textcircled{12}}, \overset{+5}{\textcircled{17}}, \overset{+5}{\textcircled{22}}, 27 \quad (۰/۲۵ \text{ هر مورد})$$

(فصل ۲- درس ۲)

۱۳ با یک دنباله حسابی مواجه هستیم که در آن $a = 10$ و $d = 5$ است، لذا:

$$S_n = \frac{n}{2}(2a + (n-1)d) \xrightarrow[n=16, d=5]{(۰/۵)} S_{16} = \frac{16}{2}(2(10) + 15(5))$$

$$= \frac{8 \times 95}{(۰/۲۵)} = \frac{760}{(۰/۲۵)}$$

(فصل ۲- درس ۲)

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{10}, \frac{1}{50}, \dots \Rightarrow r = \frac{a_2}{a_1} = \frac{10}{1} = \frac{2}{10} = \frac{1}{5} \quad (۰/۲۵) \quad \text{الف} \quad 14$$

$$a_n = a \cdot r^{n-1} = \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} \quad (۰/۵) \quad \text{جمله عمومی دنباله:}$$

$$a_{n+1} = r \times a_n \Rightarrow a_{n+1} = \frac{1}{5} a_n \quad \text{ب)}$$

البته همیشه باید جمله اول رو هم در کنار رابطه بازگشتی بنویسیم، لذا:

$$\begin{cases} a_{n+1} = \frac{1}{5} a_n \\ a_1 = \frac{1}{2} \end{cases} \quad \text{یا} \quad \begin{cases} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{5} \\ a_1 = \frac{1}{2} \end{cases} \quad (۰/۵)$$

(فصل ۳- درس ۱)

$$a_1 = 5, r = 2, a_n = 640, n = ? \quad \text{الف} \quad 15$$

$$a_n = a \cdot r^{n-1} \Rightarrow 640 = 5 \times 2^{n-1} \Rightarrow 2^{n-1} = \frac{640}{5}$$

$$\Rightarrow 2^{n-1} = 128 \Rightarrow 2^{n-1} = 2^7 \Rightarrow n-1 = 7 \Rightarrow n = 8 \quad (۰/۵)$$

$$S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r} \xrightarrow[n=9]{(۰/۵)} S_9 = \frac{5(1-2^9)}{1-2}$$

$$\Rightarrow \frac{5(1-512)}{-1} = \frac{5(-511)}{-1} = 2555 \quad (۰/۵)$$

(فصل ۳- درس ۱)

۸

نکته مهم: در نمودار جعبه‌ای، هر چقدر سبیل‌ها متقارن‌تر باشن، میانه و میانگین به هم نزدیک‌تر هستن. ضمناً آگه طول یکی از سبیل‌ها بیشتر از طول سبیل دیگه باشه، به این معناست که باید از میانه و دامنه میان چارکی استفاده کنیم نه میانگین و انحراف معیار.

الف) گروه دوم (۰/۲۵): چون طول سبیل چپ از طول سبیل راست بیشتره، پس بهتره در این گروه از میانه و دامنه میان چارکی استفاده کنیم.

ب) گروه اول (۰/۲۵): با توجه به نمودار داریم:

$$\text{گروه اول: } IQR = Q_3 - Q_1 = 18 - 15 = 3$$

$$\text{گروه دوم: } IQR = Q_3 - Q_1 = 16 - 14 = 2$$

ج) گروه اول (۰/۲۵): چون سبیل‌ها متقارن هستن (طول سبیل‌ها برابرن).

(فصل ۱- درس ۳)

۹ فقط کافیه دو جای گذاری ساده انجام بدیم:

$$a_n = \frac{(-1)^n}{n+1} \Rightarrow a_3 = \frac{(-1)^3}{3+1} = \frac{-1}{4} \quad (۰/۲۵)$$

$$b_n = n^2 + 2 \Rightarrow b_2 = 2^2 + 2 = 4 + 2 = 6 \quad (۰/۲۵)$$

$$\Rightarrow 8a_3 + b_2 = 8\left(-\frac{1}{4}\right) + 6 = -2 + 6 = 4 \quad (۰/۲۵)$$

