

زود دیز
امکان



مؤلفان:
دکتر حسین کریمی
حسین اسماعیلی
یوسف دستان

ریاضی دوازدهم تجربی

۵
مجله

مقدمه

سال هاست که دانش آموزان سال دوازدهم تجربی به دنبال منبعی جامع هستند که بتوانند ضمن مرور کامل مطالب، به سرعت جهت امتحان نهایی آماده شوند و نمره ۲۰ بگیرند. این کتاب با هدف دستیابی به این مهم تألیف شده است. هر فصل کتاب شامل سه بخش زیر است که هر بخش را به تفصیل خدمت شما عزیزان توضیح می‌دهیم:

درسنامه

درسنامه‌های این کتاب مستقیماً امتحان نهایی را هدف گرفته و از آوردن مطالب اضافی، حاشیه‌ای، خسته‌کننده و خارج از کتاب درسی پرهیز شده است. در واقع درسنامه‌ها طوری نوشته شده‌اند که دانش‌آموز با خواندن آن‌ها، همه مطالب مورد نیاز را فرا گرفته و بتواند تمام سؤالات امتحان نهایی را به راحتی پاسخ دهد. خبر خوبی که برایتان داریم این است که تمام سؤالات امتحانات نهایی چند سال اخیر به همراه پاسخ‌های واقعاً تشریحی در این درسنامه‌ها آورده شده و شما با خواندن درسنامه‌ها عملاً بر سؤالات امتحانات نهایی برقرار شده نیز مسلط خواهید شد.

آزمون‌های صحیح یا غلط

یکی از خفن‌ترین و جدیدترین بخش‌های طلایی کتاب ما است که شبیه آن را در هیچ کتابی ندیده‌اید. این آزمون‌ها، شاهکاری از مؤلفین بوده که سؤالات زیبا، حرفه‌ای و غیرچالشی آن‌ها، بسیار هدفمند و موشکافانه از متن کتاب درسی و سؤالات امتحانات نهایی به گونه‌ای طرح شده‌اند که فقط معلومات شما را مورد سنجش قرار دهند و مفاهیم کتاب و تمام نکات موجود در درس‌ها را بدون هیچ دشواری برایتان مرور کنند. هم چنین چیدمان سؤالات به قدری منظم، روان و با ظرافت انجام شده که مرور هر فصل را برایتان بسیار لذت بخش کرده و احساس بسیار خوبی هنگام حل آن‌ها به شما دست خواهد داد. با زدن این آزمون‌ها، یک جمع‌بندی تمام عیار از آن فصل کرده و با تمام تیپ‌های مهم سؤالات امتحانی قابل طرح در سر جلسه امتحان آشنا می‌شوید.

تا اینجا کتاب یعنی با مطالعه بخش اول و دوم هر فصل شما آمادگی لازم برای شرکت در هر آزمونی را به دست آورده‌اید اما برایتان یک سورپرایز دیگر هم آماده کرده‌ایم و آن بخش سوم هر فصل است. این شما و این بخش سوم فصل‌ها:

آزمون‌های جامع

این آزمون‌ها به طرز وحشتناکی عالی هستند! نه تعریف نیست واقعیت، انگار سر جلسه امتحان نهایی نشسته‌اید. اجازه بدین ویژگی‌های این آزمون‌ها را تیتروار خدمتان عرض کنیم:

- ۱ پوشش تمام تمرینات مهم کتاب درسی به سبک امتحانات نهایی
- ۲ بررسی تمام تیپ سؤالات امتحانات نهایی برگزار شده و برگزار نشده!
- ۳ پاسخ‌های واقعاً تشریحی به سبک پاسخ‌های امتحانات نهایی به گونه‌ای که با خواندن آن‌ها یاد می‌گیرید که چگونه سر جلسه امتحان، پاسخ‌نویسی حرفه‌ای انجام بدهید و اجازه ندهید نمره‌ای به خاطر ناقص نوشتن پاسخ از شما کسر شود!

کانال تلگرام



عضویت در کانال

در راستای کمک به دانش‌آموزان و برطرف کردن سؤالات احتمالی که حین خواندن کتاب با آن‌ها روبه‌رو می‌شوند، تصمیم گرفتیم کانالی راه‌اندازی کنیم که پل ارتباطی شما با مؤلفین کتاب باشد. در این کانال علاوه بر رفع اشکالات دانش‌آموزان، به روزترین مطالب ریاضی منطبق با امتحان نهایی را قرار خواهیم داد. این مطالب شامل نمونه سؤال‌های امتحانی به همراه حل آن با voice (ویس)، تدریس مباحث مختلف و حل آزمون‌های برگزار شده مؤسسات مختلف است. پیشنهاد می‌کنیم حتماً در کانال تلگرام [@F20riazi](#) عضو شوید و از مطالب آن استفاده کنید.

فهرست



۴۰	۳۴	۳۰	۸
پاسخ تشریحی	آزمون‌های جامع	آزمون صحیح یا غلط	درسنامه‌های تیپ‌بندی شده



۸۰	۷۶	۷۲	۶۲
پاسخ تشریحی	آزمون‌های جامع	آزمون صحیح یا غلط	درسنامه‌های تیپ‌بندی شده



۱۱۵	۱۱۰	۱۰۵	۹۴
پاسخ تشریحی	آزمون‌های جامع	آزمون صحیح یا غلط	درسنامه‌های تیپ‌بندی شده



۱۶۳	۱۵۴	۱۴۸	۱۳۲
پاسخ تشریحی	آزمون‌های جامع	آزمون صحیح یا غلط	درسنامه‌های تیپ‌بندی شده

فهرست

فصل کاربرد مشق



۲۰۸

پاسخ
تشریحی

۲۰۲

آزمون‌های
جامع

۱۹۹

آزمون
صحیح
یا غلط

۱۸۸

درسنامه‌های
تیپ‌بندی
شده

فصل هندسه



۲۵۵

پاسخ
تشریحی

۲۴۹

آزمون‌های
جامع

۲۴۴

آزمون
صحیح
یا غلط

۲۲۸

درسنامه‌های
تیپ‌بندی
شده

فصل احتمال



۲۸۶

پاسخ
تشریحی

۲۸۴

آزمون‌های
جامع

۲۸۱

آزمون
صحیح
یا غلط

۲۷۶

درسنامه‌های
تیپ‌بندی
شده

امتحان نهایی

۲۹۸

پاسخ تشریحی
آزمون‌ها

۲۹۶

شهریور ماه
۱۴۰۴

۲۹۴

خرداد ماه
۱۴۰۴

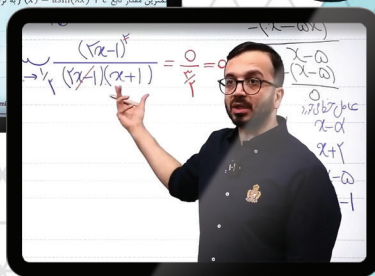
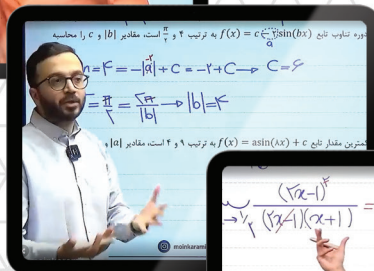


نوبت اول (۲)

۲۹۲

نوبت
اول
(۱)

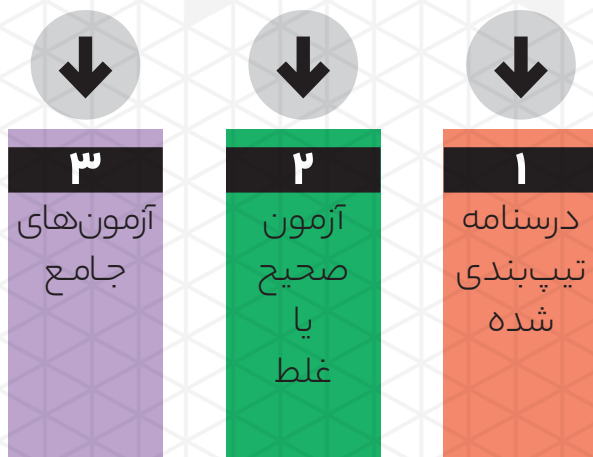
۲۰ ساعت ویدئو آموزشی



لینک ورود به
ویدئوهای آموزشی

فصل

تابع



فرار از
اشتباه



تذکر



یادآوری



تعریف



نتیجه



روش حل



مثال



نکته



دید
ویژه

بخش اول:

درست‌نامه تیپ‌بندی شده

۱ توابع چند جمله‌ای

۲ توابع صعودی و توابع نزولی

۳ ترکیب توابع

۴ رسم نمودار $y = |f(x)|$

۵ تبدیل نمودار توابع

۶ تابع وارون

تیپ ۱

توابع چند جمله‌ای

تیپ ۱: جای خالی یا صحیح و غلط از تعریف

توابع چند جمله‌ای و مفاهیم آن می‌دهند. پس به مفاهیم زیر توجه کنید:

تیپ ۲: تابع چند جمله‌ای درجه n

هر تابع به صورت $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ را که در آن $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$ اعداد حقیقی و n یک عدد صحیح نامنفی و $a_n \neq 0$ است، یک تابع چند جمله‌ای از درجه n می‌نامیم. دامنه این توابع، مجموعه اعداد حقیقی است. (شهریور ۱۴۰۰)

تیپ ۳: تابع $y = \sqrt{3}x^3 - \pi x + 1$ یک تابع چند جمله‌ای است، زیرا توان‌های x اعدادی صحیح و نامنفی می‌باشند. یادتان باشد، ضرایب می‌توانند هر عدد حقیقی باشند، مثلاً $\sqrt{3}$ هیچ مشکلی برای ما ایجاد نمی‌کند. (شهریور ۱۴۰۲)

تیپ ۴: تابع $y = 2x(1 - 3x^2) + 1$ یک تابع چند جمله‌ای از درجه سوم است. زیرا اگر ضابطه تابع را ساده کنیم، به صورت $y = -6x^3 + 2x + 1$ درمی‌آید. (دی ۱۴۰۱)

پس یادتان باشد، برای پیدا کردن درجه چند جمله‌ای‌ها، ابتدا آن‌ها را تا حد امکان ساده کنید و سپس بزرگ‌ترین توان را به عنوان درجه در نظر بگیرید.

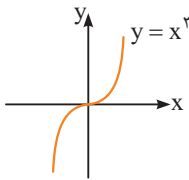
تیپ ۵: جمله «تابع $f(x) = x(x^2 - 1)$ یک تابع چند جمله‌ای از درجه دو است» درست است یا نادرست؟ (خرداد خارج ۱۴۰۳)

نادرست، زیرا: $f(x) = x(x^2 - 1) = x^3 - x$ تابع چند جمله‌ای از درجه ۳ است.

تیپ ۶: تابع ثابت $y = c$ و تابع خطی $y = ax + b$ مثال‌هایی از تابع چند جمله‌ای و به ترتیب با درجه‌های ۰ و ۱ هستند.

تیپ ۷: تابع درجه سوم

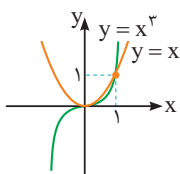
تابع چند جمله‌ای $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a \neq 0$) یک تابع درجه ۳ است که دامنه و بُرد آن $\mathbb{R}$ است و نمودار مهم‌ترین آن‌ها یعنی $y = x^3$ به صورت زیر است:



تیپ ۸: معمولاً در امتحانات از ما می‌خواهند نمودارهایی به صورت $y = (x \pm a)^3 \pm b$ را رسم کنیم که به کمک انتقال که در سال قبل خوانده‌اید، به راحتی قابل رسم هستند. در درس‌نامه‌های جلوتر، مثال‌هایی از این تیپ سوالات آورده‌ایم. خیالتان راحت. (شهریور ۱۴۰۲)

تیپ ۹: مقایسه رفتار تابع $y = x^2$ و $y = x^3$

با توجه به نمودار مقابل، در بازه‌های $0 < x < 1$ و $x > 1$ نمودار $y = x^2$ بالاتر از $y = x^3$ قرار دارد. (دی ۱۴۰۱)



از این نکته بارها در امتحانات نهایی سؤال به صورت جای خالی یا صحیح و غلط مطرح شده است.

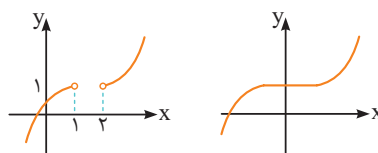
تیپ ۱۰: آیا نمودار تابع $y = x^2$ در بازه $(0, 1)$ پایین‌تر از نمودار تابع $y = x^3$ است؟ (دی ۱۴۰۰ و ۱۴۰۱)

با توجه به نکته فوق، جواب «خیر» است.

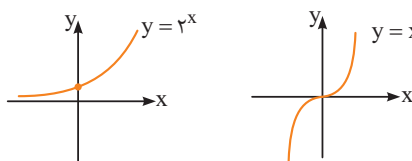
تیپ ۱: جای خالی یا صحیح و غلط از مفاهیم صعودی و نزولی می‌دهند. پس نکات زیر را خوب به خاطر بسپارید.

☀ اگر برای هر دو نقطه x_1 و x_2 از مجموعه A ($A \subseteq D_f$) که $x_1 < x_2$ داشته باشیم:

① $f(x_2) \geq f(x_1)$ ، آن‌گاه f صعودی است.

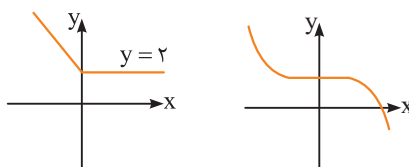


② $f(x_2) > f(x_1)$ ، آن‌گاه f اکیداً صعودی است.

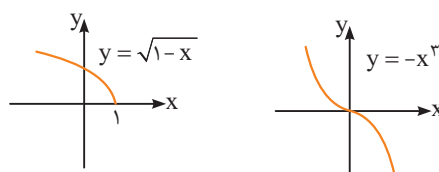


(خرداد ۱۴۰۱)

③ $f(x_2) \leq f(x_1)$ ، آن‌گاه f نزولی است.



④ $f(x_2) < f(x_1)$ ، آن‌گاه f اکیداً نزولی است.



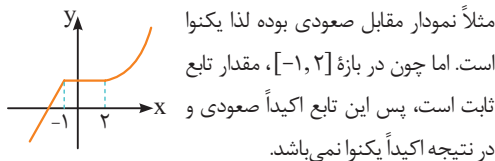
⚡ نکات مهم این بخش به صورت زیر هستند:

① به تابعی که اکیداً صعودی یا اکیداً نزولی باشد، تابع اکیداً یکنوا می‌گوییم.

② به تابعی که صعودی یا نزولی باشد، تابع یکنوا می‌گوییم.

③ توابع اکیداً یکنوا، همواره یکنوا هستند. (دی ۹۹ خارج)

④ توابع یکنوا ممکن است اکیداً یکنوا باشند، شاید هم نباشند.



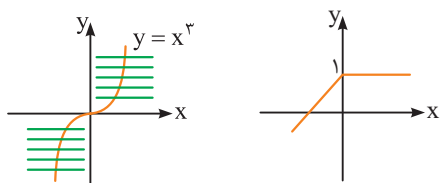
مثلاً نمودار مقابل صعودی بوده لذا یکنوا است. اما چون در بازه $[-1, 2]$ ، مقدار تابع ثابت است، پس این تابع اکیداً صعودی و در نتیجه اکیداً یکنوا نمی‌باشد.

⑤ تابع f را در یک بازه ثابت گوییم، اگر برای تمام مقادیر x در این بازه، مقدار f ثابت باشد. مثلاً تابع ثابت $f(x) = 2$.

توابع ثابت، $f(x) = a$ در یک بازه، هم صعودی و هم نزولی هستند. چون a هر عدد حقیقی می‌تواند باشد، لذا بی‌شمار تابع ثابت و در نتیجه بی‌شمار تابع هم صعودی و هم نزولی داریم. (خرداد ۹۹ و ۱۴۰۲)

⑥ هر تابع اکیداً یکنوا، یک به یک است. (شهریور ۹۹) ولی توابع

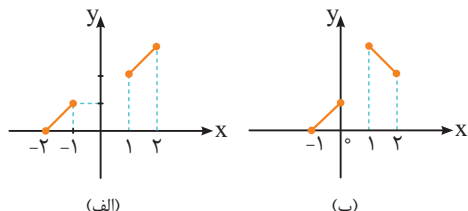
یکنوا ممکن است یک‌به‌یک باشند، شاید هم یک به یک نباشند! پس جمله «هر تابع یکنوا، همواره یک‌به‌یک است» غلط است. (شهریور ۹۹ و دی ۱۴۰۱)



تابع یکنوا (صعودی) بوده ولی یک‌به‌یک نمی‌باشد. (خط افقی نمودار تابع را در بی‌شمار نقطه قطع می‌کند).

تابع یکنوا (اکیداً یکنوا) و یک‌به‌یک (هر خط افقی در یک نقطه نمودار را قطع می‌کند).

⑦ توابع یک‌به‌یک، ممکن است اکیداً یکنوا باشند، شاید هم اکیداً یکنوا نباشند. مثلاً در شکل زیر قسمت (الف)، تابع یک‌به‌یک بوده و اکیداً یکنوا است. ولی در شکل (ب) تابع یک‌به‌یک بوده ولی اکیداً یکنوا نمی‌باشد، زیرا در بازه $[-1, 0]$ اکیداً صعودی و در بازه $[1, 2]$ اکیداً نزولی می‌باشد. لذا در دامنه‌اش، رفتار یکسانی نداشته و غیر یکنوا است.



(الف)

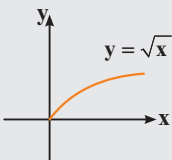
(ب)

تیپ ۳: ضابطه f را می‌دهند و از ما می‌خواهند صعودی یا نزولی بودن f را بررسی کنیم.

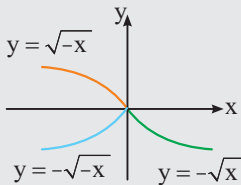
با توجه به ضابطه f ، نمودار را رسم کرده و با توجه به نمودار، صعودی یا نزولی بودن f در بازه‌های مختلف را بررسی می‌کنیم.

آیا $y = \sqrt{x}$ در دامنه‌اش اکیداً نزولی است؟ (شهریور ۱۴۰۰)

خیر، با توجه به نمودار زیر، این تابع اکیداً صعودی است.



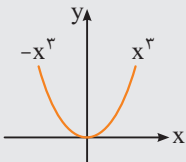
نمودارهای مهم زیر را به‌خاطر داشته باشید.



تابع $y = x^2 |x|$ در بازه $(-\infty, a]$ نزولی است. حداکثر a را بیابید. (کتاب درسی)

با توجه به حضور قدر مطلق، تابع دو ضابطه‌ای به‌صورت

$$y = \begin{cases} x^2(x) = x^3 & ; x \geq 0 \\ x^2(-x) = -x^3 & ; x < 0 \end{cases}$$
 می‌شود. آن را رسم می‌کنیم:



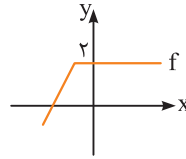
با توجه به شکل مشخص است که تابع در بازه $(-\infty, a]$ که حداکثر a برابر ۰ است، نزولی می‌باشد.

تابع $g(x) = x^2 - 4x + 5$ در بازه $(-\infty, m]$ اکیداً نزولی است. حداکثر مقدار m برابر است. (خرداد ۱۴۰۳)

جمله «هر تابع یک‌به‌یک، اکیداً یکنواست.» درست است یا نادرست؟ (خرداد ۱۴۰۳)

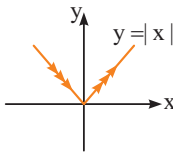
با توجه به نکته (۷) نادرست است.

اگر تابعی یک‌به‌یک نباشد، آن‌گاه اکیداً یکنوا نمی‌باشد. مثلاً:

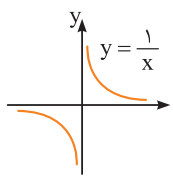


اگر f نه صعودی و نه نزولی باشد، می‌گوییم f تابعی غیریکنواست. ممکن است تابعی در دو بازه مختلف، یکنوا (اکیداً یکنوا) باشد ولی در دامنه‌اش نه صعودی و نه نزولی (غیریکنوا) باشد.

مثلاً تابع $f(x) = |x|$ در بازه $(-\infty, 0]$ اکیداً نزولی و در بازه $[0, +\infty)$ اکیداً صعودی است، اما در دامنه‌اش $(\mathbb{R})$ نه صعودی و نه نزولی بوده و لذا غیریکنواست.



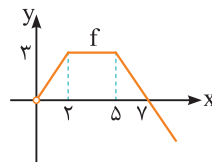
مثلاً تابع $f(x) = \frac{1}{x}$ در بازه‌های $(-\infty, 0)$ و $(0, +\infty)$ نزولی (اکیداً نزولی) است، اما در دامنه‌اش نه صعودی و نه نزولی است و در نتیجه غیریکنواست. (شهریور ۱۴۰۲)



تیپ ۲: نمودار f را می‌دهند و از ما می‌خواهند صعودی یا نزولی بودن f را با توجه به نمودار آن بررسی کنیم.

با توجه به نمودار، بزرگ‌ترین بازه موردنظر را از جهت صعودی یا نزولی بودن می‌نویسیم.

در نمودار زیر، f در بازه $(0, 2]$ ، اکیداً صعودی و در بازه $(5, +\infty)$ ، صعودی و در بازه $[2, +\infty)$ ، نزولی و در بازه $[2, 5]$ ثابت (هم صعودی و هم نزولی) است. حواستان باشد که نمودار f در دامنه‌اش غیریکنواست. (خرداد ۹۱)



اگر $f(7) = 5$ و $g(4) = 7$ ، آنگاه $fog(4)$ چقدر است؟
(دی ۱۴۰۰)

ابتدا تابع داخلی (g) و سپس تابع خارجی (f) را به صورت
فلشی می‌نویسیم:

$$4 \xrightarrow{g} 7 \xrightarrow{f} 5$$

جواب

$$\Rightarrow fog = \{(4, 5)\} \Rightarrow (fog)(4) = 5$$

اگر $f = \{(0, -1), (5, 9), (3, 7), (-2, 4)\}$ و $g = \{(1, 2), (3, -1), (9, 0), (-1, 4), (7, 7)\}$ تابع gof را در صورت وجود بنویسید.
(شهریور ۱۴۰۴)

ابتدا تابع داخلی (f) و سپس تابع خارجی (g) را به صورت
فلشی می‌نویسیم:

$$\begin{array}{lcl} 0 \xrightarrow{f} -1 & 1 \xrightarrow{g} 2 \\ 5 \xrightarrow{f} 9 & 3 \xrightarrow{g} -1 \\ 3 \xrightarrow{f} 7 & 9 \xrightarrow{g} 0 \\ -2 \xrightarrow{f} 4 & -1 \xrightarrow{g} 4 \\ & 7 \xrightarrow{g} 7 \end{array}$$

$$\Rightarrow gof = \{(0, 4), (5, 0), (3, 7)\}$$

تیپ ۲: محاسبه $fog(a)$ که f و g به صورت ضابطه‌ای داده شده است.

ابتدا a را وارد تابع g می‌کنیم و جواب آن (یعنی $g(a)$) را وارد تابع f می‌کنیم. به همین راحتی!

اگر $f(x) = \frac{|x|}{1+|x|}$ باشد، مقدار $(f \circ f)(1)$ برابر است.
(دی ۱۴۰۳)

ابتدا $x = 1$ را وارد تابع f کرده و جوابش را دوباره وارد تابع f می‌کنیم.

$$x = 1 \xrightarrow{f} f(1) = \frac{|1|}{1+|1|} = \frac{1}{2}$$

حال عدد $\frac{1}{2}$ دوباره وارد f می‌شود:

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\left|\frac{1}{2}\right|}{1+\left|\frac{1}{2}\right|} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}} = \frac{1}{3} \Rightarrow (f \circ f)(1) = \frac{1}{3}$$

طول رأس سهمی $x_S = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-4)}{2(1)} = 2$ است و چون $a = 1 > 0$ است. دهانه سهمی رو به بالا و نمودار آن به صورت



با توجه به شکل، سهمی در هر بازه‌ای به صورت $(-\infty, m]$ با شرط $m \leq 2$ نزولی است. پس حداکثر m. همان طول رأس سهمی یعنی $m = 2$ است. دقت کنید به محض این‌که $m > 2$ شود، تابع غیریکنوا می‌شود! مثلاً اگر $m = 3$ باشد، نمودار به صورت

شده که قبل از $x = 2$ نزولی و در بازه $[2, 3]$ صعودی می‌شود.

ترکیب توابع

اگر f و g دو تابع باشند، به طوری‌که برد تابع f و دامنه تابع g اشتراک ناتهی داشته باشند، تابع $g(f(x))$ را با نماد $(g \circ f)(x)$ نمایش می‌دهیم و تابع $g \circ f$ را تابع مرکب می‌نامیم. به عبارت دیگر:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

تیپ ۱: محاسبه fog که f و g به صورت زوج مرتبی هستند.

ابتدا تابع داخلی (g) را به صورت فلشی می‌نویسیم و سپس تابع خارجی (f) را به صورت فلشی می‌نویسیم.

مثلاً اگر $f = \{(1, 2), (2, 3)\}$ و $g = \{(4, 1), (5, 6)\}$ باشد، برای محاسبه fog داریم:

$$\begin{array}{lcl} 4 \xrightarrow{g} 1 & 1 \xrightarrow{f} 2 \\ 5 \xrightarrow{g} 6 & 2 \xrightarrow{f} 3 \end{array}$$

سپس نگاه می‌کنیم اعداد یکسان که انتهای فلش g و ابتدای فلش f هستند را به هم وصل می‌کنیم. در نهایت اولین عدد و آخرین عدد در هر سطر را به عنوان زوج مرتب می‌نویسیم.

$$fog = \{(4, 2)\}$$

$$4 \xrightarrow{g} 1 \Rightarrow 1 \xrightarrow{f} 2$$

fog

⚠ حواستان هست که اعداد ۲ و ۶ را به هم وصل نکردیم، چون یکسان نبودند.