(فصل ۲- درس ۱)

$$a_{n+1} = 2a_n + n, a_1 = 3$$

$$n=1 \Rightarrow a_2 = 2a_1 + 1 = 2(3) + 1 = 7 \quad (۰/۲۵)$$

$$n=2 \Rightarrow a_3 = 2a_2 + 2 = 2(7) + 2 = 16 \quad (۰/۲۵)$$

$$n=3 \Rightarrow a_4 = 2a_3 + 3 = 2(16) + 3 = 35 \quad (۰/۲۵)$$

(فصل ۲- درس ۱)

۱۱

نکته: در دنباله حسابی با داشتن جملات a_m و a_n می‌توانیم

اختلاف مشترک را از فرمول $d = \frac{a_m - a_n}{m - n}$ یا $d = \frac{a_n - a_m}{n - m}$ به دست بیاریم یا اینکه جملات رو باز کرده و دستگاه حاصل رو حل کنیم.

الف) روش اول:

$$d = \frac{a_{25} - a_7}{25 - 7} = \frac{107 - 53}{18} = \frac{54}{18} = 3 \quad (۰/۲۵)$$

حالا به دلخواه a_7 یا a_{25} رو باز کرده تا a هم پیدا بشه:

$$a_7 = 53 \Rightarrow a + 6d = 53 \Rightarrow a + 6(3) = 53 \Rightarrow a = 35 \quad (۰/۲۵)$$

روش دوم: هر دو جمله رو باز کرده و دستگاه حاصل رو حل می‌کنیم:

$$\begin{cases} a_7 = 53 \\ a_{25} = 107 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + 6d = 53 \\ a + 24d = 107 \end{cases} \quad (۰/۵)$$

$$\begin{array}{l} \text{ضرب یکی از} \\ \text{روابط در } (-1) \end{array} \left\{ \begin{array}{l} a - 6d = -53 \\ a + 24d = 107 \end{array} \right.$$

$$18d = 54 \Rightarrow d = 3 \quad (۰/۲۵)$$

$$a_7 = 53 \Rightarrow a + 6d = 53 \Rightarrow a + 6(3) = 53 \Rightarrow a = 35 \quad (۰/۲۵)$$

$$a_{51} = a + 50d = 35 + 50(3) = 35 + 150 = 185$$

ب)

(فصل ۲- درس ۲)

۱۶

نکته:

۱ عدد $a^{\frac{m}{n}}$ را می‌توانیم به شکل $\sqrt[n]{a^m}$ بنویسیم ($a > 0$) و برعکس.۲ عدد $a^{-\frac{m}{n}}$ را می‌توانیم به شکل $(\frac{1}{a})^{\frac{m}{n}}$ و سپس به شکل $\sqrt[n]{(\frac{1}{a})^m}$ تبدیل کنیم.

(الف)

$$(\frac{1}{0.25})^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{(\frac{1}{0.25})^1} \quad (0.25)$$

(ب)

$$\sqrt[3]{4/2} = (\frac{4}{2})^{\frac{1}{3}} \quad (0.25)$$

(ج)

$$\sqrt[4]{(\frac{1}{6})^2} = (\frac{1}{6})^{\frac{2}{4}} \quad (0.25)$$

(د)

$$(\frac{1}{2})^{-\frac{4}{5}} = (\frac{2}{1})^{\frac{4}{5}} = (\frac{2}{1})^{\frac{4}{5}} = \sqrt[5]{(\frac{2}{1})^4} \quad (0.25)$$

(فصل ۳-درس ۲)

۱۷

نکته: اگر $a, b > 0$ آن‌گاه داریم:

$$1 \quad (a^m)^n = a^{m \cdot n}$$

$$2 \quad (\frac{a}{b})^m = \frac{a^m}{b^m}$$

$$3 \quad a^m \times b^m = (ab)^m, \quad a^m \times a^n = a^{m+n}$$

$$4 \quad \frac{a^m}{b^m} = (\frac{a}{b})^m, \quad \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

۵ حاصل هر عدد مثبت که به توان صفر برسه برابر با ۱ میشه.

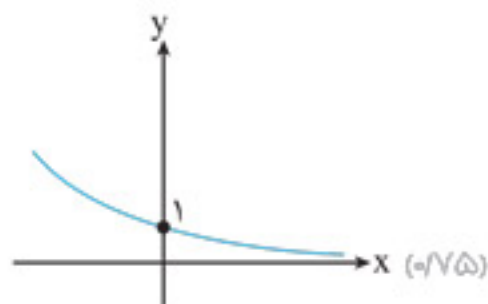
(الف)

$$(\frac{a^{-\frac{1}{2}}}{a^{-\frac{1}{6}}})^{-6} = \frac{a^{(-\frac{1}{2})(-6)}}{a^{(-\frac{1}{6})(-6)}} \quad (0.25) = \frac{a^3}{a^1} = a^{3-1} = a^2 \quad (0.25)$$

(ب)

$$3^{\frac{1}{2}} \times 12^{\frac{1}{2}} \times (\frac{1}{9})^{\frac{1}{2}} = \frac{(3 \times 12)^{\frac{1}{2}}}{(\frac{1}{9})^{\frac{1}{2}}} \quad (0.25) = \frac{36^{\frac{1}{2}}}{(\frac{1}{9})^{\frac{1}{2}}} \quad (0.25) = \frac{\sqrt{36}}{\frac{1}{3}} = 6 \quad (0.25)$$

(فصل ۳-درس ۲)

۱۸ عدد پایه برابر $\frac{1}{3}$ است و می‌دونیم که $0 < \frac{1}{3} < 1$ پس نمودار تابع نمایی به شکل نزولی خواهد بود:

(فصل ۳-درس ۳)

۱۹ با یک مسئله رشد مواجه هستیم:

$$c = 40, r = \frac{30}{100} = 0.3, t = 2$$

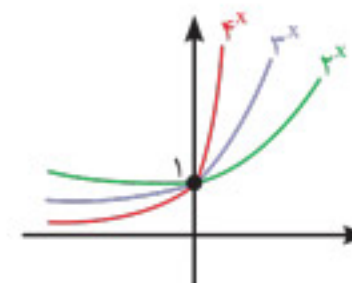
$$f(t) = c(1+r)^t \Rightarrow f(2) = 40(1+0.3)^2 = 40(\frac{13}{10})^2 = 40 \times 1.69 \quad (0.25)$$

میلیون تومان (۰.۲۵) ≈ 67.6

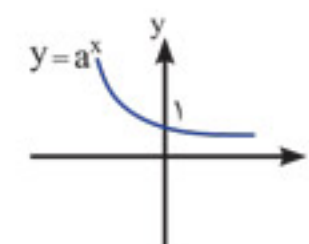
(فصل ۳-درس ۳)

ویژگی‌های این نمودار:

- محور x ها را قطع نمی‌کند.
- $(0, 1)$ نقطه ثابت و محل تلاقی با محور y ها است.
- تابع صعودی (افزایشی) است.
- با افزایش مقدار a به ازای x های مثبت، نمودار حاصل بالاتر قرار می‌گیرد و به ازای x های منفی، نمودار پایین‌تر قرار می‌گیرد.



۲ اگر در تابع نمایی مقدار $0 < a < 1$ باشد، تابع نمایی نزولی است.



ویژگی‌های این نمودار:

- محور x ها را قطع نمی‌کند.
- $(0, 1)$ نقطه ثابت و محل تلاقی با محور y ها است.
- تابع نزولی (کاهشی) است.
- با افزایش مقدار a به ازای x های مثبت، نمودار حاصل بالاتر قرار می‌گیرد و به ازای x های منفی، نمودار پایین‌تر قرار می‌گیرد.