تیپ ۴: محاسبه ضابطه توابع fog و g of دامنه آنها از روی ضابطه f و g

الف) محاسبه دامنه: توابع f و g را به ما می‌دهند. ابتدا دامنه f و g را حساب کرده و سپس طبق تعاریف زیر، دامنه تابع خواسته شده را به دست می‌آوریم:

$$D_{fog} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\}$$

قسمت دوم قسمت اول

$$D_{gof} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\}$$

قسمت دوم قسمت اول

! در قسمت دوم دامنه fog یا g of با قسمت اول fog یا g باید با توجه به ضابطه f و g، یک معادله یا نامعادله یا ... حل کنید و جوابش را با قسمت اول دامنه، اشتراک بگیرید.

ب) محاسبه ضابطه: برای پیدا کردن ضابطه fog، کافی است در تابع f به جای x ها، g(x) قرار دهیم. به طور مشابه برای پیدا کردن ضابطه g of، کافی است در تابع g به جای x ها، f(x) را قرار دهیم.

! اگر $f(x) = \sqrt{x-1}$ و $g(x) = 2x^2 - 1$ باشد،

(شهریور ۹۸ و ۹۹ و خرداد ۱۴۰۰ و مشابه خرداد ۱۴۰۲ و کتاب درسی)

الف) دامنه تابع fog را با استفاده از تعریف به دست آورید.

ب) ضابطه fog را بنویسید.

پ) مقدار (fog)(۱۰) چقدر است؟

الف) مرحله اول: $D_f: x-1 \geq 0 \Rightarrow x \geq 1$, $D_g: \mathbb{R}$

$$D_{fog} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\}$$

$$= \{x \in \mathbb{R} \mid 2x^2 - 1 \geq 1\}$$

(*)

$$(*) : 2x^2 \geq 2 \Rightarrow x^2 \geq 1 \xrightarrow{\sqrt{\quad}} |x| \geq 1$$

$$\Rightarrow x \geq 1 \text{ یا } x \leq -1$$

مرحله دوم: جای‌گذاری در فرمول

$$D_{fog} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \in (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)\}$$

اشتراک

$$= (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$$

(ب)

$$f(g(x)) = f(2x^2 - 1) = \sqrt{(2x^2 - 1) - 1} = \sqrt{2x^2 - 2}$$

به جای x در f

(پ)

$$g(f(10)) = g(\sqrt{10-1}) = g(3) \stackrel{g(x)=2x^2-1}{=} 2(3)^2 - 1 = 18 - 1 = 17$$

! اگر $f(x) = \sqrt{x-4}$ و $g(x) = \frac{1}{x^2-1}$ باشد، مقدار (fog)(۱۳) را بیابید. (خرداد ۹۸)

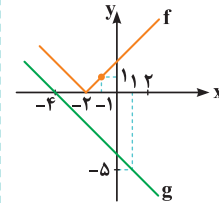
$$x = 13 \xrightarrow{\text{وارد f می‌شود}} f(13) = \sqrt{13-4} = \sqrt{9} = 3$$

حال عدد ۳ وارد تابع g می‌شود:

$$g(3) = \frac{1}{3^2-1} = \frac{1}{9-1} = \frac{1}{8} \Rightarrow (fog)(13) = \frac{1}{8}$$

تیپ ۳: محاسبه fog(a) از روی نمودار

! فرض کنید بخواهیم (fog)(-۱) را با توجه به نمودار زیر پیدا کنیم: (دی ۱۴۰۰)



ابتدا در نمودار f دنبال نقطه‌ای به

طول $x = -1$ می‌گردیم، یعنی

نقطه $(-1, 1)$. پس $f(-1) = 1$:

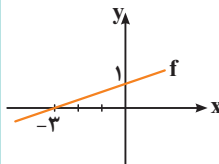
$$g(f(-1)) = g(1)$$

حال در نمودار g دنبال نقطه‌ای به طول $x = 1$ می‌گردیم. یعنی

نقطه $(1, -5)$. پس $g(1) = -5$ و تمام.

! با توجه به نمودار f، مقدار

(fog)(۲) را بیابید.



فرق این مثال با مثال قبل، این است که نقطه‌ای به طول ۲ در نمودار f به طور واضح مشخص نشده، پس مجبوریم ضابطه f که یک خط راست است، را بیابیم:

$$A(-3, 0), B(0, 1) \in f$$

$$\Rightarrow \text{شیب خط} = m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{1 - 0}{0 - (-3)} = \frac{1}{3}$$

$$m = \frac{1}{3} \Rightarrow y = mx + h \xrightarrow{h=1} f(x) = \frac{1}{3}x + 1$$

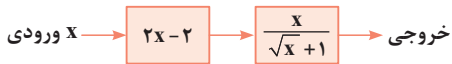
عرض از مبدأ

بنابراین:

$$f(2) = \frac{1}{3}(2) + 1 = \frac{5}{3} \Rightarrow f(f(2)) = f\left(\frac{5}{3}\right)$$

$$\stackrel{f(x)=\frac{1}{3}x+1}{=} \frac{1}{3}\left(\frac{5}{3}\right) + 1 = \frac{5}{9} + 1 = \frac{14}{9}$$

الف) اگر ورودی ماشین ۳ باشد، مقدار خروجی آن چقدر است؟
(خرداد ۱۴۰۱ با تغییر)



ب) ضابطه تابع خروجی ماشین فوق را به دست آورید.

الف) کافی است به جای x به عنوان ورودی عدد ۳ قرار دهیم:

$$3 \rightarrow \underbrace{2(3)-2}_{4} \xrightarrow{\frac{4}{\sqrt{4}+1}} \frac{4}{3}$$

پس خروجی $\frac{4}{3}$ است.

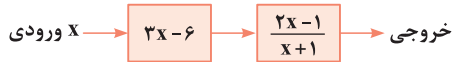
ب) تابع جعبه اول را f و تابع جعبه دوم را g می نامیم:

$$f = 2x - 2 \text{ و } g = \frac{x}{\sqrt{x}+1}$$

$$\Rightarrow g(f(x)) = g(2x-2) = \frac{2x-2}{\sqrt{2x-2}+1}$$

به جای x در g

در ماشین زیر:



الف) اگر خروجی ماشین $\frac{20}{7}$ باشد، مقدار ورودی آن چقدر است؟

ب) اگر خروجی از جعبه اول، ۶ باشد، ورودی و خروجی ماشین چقدر است؟

الف) بهتر است ابتدا ضابطه ترکیب دو تابع را بیابیم، تابع

جعبه اول را f و تابع جعبه دوم را g می نامیم:

$$f = 3x - 6$$

$$g = \frac{2x-1}{x+1} \Rightarrow g(f(x)) = g(3x-6)$$

به جای x در g

$$= \frac{2(3x-6)-1}{(3x-6)+1} = \frac{6x-13}{3x-5}$$

خروجی:

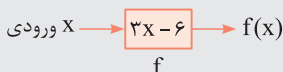
حال چون خروجی $\frac{20}{7}$ است، داریم:

$$\frac{6x-13}{3x-5} = \frac{20}{7} \Rightarrow 42x - 91 = 60x - 100$$

$$\Rightarrow 9 = 18x \Rightarrow x = \frac{1}{2}$$

ورودی:

ب) خروجی از جعبه اول، مطابق شکل همان $f(x)$ است که طبق فرض برابر ۶ است.



چون این تیپ خیلی مهم است، یک نمونه سؤال دیگر هم حل می کنیم:

الف) اگر $f(x) = \sqrt{x-4}$ و $g(x) = \frac{1}{x^2-1}$ باشد، آن گاه:

(خرداد ۹۸)

الف) دامنه gof را با استفاده از تعریف پیدا کنید.

ب) ضابطه gof را به دست آورید.

الف) مرحله اول: $D_f : x - 4 \geq 0 \Rightarrow x \geq 4$

$$D_g : x^2 - 1 \neq 0 \Rightarrow x^2 \neq 1 \Rightarrow x \neq \pm 1$$

مرحله دوم: جای گذاری در فرمول D_{gof}

$$D_{gof} = \{x \in D_f, f(x) \in D_g\}$$

$$= \{x \geq 4, \sqrt{x-4} \neq \pm 1\} = \{x \geq 4 \text{ و } x \neq 5\}$$

اشتراک $\sqrt{x-4} = 1$ که هیچ وقت ۱ نمی شود چون

نامنفی است پس $\sqrt{x-4} \neq 1 \Leftrightarrow x \neq 5$

$$= [4, +\infty) - \{5\}$$

ب) در تابع g به جای x ها، $f(x)$ قرار می دهیم:

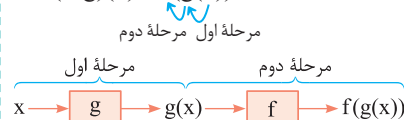
$$g(x) = \frac{1}{x^2-1}$$

$$g(f(x)) = \frac{1}{f^2(x)-1}$$

$$= \frac{1}{(\sqrt{x-4})^2-1} = \frac{1}{x-5}$$

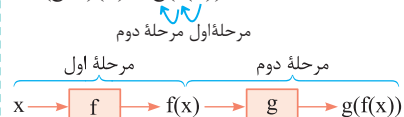
تیپ ۵: نمایش ماشینی توابع gof و fog

الف) $(fog)(x) = f(g(x))$:



توضیح: در مرحله اول، x که عضو دامنه g است، ابتدا وارد جعبه (تابع) g شده و $g(x)$ از جعبه خارج می شود. در مرحله ۲، $g(x)$ به عنوان ورودی وارد جعبه (تابع) f می شود و $f(g(x))$ از جعبه خارج می شود. به طور مشابه می توان تابع $(gof)(x)$ را نیز بیان کرد:

ب) $(gof)(x) = g(f(x))$:



تیپ ۷: ضابطه تابع fog و تابع بیرونی f را می دهند و تابع داخلی g را می پرسند.

☀ در تابع f به جای x ها، g(x) قرار داده و تابع حاصل را برابر تابع fog در صورت مسئله قرار می دهیم تا g به دست آید.

📌 اگر $f(x) = 4x^2 + 1$ و $f(g(x)) = \frac{x}{2} - 1$ باشد، آن گاه ضابطه g(x) را بیابید. (شهریور ۱۴۰۲)

با توجه به $f(x) = \frac{x}{2} - 1$ مقدار $f(g(x))$ برابر $\frac{g(x)}{2} - 1$ می شود. از طرفی طبق فرض $f(g(x)) = 4x^2 + 1$ است. از برابر قرار دادن $f(g(x))$ ها داریم:

$$\frac{g(x)}{2} - 1 = 4x^2 + 1 \Rightarrow \frac{g(x)}{2} = 4x^2 + 2 \xrightarrow{\times 2} g(x) = 8x^2 + 4$$

تیپ ۸: ضابطه تابع fog و تابع داخلی g را می دهند و تابع بیرونی f را می پرسند.

☀ تابع g(x) را برابر t قرار داده و از معادله حاصل، x را برحسب t به دست می آوریم. سپس در تابع (fog)(x) به جای همه x ها، عبارت به دست آمده برحسب t را قرار می دهیم.

📌 اگر $g(x) = 2x + 1$ و $(fog)(x) = x^2$ باشد، تابع f را بیابید.

$$f(g(x)) = x^2 \xrightarrow{g(x)=2x+1} f(\underbrace{2x+1}_t) = x^2$$

$$(2x+1=t \Rightarrow x = \frac{t-1}{2})$$

حال در $f(2x+1) = x^2$ به جای همه x ها، $\frac{t-1}{2}$ قرار می دهیم:

$$f\left(\frac{t-1}{2}\right) = \left(\frac{t-1}{2}\right)^2$$

$$f(t) = \left(\frac{t-1}{2}\right)^2 = \frac{t^2 - 2t + 1}{4}$$

بنابراین:

$$\xrightarrow{\text{به جای t ها}} f(x) = \frac{x^2 - 2x + 1}{4}$$

داریم: $f(x) = 6 \Rightarrow 3x - 6 = 6$
ورودی: $3x = 12 \Rightarrow x = 4$

برای محاسبه خروجی ماشین، عدد ۶ را به جای x وارد تابع g می کنیم:

$$g\left(\frac{2x-1}{x+1}\right) \xrightarrow{x=4} \text{خروجی}$$

$$\text{خروجی: } \frac{2(6)-1}{6+1} = \frac{11}{7}$$

تیپ ۹: نوشتن ضابطه یک تابع به صورت ترکیب دو تابع f و g

☀ تاکنون دو تابع مثلاً $f(x) = \sqrt{x}$ و $g(x) = 2x - 2$ را می دادند و fog را می خواستند که برابر $h(x) = \sqrt{2x-2}$ می شد. حال برعکس این مسیر را از ما سؤال می کنند؛ یعنی تابع $h(x) = \sqrt{2x-2}$ را می دهند و از ما توابع f و g را می خواهند! حُب یک قسمت از تابع داده شده را تابع g فرض کرده و به جای x قرار می دهیم تا تابع f حاصل شود. در این صورت تابع h(x) برابر fog(x) می شود:

$$h(x) = \sqrt{2x-2} \Rightarrow \begin{cases} g(x) = 2x-2 \\ f(x) = \sqrt{x} \end{cases} \quad \text{جواب ۱}$$

عبارت $2x-2$ را g فرض کرده و به جای آن x قرار می دهیم.

$$h(x) = \sqrt{2x-2} \Rightarrow \begin{cases} g(x) = 2x \\ f(x) = \sqrt{x-2} \end{cases} \quad \text{جواب ۲}$$

عبارت $2x$ را g فرض کرده و به جای آن x قرار می دهیم.

همان طور که می بینید توابع f و g مختلفی را می توان به عنوان جواب ارائه داد! لذا جواب منحصر به فرد نمی باشد.

📌 تابع $y = \sqrt[3]{1-2x}$ را به صورت ترکیب دو تابع بنویسید. (خرداد خارج ۱۴۰۱)

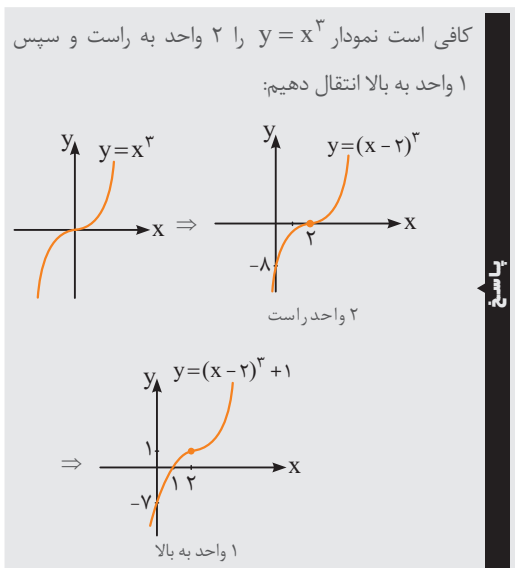
$$y = \sqrt[3]{1-2x} \Rightarrow \begin{cases} g(x) = 1-2x \\ f(x) = \sqrt[3]{x} \end{cases}$$

عبارت $1-2x$ را g فرض کرده و به جای آن x قرار می دهیم.

$$\Rightarrow \text{تابع داده شده} = (fog)(x)$$

$y = -f(x)$	$y = f(-x)$
قرینه نسبت به محور x ها	قرینه نسبت به محور y ها

به کمک انتقال نمودار تابع $y = x^3$ ، نمودار تابع $f(x) = (x-2)^3 + 1$ را رسم کنید. (خرداد ۱۴۰۳)



برخی مواقع، ضابطه تابع مثال فوق را به صورت $f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 7$ می‌دهند که کار ما را سخت کنند. باید ابتدا عدد -7 را به صورت $(-8+1)$ بنویسیم و سپس از اتحاد $(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$ استفاده کنیم.

$$y = x^3 - 6x^2 + 12x - 8 + 1 \Rightarrow y = (x-2)^3 + 1$$

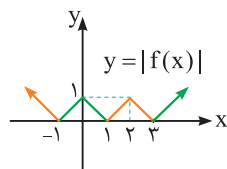
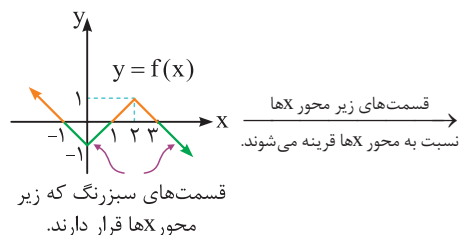
حال به کمک روش حل بیان شده، نمودار را رسم می‌کنیم. پیشنهاد می‌شود این اتحاد مکعب دوجمله‌ای را خوب یاد بگیرید و حداقل روی حالات خاص زیر مسلط شوید (مخصوصاً اینکه ضرایب x ها و عدد ثابت چه اعدادی هستند!):

۱ $(x \pm 1)^3 = x^3 \pm 3x^2 \pm 3x \pm 1$

۲ $(x \pm 2)^3 = x^3 \pm 6x^2 \pm 12x \pm 8$

رسم نمودار $y = |f(x)|$ تیپ ۴

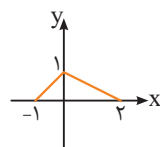
برای رسم نمودار $y = |f(x)|$ ، ابتدا نمودار $y = f(x)$ را رسم می‌کنیم. سپس قسمت‌هایی از نمودار f که زیر محور x ها قرار دارند را مشخص کرده و آن قسمت‌ها را نسبت به محور x ها قرینه می‌کنیم:



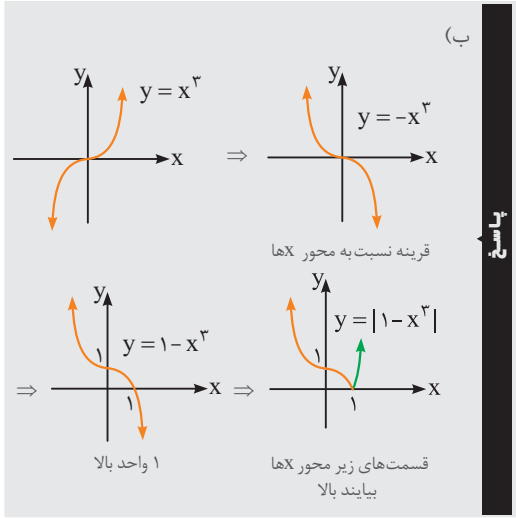
! به قسمت‌هایی از نمودار که بالا یا روی محور x ها قرار دارند، کاری نداریم. آن‌ها سر جایشان محکم نشسته‌اند!

تبدیل نمودار توابع تیپ ۵

اگر نمودار تابع $y = f(x)$ به صورت مقابل باشد، داریم:



$y = f(x-1)$	$y = f(x+1)$
۱ واحد به راست $\rightarrow$	۱ واحد به چپ $\leftarrow$
$y = f(x)+1$	$y = f(x)-1$
۱ واحد به بالا $\uparrow$	۱ واحد به پایین $\downarrow$



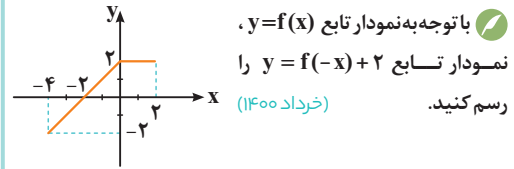
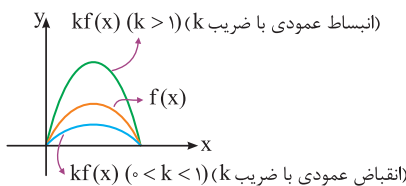
❗ اگر در ضابطه تابع داده شده، بیرون قدرمطلق جملاتی شامل x وجود داشته باشد، برای رسم آن تابع، از روش بیان شده نمی‌توان استفاده کرد! مثلاً برای رسم توابع $y = x^2 |x|$ نمی‌توان از روش فوق استفاده نمود. بلکه باید با توجه به ریشه عبارت داخل قدرمطلق آن را به صورت تابع چندضابطه‌ای نوشت و تک تک ضابطه‌ها را رسم کرد. (به مثال دوم تیپ ۳ درسنامه توابع صعودی و نزولی رجوع شود).

تیپ ۱: جای خالی یا صحیح و غلط از ویژگی‌های توابع $f(kx)$ و $kf(x)$ می‌دهند. پس به ویژگی‌های بیان شده آن‌ها توجه کنید.

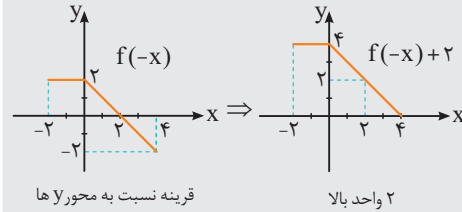
نمودار $y = kf(x)$

ویژگی‌ها:

- عرض نقاط تابع $f(x)$ ، k برابر شده ولی طول نقاط ثابت باقی می‌ماند. پس اگر $A(a, b)$ روی f باشد، نقطه متناظر آن روی نمودار $y = kf(x)$ به صورت $A'(a, kb)$ است.
- دامنه تابع $f(x)$ با $kf(x)$ یکسان است. اما اگر بُرد $f(x)$ برابر $[a, b]$ باشد، بُرد $kf(x)$ با فرض $k > 0$ به صورت $[ka, kb]$ است. (یعنی بُرد f با kf لزوماً یکسان نیست).



نمودار تابع را نسبت به محور y ها قرینه کرده و سپس کل نمودار را ۲ واحد به سمت بالا انتقال می‌دهیم. بنابراین:



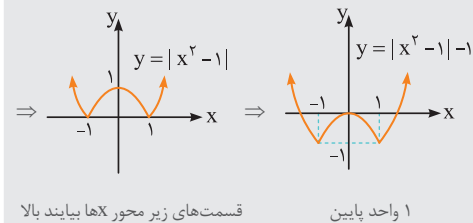
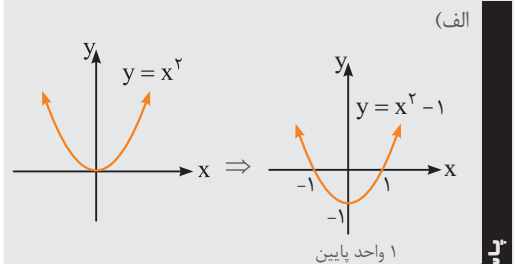
نمودار دو تابع $f(x)$ و $f(-x)$ نسبت به قرینه هستند. (خرداد خارج ۱۴۰۳)

محور y ها

نمودار توابع زیر را رسم کنید.

الف) $y = |x^2 - 1| - 1$

ب) $y = |1 - x^2|$



جمله «نمودار تابع $y = f(\frac{x}{p})$ ، از انقباض افقی نمودار تابع $y = f(x)$ به دست می آید» درست است یا نادرست؟
(دی ۱۴۰۳)

نادرست است. در این جا $k = \frac{1}{p}$ بوده، پس انبساط افقی با ضریب $\frac{1}{k} = p$ داریم نه انقباض!

تیپ ۲: نمودار f را می دهند و نمودار $y = af(bx) + d$ را می خواهند.

برای رسم نمودار $y = af(bx) + d$ ، باید حواستان باشد که عدد b که داخل پرانتز است، باعث تغییرات روی محور x می شود و اعداد a و d که بیرون پرانتز هستند، باعث تغییرات روی محور y می شوند. بنابراین برای رسم تابع، قدم های زیر را برمی داریم:

تغییرات روی محور x ها:

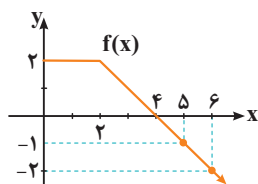
قدم اول: طول نقاط را بر b تقسیم می کنیم.

تغییرات روی محور y ها:

قدم دوم: عرض نقاط را در a ضرب می کنیم.

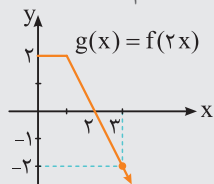
قدم سوم: عرض نقاط حاصل را با d جمع می کنیم.

در شکل زیر، نمودار تابع f رسم شده است. (خرداد ۱۴۰۳)

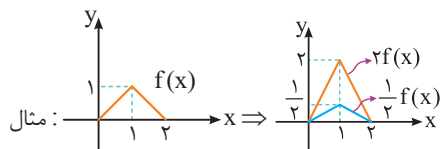


الف) نمودار تابع g با ضابطه $g(x) = f(2x)$ را رسم کنید.
ب) مقدار $g \circ f$ را به دست آورید.

الف) کافی است طول نقاط را تقسیم بر ۲ کنیم، در حقیقت چون $2 > 1$ است، انقباض افقی با ضریب $\frac{1}{2}$ داریم:



ب) نمودار $g \circ f$ نمودار g است. نمودار g نمودار f است. نمودار $g \circ f$ نمودار f است. نمودار $g \circ f$ نمودار f است.



اگر $k < 0$ باشد، ابتدا نمودار f نسبت به محور x ها قرینه شده و سپس با ضریب $|k|$ به طور عمودی منبسط یا منقبض می شود.

از آن جایی که ریشه های معادله های $f(x) = 0$ و $kf(x) = 0$ یکسان است، بنابراین محل تلاقی نمودارهای f و kf با محور x ها یکسان است.

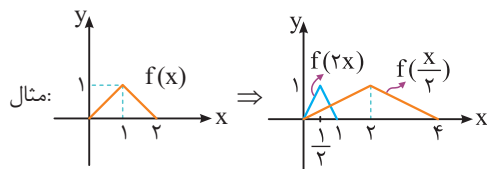
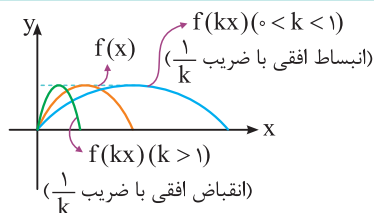
نمودار $y = f(kx)$

ویژگی ها:

۱ طول نقاط تابع $f(x)$ در $\frac{1}{k}$ ضرب می شود ولی عرض نقاط تغییری نمی کند. پس اگر $A(a, b)$ روی f باشد، نقطه متناظر آن روی نمودار $y = f(kx)$ به صورت $A'(\frac{a}{k}, b)$ است.

۲ برد تابع $f(x)$ با $f(kx)$ یکسان است.

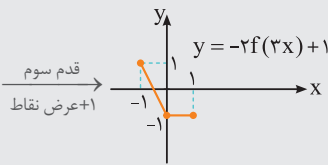
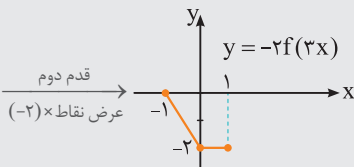
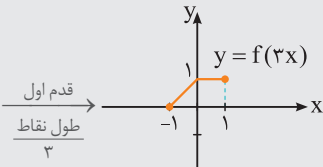
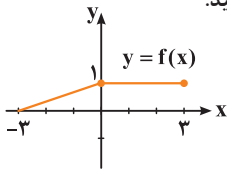
اما اگر دامنه $f(x)$ به صورت $[a, b]$ باشد، دامنه $f(kx)$ با فرض $k > 0$ به صورت $[\frac{a}{k}, \frac{b}{k}]$ است (یعنی دامنه $f(x)$ با $f(kx)$ لزوماً یکسان نیست).



اگر $k < 0$ باشد، ابتدا نمودار نسبت به محور y ها قرینه شده، سپس با ضریب $|\frac{1}{k}|$ به طور افقی منبسط یا منقبض می شود.

نقاط برخورد نمودار تابع $f(x)$ و $f(kx)$ با محور y ها یکسان است.

اگر نمودار $y = f(x)$ مطابق شکل زیر باشد، نمودار تابع $y = -2f(3x) + 1$ را رسم کنید.



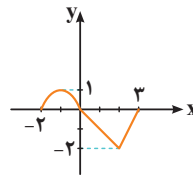
❗ وقتی عرض نقاط را در عدد (-2) ضرب می‌کنیم، عملاً دو اتفاق می‌افتد؛ اولاً نمودار نسبت به محور x ها قرینه می‌شود، ثانیاً عرض نقاط، دو برابر می‌شوند.

تیپ ۳: نمودار f را می‌دهند و نمودار $y = af(bx+c)+d$ را می‌خواهند.

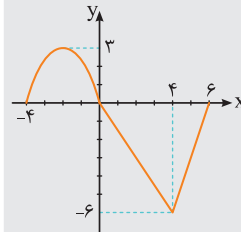
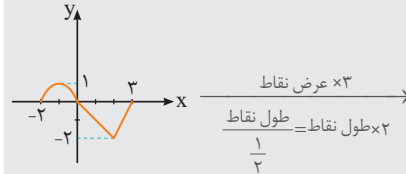
☀️ فرق این تیپ با تیپ قبلی، وجود عدد c کنار bx است که این حالت تاکنون در امتحانات نهایی و در کتاب درسی نیامده است. ولی بارها در امتحانات مدارس مختلف و تست‌ها از آن سؤال داده‌اند. لذا تصمیم گرفتیم این تیپ را هم بررسی کنیم که دیگر نگران چیزی نباشید.

برای رسم نمودار $y = af(bx+c)+d$ ؛ ابتدا اگر $c > 0$ بود، نمودار را c واحد به چپ و اگر $c < 0$ بود، نمودار را $|c|$ واحد به راست می‌بریم و سپس سه قدم عنوان‌شده در تیپ قبلی را انجام می‌دهیم.

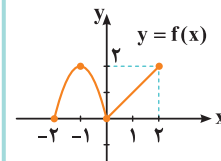
اگر نمودار $y = f(x)$ به صورت مقابل باشد، نمودار تابع $y = 3f(\frac{1}{3}x)$ را رسم کنید. (خرداد ۹۹)



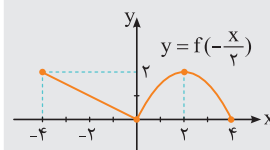
انبساط عمودی با ضرب ۳ و انبساط افقی با ضرب ۲ خواهیم داشت:



اگر نمودار تابع $y = f(x)$ به صورت مقابل باشد، نمودار تابع $y = \frac{1}{3}f(-\frac{x}{3})$ را رسم کنید.

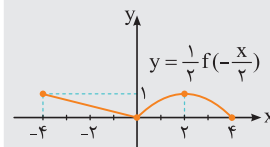


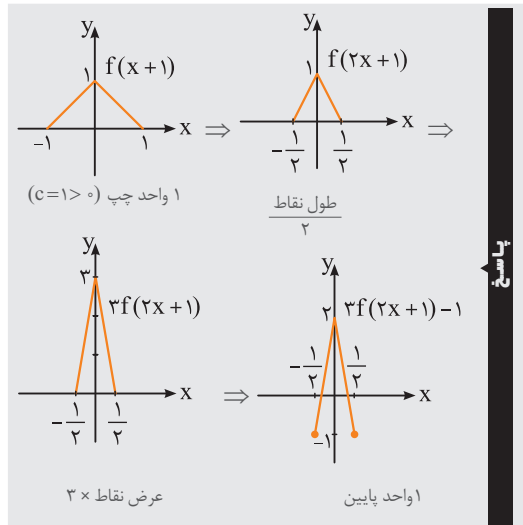
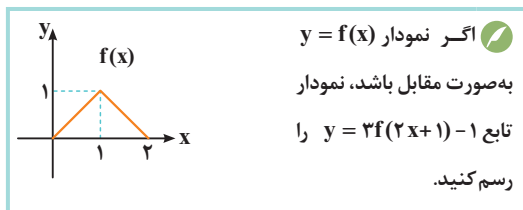
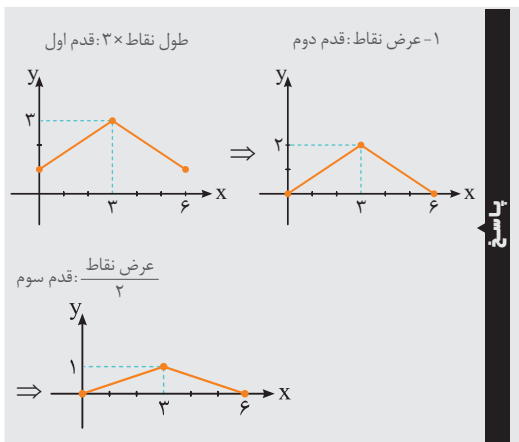
طول نقاط $\times (-2) = -2$: قدم اول



❗ وقتی طول نقاط تقسیم بر عدد $-\frac{1}{3}$ می‌شود، عملاً دو اتفاق می‌افتد؛ اولاً نمودار نسبت به محور y ها قرینه می‌شود، ثانیاً طول نقاط تقسیم بر $\frac{1}{3}$ می‌شود. (به عبارت دیگر طول نقاط در عدد ۳ ضرب می‌شود).

عرض نقاط $\times \frac{1}{3}$: قدم دوم





تیپ ۵: دامنه و برد تابع $f(x)$ را داده و دامنه و برد تابع $y = af(bx+c)+d$ را می‌خواهند.

در ابتدا باید بگوییم که:

در تابع $y = af(bx+c)+d$ ، اعداد b و c که در داخل پرانتز شکم f

(شکم f) هستند، فقط روی دامنه و اعداد a و d که بیرون

(خارج از شکم f) هستند، فقط روی برد تأثیر دارند. در نتیجه داریم:

الف) برد توابع $f(x)$ و $f(bx+c)$ یکسان است. مثلاً برد توابع $f(x)$ ، $f(2x+1)$ ، $f(1-3x)$ و... با هم برابر است.

ب) دامنه توابع $f(x)$ و $af(x)+d$ یکسان است. مثلاً دامنه توابع $f(x)$ ، $4f(x)-4$ ، $2f(x)+1$ و... با هم برابر است.

با توجه به توضیحات فوق، نکات زیر را داریم:

۱ اگر دامنه تابع $f(x)$ بازه $[n, m]$ باشد، برای محاسبه دامنه تابع $y = af(bx+c)+d$ ، می‌گوییم عبارت $bx+c$ که وارد f شده، باید در محدوده دامنه‌اش یعنی در بازه $[n, m]$ باشد، لذا باید نامعادله دوگانه $n \leq bx+c \leq m$ را حل کنیم.

اگر دامنه $f(x)$ ، بازه $[-1, 5]$ باشد، دامنه تابع $y = 2f(2x-1) - 3$ را بیابید.

تبدیل

$$-1 \leq 2x-1 \leq 5 \xrightarrow{+1} 0 \leq 2x \leq 6 \xrightarrow{\div 2} 0 \leq x \leq 3$$

پس دامنه تابع $y = 2f(2x-1) - 3$ بازه $[0, 3]$ است.

تیپ ۴: نمودار $y = af(bx+c)+d$ را می‌دهند و نمودار $y = f(x)$ را می‌خواهند.

قبل از نمودار $f(x)$ به نمودار $af(bx+c)+d$ می‌رسیدیم، حالا می‌خواهیم برعکس حرکت کنیم، برای انجام این کار قدم‌های زیر را برمی‌داریم:

تغییرات روی محور xها:

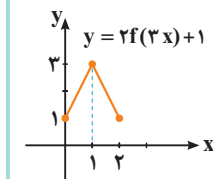
قدم اول: طول نقاط را در b ضرب می‌کنیم و سپس با عدد c جمع می‌کنیم.

تغییرات روی محور yها:

قدم دوم: عدد d را از عرض نقاط کم می‌کنیم.

قدم سوم: عرض نقاط حاصل را تقسیم بر a می‌کنیم.

اگر نمودار تابع $y = 2f(3x)+1$ به صورت زیر باشد، نمودار تابع $y = f(x)$ را بیابید.



با توجه به نمودار تابع f داریم:

$$D_f = [-5, 0], R_f = [-2, 3]$$

برای محاسبه دامنه $g(x) = 2f(-x)$ ، می‌گوییم $(-x)$ باید در محدوده دامنه f باشد:

$$-5 \leq -x \leq 0 \xrightarrow{\times(-1)} 5 \geq x \geq 0$$

جهت عوض می‌شود.

$$\Rightarrow D_g = [0, 5]$$

همچنین برای محاسبه برد تابع $g(x)$ ، کافی است برد تابع f را در ۲ ضرب کنیم (برد f با توجه به نمودار، بازه $[-2, 3]$ می‌باشد):

$$R_g = [2(-2), 2(3)] = [-4, 6]$$

این نکته، برعکس نکته (۱) است، یعنی دامنه تابع $y = af(bx+c)+d$ به صورت بازه $[n, m]$ داده شده و دامنه $f(x)$ را می‌خواهیم. برای محاسبه دامنه تابع $f(x)$ ، کافی است ابتدا طرفین نامساوی $n \leq x \leq m$ را در b ضرب کرده و سپس آن را با عدد c جمع کنیم.

اگر دامنه تابع $y = f(3x)$ بازه $[-1, 2]$ باشد، دامنه تابع $y = f(x) + 1$ را بیابید.

$$-1 \leq x \leq 2 \xrightarrow{\times 3} -3 \leq 3x \leq 6 \Rightarrow D_{f(x)+1} = [-3, 6]$$

اگر برد تابع $f(x)$ ، بازه $[n, m]$ باشد، برای محاسبه برد تابع $y = af(bx+c)+d$ ، کافی است ابتدا دو سر بازه داده شده را در a ضرب کرده و سپس اعداد حاصل را با d جمع کنیم.

اگر دامنه تابع $f(x)$ برابر $(-1, 3]$ و برد آن $[0, 2]$ باشد، دامنه و برد تابع $f(\frac{x}{4})$ را بیابید.

(دی ۱۴۰۱)

اگر برد تابع $g(x) = 1 + 2f(x)$ برابر $[-1, 2]$ باشد، برد تابع $y = f(x)$ را بیابید.

$$\begin{aligned} -1 \leq g(x) \leq 2 &\Rightarrow -1 \leq 1 + 2f(x) \leq 2 \\ \xrightarrow{-1} -2 \leq 2f(x) \leq 1 &\xrightarrow{\div 2} -1 \leq f(x) \leq \frac{1}{2} \\ \Rightarrow f(x) \text{ برد } &[-1, \frac{1}{2}] \end{aligned}$$

طبق درسنامه برد توابع $f(\frac{x}{4})$ و $f(x)$ یکسان و برابر $[0, 2]$ است. اما برای دامنه باید نامعادله دوگانه زیر را حل کنیم:

$$-1 < \frac{x}{4} \leq 3 \xrightarrow{\times 4} -4 < x \leq 12 \Rightarrow D_{f(\frac{x}{4})} = (-4, 12]$$

برد تابع $f(x)$ بازه $(-3, 1]$ است. برد تابع $y = -2f(3x-1) + 3$ به صورت است.

(خرداد ۱۴۰۱)

می‌دانیم برد تابع $f(3x-1)$ با $f(x)$ برابر است. داریم:

$$\begin{aligned} -3 < f(3x-1) \leq 1 &\xrightarrow{\times(-2)} 6 > -2f(3x-1) \geq -2 \\ \xrightarrow{+3} 9 > -2f(3x-1) + 3 \geq 1 &\Rightarrow R = [1, 9) \end{aligned}$$

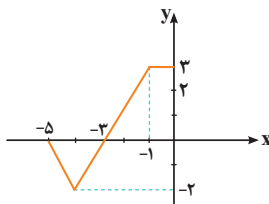
تیب ۶: نقطه $A(n, m)$ را روی نمودار $y = f(x)$

داده و نقطه متناظر آن روی نمودار $y = af(bx+c)+d$ را می‌خواهند.

نقطه $A(n, m)$ روی نمودار $y = f(x)$ است، پس مختصات A در ضابطه f صدق می‌کند، یعنی $f(n) = m$. حال چون داخل پرانتز جلوی f ، عدد n است، کافی است عبارت داخل پرانتز تابع $y = af(bx+c)+d$ را نیز برابر n قرار دهیم (یعنی $bx+c = n$) و با حل معادله، طول نقطه متناظر را بیابیم. سپس طول نقطه متناظر به دست آمده را در ضابطه قرار داده تا عرض نقطه هم پیدا شود.

نمودار تابع f به صورت زیر است. دامنه و برد تابع $g(x) = 2f(-x)$ را بنویسید.

(دی ۱۴۰۲)



تیپ ۷: این تیپ برعکس تیپ ۶ است، یعنی نقطه $A(n, m)$ را روی نمودار $y = af(bx + c) + d$ می‌دهند و نقطه متناظر آن روی نمودار $y = f(x)$ را می‌خواهند.

☀️ نقطه $A(n, m)$ روی نمودار $y = af(bx + c) + d$ قرار دارد، پس مختصات آن در ضابطه‌اش صدق می‌کند. با این کار به $f(\alpha) = \beta$ می‌رسیم. در نتیجه، نقطه متناظر مورد نظر، نقطه $A'(\alpha, \beta)$ است.

اگر $A(5, -2)$ روی نمودار تابع $y = 4 - 3f(2x + 1)$ باشد، نقطه متناظر آن روی نمودار $y = f(x)$ را بیابید.

مختصات $A(5, -2)$ را در ضابطه صدق می‌دهیم:

$$y = 4 - 3f(2x + 1) \xrightarrow{A(5, -2)} -2 = 4 - 3f(2(5) + 1)$$

$$\Rightarrow -2 = 4 - 3f(11) \Rightarrow 3f(11) = 6 \Rightarrow f(11) = 2$$

$\Rightarrow$ نقطه متناظر: $A'(11, 2)$

اگر $A(n, m)$ روی نمودار تابع $y = f(x)$ و نقطه $A'(9, 7)$ نقطه متناظر با آن روی نمودار تابع $y = 2f(\frac{x}{3}) - 1$ باشد، مقادیر n و m را بیابید.

نقطه $A'(9, 7)$ روی نمودار $y = 2f(\frac{x}{3}) - 1$ قرار دارد. لذا مختصات آن در ضابطه صدق می‌کند.

$$y = 2f(\frac{x}{3}) - 1 \xrightarrow{A'(9, 7)} 7 = 2f(\frac{9}{3}) - 1$$

$$\Rightarrow 7 + 1 = 2f(3) \Rightarrow f(3) = 4$$

پس $A(3, 4)$ بوده و لذا $n = 3$ و $m = 4$ می‌باشد.

اگر $A(11, 2)$ روی نمودار $y = f(x)$ باشد، نقطه متناظر آن روی نمودار $y = 4 - 3f(2x + 1)$ را بیابید.

$A(11, 2)$ روی نمودار $y = f(x)$ است، پس $f(11) = 2$. حال چون داخل پرانتز جلوی f عدد ۱۱ قرار دارد، کافی است عبارت داخل پرانتز $y = 4 - 3f(2x + 1)$ را نیز برابر ۱۱ قرار دهیم:

$$2x + 1 = 11 \Rightarrow 2x = 10 \Rightarrow x = 5$$

حال طول نقطه متناظر حاصل را در ضابطه قرار داده تا عرض نقطه هم پیدا شود:

$$y = 4 - 3f(2x + 1) \xrightarrow{x=5} y = 4 - 3f(11)$$

$$\xrightarrow{f(11)=2} y = 4 - 3(2) = -2$$

پس نقطه متناظر $(5, -2)$ بوده است.

نقطه $(-2, 4)$ روی نمودار تابع $y = f(x)$ است. نقطه متناظر روی نمودار تابع $y = f(2x)$ برابر است. (خرداد ۱۴۰۲)

روش اول: نقطه $(-2, 4)$ روی نمودار $y = f(x)$ است، پس $f(-2) = 4$. حال چون داخل پرانتز جلوی f عدد -2 است، عبارت داخل پرانتز $y = f(2x)$ را نیز برابر -2 قرار داده و داریم:

$$2x = -2 \Rightarrow x = -1$$

پس طول نقطه متناظر -1 است. با قراردادن آن در ضابطه $y = f(2x)$ ، عرض نقطه متناظر را می‌یابیم:

$$y = f(2x) \xrightarrow{x=-1} y = f(-2) \xrightarrow{f(-2)=4} 4$$

$$\Rightarrow A'(-1, 4)$$

حواستان باشد که چون تغییرات فقط در داخل پرانتز بوده، عرض نقطه ثابت باقی ماند.

روش دوم: می‌دانیم برای تبدیل $f(x)$ به $f(ax)$ ، کافی است طول نقاط را بر a تقسیم کنیم. پس در این سؤال کافی است، طول نقطه را بر $a = 2$ تقسیم کنیم، پس

$$A'(-\frac{2}{2}, 4) = (-1, 4)$$

نمودار تابع $f(x) = \sqrt{x}$ را ابتدا سه واحد به سمت راست انتقال می‌دهیم و سپس عرض نقاط را دو برابر می‌کنیم. ضابطه تابع جدید را بنویسید. (شهریور ۱۴۰۲)

۳ واحد راست $f(x) = \sqrt{x} \rightarrow \sqrt{x-3}$
 به جای x ، $x-3$ قرار می‌دهیم.
 عرض نقاط ۲ برابر $\rightarrow 2 \times \sqrt{x-3}$ ضابطه حاصل: $2\sqrt{x-3}$
 عرض $2x$

نمودار تابع $f(x) = 1 - x^2$ را ابتدا دو واحد به سمت چپ انتقال داده، سپس عرض نقاط را نصف کرده و در آخر یک واحد به سمت پایین منتقل می‌کنیم. ضابطه تابع جدید را بنویسید.

۲ واحد چپ $f(x) = 1 - x^2 \rightarrow 1 - (x+2)^2$
 به جای x ، $x+2$ قرار می‌دهیم.
 عرض نقاط نصف $\rightarrow \frac{1}{2}(1 - (x+2)^2)$
 عرض $\frac{1}{2}x$
 ضابطه جدید: $\frac{1}{2}(1 - (x+2)^2) - 1$
 ۱ واحد پایین $y-1$

نمودار تابع $f(x) = x^2 + 3x$ را در نظر بگیرید. تبدیل‌های زیر را به‌طور متوالی روی نمودار f انجام می‌دهیم.
 (۱) انقباض افقی با ضریب $\frac{1}{2}$ (قرینه نسبت به محور x ها)
 (۳) انبساط عمودی با ضریب ۲ (انتقال ۱ واحد به چپ)
 ضابطه تابع حاصل را بنویسید.

هر یک از تبدیل‌های بیان‌شده در صورت سؤال را به‌ترتیب روی ضابطه f اعمال می‌کنیم:

انقباض افقی با ضریب $\frac{1}{2}$ $k = \frac{1}{2}$
 $f(x) = x^2 + 3x \rightarrow$
 به جای همه x ها، $\frac{x}{2} = 2x$ قرار می‌دهیم.

$y_1 = (2x)^2 + 3(2x) = 4x^2 + 6x$
 قرینه نسبت به محور x ها $\rightarrow$

پشت کل تابع، منفی قرار می‌دهیم.
 $y_2 = -(4x^2 + 6x) = -4x^2 - 6x$

انبساط عمودی با ضریب ۲ $\rightarrow$
 کل تابع $2x$

$y_3 = 2(-4x^2 - 6x) = -8x^2 - 12x$

انتقال ۱ واحد به چپ $\rightarrow$
 به جای همه x ها، $(x+1)$ قرار می‌دهیم

$y_4 = -8(x+1)^2 - 12(x+1)$

$\Rightarrow y_4 = -8(x^2 + 2x + 1) - 12x - 12$

$\Rightarrow y_4 = -8x^2 - 16x - 8 - 12x - 12$

$\Rightarrow y_4 = -8x^2 - 28x - 20$

تیپ ۸: ضابطه $y = f(x)$ را می‌دهند و تبدیل‌هایی را به‌ترتیب روی آن انجام داده و ضابطه تابع حاصل را می‌خواهند.

حل مسائل این تیپ، دقت بالایی احتیاج دارد. برای کمک به حل درست، یک جدول عالی آورده‌ایم که در هیچ کتاب دیگری آن را نخواهید یافت و به کمک آن کل بحث تبدیل‌ها برایتان مرور می‌شود. فرض کنید تابع $f(x) = x^2 - x$ داده شده و می‌خواهیم تبدیل‌های زیر را با فرض a و k اعدادی مثبت، انجام دهیم:

اگر در صورت سؤال اینو گفت ↓	تو این کار رو انجام بده ↓	نتیجه ↓
نمودار را a واحد به سمت چپ برده‌ایم.	به جای همه x ها، $(x+a)$ قرار بده.	$y_1 = (x+a)^2 - (x+a)$
نمودار را a واحد به سمت راست برده‌ایم.	به جای همه x ها، $(x-a)$ قرار بده.	$y_2 = (x-a)^2 - (x-a)$
نمودار را a واحد به سمت بالا برده‌ایم.	به کل $f(x)$ ، a اضافه کن.	$y_3 = x^2 - x + a$
نمودار را a واحد به سمت پایین برده‌ایم.	از کل $f(x)$ ، a کم کن.	$y_4 = x^2 - x - a$
نمودار را نسبت به محور x ها قرینه کرده‌ایم.	کل $f(x)$ را در یک منفی ضرب کن.	$y_5 = -(x^2 - x) \Rightarrow y_5 = -x^2 + x$
نمودار را نسبت به محور y ها قرینه کرده‌ایم.	به جای همه x ها، $-x$ قرار بده.	$y_6 = (-x)^2 - (-x) \Rightarrow y_6 = x^2 + x$
انبساط یا انقباض افقی با ضریب k (طول نقاط، k برابر)	به جای همه x ها، $\frac{x}{k}$ قرار بده.	$y_7 = (\frac{x}{k})^2 - (\frac{x}{k})$
انبساط یا انقباض عمودی با ضریب k (عرض نقاط، k برابر)	کل تابع را در k ضرب کن.	$y_8 = k(x^2 - x)$

تیپ ۲: ترکیب f و f^{-1}

☀️ توابع f و f^{-1} در توابع $(f^{-1} \circ f)(x)$ و $(f \circ f^{-1})(x)$ مثل سگ و گربه هستند. وقتی کنار هم باشند به جون هم میوفتن و همدیگر رو نابود می‌کنن، لذا فقط x باقی می‌ماند. بنابراین:

$$y = (f^{-1} \circ f)(x) = x, \quad y = (f \circ f^{-1})(x) = x$$

همدیگر را نابود کردند. همدیگر را نابود کردند.

در تابع $y = (f^{-1} \circ f)(x)$ ، x جلوی f قرار دارد، لذا متعلق به دامنه f است و در تابع $y = (f \circ f^{-1})(x)$ ، x جلوی f^{-1} قرار دارد، لذا متعلق به دامنه f^{-1} (بردا) است.

🔴 با توجه به توضیحات فوق، نتیجه می‌گیریم که در حالت کلی دو تابع $f \circ f^{-1}$ و $f^{-1} \circ f$ با این‌که هر دو برابر x هستند، ولی با هم برابر نیستند.

📌 درستی یا نادرستی جمله زیر را بررسی کنید. (خرداد ۱۴۰۳)
«در تابع $f(x) = 4 + \sqrt{x-1}$ ، دامنه $y = (f^{-1} \circ f)(x)$ برابر $[1, +\infty)$ است.»

طبق درسنامه می‌دانیم $y = (f^{-1} \circ f)(x) = x$ شده که در آن $x \in D_f$ است. پس کافی است دامنه تابع $f(x)$ را بیابیم:
 $f(x) = 4 + \sqrt{x-1} \Rightarrow D_f : x-1 \geq 0 \Rightarrow x \geq 1$
پس دامنه تابع $y = (f^{-1} \circ f)(x)$ برابر $[1, +\infty)$ و جمله داده شده صحیح است. حتی برد $f^{-1} \circ f$ نیز برابر $[1, +\infty)$ است. زیرا بیان کردیم $y = (f^{-1} \circ f)(x) = x$ است.

📌 در مثال قبل، اگر دامنه تابع $y = (f \circ f^{-1})(x)$ را از ما سؤال می‌کردند، چه کاری باید انجام می‌دادیم؟

مجدداً می‌دانیم $y = (f \circ f^{-1})(x) = x$ می‌شود، منتها در این‌جا $x \in D_{f^{-1}}$ است. از طرفی می‌دانیم $D_{f^{-1}} = R_f$. پس برد تابع $f(x) = 4 + \sqrt{x-1}$ را می‌یابیم:
 $\sqrt{x-1} \geq 0 \xrightarrow{+4} 4 + \sqrt{x-1} \geq 4$
 $\Rightarrow f(x) \geq 4 \Rightarrow f$ برد $[4, +\infty)$
بنابراین دامنه $y = (f \circ f^{-1})(x)$ برابر $[4, +\infty)$ است. هم‌چنین چون $y = (f \circ f^{-1})(x) = x$ است، برد آن نیز $[4, +\infty)$ خواهد بود.

تیپ ۸

تابع وارون

تیپ ۱: محاسبه وارون توابع زوج مرتبی

☀️ کافی است جای x و y را در زوج‌های مرتب با هم جابه‌جا کنیم تا تابع وارون حاصل شود.