رشد و زوال نمایی

۱ معادله کلی زوال نمایی:

$$f(t) = c(1-r)^t$$

مقدار نمایی تابع: $f(t)$
 مقدار اولیه: c
 درصد کاهش: r
 زمان: t

۲ معادله کلی رشد نمایی:

$$f(t) = c(1+r)^t$$

مقدار نمایی: $f(t)$
 مقدار اولیه: c
 درصد افزایش: r
 زمان: t

خلاصه کیسولی ریاضی و آمار ۳

مجموعه کتاب‌های
ریاضی و آمار

- خلاصه کاربردی مطالب مهم به صورت درس به درس
- فرمول‌های پرتکرار و مهم نهایی
- حل چندین مثال برای یادگیری بهتر مفاهیم
- نکات مفهومی مرتبط با هر قسمت

تطبیق حداکثری با
سؤالات نهایی ۱۴۰۴
ویژه
امتحانات نهایی
۱۴۰۵

قیمت بسته بیست و یک:
۳۱۰۰۰۰ تومان



خلاصه درس

فصل اول: آمار و احتمال

درس اول: شمارش

اصل جمع و اصل ضرب

۱ حرف (یا) نشان دهنده اصل جمع است.

۲ در اصل جمع، عمل در یک مرحله و به طور غیرهمزمان انجام پذیر است.

مثال

از بین ۴ پیراهن و ۳ تیشرت، به چند طریق می توان فقط یک لباس انتخاب کرد؟

پاسخ

یک لباس یعنی یک تیشرت یا یک پیراهن، طبق اصل جمع داریم:

$$\begin{array}{c} \text{تیشرت} \\ \uparrow \\ 3 \end{array} + \begin{array}{c} \text{پیراهن} \\ \uparrow \\ 4 \end{array} = 7$$

۳ حرف (و) نشان دهنده اصل ضرب است.

۴ در اصل ضرب، عملی در دو یا چند مرحله و به طور همزمان انجام پذیر است.

مثال

از بین ۵ پیراهن و ۷ شلوار به چند طریق می توان پیراهن و شلوار را بست کرد؟

پاسخ

پیراهن و شلوار را باید به طور همزمان انتخاب کرد، طبق اصل ضرب داریم:

$$\begin{array}{c} \text{شلوار} \\ \uparrow \\ 7 \end{array} \times \begin{array}{c} \text{پیراهن} \\ \uparrow \\ 5 \end{array} = 35$$

فاکتوریل (!)

۱ فاکتوریل هر عدد از ضرب خودش شروع می شود تا به عدد ۱ برسد!

$$n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times (n-3) \times \dots \times 1$$

$$\xrightarrow{\text{مثال}} 4! = 4 \times (4-1) \times (4-2) \times (4-3) = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$$

$$0! = 1, 1! = 1$$

۲ طبق قرارداد داریم:

۳ دقت کنید که چهار عمل اصلی (+ , - , × , ÷) روی فاکتوریل ها به صورت مستقیم قابل انجام نیست.

$$\text{جمع} \rightarrow \begin{cases} 2! = 2 \\ 4! = 24 \end{cases} \Rightarrow 2! + 4! = 2 + 24 = 26$$

$$\text{تفریق} \rightarrow \begin{cases} 5! = 120 \\ 3! = 6 \end{cases} \Rightarrow 5! - 3! = 120 - 6 = 114$$

$$\text{ضرب} \rightarrow \begin{cases} 3! = 6 \\ 4! = 24 \end{cases} \Rightarrow 3! \times 4! = 6 \times 24 = 144$$

$$\text{تقسیم} \rightarrow \frac{6!}{2!} \neq 3! \Rightarrow \frac{6!}{2!} = \frac{720}{2} = 360$$

$$\text{توان} \rightarrow (3!)^2 \neq 9! \Rightarrow 3! \times 3! = 6 \times 6 = 36$$

جایگشت

۱ جایگشت n تایی از n شیء:

مثال

با حروف A, B, N, W, Z چند کلمه ۵ حرفی بدون تکرار می توان ساخت؟ (معنی دار بودن کلمات مهم نیست).

پاسخ

برای حل این مسائل لازم است جایگشت آن ها را رسم کرده و سپس پر کنیم:

$$\boxed{5} \times \boxed{4} \times \boxed{3} \times \boxed{2} \times \boxed{1} = 5!$$

۲ کنار هم قرار گرفتن چند شیء خاص: گاهی اوقات می خواهیم افراد یا اشیا یا حروف خاصی همیشه کنار هم باشند. در این گونه سؤالات آن اشیا یا افراد را یک مجموعه به هم چسبیده فرض می کنیم؛ یعنی آن ها را داخل یک بسته قرار می دهیم؛ سپس تعداد اشیا بیرون بسته و خود بسته را شمرده و با فاکتوریل می نویسیم و سپس آن را در تعداد اشیا داخل بسته با فاکتوریل ضرب می کنیم.