📌 اگر $f = \{(2, 3), (4, 5), (6, 7)\}$ باشد، آنگاه f^{-1} و دامنه و برد آن را به دست آورید.

$$f^{-1} = \{(3, 2), (5, 4), (7, 6)\}$$

$$D_{f^{-1}} = R_f = \{3, 5, 7\}$$

$$R_{f^{-1}} = D_f = \{2, 4, 6\}$$

📌 اگر $f = \{(2, 3), (3, 5)\}$ باشد، حاصل $f^{-1}(3)$ برابر است. (خرداد ۱۴۰۱)

$$f^{-1} = \{(3, 2), (5, 3)\} \Rightarrow f^{-1}(3) = 2$$

📌 اگر $f = \{(-3, 0), (0, 1), (1, 2)\}$ و $g = \{(7, 5), (-3, 0), (0, -1), (1, 4)\}$ باشند، تابع $f \circ g^{-1}$ را بیابید. (خرداد خارج ۱۴۰۳)

ابتدا تابع g^{-1} را به دست می‌آوریم:

$$g^{-1} = \{(5, 7), (0, -3), (-1, 0), (4, 1)\}$$

حال با استفاده از روش حل بیان شده در قسمت ترکیب توابع داریم:

$$5 \xrightarrow{g^{-1}} 7$$

$$\odot \xrightarrow{g^{-1}} -3 \xrightarrow{f} \odot$$

$$-1 \xrightarrow{g^{-1}} 0 \xrightarrow{f} \textcircled{1}$$

$$\textcircled{4} \xrightarrow{g^{-1}} 1 \xrightarrow{f} \textcircled{2}$$

$$\Rightarrow f \circ g^{-1} = \{(0, 0), (-1, 1), (4, 2)\}$$

🏃 تابع داده شده $f \circ g^{-1} = f(g^{-1}(x))$ است. آن را با $(f \circ g^{-1})(x)$ اشتباه نگیرید.

ابتدا دامنه و بُرد f را می‌یابیم:

$$f \text{ دامنه: } x - 1 \geq 0 \Rightarrow x \geq 1 \Rightarrow D_f = [1, +\infty)$$

$$f \text{ برد: } \sqrt{x-1} \geq 0 \xrightarrow{+2} \underbrace{\sqrt{x-1} + 2}_{f} \geq 2$$

$$\Rightarrow f(x) \geq 2 \Rightarrow R_f = [2, +\infty)$$

تابع $y = (f \circ f^{-1})(x) = x$ است که در آن

$$y = (f^{-1} \circ f)(x) = x \text{ و تابع } x \in D_{f^{-1}} = R_f = [2, +\infty)$$

است که در آن $x \in D_f = [1, +\infty)$ پس تساوی داده شده با توجه به محدوده x هایشان برقرار نمی‌باشد.

تایید

تایپ ۳: ضابطه یا نمودار g, f ... را می‌دهند و

$$f^{-1}(a) \text{ یا } (f^{-1} \circ g)(a) \text{ یا ... را می‌خواهند.}$$

☀ برای پیدا کردن $f^{-1}(a)$ کافی است معادله $f(x) = a$ را حل کنیم. زیرا می‌دانیم عدد ورودی f^{-1} یعنی a همان خروجی تابع f است. خروجی تابع f ، $f(x)$ است. پس باید a را برابر $f(x)$ قرار دهیم.

✓ اگر $f(x) = 2x^3 - 1$ باشد، حاصل $f^{-1}(15)$ برابر است. (دی ۱۴۰۱)

کافی است معادله $f(x) = 15$ را حل کنیم:

$$2x^3 - 1 = 15 \Rightarrow 2x^3 = 16 \Rightarrow x^3 = 8$$

$$\Rightarrow x = 2 \Rightarrow f^{-1}(15) = 2$$

تایید

✓ اگر $f(x) = 2x^3 - 6$ و $g(x) = (x-1)^3 + 11$ باشد، حاصل $(g^{-1} \circ f^{-1})(48)$ را به دست آورید. (۴۸)

می‌دانیم $(g^{-1} \circ f^{-1})(48) = g^{-1}(f^{-1}(48))$. برای

محاسبه $f^{-1}(48)$ ، معادله $f(x) = 48$ را حل می‌کنیم:

$$2x^3 - 6 = 48 \Rightarrow 2x^3 = 54 \Rightarrow x^3 = 27$$

$$\xrightarrow{\sqrt[3]{}} x = 3 \Rightarrow f^{-1}(48) = 3 \quad (*)$$

بنابراین:

$$g^{-1}(f^{-1}(48)) \stackrel{(*)}{=} g^{-1}(3)$$

حال معادله $g(x) = 3$ را حل می‌کنیم:

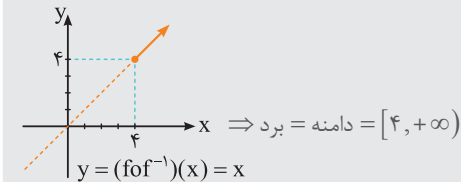
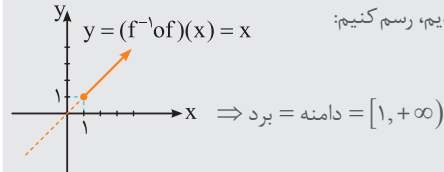
$$3 = (x-1)^3 + 11 \Rightarrow (x-1)^3 = -8$$

$$\xrightarrow{\sqrt[3]{}} x - 1 = -2 \Rightarrow x = -1 \Rightarrow g^{-1}(3) = -1$$

تایید

✓ اگر از ما بخواهند نمودارهای $(f^{-1} \circ f)(x)$ و $(f \circ f^{-1})(x)$ را در دو مثال قبل رسم کنیم، چه کاری باید انجام دهیم؟

یادمان باشد چون این توابع با $y = x$ برابرند، کافی است نیمساز ربع اول و سوم را با توجه به دامنه‌ای که حساب کردیم، رسم کنیم:



تایید

✓ اگر $f(x) = 3 + \sqrt{2x-1}$ باشد، مقدار $f^{-1}(5)$ برابر با است. (خرداد ۱۴۰۲)

دامنه $(f \circ f^{-1})(x) = R_f$ برابر $x \in D_{f^{-1}}$ است و برد f به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\sqrt{2x-1} \geq 0 \xrightarrow{+3} \underbrace{3 + \sqrt{2x-1}}_{f(x)} \geq 3 \Rightarrow f(x) \geq 3$$

$$\Rightarrow R_f = [3, +\infty) \Rightarrow D_{f \circ f^{-1}} = [3, +\infty)$$

پس ۵ می‌تواند وارد $f \circ f^{-1}$ شود و چون $(f \circ f^{-1})(x) = x$

است، جواب همان ۵ است. اگر ۵، عضو دامنه نبود می‌گفتیم $f \circ f^{-1}(5)$ تعریف نشده است.

! اگر مقدار $f^{-1} \circ f(5)$ را هم می‌خواست، با توجه به دامنه‌اش

آن هم برابر ۵ می‌شد.

$$(f^{-1} \circ f)(x) = x \in D_f = [\frac{1}{2}, +\infty)$$

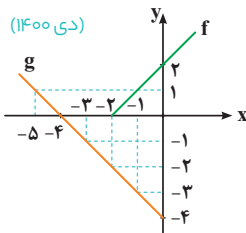
تایید

✓ جمله «برای تابع $f(x) = \sqrt{x-1} + 2$ ، تساوی

$(f \circ f^{-1})(x) = (f^{-1} \circ f)(x)$ برقرار است.» درست است یا

نادرست؟

با توجه به نمودار f و g ، حاصل $(g^{-1} \circ f^{-1})(2)$ را پیدا کنید.



ابتدا $f^{-1}(2)$ را می‌یابیم. طبق درسنامه باید معادله $f(x) = 2$ را حل کنیم. این معادله یعنی به ازای چه x ای، خروجی f برابر ۲ می‌شود که با توجه به نمودار در $x = 0$ ، $f(x) = 2$ برابر می‌شود (زیرا $(0, 2) \in f$) پس $f^{-1}(2) = 0$ داریم:

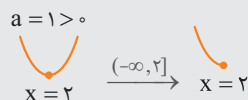
$$g^{-1}(f^{-1}(2)) = g^{-1}(0)$$

به طور مشابه باید معادله $g(x) = 0$ را حل کنیم، به ازای $x = -4$ ، مقدار $g(x)$ برابر ۰ می‌شود (زیرا $(-4, 0) \in g$)، پس $g^{-1}(0) = -4$.

اگر دامنه تابع $y = x^2 - 4x + 5$ را به بازه $(-\infty, m]$ محدود کنیم تا تابعی یک‌به‌یک شود، حداکثر مقدار m را بیابید.

طبق نکته فوق، حداکثر مقدار m باید طول رأس سهمی یعنی $x_S = \frac{-b}{2a}$ باشد.

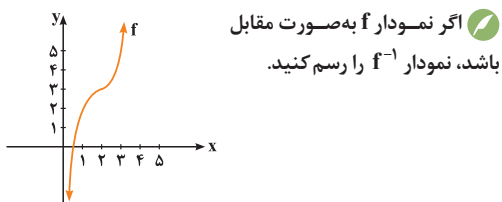
$$m = x_S = \frac{-(-4)}{2(1)} = 2$$



تیپ ۵: نمودار f^{-1}

می‌دانیم نمودار تابع f و f^{-1} نسبت به خط $y = x$ (نیمساز ربع اول و سوم) قرینه‌اند. پس برای رسم نمودار f^{-1} ، کافی است نمودار f را نسبت به خط $y = x$ قرینه کنیم.

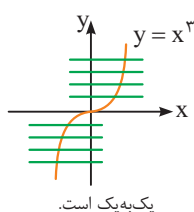
❗ حواستان باشد نمودار f را حتماً نسبت به خط $y = x$ قرینه کنید. بارها دیده‌ایم سر کلاس بچه‌ها می‌گویند: «نمی‌شود نمودار f را نسبت به نیمساز ربع دوم و چهارم قرینه کرد؟!» پاسخ این‌ها: نه نمی‌شود!



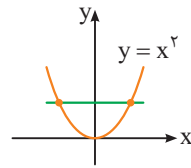
تیپ ۴: از ما می‌خواهند دامنه تابع را محدود

کنیم تا تابع، یک‌به‌یک و در نتیجه وارون پذیر شود.

از سال قبل می‌دانیم اگر خطی افقی یافت شود که نمودار تابعی مانند $y = x^2$ را در بیش‌تر از یک نقطه قطع کند، نمودار داده شده متعلق به تابعی یک‌به‌یک نخواهد بود! و در نتیجه وارون پذیر نمی‌شود. اما همین تابع $y = x^2$ ، اگر دامنه‌اش را به بازه $[0, +\infty)$ یا $(-\infty, 0]$ یا هر زیرمجموعه‌ای از یکی از این دو بازه محدود کنیم، به تابعی یک‌به‌یک تبدیل می‌شود و در نتیجه وارون پذیر می‌شود.



یک‌به‌یک است.



خطی افقی در دو نقطه نمودار را قطع کرد، پس یک‌به‌یک نمی‌باشد.

ضابطه وارون $f(x) = \frac{-7}{3}x - 3$ را به دست آورید.

(شهریور ۹۹)

$$y = \frac{-7}{3}x - 3 \Rightarrow y + 3 = \frac{-7}{3}x \xrightarrow{\times 3} 3y + 6 = -7x$$

$$\xrightarrow{\div (-7)} x = \frac{3y + 6}{-7} \xrightarrow{\text{جای } y \text{ و } x \text{ عوض شود.}} f^{-1}(x) = \frac{3x + 6}{-7}$$

دامنه f^{-1} = برد f , برد f^{-1} = دامنه f

تابع $f(x) = \sqrt{x+4} - 1$ را در نظر بگیرید. دامنه و ضابطه تابع وارون آن را بیابید.

(خرداد ۱۴۰۳)

با توجه به ضابطه $f(x)$ ، برد آن را می‌یابیم:

$$\sqrt{x+4} \geq 0 \xrightarrow{-1} \sqrt{x+4} - 1 \geq -1$$

$$\Rightarrow f(x) \geq -1 \Rightarrow R_f = D_{f^{-1}} = [-1, +\infty)$$

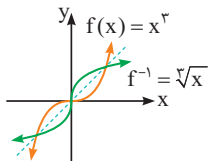
البته می‌توان به کمک نمودار f نیز برد f را پیدا کرد.
بریم سراغ محاسبه ضابطه تابع وارون:

$$y = \sqrt{x+4} - 1 \Rightarrow y + 1 = \sqrt{x+4}$$

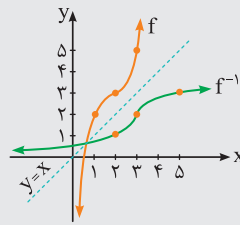
$$\Rightarrow (y+1)^2 = x+4 \Rightarrow x = (y+1)^2 - 4$$

$$\xrightarrow{\text{جای } y \text{ و } x \text{ عوض شود.}} f^{-1}(x) = (x+1)^2 - 4 \quad (x \geq -1)$$

این تابع $f(x) = x^3$ با دامنه و برد $\mathbb{R}$ مفروض است. معکوس این تابع $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$ می‌باشد.

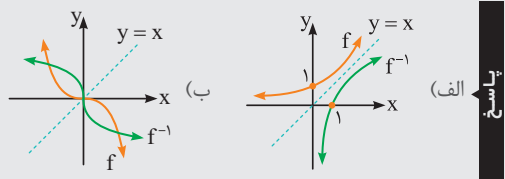
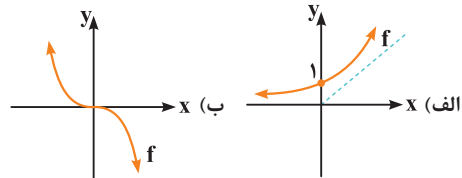


اگر در امتحان، وارون تابع $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ خواسته شد، هدف طراح این است که ضابطه f را ابتدا به فرم $f(x) = a(x+b)^3 + c$ بنویسید. حال چون فقط یک x در ضابطه f وجود دارد، به راحتی می‌توان f^{-1} را حساب نمود.



همان‌طور که از نمودار f و f^{-1} مشخص است، نتیجه می‌گیریم که اگر نمودار f به سمت محور y (محور x) نزدیک شود، نمودار f^{-1} به سمت محور x (محور y) نزدیک می‌شود. برای آن که نمودار f^{-1} را دقیق‌تر و راحت‌تر بکشیم، کافی است چند نقطه از نمودار f را پیدا کنیم و سپس جای x و y آن را عوض کنیم تا نقاط روی f^{-1} به دست آیند. در نهایت آن نقاط را به هم وصل کنیم تا نمودار f^{-1} حاصل شود. در مثال فوق، سه نقطه $(1,2)$ ، $(2,3)$ و $(3,5)$ متعلق به نمودار f بود که با جابه‌جایی x و y آن‌ها به نقاط $(2,1)$ ، $(3,2)$ و $(5,3)$ روی نمودار f^{-1} رسیدیم و آن‌ها را با توجه به نمودار f به هم وصل کردیم.

برای هر کدام از نمودارهای زیر، نمودار f^{-1} را رسم کنید.



تیب ۶: محاسبه ضابطه وارون تابع f

در حالت کلی باید x را برحسب y به دست آورده و سپس جای x و y را عوض کنیم تا ضابطه f^{-1} به دست آید.

به معنای $\frac{1}{f}$ نمی‌باشد! پس حواستان باشد اگر گفتند وارون $f(x) = \frac{4x-5}{6}$ برابر $f^{-1}(x) = \frac{6}{4x-5}$ است یا خیر؟
بگویید: خیر!

خدا روشکر خود سؤال دامنه را محدود شده داده است. پس نیازی نیست برای دامنه کاری انجام دهیم. می‌رویم سراغ این‌که ضابطه f را کاری کنیم که فقط یک x در آن باقی بماند. برای این منظور عدد $(\frac{x}{2})^2$ را به تابع اضافه و کم می‌کنیم:

$$f(x) = x^2 + 4x + 3$$

$$\left(\frac{x}{2}\right)^2 = 4 \rightarrow f(x) = x^2 + 4x + 3 + 4 - 4$$

$$\Rightarrow f(x) = (x+2)^2 - 1$$

حال x را برحسب y به دست می‌آوریم:

$$y = (x+2)^2 - 1 \Rightarrow y+1 = (x+2)^2$$

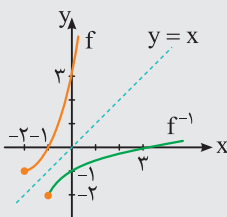
$$\sqrt{\quad} \rightarrow \sqrt{y+1} = |x+2|$$

$$\frac{x \geq -2}{\text{داخل قدرمطلق مثبت}} \rightarrow \sqrt{y+1} = x+2$$

$$\Rightarrow x = \sqrt{y+1} - 2$$

$$\frac{\text{جای } x \text{ و } y}{\text{عوض شود}} \rightarrow f^{-1}(x) = y = \sqrt{x+1} - 2$$

دامنه f^{-1} همان بُرد f است. برای تعیین بُرد f از رسم نمودار $y = (x+2)^2 - 1$ به کمک انتقال در بازه $[-2, +\infty)$ استفاده می‌کنیم:



$$\Rightarrow f^{-1} \text{ دامنه } f \text{ برد } = [-1, +\infty)$$

روش جالب برای مربع کامل کردن: اگر $S(x_S, y_S)$ رأس

سهمی $f(x) = ax^2 + bx + c$ باشد، می‌توان ضابطه $f(x)$ را به صورت $f(x) = a(x - x_S)^2 + y_S$ نوشت و به راحتی وارون f را یافت. x_S که همان $-\frac{b}{2a}$ است و y_S را با جای‌گذاری x_S در ضابطه f می‌توان یافت.

ضابطه تابع وارون تابع $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x$ را به دست آورید.

با استفاده از فرمول $(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$ تابع داده شده را ساده می‌کنیم:

$$f(x) = x^3 - 3x^2(1) + 3x(1)^2 + 1 = (x-1)^3 + 1$$

اضافه و کم می‌کنیم.

حال x را برحسب y می‌یابیم:

$$y = (x-1)^3 + 1 \Rightarrow y-1 = (x-1)^3$$

$$\sqrt[3]{\quad} \rightarrow \sqrt[3]{y-1} = x-1 \Rightarrow x = \sqrt[3]{y-1} + 1$$

$$\frac{\text{جای } x \text{ و } y}{\text{عوض شود}} \rightarrow y = f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x-1} + 1$$

محاسبه معکوس تابع $f(x) = ax^2 + bx + c$ یکی از مهم‌ترین سؤالات امتحان نهایی و کتاب درسی است. می‌دانیم این تابع یک‌به‌یک نمی‌باشد، ولی با محدود کردن دامنه آن به یکی از بازه‌های $[-\infty, -\frac{b}{2a}]$ یا $[\frac{b}{2a}, +\infty)$ یا هر زیرمجموعه‌ای از هر کدام از این بازه‌ها، این تابع یک‌به‌یک شده و وارون‌پذیر خواهد بود.

$$x = -\frac{b}{2a}$$

حال باید ضابطه f را کاری کنیم که فقط یک جمله آن دارای x باشد و در ادامه x را برحسب y به دست آوریم.

بُرد تابع درجه دوم f را به کمک رسم آن با توجه به دامنه‌اش می‌یابیم و چون بُرد f همان دامنه f^{-1} است، جواب را به عنوان دامنه f^{-1} می‌نویسیم.

اگر دامنه تابع $f(x) = x^2 + 4x + 3$ برابر $[-2, +\infty)$ باشد، ابتدا ضابطه و دامنه تابع وارون را به دست آورید و سپس نمودار f و f^{-1} را رسم کنید. (شهریور ۱۴۰۲)

اگر $f(x) = \frac{1}{\lambda}x - 3$ و $g(x) = x^3$ باشد، مقدار $(fog)^{-1}(\Delta)$ را بیابید. (شهریور ۹۸ و کتاب درسی)

روش الف: ابتدا fog را می‌یابیم:

$$(fog)(x) = f(g(x)) = f(x^3) = \frac{1}{\lambda}(x^3) - 3$$

جای گذاری
x³ در f

حال وارون تابع حاصل را به دست می‌آوریم:

$$y = \frac{1}{\lambda}x^3 - 3 \Rightarrow y + 3 = \frac{1}{\lambda}x^3 \Rightarrow \lambda y + 3\lambda = x^3$$

$$\sqrt[3]{} \rightarrow x = \sqrt[3]{\lambda y + 3\lambda} \xrightarrow{\text{تعویض جای } x \text{ و } y} y = \sqrt[3]{\lambda x + 3\lambda}$$

$$\Rightarrow (fog)^{-1}(x) = \sqrt[3]{\lambda x + 3\lambda}$$

$$\xrightarrow{x=\Delta} (fog)^{-1}(\Delta) = \sqrt[3]{\lambda(\Delta) + 3\lambda} = \sqrt[3]{64}$$

$$= \sqrt[3]{4^3} = 4$$

میان‌بر: دیدیم که $(fog)(x) = \frac{x^3}{\lambda} - 3$ شد. برای محاسبه $(fog)^{-1}(\Delta)$ ، طبق درسنامه‌های قبلی، کافی است معادله $(fog)(x) = \Delta$ را حل کنیم و دیگر نیازی به محاسبه وارون تابع fog نمی‌باشد.

$$\frac{x^3}{\lambda} - 3 = \Delta \Rightarrow \frac{x^3}{\lambda} = \lambda \Rightarrow x^3 = 64$$

$$\sqrt[3]{} \rightarrow x = \sqrt[3]{64} = \sqrt[3]{4^3} = 4 \Rightarrow (fog)^{-1}(\Delta) = 4$$

روش ب: (*) $(fog)^{-1}(\Delta) = g^{-1}(f^{-1}(\Delta))$

برای محاسبه $f^{-1}(\Delta)$ ، معادله $f(x) = \Delta$ را حل می‌کنیم:

$$f(x) = \frac{1}{\lambda}x - 3 = \Delta \Rightarrow \frac{1}{\lambda}x = \lambda \Rightarrow x = 64$$

$$\Rightarrow f^{-1}(\Delta) = 64$$

با جای‌گذاری عبارت فوق در (*) به $g^{-1}(64)$ می‌رسیم که برای آن معادله $g(x) = 64$ را حل می‌کنیم:

$$x^3 = 64 \Rightarrow x = 4 \Rightarrow g^{-1}(64) = 4$$

$$\Rightarrow (fog)^{-1}(\Delta) = 4$$

مثلاً اگر $f(x) = -3x^2 + 6x - 1$ باشد، داریم:

$$x_S = \frac{-b}{2a} = \frac{-6}{2(-3)} = 1 \xrightarrow{\text{جای گذاری در } f} y_S = -3(1)^2 + 6(1) - 1 = 2$$

$$\Rightarrow S(1, 2)$$

$$f(x) = -3x^2 + 6x - 1 \xrightarrow{S(1,2)} f(x) = -3(x-1)^2 + 2$$

حال که فقط یک x در ضابطه f است، محاسبه وارون f ، کار ساده‌ای محسوب می‌شود.

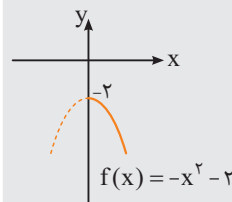
ضابطه و دامنه تابع وارون تابع $f(x) = -x^2 - 2$ با شرط $x \geq 0$ را به دست آورید. (دی ۱۴۰۳)

$$y = -x^2 - 2 \Rightarrow y + 2 = -x^2$$

$$\Rightarrow x^2 = -y - 2 \xrightarrow{\sqrt{}} |x| = \sqrt{-y - 2}$$

$$\xrightarrow{x \geq 0} x = \sqrt{-y - 2} \Rightarrow f^{-1}(x) = \sqrt{-x - 2}$$

دامنه f^{-1} همان بُرد f است. برای تعیین بُرد f ، کافی است نمودار $f(x) = -x^2 - 2$ را در محدوده $x \geq 0$ رسم کنیم:



$$\Rightarrow f^{-1} \text{ دامنه } f \text{ برد } = (-\infty, -2]$$

تیپ ۷: محاسبه وارون fog (یعنی $(fog)^{-1}$)

روش الف: ابتدا به کمک f و g ، تابع fog را تشکیل داده و سپس وارون fog را می‌یابیم.

روش ب: از فرمول $(fog)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$ استفاده می‌کنیم این فرمول به ما می‌گوید که برای وارون fog کافی است، تک تک توابع f و g را وارون کنیم و جای آن‌ها را نیز با هم عوض کنیم (یعنی تابع f^{-1} وارد تابع g^{-1} می‌شود).

نشان دهید توابع $f(x) = \frac{-7}{2}x - 3$ و $g(x) = -\frac{2x+6}{7}$ وارون هم هستند.

(کتاب درسی و مشابه خرداد ۹۹، دی ۱۴۰۰ و شهریور ۱۴۰۰)

به جای x در f قرار می‌دهیم.

$$\text{اولاً: } f(g(x)) = f\left(-\frac{2x+6}{7}\right) = \cancel{\frac{-7}{2}} \left(\cancel{\frac{2x+6}{7}}\right) - 3 = -x - 3 + 3 = -x$$

$$= -\frac{2x+6}{7} - 3 = -x - 3 + 3 = -x \quad \checkmark$$

$$\text{دوماً: } g(f(x)) = g\left(\frac{-7}{2}x - 3\right) = -\frac{\frac{-7}{2}x - 3 + 3}{7} = -\frac{\frac{-7}{2}x}{7} = \frac{x}{2}$$

به جای x در g قرار می‌دهیم.

$$= -\frac{-7x - 6 + 6}{7} = \frac{7x}{7} = x \quad \checkmark$$

پس f و g وارون هم‌اند.

البته می‌توان وارون یکی از دو تابع مانند f را به‌دست آورد و نشان داد که همان g است. در مثال فوق داریم:

$$f(x) = \frac{-7}{2}x - 3 \Rightarrow y = \frac{-7}{2}x - 3$$

$$\Rightarrow y + 3 = -\frac{7}{2}x \xrightarrow{\times(-\frac{2}{7})} -\frac{2}{7}(y+3) = x$$

$$x = -\frac{2y+6}{7} \xrightarrow{\text{جای } x \text{ و } y \text{ عوض شود.}} y = f^{-1}(x) = -\frac{2x+6}{7}$$

حُب دیدیم که وارون f همان g است.

اگر $f(x) = \frac{1}{8}x - 3$ و $g(x) = x^3$ باشد، حاصل $(g^{-1} \circ f^{-1})(5)$ را بیابید. (کتاب درسی)

در این جا می‌خواهیم این سؤال را به کمک فرمول $g^{-1} \circ f^{-1} = (fog)^{-1}$ حل کنیم. بنابراین:

$$(g^{-1} \circ f^{-1})(5) = (fog)^{-1}(5) \quad (*)$$

حال کافی است، معادله $(fog)(x) = 5$ را حل کنیم:

$$f(g(x)) = 5 \Rightarrow f(x^3) = 5 \Rightarrow \frac{1}{8}x^3 - 3 = 5$$

جای‌گذاری به جای x در f

$$\Rightarrow \frac{1}{8}x^3 = 8 \Rightarrow x^3 = 64$$

$$\sqrt[3]{\quad} \rightarrow x = \sqrt[3]{64} = 4 \xrightarrow{(*)} (fog)^{-1}(5) = 4$$

جمله «اگر f و g دو تابع وارون‌پذیر باشند، آنگاه $(fog)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$ همواره برقرار است.» درست است یا نادرست؟ (خرداد خارج ۱۴۰۳)

با توجه به درسنامه درست است.

تیپ ۸: از ما می‌پرسند آیا دو تابع f و g وارون یکدیگرند؟

برای بررسی این‌که آیا f و g وارون هم هستند، باید نشان دهیم که:

$$\text{اولاً: } (fog)(x) = x \quad ; \quad x \in D_g$$

$$\text{دوماً: } (gof)(x) = x \quad ; \quad x \in D_f$$

یادداشت:

دوم

آزمون
صحیح
یا غلط

بخش

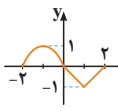
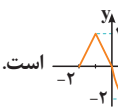
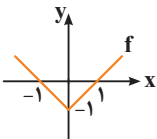


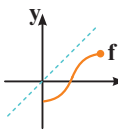
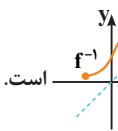
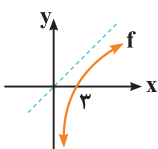
تو بخش دوم این فصل، می‌خوایم براتون به مرور کامل و حرفه‌ای از متن کتاب درسی و سؤالات امتحانات نهایی فصل داشته باشیم. آزمون‌های صحیح یا غلط، گام طلایی هر فصل‌اند و خواندن اونا قبل از هر آزمون مهمی از نون شب براتون واجب‌تره و به شما می‌گه چقدر روی اون فصل مسلطین.

درستی یا نادرستی جملات زیر را مشخص کنید.

۱	تابع $y = \sqrt{5}x^6 - 7x^2 + 2x$ چندجمله‌ای نمی‌باشد. (متن کتاب درسی، خرداد و دی خارج ۹۹)
۲	تابع $y = (x^4 - 5)(x + 1)$ تابع چندجمله‌ای از درجه ۵ بوده و دامنه‌اش، $\mathbb{R}$ است. (پرتکرار امتحان نهایی، مشابه خرداد ۱۴۰۳ و ...)
۳	نمودار تابع $y = x^2$ در محدوده $\{0\} - (-\infty, 1)$ پایین‌تر از نمودار $y = x^3$ قرار دارد. (مشابه دی ۱۴۰۰ و ۱۴۰۱ و متن کتاب درسی)
۴	نمودار تابع $y = -x^3 - 1$ از ناحیه سوم محورهای مختصات نمی‌گذرد و دامنه و بُرد آن $\mathbb{R}$ است و اکیداً نزولی است. (خرداد ۱۴۰۰ و مشابه شهریور ۹۸)
۵	تابع ثابت $f(x) = a$ در یک بازه، هم صعودی و هم نزولی بوده و در نتیجه بی‌شمار تابع هم صعودی و هم نزولی داریم. (متن کتاب درسی، خرداد ۹۹ و ۱۴۰۲)
۶	توابع یکنوا، همواره اکیداً یکنوا می‌باشند. (مشابه دی خارج ۹۹)
۷	توابع یک‌به‌یک، همواره اکیداً یکنوا هستند. (خرداد خارج ۱۴۰۳)
۸	اگر تابعی اکیداً یکنوا نباشد، یک‌به‌یک نمی‌باشد. (مشابه شهریور ۹۹)
۹	توابع $y = 1 - 2^x$ و $y = \log_{2/5} x$ اکیداً نزولی هستند. (تمرین کتاب درسی)
۱۰	تابع $y = x^2 \sqrt{x^2}$ در بازه $(-\infty, 0]$ اکیداً صعودی است. (تمرین کتاب درسی)
۱۱	نمودار تابع x در بازه $[1, 2]$ هم صعودی و هم نزولی است.
۱۲	تابع $y = \frac{-1}{x}$ در دامنه‌اش یکنوا است. (مشابه شهریور ۱۴۰۲)
۱۳	نمودار تابع $y = x - x $ ، یک تابع اکیداً صعودی است. (مشابه تمرین کتاب درسی)
۱۴	نمودار $y = \sin(x - \frac{\pi}{4})$ در بازه $[\frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}]$ اکیداً نزولی است. (مشابه کار در کلاس کتاب درسی)
۱۵	در نمودار تابع $y = -\cos x$ ، برای هر x_1 و x_2 عضو بازه $[0, \pi]$ ، رابطه $x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$ برقرار است. (مشابه کار در کلاس کتاب درسی)

۱۶	تابع $f = \{(1, 2), (5, 4), (2, 7)\}$ ، تابعی غیر یکنوا است.
۱۷	اگر f تابعی اکیداً صعودی باشد و $f(1) = 0$ ، آنگاه دامنه تابع $y = \sqrt{f(x)}$ به صورت $[0, +\infty)$ است.
۱۸	اگر $f(x) = \begin{cases} x+1 & ; x \geq 0 \\ 2x+k & ; x < 0 \end{cases}$ اکیداً صعودی باشد، آنگاه $k \leq 1$ است.
۱۹	اگر $f(x) = (4-2m)x^3 + 5$ اکیداً نزولی باشد، آنگاه $m \geq 2$ است.
۲۰	اگر $f(x) = (m-2)x^2 + 5nx + 4$ در $\mathbb{R}$ هم صعودی و هم نزولی باشد، آنگاه $m+n=2$ می شود. (برگرفته از متن کتاب درسی)
۲۱	اگر $f(x) = x^2 + bx + 5$ در بازه $[1, +\infty)$ اکیداً صعودی باشد، آنگاه $b \geq -2$ است. (پیشرفته خرداد ۱۴۰۳)
۲۲	در تابع $y = (g \circ f)(x)$ ، $g(x)$ به عنوان ورودی تابع f باید در محدوده دامنه f قرار داشته باشد. (متن کتاب درسی)
۲۳	اگر $x \in D_f$ و $f(x) \in D_g$ باشد، ترکیب $g \circ f$ قابل انجام است. (متن کتاب درسی)
۲۴	اگر $f(x) = x^2 - 4$ و $g(x) = \sqrt{x^2 - 4}$ باشد، آنگاه $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x)$ است. (مشابه تمرین کتاب درسی)
۲۵	برای دو تابع f و g که $f \neq g$ ، تساوی $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x)$ هیچگاه برقرار نیست. (تمرین کتاب درسی)
۲۶	اگر $f(7) = 5$ و $g(4) = 7$ ، آنگاه $(f \circ g)(4) = 5$ است. (تمرین کتاب درسی)
۲۷	تابع $h(x) = x^2 - 2x$ را می توان به صورت ترکیب دو تابع $g(x) = x-1$ و $f(x) = x^2 - 1$ نوشت که $h(x) = (f \circ g)(x)$ است. (مشابه تمرین کتاب درسی و مشابه خرداد ۱۴۰۳)
۲۸	با توجه به نمودار $y = g(x)$ ، اگر $g(3t-5) = 0$ باشد؛ داریم: $t = 4$. (مشابه دی ۹۹)
۲۹	اگر $f(x) = 2x - 5$ و $g(x) = x^2 - 3x + 8$ باشد، مجموع جواب های معادله $(f \circ g)(x) = 7$ برابر ۳ است.
۳۰	اگر $f(x) = \frac{2}{x-1}$ باشد، دامنه تابع $y = (f \circ f)(x)$ برابر $\mathbb{R} - \{1\}$ است و داریم $(f \circ f)(2) = 2$. (پرتکرار امتحان نهایی)
۳۱	اگر $f(x) = \sin x$ و $g(x) = \sqrt{x}$ باشد، دامنه تابع $y = (g \circ f)(x)$ برابر $x \in [2k\pi, 2k\pi + \pi]$ است که در آن $k \in \mathbb{Z}$ است. (تمرین کتاب درسی)
۳۲	دامنه $f \circ g$ ، x هایی از دامنه g هستند که به ازای آن ها، $g(x)$ عضوی از دامنه f است. (متن کتاب درسی)
۳۳	اگر $f = \{(1, 2), (4, 1)\}$ باشد، آنگاه $f + f \circ f = \{(4, 2)\}$. (ترکیبی و مشابه دی ۱۴۰۰ و شهریور ۱۴۰۱)
۳۴	در ماشین مقابل، اگر خروجی $\frac{3}{5}$ باشد، ورودی ۴ است. (مشابه خرداد ۱۴۰۰)
۳۵	اگر $f(x) = 3x + a$ و $g(x) = 2 - x$ و $(f \circ g)(x) - (g \circ f)(x) = 6$ باشد، آنگاه $a = 1$ می شود.
۳۶	اگر $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{\sqrt{1-x}} & ; x < 1 \\ 2x - \frac{3}{4} & ; x \geq 1 \end{cases}$ باشد، آنگاه $(f \circ f)(\frac{3}{4}) = \frac{9}{4}$ می شود. (پیشرفته دی ۱۴۰۳)

اگر $f(x) = \sqrt{2x - x^2}$ باشد، آن‌گاه دامنه $y = f(3 - x)$ برابر $x \in [1, 2]$ است. ۳۷	
در شکل مقابل، اگر $g(-3) = 0$ باشد، آن‌گاه $a = 11$ است. ۳۸	(ترکیبی و پیشرفته خرداد ۱۴۰۰ و تمرین کتاب درسی)
$x \rightarrow 2x+1 \rightarrow g(x) \rightarrow 4x^2 + ax + 6$	
دامنه توابع $y = f(x)$ و $y = 2f(x) - 4$ یکسان است. ۳۹	(مشابه دی و شهریور ۹۹)
بُرد توابع $y = f(x-1)$ و $y = f(2x-4)$ با هم برابر است. ۴۰	(مشابه شهریور خارج ۹۸)
برای رسم نمودار $y = -\sqrt{-x}$ ، کافی است نمودار $y = \sqrt{x}$ را ابتدا نسبت به محور x ها و سپس نسبت به محور y ها قرینه کنیم. ۴۱	(برگرفته از متن کتاب درسی)
برای رسیدن از نمودار $y = (x+1)^3 - 1$ به نمودار $y = x^3$ ، کافی است نمودار را یک واحد پایین برده و سپس آن را یک واحد به سمت چپ منتقل کنیم. ۴۲	(پیشرفته خرداد ۱۴۰۳)
نقطه $A(1, 4)$ روی نمودار $y = f(x)$ ، با نقطه $A'(2, -10)$ روی نمودار $y = 2 - 3f(\frac{x}{3})$ متناظر است. ۴۳	(پیشرفته شهریور خارج ۹۸)
نقطه $A(2, 1)$ روی نمودار $y = 1 - 2f(x+2)$ ، با نقطه $A'(0, 4)$ روی نمودار $y = f(x)$ متناظر است. ۴۴	
اگر $0 < k < 1$ باشد، نمودار تابع $y = f(kx)$ از انبساط افقی با ضریب $\frac{1}{k}$ نمودار f به دست می‌آید. ۴۵	(برگرفته از دل کتاب درسی)
اگر $k > 1$ باشد، نمودار تابع $y = kf(kx)$ از انقباض افقی با ضریب k و سپس انبساط عمودی با ضریب k به دست می‌آید. ۴۶	(برگرفته از دل کتاب درسی)
اگر دامنه و بُرد تابع $y = f(x)$ به صورت $(0, 2]$ باشد، دامنه تابع $g(x) = -2f(2x) + 1$ به ترتیب برابر $D_g = (0, 1]$ و $R_g = [-3, 1)$ می‌باشد. ۴۷	(پیشرفته دی و خرداد ۱۴۰۱)
اگر دامنه و بُرد تابع $g(x) = 3f(2x) + 1$ به صورت $[-1, 4]$ باشد، دامنه و بُرد تابع $y = f(x)$ برابر $D_f = [-\frac{1}{3}, 2]$ و $R_f = [-2, 13]$ می‌باشد. ۴۸	
اگر نمودار $f(x)$ به صورت  باشد، نمودار تابع $2f(\frac{-x}{3})$ به صورت  است. ۴۹	(مشابه خرداد ۹۹)
برای رسیدن از نمودار $f(2x+1)$ به نمودار $f(-2x+1)$ ، کافی است نمودار $f(2x+1)$ را نسبت به محور x ها قرینه کنیم. ۵۰	
نمودار $f(x) = 1 - \sqrt{x+1} $ در بازه $[-1, 1]$ اکیداً نزولی است. ۵۱	(ترکیبی از متن کتاب درسی)
اگر نمودار $y = x^2 - x$ را ابتدا ۱ واحد به راست برده و سپس نسبت به محور y ها قرینه کنیم، تابع $y = x^2 + 3x + 2$ به دست می‌آید. ۵۲	(مشابه شهریور ۱۴۰۲)
اگر نمودار $f(x)$ را یک واحد به بالا و سپس ۱ واحد به چپ انتقال داده تا به تابع $g(x) = x $ برسیم، ضابطه $(fog)(x) = x - 1 $ می‌شود. ۵۳	
با توجه به نمودار $f(x)$ ، مجموع جواب‌های معادله $(f \circ f)(x) = -1$ برابر صفر است. ۵۴	

۵۵	دو تابع $f(x) = \frac{2x+5}{6}$ و $g(x) = \frac{6x-5}{2}$ وارون یکدیگرند.	(مشابه خرداد خارج ۹۹)
۵۶	دو تابع ثابت $f(x) = \frac{5}{y}$ و $g(x) = \frac{y}{5}$ وارون یکدیگرند.	(مفهوم تابع وارون)
۵۷	تساوی $(f^{-1} \circ f)(x) = (f \circ f^{-1})(x)$ زمانی برقرار است که دامنه و برد f یکسان باشد.	(متن کتاب درسی)
۵۸	نمودار تابع $y = (f \circ f^{-1})(x)$ قسمتی از خط $y = x$ است که در آن $x \in D_f$.	(متن کتاب درسی)
۵۹	تابع $y = 3x^2 + 5x - 6$ در بازه $[-1, 4]$ وارون پذیر است.	(برگرفته از مثال کتاب درسی)
۶۰	اگر $f(x) = ax - 6$ و $f^{-1}(2) = 4$ باشد، آنگاه $f(3) = 0$.	
۶۱	اگر $f(x) = -1 + \sqrt{-2x}$ باشد، مقدار $f^{-1}(4)$ برابر $12/5$ است.	(مشابه دی ۱۴۰۱)
۶۲	معکوس تابع $f(x) = \sqrt{-1-x}$ ، خط $y = -2$ را در یک نقطه قطع می‌کند.	
۶۳	نمودار تابع $f(x) = x^2 + 2x$ در یک بازه نزولی است. وارون آن در این بازه برابر $f^{-1}(x) = -1 - \sqrt{-1-x}$ است.	(مشابه شهریور ۱۴۰۲، دی ۱۴۰۳ و مثال کتاب درسی)
۶۴	اگر نمودار f به صورت  باشد، نمودار f^{-1} به صورت  است.	(متن کتاب درسی)
۶۵	اگر $f(1) = 2$ و $g(6) = 1$ باشد، آنگاه $(f \circ g)^{-1}(2)$ می‌شود.	(ترکیبی تمرین‌های کتاب درسی)
۶۶	اگر $f \circ f^{-1} = \{(1, b), (-2, a)\}$ باشد، آنگاه $a + b = -1$ می‌شود.	(برگرفته از دل کتاب درسی)
۶۷	اگر $f = \{(5, 2), (7, 3)\}$ و $g(x) = \sqrt{5x+9}$ باشد، آنگاه $(g^{-1} \circ f^{-1})(3) = 8$ می‌شود.	(برگرفته از تمرین کتاب درسی)
۶۸	اگر $f(x) = \sqrt{x+2}$ ، آنگاه دامنه تابع $y = \sqrt{2 - (f^{-1} \circ f)(x)}$ برابر $x \in (-\infty, 2]$ است.	
۶۹	معکوس تابع $f(x) = x^5 + 2x - 3$ از نقطه $(6, 2)$ می‌گذرد.	(مفهوم تابع وارون)
۷۰	با توجه به نمودار f در شکل مقابل، دامنه تابع $y = \frac{1}{\sqrt{f^{-1}(x)}}$ برابر $\mathbb{R}$ است.	
۷۱	اگر $f(x) = \sqrt{1-x}$ و $D_g = \mathbb{R} - \{1\}$ باشد، دامنه $(g \circ f^{-1})(x)$ برابر $(0, +\infty)$ است.	(ترکیبی و پیشرفته ترکیب تابع و تابع وارون)

سوم

آزمون‌های
جامع

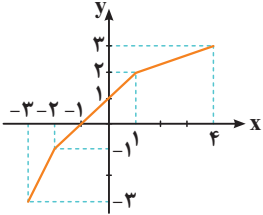
بخش

مدت زمان پاسخگویی: ۱۲۰ دقیقه

آزمون ۱

۱	جاهای خالی را با عبارت مناسب پُر کنید. الف تابع $f(x) = -(1-x)^3 + 2$ در دامنه‌اش، اکیداً است. (نزولی - صعودی) (پیشرفته خرداد ۱۴۰۰ و شهریور ۹۸) ب نمودار تابع $y = (2x + 3)^3$ را یک واحد به چپ و دو واحد به پایین منتقل کرده‌ایم. سپس نسبت به محور yها قرینه کرده‌ایم. ضابطه تابع حاصل است. (مشابه شهریور ۱۴۰۰) پ اگر وارون تابع $f(x) = 3 - \sqrt{ax+1}$ از نقطه $(\frac{1}{3}, 0)$ عبور کند، مقدار $f^{-1}(2)$ برابر است. ت اگر $(2, 6) \in \text{fog}^{-1}$ و $f(x) = 3 - x$ باشد، آن‌گاه مقدار $(\text{fog})(-3)$ برابر است.	۱
۱	درستی یا نادرستی هر یک از عبارت‌های زیر را مشخص کنید. الف اگر $f(x) = \sqrt{x^2 - 9}$ و $g(x) = \sqrt{x^2 + 1}$ باشد، آن‌گاه دامنه تابع $(\text{gof})(x)$ برابر $\mathbb{R} - (-\sqrt{8}, \sqrt{8})$ است. (مثال کتاب درسی و پرتکرار امتحان نهایی) ب برای رسم نمودار $y = f(2x-1)$ از روی نمودار $y = f(x)$، کافی است ابتدا طول نقاط نمودار $f(x)$ را نصف کرده و سپس کل نمودار را یک واحد به راست انتقال دهیم. (مفهومی از دل کتاب درسی) پ اگر نمودار دو تابع $f(x) = m_1x + h_1$ و $g(x) = m_2x + h_2$ نسبت به نیمساز ربع اول و سوم قرینه باشند، آن‌گاه $m_1 \times m_2 = -1$. ت دو تابع غیرمساوی f و g وجود دارد که $(\text{fog})(x) = (\text{gof})(x)$ باشد. (تمرین کتاب درسی)	۲
۱	اگر نمودار تابع $f(x) = (x-a)^3 + b$ به صورت مقابل باشد، مقادیر a، b و h را بیابید.	۳
۱	نمودار تابع $f(x) = \begin{cases} 1-x^3 & ; x \leq -1 \\ 1 & ; -1 < x < 0 \\ 2^x - 2 & ; x \geq 0 \end{cases}$ را رسم کنید و بازه‌هایی را که در آن‌ها تابع صعودی، نزولی یا ثابت است، مشخص کنید. (ترکیبی و مشابه تمرین کتاب درسی)	۴

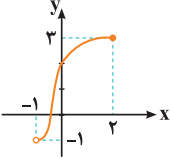
۵	اگر تابع $f = \{(-1, 3), (5, 8), (3, 2m-1)\}$ تابعی اکیداً صعودی باشد، حدود m را پیدا کنید.	۱
۶	با توجه به نمودار توابع f و g ، حاصل $\frac{(fog)(-1) + (gof)(-2)}{(fof)(3)}$ را به دست آورید. (مشابه تمرین کتاب درسی)	۱/۵
۷	اگر $f(t) = 4t + 2$ و $g(t) = 20t^2 - 80t + 500$ باشد، جاهای خالی را در نمودار ون زیر کامل کنید. (متن کتاب درسی)	۱/۵
۸	اگر $f(x) = x^2 - 2$ و $g(x) = \sqrt{4 - x^2}$ باشد، دامنه و ضابطه تابع gof را به دست آورید. (مشابه تمرین کتاب درسی و پرتکرار امتحان نهایی)	۱
۹	اگر توابع f و g به عنوان ماشین به صورت $2x \rightarrow f \rightarrow g \rightarrow x$ باشند و $f(x) = 3x + 4$ ، آنگاه جواب معادله $(gog)(x) = 0$ را به دست آورید. (برگرفته از خرداد ۱۴۰۱)	۱
۱۰	نمودار تابع $f(x)$ مطابق شکل، فقط از قرینه کردن نمودار تابع $y = \sqrt{x}$ نسبت به محورهای x و y و انتقال آن نمودار، به دست آمده است. مقدار $f(-4)$ را بیابید. 	۱
۱۱	تابع $f(x) = x $ مفروض است. اگر نمودار f یک واحد به سمت راست برود و سپس انبساط عمودی با ضریب ۳ و در ادامه انقباض افقی با ضریب $\frac{1}{4}$ داشته باشد و در نهایت ۲ واحد به سمت پایین انتقال یابد، ضابطه تابع حاصل را به دست آورید. (بیشترفته شهریور ۱۴۰۲)	۱/۵
۱۲	با توجه به نمودار تابع $f(x)$ ، نمودار تابع $y = 1 - 2f(\frac{-x}{4}) $ را رسم کنید. (بیشترفته خرداد ۹۹ و ۱۴۰۳)	۱
۱۳	اگر $f = \{(1, 2), (2, 5), (0, 3), (4, -1)\}$ و $g = \{(2, 3), (-1, 4), (4, 1), (3, 0)\}$ ، تابع gof^{-1} را به دست آورید.	۱

۱۴	اگر نمودار $f(x)$ به صورت مقابل باشد، مقادیر زیر را به دست آورید. الف) $f^{-1}(3)$ ب) $f^{-1}(2/1)$	۱ (تمرین کتاب درسی و مشابه دی ۱۴۰۰)
		
۱۵	نشان دهید توابع $g(x) = -2(x-1)^2 - 4$ با شرط $x \leq 1$ و $f(x) = 1 - \sqrt{\frac{-x}{2}} - 2$ وارون هم هستند. (مشابه تمرین کتاب درسی، خرداد خارج ۹۹، شهریور و دی ۱۴۰۰)	۱
۱۶	اگر $f(x) = 2 + \sqrt{2x}$ و $g(x) = x^3 - 1$ باشند، آنگاه مطلوب است محاسبه: الف) $(g^{-1} \circ f^{-1})(6)$ ب) $(g \circ f)^{-1}(63)$	۱ (مشابه تمرین کتاب درسی، شهریور ۹۸، خرداد ۹۸ و دی ۹۷)
۱۷	اگر $f(x) = \{(\frac{1}{9}, -1), (\frac{1}{3}, 1), (-\frac{1}{4}, 3), (\frac{1}{4}, -3)\}$ ، $f(x) = - x \sqrt{x}$ و $g(x) = -3$ باشد، مقدار a را بیابید.	۱
۱۸	تابع $f(x) = -2x^2 + 8x - 5$ در بازه $(-\infty, n]$ اکیداً صعودی است. الف) حداکثر مقدار n را بیابید. ب) با توجه به n به دست آمده در قسمت (الف)، ضابطه و دامنه تابع وارون $f(x)$ را به دست آورید.	۱/۵ (پیشرفته شهریور ۱۴۰۲، دی ۱۴۰۲ و تمرین کتاب درسی)

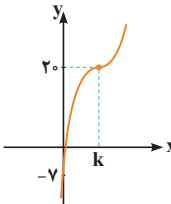
آزمون ۲ | مدت زمان پاسخگویی: ۱۲۰ دقیقه

۱	جاهای خالی را با عبارات مناسب پر کنید. الف) نمودار تابع $y = (\frac{1}{3})^x - 1 $ در بازه $(-\infty, a]$ اکیداً نزولی است. حداکثر مقدار a برابر است. ب) اگر نقطه‌ای به طول ۱ روی منحنی $f(x) = x^3 - 1$ باشد، نقطه متناظر آن روی منحنی $f(x - 2) + 7$ به صورت است. پ) اگر دامنه و برد تابع $y = f(x)$ ، بازه $[1, 4]$ باشد، دامنه و برد تابع $y = 3 - 2f(2x + 1)$ برابر و است. ت) اگر $f(x) = \sqrt[3]{x} + 3$ باشد، مقدار $(f^{-1} \circ f^{-1})(4)$ برابر است.	۱ (پیشرفته تمرین کتاب درسی)
۲	درستی یا نادرستی هر یک از عبارات زیر را مشخص کنید. الف) تابعی وجود ندارد که اکیداً صعودی یا اکیداً نزولی باشد، ولی یک به یک نباشد. ب) شرط تشکیل تابع $g \circ f$ ناتهی بودن اشتراک دامنه f و برد g است. پ) تابع $y = -\sqrt{-x}$ قرینه $y = \sqrt{-x}$ نسبت به محور y ها و قرینه $-\sqrt{x}$ نسبت به محور x ها است. ت) اگر $f(x) = 4 - \sqrt{1+x}$ باشد، آنگاه مجموعه جواب معادله $(f \circ f^{-1})(x) = (f^{-1} \circ f)(x)$ برابر $[-1, 4]$ است.	۱ (متن کتاب درسی) (کار در کلاس کتاب درسی)