مثال

با حروف کلمه «computer» چند کلمه ۸ حرفی می توان ساخت به طوری که در همه آن ها حروف c, o و m کنار هم باشند؟

پاسخ

حروف c, o و m را در یک بسته قرار می دهیم، حروف دیگر ۵ حرف هستند که با این بسته، ۶ بسته داریم. از طرفی حروف c, o و m داخل بسته خود به ۳! حالت جابه جا می شوند:

$$\boxed{\text{com}} \boxed{} \boxed{} \boxed{} \boxed{} \boxed{} = 6! \times 3!$$

بسته ۶

۳ جایگشت های یک در میان:

الف) حالت برابر مثال ۳ دختر و ۳ پسر به صورت یک در میان کنار هم قرار گیرند.

$$\checkmark (\text{پ}, \text{د}, \text{پ}, \text{د}, \text{پ}, \text{د}, \text{پ}, \text{د})$$

$$\checkmark (\text{د}, \text{پ}, \text{د}, \text{پ}, \text{د}, \text{پ}, \text{د}, \text{پ})$$

۳! × ۳! جایگشت قرار گرفتن دخترها و پسرهاست و چون به دو صورت بالا می توان نوشت، آن را در ۲! ضرب می کنیم.

ب) حالت نابرابر مثال ۳ دختر و ۲ پسر به صورت یک در میان در کنار هم قرار بگیرند.

$$\checkmark (\text{د}, \text{پ}, \text{د}, \text{پ}, \text{د}, \text{پ})$$

$$\times (\text{د}, \text{د}, \text{پ}, \text{پ}, \text{د}, \text{د})$$

$$3! \times 2! \text{ تعداد کل حالت ها}$$

حواستون باشه در حالت نابرابر باید از اشیائی که تعداد بیشتری دارند، شروع کنیم.

ترتیب (تبدیل) و ترکیب

۱ تبدیل: محل قرار گرفتن و ترتیب مهم است (یعنی نفر اول، دوم و...). $P(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!} \quad (n \geq r)$

مثال

از میان ۱۰ نفر، چگونه می توان سه ردیف شغلی (با حقوق های متفاوت) انتخاب کرد؟

پاسخ

در اینجا ترتیب انتخاب ها اهمیت دارد (به خاطر تفاوت در حقوق ها)؛ پس از ترتیب استفاده می کنیم:

$$\binom{10}{3} = \frac{10!}{3!}$$

۲ ترکیب: در اینجا محل قرار گرفتن و ترتیب مهم نیست.

$$C(n, r) = \frac{n!}{(n-r)! \times r!} \quad (n \geq r) \text{ (انتخاب } r \text{ شیء از } n \text{ شیء)}$$

مثال

اگر از کیسه ای با ۱۰ مهره سیاه و ۷ مهره سفید، بخواهیم ۳ مهره بیرون بیاوریم، این کار به چند طریق امکان پذیر است؟

پاسخ

چون در اینجا ترتیب مهره ها اهمیتی ندارد، از ترکیب استفاده می کنیم:

$$\binom{10}{3} = \frac{10!}{(10-3)!3!}$$

۳ اگر از n شیء، r شیء را طوری انتخاب کنیم که k شیء در بین انتخاب شده ها باشد، تعداد حالت های

انتخاب برابر $\binom{n-k}{r-k}$ می شود (r شیء را انتخاب شده فرض می کنیم).

۴ اگر از n شیء بخواهیم k شیء خاص انتخاب نشوند، باید r شیء را از (n-k) شیء انتخاب کنیم و

تعداد حالت ها برابر $\binom{n-k}{r}$ می شود.

۵ تعداد زیرمجموعه های r عضوی از یک مجموعه n عضوی:

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)!r!}$$