۳	به کمک نمودار تابع $y = x^3$ ، نمودار تابع $f(x) = 1 - (2 - x)^3$ را رسم کنید. (مشابه کار در کلاس کتاب درسی و مشابه خرداد ۱۴۰۳)	۱
۴	کدام عبارت در مورد تابع $f(x) = \begin{cases} -2x - 3 & ; x \leq -4 \\ 3 & ; -4 < x < 2 \\ 3x - 2 & ; x \geq 2 \end{cases}$ صحیح نیست؟ الف) تابع در بازه $[2, +\infty)$ اکیداً صعودی است. ب) بزرگ‌ترین بازه‌ای که تابع در آن نزولی است، بازه $(-\infty, -4]$ می‌باشد. پ) طول بازه‌ای که تابع در آن ثابت می‌باشد، ۶ است. ت) تابع در بازه $[1, 5]$ صعودی می‌باشد.	۱/۵
۵	تابع $f = \{(a^2, b), (a + b, 2b - 1), (2, a - 1)\}$ ، تابعی هم صعودی و هم نزولی است. a و b را بیابید. (برگرفته از دل کتاب درسی)	۱
۶	علی می‌خواهد یک لپ تاپ از فروشگاه‌های بخرد که روی اجناس خود تخفیف نقدی ۲۰۰ هزار تومانی لحاظ کرده است. اگر علی یک کارت تخفیف ۲۰ درصدی هم داشته باشد، کدام حالت زیر به نفعش است (با ذکر دلیل): الف) ابتدا از کارت تخفیف ۲۰ درصدی و بعد از تخفیف نقدی استفاده کند. ب) ابتدا از تخفیف نقدی استفاده کند و بعد کارت تخفیف ارائه دهد.	۱
۷	اگر $f(x) = 2x + 2a$ ، $g(x) = x^2 + bx + c$ و $(fog)(x) = 2x^2 + x + 1$ باشد، آن‌گاه $a + b + c$ را بیابید.	۱
۸	اگر $f(x) = \sqrt{x + 2}$ و $g(x) = \sqrt{x^2 - 16}$ باشد، ضابطه و دامنه تابع $(gof)(x)$ را به دست آورید. (تمرین کتاب درسی و پر تکرار امتحان نهایی)	۱
۹	اگر $g(x) = 2x + 1$ و $(fog)(x) = 8x^2 + 6x + 5$ باشد، ضابطه تابع $f(x)$ را بیابید. (مشابه تمرین کتاب درسی)	۱
۱۰	تابع $h(x) = \sqrt[3]{3x^2 + 5x - 4}$ را به صورت ترکیب دو تابع بنویسید. آیا جواب منحصر به فرد است؟ (تمرین کتاب درسی و مشابه خرداد خارج ۱۴۰۱)	۱
۱۱	نمودار تابع $y = 2 \sin\left(\frac{-1}{4}x\right) + 1$ را به کمک نمودار تابع $y = \sin x$ در بازه $[-\pi, \pi]$ رسم کنید. (پیشرفته تمرین کتاب درسی و مشابه شهریور خارج ۱۴۰۰)	۱/۵
۱۲	با توجه به شکل مقابل، $f^{-1}(7)$ را پیدا کنید. $x \rightarrow \boxed{f} \rightarrow \boxed{\frac{x-1}{x+2}} \rightarrow \frac{x}{x+1}$	۱
۱۳	با توجه به جدول زیر، مقادیر خواسته شده را بیابید. الف) $(gof)^{-1}(-2)$ ب) $(fo(f+g))(0)$	۱/۵
۱۴	اگر $fog(x) = \sqrt{2x+1}$ و $gof(x) = 2\sqrt{x} + 1$ ، آن‌گاه $g^{-1}of^{-1}(x)$ را بیابید. (پیشرفته تمرین کتاب درسی)	۱

۱۵	۱	رابطه بین درجه سانتی‌گراد و فارنهایت که برای اندازه‌گیری دما استفاده می‌شوند، به صورت $f(x) = \frac{9}{5}x + 32$ است که در آن x میزان درجه سانتی‌گراد و $f(x)$ میزان درجه فارنهایت است. $f^{-1}(x)$ را پیدا کرده و توضیح دهید چه چیزی را نشان می‌دهد؟ (تمرین کتاب درسی)
۱۶	۱	نمودار تابع $f(x) = 2 + \sqrt{x-1}$ را ابتدا نسبت به خط $y = x$ قرینه کرده و سپس نمودار حاصل را ۲ واحد در جهت مثبت محور x ها و ۳ واحد در جهت منفی محور y ها انتقال می‌دهیم و آن را $y = g(x)$ می‌نامیم. مقدار $(g \circ g)(4)$ را بیابید. (پیشرفته شهریور ۱۴۰۲)
۱۷	۱	با توجه به نمودار f ، نمودار توابع $y = (f^{-1} \circ f)(x)$ و $y = (f \circ f^{-1})(x)$ را رسم کنید. (برگرفته از دل کتاب درسی)
		
۱۸	۱/۵	توابع $f(x) = \log(2x-5)$ و $g(x) = 2x-5$ مفروض‌اند. اگر نمودار $y = (g^{-1} \circ f^{-1})(x)$ محور y ها را در نقطه‌ای به عرض α قطع کند، مقدار α را بیابید.

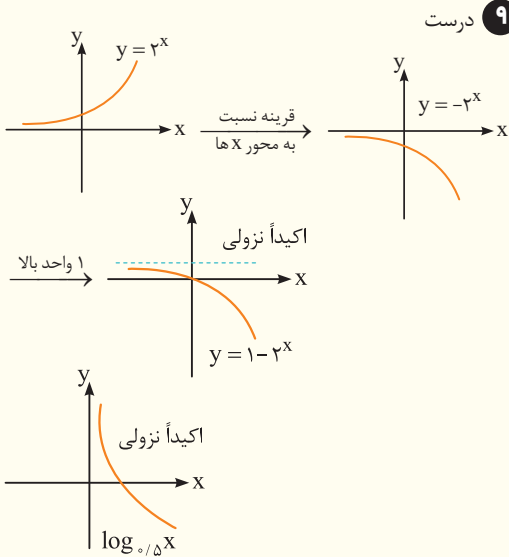
آزمون ۳ | مدت زمان پاسخگویی: ۱۲۰ دقیقه

۱	۱	جاهای خالی را با عبارات مناسب پُر کنید. الف اگر درجه $f(x) = x^k(x^2 - x) + 2x + 1$ برابر ۵ باشد، مقدار k برابر است. (پیشرفته شهریور ۱۴۰۰، دی ۱۴۰۲، دی ۱۴۰۳ و خرداد ۱۴۰۳) ب نمودار تابع $y = -x^3$ در بازه بالاتر از نمودار تابع $y = x^2$ قرار دارد. (مشابه دی ۱۴۰۰ و دی ۱۴۰۱) پ تابع $f(x) = (2a-1)x^2 + (b+1)x + 4$ با دامنه $\mathbb{R}$ هم صعودی و هم نزولی است. مقدار $a + b$ برابر است. (برگرفته از دل کتاب درسی) ت اگر $f(x) = 1 - \sqrt{1-x}$ و داشته باشیم $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x) = x$ ، آن‌گاه تابع $g(x)$ برابر است. (برگرفته از دل کتاب درسی)
۲	۱	درستی یا نادرستی هر یک از عبارات زیر را مشخص کنید. الف اگر $f(1) = 2$ و نمودار $y = f(x)$ از نقطه $(2, 6)$ عبور کند، آن‌گاه $(f \circ f)(1) = 6$. ب اگر تابع $f = \{(1, 2), (5, 6), (3, m)\}$ غیر یکنوا باشد، آن‌گاه $m \in [2, 6]$ است. پ اگر $0 < k < 1$ باشد، برای رسم نمودار $kf(\frac{x}{k})$ کافی است نمودار f را در راستای محور y ها و x ها با ضرب k منقبض کنیم. ت همواره تساوی $(f \circ f^{-1})(x) = (f^{-1} \circ f)(x)$ برقرار است.
۳	۱/۵	اگر نمودار $f(x) = x^3 - 9x^2 + ax + b$ ، انتقال یافته نمودار $y = x^3$ بوده و به صورت مقابل باشد، آن‌گاه a ، b و k را بیابید. 

۱	۴	اگر نمودار تابع $f(x) = \begin{cases} -2x - 3 & ; x < -4 \\ a & ; x = 0 \\ -(\log_7 x) + 2 & ; x \geq 2 \end{cases}$ غیر یکنوا باشد، محدوده a را بیابید.
۱/۵	۵	اگر بازه $(-\infty, -1]$ بزرگ‌ترین بازه‌ای باشد که تابع $y = kx^2 + \frac{1}{k}x + 1$ در آن اکیداً صعودی است، مقدار k را بیابید. (پیشرفته خرداد ۱۴۰۳)
۱	۶	نمودار تابعی را رسم کنید که در هر یک از بازه‌های $(-\infty, 0)$ و $(0, +\infty)$ اکیداً صعودی باشد، ولی در $\mathbb{R}$ اکیداً صعودی نباشد. (تمرین کتاب درسی)
۱/۵	۷	نمودار تابع $f(x) = x - 2 $ را در بازه $[-2, 3]$ رسم کنید و به کمک نمودار رسم شده، نمودار تابع $k(x) = -\frac{1}{3} 2 - x $ را به دست آورید. (تمرین کتاب درسی)
۱	۸	توضیح دهید چگونه و با چه انتقالی، انبساط، انقباض و قرینه‌یابی نسبت به محورها، می‌توانیم با استفاده از نمودار تابع $f(x) = \sqrt{-2x + 1}$ ، نمودار $g(x) = \sqrt{x}$ را رسم کنیم. (مفهومی تبدیل نمودار توابع)
۱	۹	اگر نمودار تابع $y = 3f(\frac{x}{3}) + 1$ در شکل زیر رسم شده باشد، آنگاه نمودار تابع $y = f(x)$ را رسم کنید. (پیشرفته کتاب درسی)
۱	۱۰	اگر $f(x) = x^2 + 3x$ و $g(x) = -\frac{1}{3}x + 2$ باشند، مجموعه طول نقاطی از منحنی تابع $g \circ f$ را بیابید که در بالای محور x قرار می‌گیرد.
۱	۱۱	اگر $f(x) = \frac{2x - 1}{x + 2}$ و $g(x) = x + 4$ باشند، جواب معادله $(g \circ f)(x) = (f \circ g)(x)$ را بیابید.
۱/۵	۱۲	اگر $f(x) = \sqrt{3 - x}$ و $g(x) = \frac{6}{3x - 5}$ باشد، ضابطه و دامنه تابع $f \circ g$ را به دست آورید. (تمرین کتاب درسی و پرتکرار امتحان نهایی)
۱	۱۳	دو تابع با ضابطه‌های $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & , x \geq 0 \\ -\sqrt{-x} & , x < 0 \end{cases}$ و $g = \{(2, -1), (-1, 4), (3, -2), (-4, -3)\}$ مفروض‌اند. اگر $g^{-1}(f(a)) = 3$ باشد، مقدار a را بیابید.
۱/۵	۱۴	وارون تابع $f(x) = \sqrt{x - 2} \sqrt{mx - 1}$ در دامنه محدود، خط $y = 12 - x$ را در نقطه‌ای به عرض ۱۰ قطع می‌کند. مقدار m را بیابید.
۱	۱۵	اگر در تابع $f(x) = k - \sqrt{2 - x}$ ، داشته باشیم $(f \circ f)(x) = (f^{-1} \circ f)(x)$ ، مقدار k را بیابید. (برگرفته از دل کتاب درسی)
۱/۵	۱۶	در تابع $f^{-1}(x) = x^2 + ax^2 - ax$ ، اگر $f(-26) = -2$ باشد، آنگاه ضابطه تابع $f(x)$ را بیابید.
۱	۱۷	اگر $(g \circ f)^{-1}(1) = 2$ و $f(x) = 2x + 5$ باشد، آنگاه $(f \circ g)^{-1}(7)$ را به دست آورید.

پاسخ تشریحی آزمون صحیح یا غلط

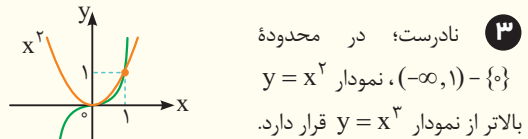
۱ نادرست



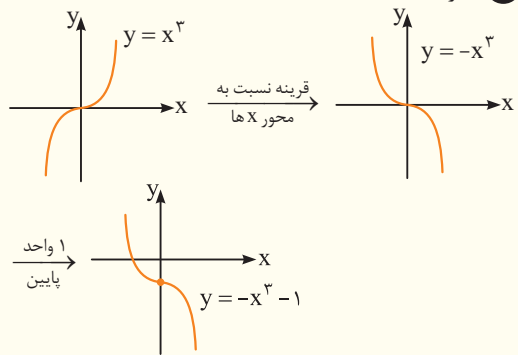
درست ۲

$$y = (x^4 - 5)(x + 1) = x^5 + x^4 - 5x - 5$$

$\Rightarrow$ دامنه = $\mathbb{R}$ ، درجه = ۵

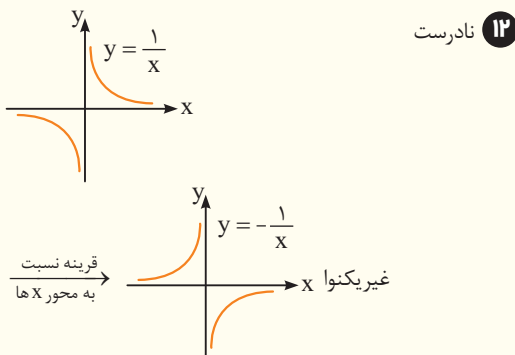
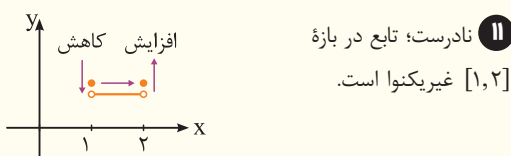


۴ نادرست

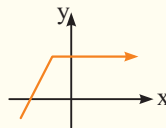


نمودار از ناحیه اول محورهای مختصات عبور نمی‌کند، ولی دامنه و بُرد آن $\mathbb{R}$ بوده و اکیداً نزولی است.

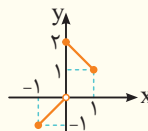
۵ درست



۶ نادرست؛ مثلاً تابع زیر یکنوا است ولی اکیداً یکنوا نمی‌باشد.

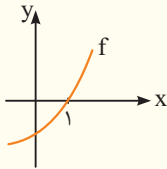


۷ نادرست؛ مثلاً تابع زیر یک‌به‌یک بوده ولی اکیداً یکنوا و حتی یکنوا نیست.

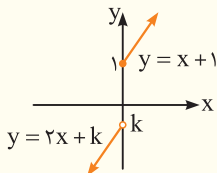


۸ نادرست؛ دقیقاً نمودار سؤال قبل با این‌که اکیداً یکنوا نبوده ولی یک‌به‌یک بود. پس جمله موردنظر همواره درست نمی‌باشد.

۱۷ نادرست؛ نموداری فرضی برای f به گونه‌ای رسم می‌کنیم که $f(1) = 0$ و اکیداً صعودی باشد. برای تعریف شده بودن $y = \sqrt{f(x)}$ باید $f(x) \geq 0$ باشد که با توجه به شکل به ازای $x \in [1, +\infty)$ این نامعادله برقرار است، پس دامنه تابع مورد نظر $[1, +\infty)$ می‌شود.



۱۸ درست؛ نمودار تابع f را رسم می‌کنیم:



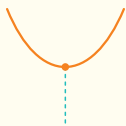
برای آن‌که f اکیداً صعودی باشد باید $k \leq 1$ باشد.

۱۹ نادرست؛ باید ضریب x^3 منفی باشد تا f اکیداً نزولی شود:
 $4 - 2m < 0 \Rightarrow 4 < 2m \xrightarrow{\div 2} 2 < m$
 درحالتی که $m = 2$ باشد، به تابع ثابت $f(x) = 5$ می‌رسیم که اکیداً نزولی نمی‌شود.

۲۰ درست؛ باید f تابعی ثابت شود. پس داریم:

$$f(x) = \underbrace{(m-2)x^2 + \Delta nx + 4}_{\text{باید حذف شوند}}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m-2=0 \Rightarrow m=2 \\ \Delta n=0 \Rightarrow n=0 \end{cases} \Rightarrow m+n=2$$



۲۱ درست؛ طول رأس سهمی باید کوچک‌تر یا مساوی عدد ۱ باشد تا f اکیداً صعودی شود.

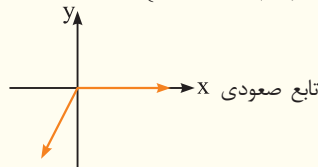
$$x_S = \frac{-b}{2a} = \frac{-b}{2(1)} = \frac{-b}{2} \leq 1 \Rightarrow -b \leq 2 \Rightarrow b \geq -2$$

۲۲ نادرست؛ در تابع $g \circ f$ ، $f(x)$ به عنوان ورودی وارد تابع g می‌شود و باید در محدوده دامنه g قرار داشته باشد.

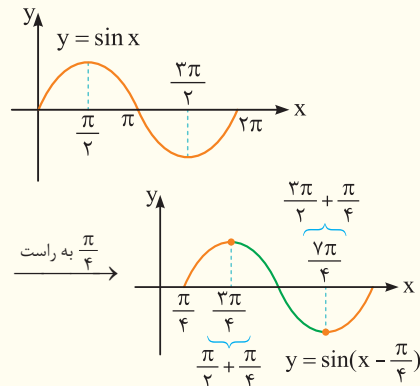
۲۳ درست

۱۳ نادرست

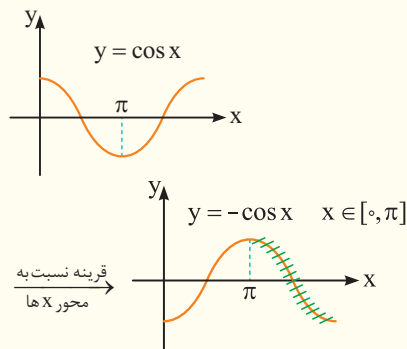
$$y = x - |x| = \begin{cases} x \geq 0 : 0 \\ x < 0 : x - (-x) = 2x \end{cases}$$



۱۴ درست

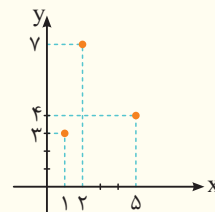


۱۵ نادرست



جمله «برای هر x_1 و x_2 عضو بازه $[0, \pi]$ ، رابطه $x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$ یعنی اکیداً نزولی بودن که با توجه به نمودار، نادرست است: زیرا در این بازه $y = -\cos x$ ، اکیداً صعودی می‌باشد.

۱۶ درست

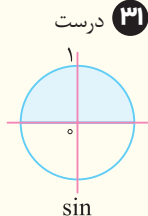


پس دامنهٔ fof را اشتباه نوشته ولی $\text{fof}(2)$ را درست بیان کرده است:

$$(\text{fof})(2) = f\left(\frac{2}{2-1}\right) = f(2) = \frac{2}{2-1} = 2$$

$$D_{(\text{gof})(x)} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\}$$

$$= \{x \in \mathbb{R} \mid \sin x \geq 0\}$$



با توجه به شکل، $\sin x$ در بازه‌های $[0, \pi]$ یا $[2\pi, 3\pi]$ یا ... نامنفی است ($\sin x \geq 0$). جواب کلی نامعادله به صورت $x \in [2k\pi, 2k\pi + \pi]$ بوده که در آن $k \in \mathbb{Z}$ است و نحوهٔ محاسبهٔ دقیق‌تر آن را در فصل مثلثات خواهید دید. ولی جالبه که این تمرین کتاب در فصل اول آمده است.

درست؛ طبق تعریف دامنهٔ fog درست است:

$$D_{\text{fog}} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\}$$

۳۲ درست

$$f = \{(1, 2), (4, 1)\}$$

$$\text{fof} = \{(4, 2)\}$$

دامنهٔ تابع $f + \text{fof}$ ، اشتراک دامنهٔ توابع fof و f است که فقط عدد ۴ است. داریم:

$$f + \text{fof} = \{(4, 1+2)\} = \{(4, 3)\}$$

۳۳ نادرست

$$x \Rightarrow \frac{2x-2}{f} \Rightarrow \frac{x-1}{g}$$

$$\Rightarrow (\text{gof})(x) = g(2x-2) = \frac{(2x-2)-1}{(2x-2)+1} \stackrel{\text{طبق ۳}}{=} \frac{2x-3}{2x-1}$$

وارد g به جای x

$$\Rightarrow \frac{2x-3}{2x-1} = \frac{3}{5} \Rightarrow 10x-15 = 6x-3$$

$$\Rightarrow 4x = 12 \Rightarrow x = 3$$

درست ۳۵

$$f(g(x)) - g(f(x)) = 6 \Rightarrow f(2-x) - g(2x+a) = 6$$

$$\Rightarrow 2(2-x) + a - (2 - (2x+a)) = 6$$

$$\Rightarrow 6 - 2x + a - 2 + 2x + a = 6 \Rightarrow 2a + 4 = 6 \Rightarrow a = 1$$

$$g(2) = \sqrt{2^2 - 4} = 0$$

نادرست ۲۴

$$f(g(5)) = f(\sqrt{5^2 - 4}) = f(\sqrt{21}) = (\sqrt{21})^2 - 4 = 17$$

$$\Rightarrow g(2) + f(g(5)) = 0 + 17 = 17 \neq -25$$

نادرست؛ مثلاً $g(x) = \sqrt[3]{x}$ و $f(x) = x^3$ در این صورت تساوی برقرار است.

$$f(g(4)) \stackrel{g(4)=7}{=} f(7) = 5$$

درست ۲۶

درست ۲۷

روش اول:

$$h(x) = x^2 - 2x + 1 - 1 = (x-1)^2 - 1 \Rightarrow \begin{cases} g(x) = x-1 \\ f(x) = x^2-1 \end{cases}$$

این قسمت را g فرض کرده و به جای x قرار می‌دهیم تا تابع f حاصل شود.

روش دوم: با توجه به ضابطهٔ f و g ، تابع h را می‌سازیم:

$$h(x) = (\text{fog})(x) = f(g(x)) = f(x-1) = (x-1)^2 - 1$$

$$= x^2 - 2x + 1 - 1 = x^2 - 2x \quad \checkmark$$

نادرست ۲۸

$$g(3t-5) = 0 \stackrel{\text{با توجه به شکل}}{=} \frac{3t-5}{g(-2)=0} \Rightarrow 3t-5 = -2$$

$$\Rightarrow 3t = 3 \Rightarrow t = 1$$

درست ۲۹

$$f(g(x)) = 7 \Rightarrow f(x^2 - 3x + 8) = 7$$

به جای x در f

$$\Rightarrow 2(x^2 - 3x + 8) - 5 = 7$$

$$\Rightarrow 2x^2 - 6x + 16 - 5 = 7$$

$$\Rightarrow 2x^2 - 6x + 4 = 0 \xrightarrow{\div 2} x^2 - 3x + 2 = 0$$

$$\Rightarrow (x-1)(x-2) = 0 \Rightarrow x = 1, 2$$

جمع جواب‌ها ۳ می‌شود.

نادرست ۳۰

$$D_f : x-1 \neq 0 \Rightarrow x \neq 1$$

$$D_{\text{fof}} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_f\} = \{x \neq 1 \mid \frac{2}{x-1} \neq 1\}$$

(*)

$$(*) : \frac{2}{x-1} \neq 1 \Rightarrow 2 \neq x-1 \Rightarrow x \neq 3$$

$$\Rightarrow D_{\text{fof}} = \{x \neq 1, x \neq 3\} = \mathbb{R} - \{1, 3\}$$

۱۴۲ نادرست

$$y = (x+1)^3 - 1 \xrightarrow[\text{واحد به راست}]{x \rightarrow x-1} y = (x-1+1)^3 - 1$$

$$\Rightarrow y = x^3 - 1 \xrightarrow[\text{واحد به بالا}]{y \rightarrow y+1} y = x^3 \Rightarrow y = x^3$$

اگر طبق صورت سؤال عمل کنیم، داریم:

$$y = (x+1)^3 - 1 \xrightarrow[\text{واحد پایین}]{y \rightarrow y-1} y = (x+1)^3 - 1 - 1$$

$$\xrightarrow[\text{واحد چپ}]{x \rightarrow x+1} y = (x+1+1)^3 - 2 \Rightarrow y = (x+2)^3 - 2$$

خب دیدیم که به تابع $y = x^3$ نرسیدیم.

۱۴۳ درست؛ اگر $A(1, 4)$ روی نمودار $y = f(x)$ باشد، آنگاه

$f(1) = 4$. حال کافی است داخل پیرانز را برابر ۱ قرار دهیم:

$$(x=2) \Rightarrow \frac{x}{y} = 1 \Rightarrow x=2$$

در ضابطه $y = 2 - 3f(\frac{x}{y})$ ، عرض نقطه موردنظر را می‌یابیم:

$$y = 2 - 3f(\frac{x}{y}) \xrightarrow{x=2} y = 2 - 3f(\frac{2}{y})$$

$$= 2 - 3f(1) \xrightarrow{f(1)=4} 2 - 3(4) = -10$$

پس $A'(2, -10)$

۱۴۴ نادرست؛ مختصات $A(2, 1)$ در ضابطه $y = 1 - 2f(x+2)$

صدق می‌کند:

$$y = 1 - 2f(x+2) \xrightarrow[A(2, 1)]{x=y} 1 = 1 - 2f(2+2)$$

$$\Rightarrow f(4) = 0$$

پس نقطه متناظر روی نمودار تابع $y = f(x)$ به صورت $A'(4, 0)$

بوده است.

۱۴۵ درست

۱۴۶ نادرست؛ برای فهم بهتر k را عددی بزرگتر از ۱ مثلاً ۲

فرض می‌کنیم:

$$y = kf(kx) \xrightarrow{k=2} y = 2f(2x)$$

برای رسم نمودار فوق، باید انقباض افقی با ضریب $\frac{1}{2}$ (یعنی $\frac{1}{k}$) و

انبساط عمودی با ضریب ۲ (یعنی k) انجام دهیم.

۱۴۷ درست $0 < x \leq 2 \Rightarrow 0 < 2x \leq 4$ محاسبه دامنه

$$-4 \leq -2f(x) < 0 \xrightarrow{x(-2)} -2f(x) \leq 2 < f(x)$$

$$\xrightarrow{+1} -3 < -2f(x) + 1 \leq 2 \Rightarrow \text{برد} : [-3, 1)$$

۳۶ درست

$$f(\frac{3}{4}) = \frac{\frac{3}{4}}{\sqrt{1 - \frac{3}{4}}} = \frac{\frac{3}{4}}{\sqrt{\frac{1}{4}}} = \frac{\frac{3}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow f(f(\frac{3}{4})) = f(\frac{3}{2}) = 2(\frac{3}{2}) - \frac{3}{4} = 3 - \frac{3}{4} = \frac{9}{4}$$

۳۷ نادرست

$$f(x) = \sqrt{2x - x^2} = \sqrt{x(2-x)} \Rightarrow D_f : x(2-x) \geq 0$$

$$\begin{array}{c|ccccccc} x & & & & & & \\ \hline x(2-x) & - & 0 & + & 0 & - & \end{array} \Rightarrow x \in [0, 2]$$

حال باید $3-x$ که وارد f می‌شود، در محدوده دامنه f که بازه $[0, 2]$ است، قرار داشته باشد:

$$0 \leq 3-x \leq 2 \xrightarrow{-3} -3 \leq -x \leq -1 \xrightarrow{\times(-1)} 1 \leq x \leq 3$$

۳۸ درست

$$x \rightarrow 2x+1 \rightarrow g(x) \rightarrow 4x^2 + ax + 6$$

$$\begin{cases} g(2x+1) = 4x^2 + ax + 6 \\ \text{فرض: } g(-3) = 0 \end{cases}$$

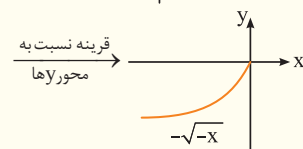
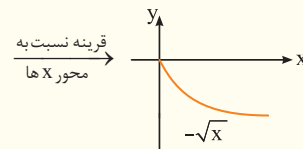
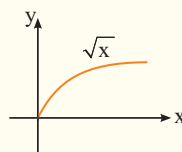
$$\Rightarrow \begin{cases} 2x+1 = -3 \Rightarrow 2x = -4 \Rightarrow x = -2 (*) \\ 4x^2 + ax + 6 = 0 \xrightarrow{(*)} 4(-2)^2 + a(-2) + 6 = 0 \end{cases}$$

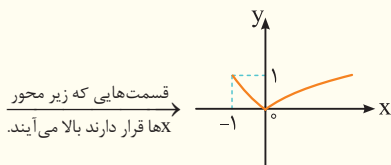
$$\Rightarrow 16 - 2a + 6 = 0 \Rightarrow a = 11$$

۳۹ درست

۴۰ درست

۴۱ درست





تابع در بازه $[-1, 0]$ اکیداً نزولی است.

درست ۵۲

$$y = x^2 - x \xrightarrow[\text{واحد راست}]{x \rightarrow x-1} y = (x-1)^2 - (x-1)$$

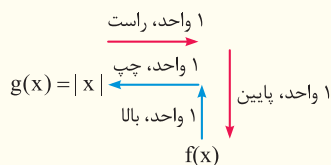
$$= x^2 - 2x + 1 - x + 1 \Rightarrow y = x^2 - 3x + 2$$

$$\xrightarrow[\text{قرینه نسبت به محور } y]{x \rightarrow -x} y = (-x)^2 - 3(-x) + 2$$

$$\Rightarrow y = x^2 + 3x + 2$$

نادرست؛ ۵۳ برای رسیدن از $g(x) = |x|$ به $f(x)$ باید تمام

کارهایی که انجام دادیم را برعکس انجام دهیم:



$$g(x) = |x| \xrightarrow[\text{واحد به راست}]{x \rightarrow x-1} y = |x-1|$$

$$\xrightarrow[\text{واحد به پایین}]{y-1} f(x) = |x-1|-1$$

$$f(g(x)) = f(|x|) = ||x|-1|-1$$

به جای x در f

بنابراین:

$$f(f(x)) = -1 \xrightarrow[\text{طبق نمودار}]{f(0)=-1} f(x) = 0$$

$$\xrightarrow[\text{طبق نمودار}]{\text{طبق نمودار}} x = -1, +1 \Rightarrow \text{جمع جواب‌ها} = -1 + 1 = 0$$

درست ۵۴

$$y = \frac{2x+5}{6} \Rightarrow 6y = 2x+5 \Rightarrow 6y-5 = 2x \quad \text{درست ۵۵}$$

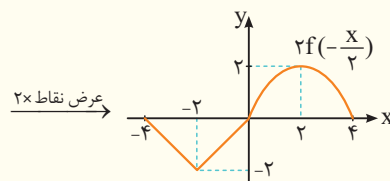
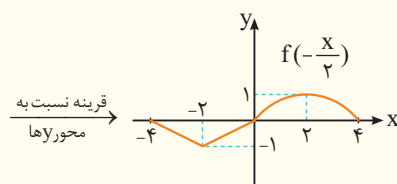
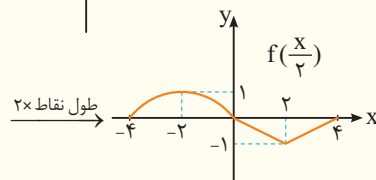
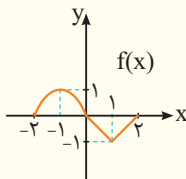
$$\Rightarrow x = \frac{6y-5}{2}$$

$$\xrightarrow[\text{جای } x \text{ و } y \text{ عوض شود}]{\text{جای } x \text{ و } y \text{ عوض شود}} f^{-1}(x) = \frac{6x-5}{2} = g(x)$$

نادرست ۵۶

$$D_g = [-1, 4] \xrightarrow{\times 2} D_f = [-2, 8] \quad \text{نادرست؛ ۴۸}$$

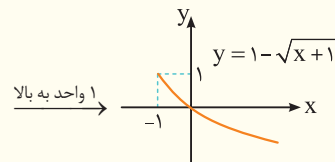
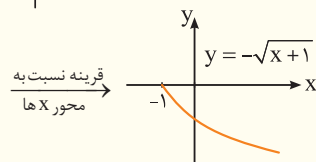
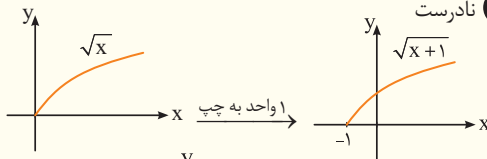
$$R_g = [-1, 4] \xrightarrow{-1} [-2, 3] \xrightarrow{\div 3} R_f = [-\frac{2}{3}, 1] \quad \text{نادرست؛ ۴۹}$$



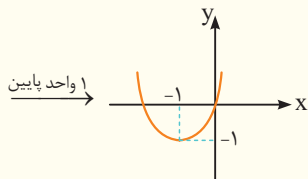
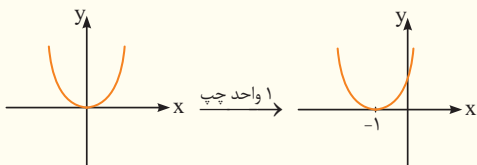
نادرست؛ ۵۰ کافی است در $f(2x+1)$ به جای x ، $-x$ قرار دهیم تا

به $f(-2x+1)$ برسیم. یعنی کافی است نمودار $f(2x+1)$ را نسبت به محور y ها قرینه کنیم.

نادرست ۵۱



۶۳ نادرست $y = x^2 + 2x + 1 - 1 = (x+1)^2 - 1$



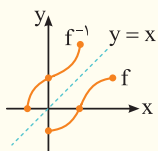
تابع $y = x^2 + 2x$ در بازه $(-\infty, -1]$ نزولی است و در این محدوده، بُرد f برابر $[-1, +\infty)$ است. حال معکوس آن را می‌یابیم:

$$y = (x+1)^2 - 1 \Rightarrow y+1 = (x+1)^2$$

$$\sqrt{} \rightarrow \sqrt{y+1} = |x+1|$$

$$\frac{x \leq -1}{\sqrt{y+1}} \rightarrow \sqrt{y+1} = -x-1 \Rightarrow x = -1 - \sqrt{y+1}$$

جای x و y عوض شود. $f^{-1}(x) = -1 - \sqrt{x+1}$



۶۴ نادرست

۶۵ درست $(fog)^{-1}(2) = 6 \Rightarrow (fog)(6) = 2$

$\Rightarrow f(g(6)) = 2 \xrightarrow{g(6)=1} f(1) = 2$ ✓

۶۶ درست؛ می‌دانیم $y = (fof^{-1})(x) = x$ است، یعنی قسمتی از تابع همانی $y = x$ است. پس مؤلفه‌های اول و دوم زوج‌مرتب‌ها باید با هم برابر باشند.

$fof^{-1} = \{(-2, a), (1, b)\} \Rightarrow -2 = a, b = 1 \Rightarrow a + b = -1$

۶۷ درست؛ $(g^{-1}of^{-1})(3) = g^{-1}(f^{-1}(3))$ (*)

با توجه به f می‌دانیم $(7, 3) \in f$ ، پس $(3, 7) \in f^{-1}$ و در نتیجه $f^{-1}(3) = 7$. با جای‌گذاری آن در (*) به $g^{-1}(7)$ می‌رسیم که برای پیدا کردن آن کافی است معادله $g(x) = 7$ را حل کنیم:
 $\sqrt{5x+9} = 7 \Rightarrow 5x+9 = 49 \Rightarrow 5x = 40 \Rightarrow x = 8$
 بنابراین: $g^{-1}(f^{-1}(3)) = 8$ می‌باشد.

۵۷ درست $(fof^{-1})(x) = x \in D_{f^{-1}} = R_f$ برای مساوی بودن $D_f = R_f$
 $(f^{-1}of)(x) = x \in D_f$

۵۸ نادرست $y = (fof^{-1})(x) = x \in D_{f^{-1}} = R_f$
 نمودار آن قسمتی از خط $y = x$ است که در آن $x \in R_f$ است.

۵۹ نادرست $y = 3x^2 + 5x - 6$, $x_S = \frac{-b}{2a} = \frac{-5}{2(3)} = \frac{-5}{6}$



با توجه به شکل، تابع در بازه $[-1, 4]$ ، یک‌به‌یک نیست. لذا وارون‌پذیر نمی‌باشد.

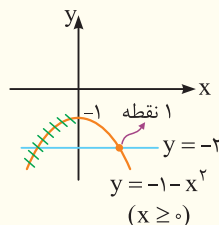
۶۰ درست $f^{-1}(2) = 4 \Rightarrow f(4) = 2 \xrightarrow{f(x)=ax-6} 2 = 4a - 6$
 $\Rightarrow 4a = 8 \Rightarrow a = 2$
 پس $f(x) = 2x - 6$ ؛ بنابراین: $f(3) = 2(3) - 6 = 0$

۶۱ نادرست؛ کافی است معادله $f(x) = 4$ را حل کنیم:
 $f(x) = -1 + \sqrt{-2x} = 4 \Rightarrow \sqrt{-2x} = 5$
 $\Rightarrow -2x = 25 \Rightarrow x = -12.5$

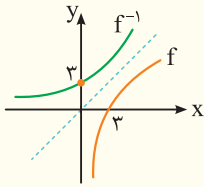
۶۲ درست؛ معکوس f را می‌یابیم:
 $y = \sqrt{-1-x} \xrightarrow{\text{توان ۲}} y^2 = -1-x \Rightarrow x = -1-y^2$

دامنه f^{-1} همان بُرد f است. چون $\sqrt{-1-x} \geq 0$ ، پس بُرد f بازه $[0, +\infty)$ است. بنابراین:
 $f^{-1}(x) = -1 - x^2 \quad (x \geq 0)$

حال نمودار f^{-1} و $y = -2$ را رسم کرده و تعداد نقاط تقاطع آن‌ها را می‌یابیم:



پس جواب نامعادله $f^{-1}(x) > 0$ ، مجموعه اعداد حقیقی $(\mathbb{R})$ است. پس دامنه تابع مورد نظر $\mathbb{R}$ است.



❶ درست؛ ابتدا تابع $f^{-1}(x)$ را می‌یابیم:

$$f(x) = \sqrt{1-x} \Rightarrow y = \sqrt{1-x} \xrightarrow{\text{توان ۲}} y^2 = 1-x$$

$$\Rightarrow x = 1 - y^2 \xrightarrow[\text{عوض شود}]{\text{جای } x \text{ و } y} y = f^{-1}(x) = 1 - x^2$$

دامنه f^{-1} همان بُرد f است. می‌دانیم $\sqrt{1-x} \geq 0$ ، پس:

$$R_f = D_{f^{-1}} = [0, +\infty)$$

$$D_{\text{gof}^{-1}} = \{x \in D_{f^{-1}} \mid f^{-1}(x) \in D_g\}$$

$$= \{x \in [0, +\infty) \mid (1-x^2) \neq 1\}$$

$$\downarrow$$

$$-x^2 \neq 0 \Rightarrow x \neq 0$$

$$= \{x \in [0, +\infty) \mid x \neq 0\} = (0, +\infty)$$

❷ نادرست؛ می‌دانیم $y = (f^{-1} \circ f)(x) = x \in D_f$ لذا دامنه $f(x) = \sqrt{x+2}$ را می‌یابیم که برابر $x+2 \geq 0 \Rightarrow x \geq -2$ است. داریم:

$$y = \sqrt{2 - \underbrace{(f^{-1} \circ f)(x)}_x} = \sqrt{2-x} : 2-x \geq 0 \Rightarrow x \leq 2$$

جواب نهایی اشتراک جواب $x \leq 2$ و شرط $x \geq -2$ است که برابر $-2 \leq x \leq 2$ می‌شود.

❸ درست؛ اگر f^{-1} از $(6, 2)$ بگذرد، نمودار f باید از $(2, 6)$ عبور کند، یعنی باید مختصات $(2, 6)$ در ضابطه f صدق کند. برویم چک کنیم:

$$f(x) = x^5 + 2x - 3 \xrightarrow{(2, 6)} 6 = 2^5 + 2(2) - 3 = 32 + 4 - 3 = 33 \neq 6$$

$$\Rightarrow 6 = 6 \quad \checkmark$$

پس f^{-1} حتماً از $(6, 2)$ می‌گذرد.

❹ درست؛ دامنه تابع $y = \frac{1}{\sqrt{f^{-1}(x)}}$ از حل نامعادله

$0 < f^{-1}(x)$ به‌دست می‌آید. از طرفی با توجه به نمودار f^{-1} که قرینه f نسبت به نیمساز ربع اول و سوم است، نتیجه می‌گیریم که نمودار f^{-1} همواره بالای محور x ها بوده و لذا همواره مثبت است.

پاسخ تشریحی آزمون ۱

$$(0, \frac{1}{3}) \in f^{-1} \Rightarrow (\frac{1}{3}, 0) \in f \Rightarrow f(x) = 3 - \sqrt{ax+1}$$

$$\xrightarrow[\text{جای گذاری مختصات}]{(\frac{1}{3}, 0)} 0 = 3 - \sqrt{\frac{1}{3}a+1} \Rightarrow 3 = \sqrt{\frac{1}{3}a+1}$$

$$\xrightarrow{\text{توان ۲}} 9 = \frac{1}{3}a+1 \Rightarrow \frac{1}{3}a = 8 \Rightarrow a = 24$$

بنابراین $f(x) = 3 - \sqrt{24x+1}$. برای محاسبه $f^{-1}(2)$ کافی است معادله $f(x) = 2$ را حل کنیم:

$$3 - \sqrt{24x+1} = 2 \Rightarrow 1 = \sqrt{24x+1} \xrightarrow{\text{توان ۲}} 1 = 24x+1$$

$$\Rightarrow 24x = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow f^{-1}(2) = 0$$

$$(2, 6) \in \text{fog}^{-1} \Rightarrow f(g^{-1}(2)) = 6$$

به جای x در f

$$\xrightarrow{f(x)=3-x} 3 - g^{-1}(2) = 6 \Rightarrow g^{-1}(2) = -3 \Rightarrow g(-3) = 2 \quad (*)$$

بنابراین:

$$(\text{fog})(-3) = f(g(-3)) \stackrel{(*)}{=} f(2) \stackrel{f(x)=3-x}{=} 3 - 2 = 1$$

❶ الف چون توان، عدد فرد ۳ است، آن منفی پشت پرانتز را می‌توان به داخل پرانتز بُرد و ضابطه f را ساده کرد:

$$f(x) = -(1-x)^3 + 2 \Rightarrow f(x) = -(1-x)^3 + 2$$

$$\Rightarrow f(x) = (x-1)^3 + 2$$

نمودار $f(x)$ ، از انتقال نمودار تابع اکیداً صعودی X^3 ، یک واحد به راست و دو واحد به بالا به‌دست می‌آید. با این انتقال‌ها، اکیداً صعودی بودن $y = x^3$ ثابت می‌ماند، پس $f(x)$ هم اکیداً صعودی خواهد بود.

$$y = (2x+3)^3 \xrightarrow[\text{واحد چپ}]{x \rightarrow x+1} y = (2(x+1)+3)^3$$

$$\Rightarrow y = (2x+5)^3 \xrightarrow[\text{واحد پایین}]{y \rightarrow y-2} y = (2x+5)^3 - 2$$

$$\xrightarrow[\text{قرینه نسبت به محور } y]{x \rightarrow -x} y = (2(-x)+5)^3 - 2$$

$$\Rightarrow y = (5-2x)^3 - 2$$

روش اول: ابتدا نمودار یک واحد به راست رفته و سپس طول نقاط

نصف شود:

$$f(x) \xrightarrow[\text{واحد راست}]{\frac{1}{x \rightarrow x-1}} f(x-1) \xrightarrow[\text{طول نقاط}]{\frac{2}{x \rightarrow 2x}} f(2x-1)$$

روش دوم: ابتدا طول نقاط نصف شود و سپس $\frac{1}{2}$ واحد به سمت

راست برویم:

$$f(x) \xrightarrow[\frac{1}{2}]{\frac{\text{طول نقاط}}{x \rightarrow 2x}} f(2x) \xrightarrow[\frac{1}{2}]{\text{واحد به راست}} f(2(x-\frac{1}{2})) = f(2x-1)$$

پ نادرست؛ دو تابع $f(x) = m_1 x + h_1$ و $g(x) = m_2 x + h_2$ معکوس هم هستند ($g = f^{-1}$)، چون نمودارشان نسبت به نیمساز ربع اول و سوم قرینه است. حال f^{-1} را یافته و با تابع g برابر قرار می‌دهیم:

$$y = m_1 x + h_1 \Rightarrow y - h_1 = m_1 x \xrightarrow{\div m_1} x = \frac{y - h_1}{m_1}$$

$$\xrightarrow[\text{جای } x \text{ و } y]{\text{عوض شود}} f^{-1}(x) = \frac{x}{m_1} - \frac{h_1}{m_1}$$

$$\xrightarrow[\frac{g(x)=f^{-1}(x)}{g(x)=m_2 x + h_2}]{\frac{1}{m_1} x - \frac{h_1}{m_1}} m_2 x + h_2 = \frac{1}{m_1} x - \frac{h_1}{m_1}$$

$$\Rightarrow m_2 = \frac{1}{m_1} \Rightarrow m_1 m_2 = 1$$

ت درست؛ مثلاً توابع غیرمساوی $g(x) = \sqrt[3]{x}$ و $f(x) = x^3$

زیرا:

$$\begin{cases} f(g(x)) = f(\sqrt[3]{x}) = (\sqrt[3]{x})^3 = x \\ g(f(x)) = g(x^3) = \sqrt[3]{x^3} = x \end{cases}$$

$$\Rightarrow (f \circ g)(x) = (g \circ f)(x)$$

۳ مشخص است که نمودار $y = x^3$ را ۲ واحد به سمت چپ و سپس ۳ واحد به بالا برده‌ایم. بنابراین ضابطه $f(x)$ را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$y = x^3 \xrightarrow[\frac{2}{x \rightarrow x+2}]{\text{واحد به چپ}} y = (x+2)^3$$

$$\xrightarrow[\frac{3}{y+3}]{\text{واحد بالا}} f(x) = (x+2)^3 + 3$$

پس $a = -2$ و $b = 3$ بوده است. حال x را در ضابطه f ، صفر قرار داده تا محل برخورد با محور y ها (h) پیدا شود.

$$f(0) = (0+2)^3 + 3 = 8 + 3 = 11 = h$$

۲ الف نادرست؛ زیرا:

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 9} : x^2 - 9 \geq 0 \Rightarrow x^2 \geq 9$$

$$\xrightarrow{\sqrt{\quad}} |x| \geq 3 \Rightarrow x \geq 3 \text{ یا } x \leq -3$$

$$\Rightarrow D_f = (-\infty, -3] \cup [3, +\infty)$$

$$g(x) = \sqrt{x^2 + 1} : x^2 + 1 \geq 0 \Rightarrow \text{همواره برقرار} \Rightarrow D_g = \mathbb{R}$$

$$D_{g \circ f} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\}$$

$$= \{x \in (-\infty, -3] \cup [3, +\infty) \mid \sqrt{x^2 - 9} \in \mathbb{R}\}$$

همواره برقرار

$$\Rightarrow D_{g \circ f} = (-\infty, -3] \cup [3, +\infty) \stackrel{\text{یا}}{=} \mathbb{R} - (-3, 3)$$

! کسانی که اول ضابطه $g \circ f$ را پیدا می‌کنند و سپس دامنه را با توجه به ضابطه $g \circ f$ می‌گویند اشتباهی به جواب زیر می‌رسند که غلط است:

$$(g \circ f)(x) = g(\sqrt{x^2 - 9}) = \sqrt{(\sqrt{x^2 - 9})^2 + 1}$$

$$= \sqrt{x^2 - 9 + 1} = \sqrt{x^2 - 8}$$

$$x^2 - 8 \geq 0 \Rightarrow x^2 \geq 8 \xrightarrow{\sqrt{\quad}} |x| \geq \sqrt{8}$$

$$\Rightarrow x \geq \sqrt{8} \text{ یا } x \leq -\sqrt{8}$$

$$\Rightarrow D_{g \circ f} = \mathbb{R} - (-\sqrt{8}, \sqrt{8})$$

پس حواستان باشد بهتر است از تعریف استفاده کنید تا دچار اشتباه نشوید.

ب نادرست؛ حواستان به ترتیب عملیات گفته شده باشد. با

جابه‌جایی عملیات کلاً تابع دیگری حاصل می‌شود! در این سؤال اگر ابتدا طول نقاط را نصف و سپس نمودار یک واحد به راست ببریم داریم:

$$f(x) \xrightarrow[\frac{2}{x \rightarrow 2x}]{\frac{\text{طول نقاط}}{\quad}} f(2x) \xrightarrow[\frac{1}{x \rightarrow x-1}]{\text{واحد راست}} f(2(x-1)) = f(2x-2)$$

به $f(2x-2)$ رسیدیم که با تابع گفته شده $f(2x-1)$ متفاوت است. در ادامه دو روش نحوه ساختن $f(2x-1)$ به کمک $f(x)$ را توضیح می‌دهیم:

۶ با توجه به نمودار توابع f و g داریم:

$$\left. \begin{aligned} (fog)(-1) &= f(g(-1)) = f(-1) = 2 \\ (gof)(-2) &= g(f(-2)) = g(3) = 0 \\ (fof)(3) &= f(f(3)) = f(4) = 3 \end{aligned} \right\}$$

$$\Rightarrow \frac{(fog)(-1) + (gof)(-2)}{(fof)(3)} = \frac{2+0}{3} = \frac{2}{3}$$

$$0/5 \rightarrow f(0/5) = 4(0/5) + 2 = 4$$

$$1 \rightarrow 6 \rightarrow g(6) = 2(6) - 8(6) + 500$$

$$= 720 - 480 + 500 = 740$$

$$2 \rightarrow f(2) = 4(2) + 2 = 10$$

$$\rightarrow g(10) = 2(10) - 8(10) + 500 = 170$$

۱ $|x| \leq a \xrightarrow{a>0} -a \leq x \leq a$

۲ $|x| \geq a \xrightarrow{a>0} x \geq a \text{ یا } x \leq -a$

۸ یادآوری:

ابتدا دامنه توابع f و g را به دست می آوریم:

$$f(x) = x^2 - 2; D_f = \mathbb{R}$$

$$g(x) = \sqrt{4 - x^2}; 4 - x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 \leq 4$$

$$\xrightarrow{\text{جذر}} |x| \leq 2 \xrightarrow{\text{یادآوری}} -2 \leq x \leq 2 \Rightarrow D_g = [-2, 2]$$

حال طبق تعریف دامنه تابع gof داریم:

$$D_{gof} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\}$$

$$= \{x \in \mathbb{R} \mid (x^2 - 2) \in [-2, 2]\}$$

$$= \{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x^2 - 2 \leq 2\} \quad (*)$$

برای حل نامعادله مضاعف فوق به صورت زیر عمل می کنیم:

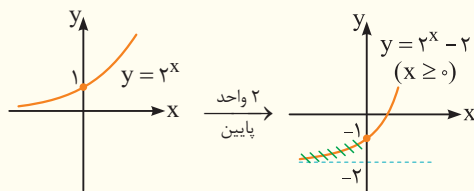
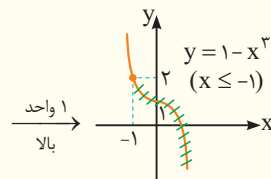
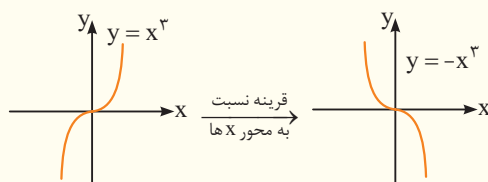
$$\Rightarrow \begin{cases} -2 \leq x^2 - 2 \Rightarrow 0 \leq x^2 \Rightarrow \text{همواره برقرار است.} \\ \Rightarrow x \in \mathbb{R} \\ \hline x^2 - 2 \leq 2 \Rightarrow x^2 \leq 4 \\ \xrightarrow{\text{جذر}} |x| \leq 2 \Rightarrow -2 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{اشتراک جوابها}} -2 \leq x \leq 2$$

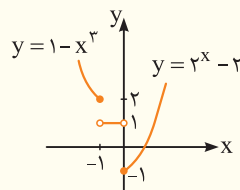
با جای گذاری جواب به دست آمده در رابطه (*), دامنه تابع gof را به دست می آوریم:

$$D_{gof} = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x \leq 2\} = [-2, 2]$$

۴ تک تک ضابطه ها را رسم کرده و سپس همه آنها را در یک محور مختصات نمایش می دهیم:

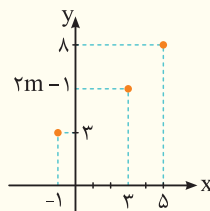


بنابراین نمودار f برابر می شود با:



با توجه به شکل، تابع در بازه $(-\infty, 0]$ نزولی، در بازه $(-1, 0)$ ثابت و در بازه $[0, +\infty)$ صعودی است. همچنین در بازه $(-\infty, -1]$ نزولی اکید و در بازه $[0, +\infty)$ صعودی اکید نیز می باشد.

۵ ابتدا نمودار f را رسم می کنیم:



با توجه به شکل برای آنکه f تابعی اکیداً صعودی باشد، باید عرض نقطه $(3, 2m - 1)$ از ۳ بیش تر و از ۸ کم تر باشد. داریم:

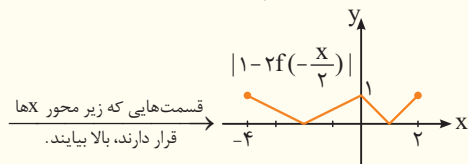
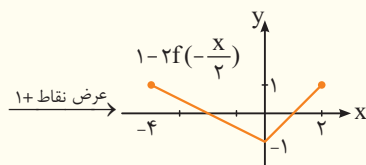
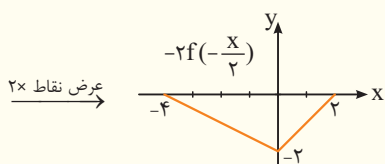
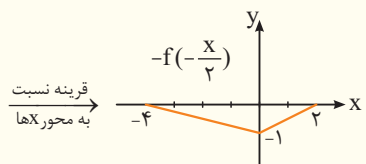
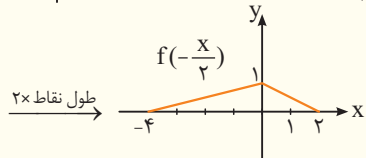
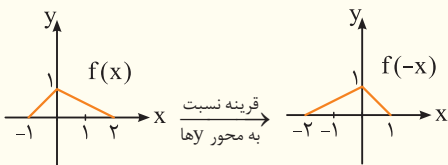
$$3 < 2m - 1 < 8 \xrightarrow{+1} 4 < 2m < 9 \Rightarrow 2 < m < 4/5$$

$$f(x) = |x| \xrightarrow[\text{واحد به راست}]{x \rightarrow x-1} y = |x-1|$$

$$\xrightarrow[\text{انقباض عمودی با ضریب ۳}]{3 \times y} y = 3|x-1|$$

$$\xrightarrow[\text{انقباض افقی با ضریب ۱/۲}]{x \rightarrow 2x} y = 3|2x-1|$$

$$\xrightarrow[\text{واحد پایین}]{y-2} y = 3|2x-1| - 2$$



! سؤال فوق، یک سؤال کامل با تمام حالت‌ها بود، در امتحانات معمولاً فقط قسمتی از آن از شما خواسته می‌شود. لذا یادگیری تمام مراحل الزامی است. موفق باشید.

۱۱

حال ضابطه gof را می‌یابیم:

$$\begin{aligned} g(f(x)) &= g(x^2 - 2) = \sqrt{4 - (x^2 - 2)^2} \\ &= \sqrt{4 - (x^4 + 4 - 4x^2)} = \sqrt{-x^4 + 4x^2} \end{aligned}$$

۹ با توجه به ماشین داده‌شده داریم:

$$\begin{aligned} f_{\text{به جای } x} & \\ f(g(x)) &= 2x \xrightarrow{f(x)=3x+4} 3g(x) + 4 = 2x \\ \Rightarrow 3g(x) &= 2x - 4 \Rightarrow g(x) = \frac{2x-4}{3} \quad (*) \end{aligned}$$

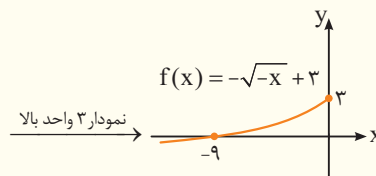
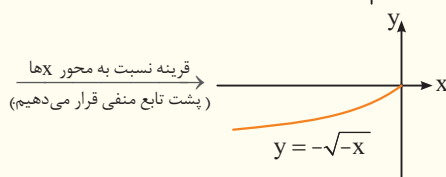
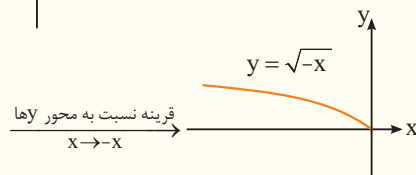
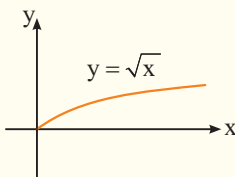
بنابراین:

$$g(g(x)) = 0 \xrightarrow{\text{به جای } x \text{ در } g} g\left(\frac{2x-4}{3}\right) = 0 \Rightarrow \frac{2\left(\frac{2x-4}{3}\right) - 4}{3} = 0$$

$$\xrightarrow[\text{وسطین}]{\text{طرفین}} \frac{4x-8}{3} - 4 = 0 \Rightarrow 4x - 8 - 12 = 0 \Rightarrow 4x = 20 \Rightarrow x = 5$$

$$\Rightarrow \frac{4x-8}{3} = 4 \Rightarrow 4x - 8 = 12 \Rightarrow 4x = 20 \Rightarrow x = 5$$

۱۰



بنابراین:

$$\begin{aligned} f(x) &= -\sqrt{-x} + 3 \\ \xrightarrow{x=-4} f(-4) &= -\sqrt{-(-4)} + 3 = -2 + 3 = 1 \end{aligned}$$

برای محاسبه $f^{-1}(2/1)$ کافی است در ضابطه f ، به جای $f(x)$ عدد $2/1$ را قرار دهیم و نیازی به محاسبه $f^{-1}(x)$ نیست:

$$2/1 = \frac{1}{3}x + \frac{5}{3} \xrightarrow{\times 3} 6/3 = x + 5$$

$$\Rightarrow x = 1/3 \Rightarrow f^{-1}(2/1) = 1/3$$

۱۵ باید نشان دهیم $(f \circ g)(x) = x$ و $(g \circ f)(x) = x$

$$f(g(x)) = f(-2(x-1)^2 - 4)$$

$$= 1 - \sqrt{\frac{-(-2(x-1)^2 - 4)}{2}} - 2 = 1 - \sqrt{(x-1)^2 + 2} - 2$$

$$= 1 - |x-1| \xrightarrow{x \leq 1} 1 - (-(x-1)) = 1 + x - 1 = x \quad \checkmark$$

$$g(f(x)) = g(1 - \sqrt{\frac{-x}{2}} - 2)$$

$$= -2(1 - \sqrt{\frac{-x}{2}} - 2)^2 - 4 = -2(-\frac{x}{2} - 2)^2 - 4$$

$$= x + 4 - 4 = x$$

۱۶ الف $(g^{-1} \circ f^{-1})(6) = g^{-1}(f^{-1}(6))$ (*)

برای محاسبه $f^{-1}(6)$ کافی است در $f(x) = 2 + \sqrt{2x}$ ، به جای $f(x)$ عدد ۶ قرار می‌دهیم:

$$6 = 2 + \sqrt{2x} \Rightarrow 4 = \sqrt{2x} \xrightarrow{\text{توان } 2} 16 = 2x$$

$$\Rightarrow x = 8 \Rightarrow f^{-1}(6) = 8$$

$$\xrightarrow{(*)} g^{-1}(\underbrace{f^{-1}(6)}_8) = g^{-1}(8)$$

حال در تابع $g(x) = x^3 - 1$ به جای $g(x)$ عدد ۸ را قرار می‌دهیم:

$$8 = x^3 - 1 \Rightarrow x^3 = 9 \xrightarrow{\sqrt[3]{}} x = \sqrt[3]{9}$$

$$\Rightarrow g^{-1}(8) = \sqrt[3]{9} \Rightarrow g^{-1} \circ f^{-1}(6) = \sqrt[3]{9}$$

ب با توجه به درسنامه، کافی است تابع $g \circ f$ را حساب کرده و برابر ۶۳ قرار دهیم:

$$g(f(x)) = g(2 + \sqrt{2x}) = (2 + \sqrt{2x})^3 - 1 = 63$$

به جای x در g

$$\Rightarrow (2 + \sqrt{2x})^3 = 64 = 4^3$$

$$\xrightarrow{\sqrt{}} 2 + \sqrt{2x} = 4 \Rightarrow \sqrt{2x} = 2 \xrightarrow{\text{توان } 2} 2x = 4 \Rightarrow x = 2$$

بنابراین $(g \circ f)^{-1}(63) = 2$ می‌شود.

میان‌بر: برای رسم نمودار تابع داده‌شده می‌توان سه مرحله زیر را انجام داد:

الف (طول نقاط) $\times (-2)$

ب $1 + (\text{عرض نقاط}) \times -2$

پ طول و عرض نقاط حاصل را در محورهای مختصات پیدا کرده و نمودار را رسم می‌کنیم. در انتها قسمت‌هایی از نمودار که زیر محور x ها قرار دارند را نسبت به محور x ها قرینه می‌کنیم.

۱۳ برای تشکیل gof^{-1} یا $g(f^{-1}(x))$ ، ابتدا تابع f^{-1} را طبق درسنامه به دست می‌آوریم:

$$f^{-1} = \{(2, 1), (5, 2), (3, 0), (-1, 4)\}$$

حال داریم:

$$\left\{ \begin{array}{l} 2 \xrightarrow{f^{-1}} 1 \xrightarrow{g} \times \\ 1 \text{ نمی‌تواند وارد } g \text{ شود، زیرا در دامنه } g \text{ نیست.} \\ 5 \xrightarrow{f^{-1}} 2 \xrightarrow{g} 3 \Rightarrow (5, 3) \in \text{gof}^{-1} \\ 3 \xrightarrow{f^{-1}} 0 \xrightarrow{g} \times \\ 3 \text{ نمی‌تواند وارد } g \text{ شود، زیرا در دامنه } g \text{ نیست.} \\ -1 \xrightarrow{f^{-1}} 4 \xrightarrow{g} 1 \Rightarrow (-1, 1) \in \text{gof}^{-1} \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \text{gof}^{-1} = \{(5, 3), (-1, 1)\}$$

۱۴ برای محاسبه $f^{-1}(a)$ از روی نمودار f کافی است به دنبال نقطه‌ای بگردیم که عرض آن نقطه a باشد. طول آن نقطه همان $f^{-1}(a)$ می‌شود:

الف

$$(4, 3) \in f \xrightarrow[\text{عوض شود}]{\text{جای } x \text{ و } y} (3, 4) \in f^{-1} \Rightarrow f^{-1}(3) = 4$$

ب چون نقطه‌ای به عرض $2/1$ روی نمودار مشخص نشده است، باید ضابطه f را بنویسیم. البته لازم نیست ضابطه تمام پاره‌خط‌ها را به دست بیاوریم. چون $2 < 2/1 < 3$ است. پس کافی است معادله پاره‌خطی که از دو نقطه $A(1, 2)$ و $B(4, 3)$ می‌گذرد را بیابیم:

$$m = \frac{3-2}{4-1} = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow \text{معادله خط: } y - y_A = m(x - x_A)$$

$$\Rightarrow y - 2 = \frac{1}{3}(x - 1) \Rightarrow f(x) = \frac{1}{3}x + \frac{5}{3}$$

حال ضابطه f را به صورت زیر می نویسیم تا بتوانیم x را بر حسب y بیابیم:

$$f(x) = a(x - x_S)^2 + y_S$$

$$\frac{a=-2}{S(2,3)} \rightarrow f(x) = y = -2(x-2)^2 + 3$$

$$\Rightarrow y - 3 = -2(x-2)^2$$

$$\Rightarrow (x-2)^2 = \frac{y-3}{-2}$$

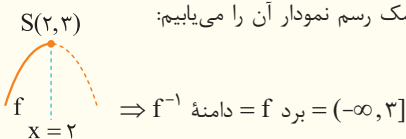
$$\sqrt{\quad} \rightarrow |x-2| = \sqrt{\frac{y-3}{-2}} \xrightarrow{x \leq 2} \frac{x-2 \leq 0}{x-2 \leq 0} \rightarrow -(x-2) = \sqrt{\frac{y-3}{-2}}$$

$$\Rightarrow -x + 2 = \sqrt{\frac{y-3}{-2}} \Rightarrow x = 2 - \sqrt{\frac{y-3}{-2}}$$

$$\xrightarrow{\text{جای } x \text{ و } y \text{ عوض شود}} f^{-1}(x) = 2 - \sqrt{\frac{x-3}{-2}}$$

دامنه f^{-1} همان بُرد $f(x) = -2(x-2)^2 + 3$ با شرط $x \leq 2$

است که به کمک رسم نمودار آن را می یابیم:



$$(f \circ g^{-1})(a) = -3 \Rightarrow f(g^{-1}(a)) = -3 \quad (*) \quad \text{IV}$$

با توجه به ضابطه f متوجه می شویم: $(\frac{1}{4}, -3) \in f$ یعنی $f(\frac{1}{4}) = -3$. با مقایسه با $(*)$ می فهمیم که:

$$g^{-1}(a) = \frac{1}{4} \Rightarrow (a, \frac{1}{4}) \in g^{-1} \xrightarrow{\text{جای } x \text{ و } y \text{ عوض}} (\frac{1}{4}, a) \in g$$

$$\frac{g(x) = -|x|\sqrt{x}}{2} \rightarrow -|\frac{1}{4}| \sqrt{\frac{1}{4}} = a$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{4}(\frac{1}{2}) = a \Rightarrow a = -\frac{1}{8}$$

الف با توجه به این که ضریب x^2 منفی است $(a, -2)$ ،

دهانه سهمی رو به پایین بوده و حداکثر مقدار n همان طول رأس سهمی است:

$$n_{\max} = \frac{-b}{2a} = \frac{-8}{2(-2)} = 2 \quad x = x_S = 2$$

یعنی f در بازه $(-\infty, n]$ اکیداً صعودی است که حداکثر مقدار n (بزرگ ترین بازه) برابر ۲ است.

ب باید ضابطه و دامنه f^{-1} را در بازه $(-\infty, 2]$ به دست آوریم. طول رأس سهمی $x_S = 2$ می شود. با جای گذاری آن در ضابطه f ، عرض رأس سهمی را می یابیم:

$$y_S = -2(2)^2 + 8(2) - 5 = 3$$

پاسخ تشریحی آزمون ۲

برای آن که از نمودار $f(x) = x^3 - 1$ به نمودار $f(x-2) + 7$ برسیم، باید نمودار را ۲ واحد به راست (+۲ طول نقاط) و سپس ۷ واحد به بالا (+۷ عرض نقاط) انتقال دهیم. بنابراین:

$$A(1, 0) \Rightarrow A'(1+2, 0+7) \Rightarrow A'(3, 7)$$

پ برای محاسبه دامنه، کافی است $2x+1$ در محدوده دامنه $f(x)$ باشد. داریم:

$$1 \leq 2x+1 \leq 4 \xrightarrow{-1} 0 \leq 2x \leq 3$$

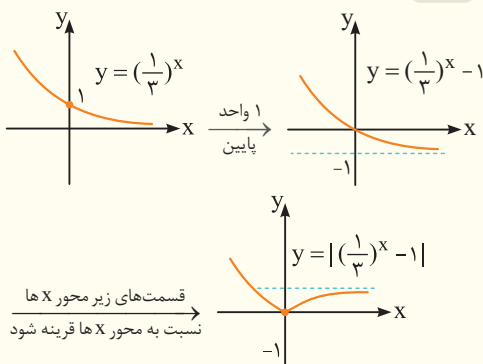
$$\xrightarrow{\div 2} 0 \leq x \leq \frac{3}{2}$$

برای محاسبه بُرد می دانیم بُرد تابع $f(2x+1)$ با بُرد $f(x)$ یکسان است. بنابراین داریم:

$$\xrightarrow{\times(-2)} -2 \geq -2f(2x+1) \geq -8$$

$$\xrightarrow{+3} 1 \geq 3 - 2f(2x+1) \geq -5 \Rightarrow \text{بُرد} : [-5, 1]$$

الف ۱

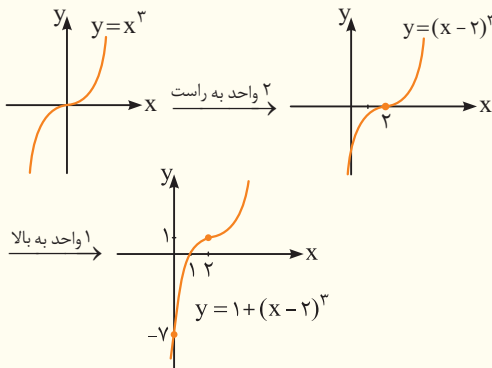


تابع در بازه $(-\infty, a]$ اکیداً نزولی است که با توجه به شکل، حداکثر a برابر صفر است.

ب ابتدا عرض نقطه را می یابیم:

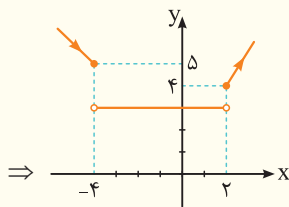
$$x = 1 \xrightarrow{y=x^3-1} y = 1^3 - 1 = 0 \Rightarrow A(1, 0)$$

حال با خیال راحت نمودار $y = x^3$ را ۲ واحد به راست و سپس ۱ واحد به بالا منتقل می‌کنیم:



۴ ابتدا نمودار تابع را رسم کرده و سپس عبارات را بررسی می‌نماییم:

$$f(x) = \begin{cases} -2x - 3 & ; x \leq -4 \\ 3 & ; -4 < x < 2 \\ 3x - 2 & ; x \geq 2 \end{cases} \quad \begin{array}{c|c} x & y \\ \hline -5 & -4 \\ -4 & 3 \\ 2 & 4 \\ 3 & 7 \end{array}$$



بررسی عبارت‌ها:

الف با توجه به نمودار، مشخص است که تابع در فاصله $[2, +\infty)$ اکیداً صعودی است.

ب با توجه به نمودار، تابع در بازه $(-\infty, -4]$ اکیداً نزولی است. اما در بازه $(-\infty, 2)$ نزولی می‌باشد. پس بزرگ‌ترین بازه‌ای که تابع در آن نزولی است $(-\infty, 2)$ می‌باشد و این عبارت نادرست است.

پ طول بازه‌ای که تابع در آن ثابت است $6 = (-4) - 2$ می‌باشد.

ت با توجه به نمودار، تابع در بازه $(-4, +\infty)$ صعودی می‌باشد. پس در بازه $[1, 5]$ نیز صعودی است.

۵ چون تابع f تابعی هم صعودی و هم نزولی می‌باشد، پس f تابع ثابت است. در تابع ثابت تمام مقادیر برده، یکسان هستند.

$$b = 2b - 1 \Rightarrow b = 1$$

پس داریم:

$$a - 1 = b \xrightarrow{b=1} a - 1 = 1 \Rightarrow a = 2$$

ت برای محاسبه $f^{-1}(f^{-1}(4))$ کافی است، ابتدا معادله

$$f(x) = 4 \Rightarrow \sqrt[3]{x} + 3 = 4 \Rightarrow \sqrt[3]{x} = 1$$

$$\xrightarrow{\text{توان ۳}} x = 1 \Rightarrow f^{-1}(4) = 1$$

با جای‌گذاری مقدار حاصل در عبارت خواسته‌شده به $f^{-1}(1)$ می‌رسیم. حال معادله $f(x) = 1$ را حل می‌کنیم:

$$f(x) = \sqrt[3]{x} + 3 = 1 \Rightarrow \sqrt[3]{x} = -2 \xrightarrow{\text{توان ۳}} x = -8$$

$$\Rightarrow f^{-1}(f^{-1}(4)) = -8$$

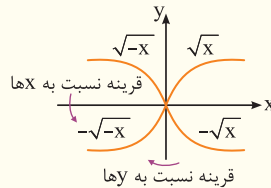
۲ الف درست

$$\text{gof} : x \xrightarrow{f} \text{ } \xrightarrow{g}$$

ب نادرست

در تابع gof ، تابع $y = f(x)$ (خروجی f) به‌عنوان ورودی وارد تابع g می‌شود، پس باید بُرد f و دامنه g اشتراکش تهی نباشد تا تابع gof شکل بگیرد.

پ نادرست؛ برای پاسخ‌گویی به نمودارهای مهم زیر دقت کنید.



پس اگر $y = \sqrt{-x}$ را نسبت به محور x ها و $y = -\sqrt{x}$ را نسبت به محور y ها قرینه کنیم، به تابع $y = -\sqrt{-x}$ می‌رسیم.

$$f(x) = 4 - \sqrt{1+x} \quad \text{ت درست؛}$$

$$D_f : [-1, +\infty) \Rightarrow x \geq -1 \Rightarrow 1+x \geq 0 \quad \text{محاسبه دامنه}$$

$$\sqrt{1+x} \geq 0 \xrightarrow{\times(-1)} -\sqrt{1+x} \leq 0 \quad \text{می‌دانیم: محاسبه بُرد}$$

$$\xrightarrow{+4} 4 - \sqrt{1+x} \leq 4 \Rightarrow f(x) \leq 4 \Rightarrow R_f : (-\infty, 4]$$

در معادله $(f \circ f^{-1})(x) = (f^{-1} \circ f)(x)$ ، در سمت چپ تساوی $x \in D_{f^{-1}} = R_f = (-\infty, 4]$ بوده و در سمت راست تساوی $x \in D_f = [-1, +\infty)$ است. پس زمانی تساوی برقرار است که x عضو اشتراک بازه‌های بیان‌شده باشد:

$$(-\infty, 4] \cap [-1, +\infty) = [-1, 4]$$

۳ برای خلاص شدن از شر $-x$ ، از یک منفی داخل پرانتز فاکتور می‌گیریم و چون توان، عدد فرد ۳ است، منفی را بیرون از پرانتز می‌بریم که با منفی پشت آن خنثی می‌شود:

$$f(x) = 1 - (2-x)^3 = 1 - (-(x-2))^3 = 1 + (x-2)^3$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{اولاً: } \sqrt{x+2} \geq 4 \Rightarrow x+2 \geq 16 \Rightarrow x \geq 14 \\ (*) : \sqrt{x+2} \leq -4 \Rightarrow x \in \emptyset \\ \text{یا +} \quad \text{یا -} \end{array} \right.$$

عبارت $\sqrt{x+2}$ هیچ‌گاه از -4 کوچک‌تر نمی‌باشد.

بنابراین: $D_{\text{gof}} = \{x \geq -2 \text{ و } x \geq 14\} = [14, +\infty)$

برویم سراغ ضابطه gof :

به جای x در g :

$$g(f(x)) = g(\sqrt{x+2}) = \sqrt{(\sqrt{x+2})^2 - 16}$$

$$= \sqrt{x+2-16} = \sqrt{x-14}$$

$$f \circ g(x) = 8x^2 + 6x + 5$$

$$\Rightarrow f(g(x)) \stackrel{g(x)=2x+1}{=} f(2x+1) = 8(2x+1)^2 + 6(2x+1) + 5 (*)$$

عبارت $2x+1$ را برابر t قرار می‌دهیم:

$$2x+1=t \Rightarrow x = \frac{t-1}{2}$$

جای‌گذاری در رابطه (*)

$$= 8\left(\frac{t^2-2t+1}{4}\right) + 6\left(\frac{t-1}{2}\right) + 5$$

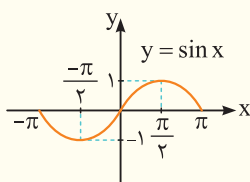
$$= 2t^2 - 4t + 2 + 3t - 3 + 5 = 2t^2 - t + 4$$

$$\Rightarrow f(x) = 2x^2 - x + 4$$

$$h(x) = \sqrt[3]{3x^2 + \Delta x - 4} \Rightarrow \begin{cases} g(x) = 3x^2 + \Delta x - 4 \\ f(x) = \sqrt[3]{x} \end{cases}$$

g فرض کرده و به جای آن x قرار می‌دهیم

در این حالت $h(x)$ برابر تابع $(f \circ g)(x)$ است و این جواب منحصر به فرد نمی‌باشد.



۶ اگر قیمت اولیه لپ‌تاپ بدون هیچ‌گونه تخفیف را x فرض کنیم. قیمت نهایی را در هر دو حالت حساب کرده و جواب‌ها را با هم مقایسه می‌کنیم:

الف

$$x \xrightarrow{\text{کارت تخفیف } 20\% \text{ درصدی}} 0.8x$$

$$x - \frac{20}{100}x$$

$$x \xrightarrow{\text{تخفیف } 200 \text{ هزار تومانی}} 0.8x - 200000$$

قیمت نهایی

ب

$$x \xrightarrow{\text{تخفیف } 200 \text{ هزار تومانی}} x - 200000$$

$$(x - 200000) \xrightarrow{\text{کارت تخفیف } 20\% \text{ درصدی}} 0.8(x - 200000)$$

قیمت نهایی

مشخص است که حالت (الف) به نفع علی است، زیرا قیمت $0.8x - 200000$ کمتر از $0.8x - 160000$ بوده و علی پول کم‌تری برای خرید پرداخت خواهد کرد.

۷ ابتدا با توجه به ضابطه‌های توابع $f(x)$ و $g(x)$ ، ضابطه تابع $(f \circ g)(x)$ را به دست می‌آوریم:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) \stackrel{g(x)=x^2+bx+c}{=} f(x^2+bx+c)$$

$$\stackrel{f(x)=2x^2+2a}{=} 2(x^2+bx+c) + 2a = 2x^2 + 2bx + 2c + 2a$$

از طرفی طبق فرض $(f \circ g)(x) = 2x^2 + x + 1$ است، بنابراین داریم:

$$2x^2 + 2bx + (2c + 2a) = 2x^2 + x + 1$$

برای آن‌که تساوی فوق به ازای هر x برقرار باشد، باید ضرایب x و اعداد ثابت در دو طرف تساوی با هم برابر باشند. لذا:

$$\begin{cases} 2b = 1 \Rightarrow b = \frac{1}{2} \\ 2c + 2a = 1 \xrightarrow{\div 2} c + a = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow b + c + a = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

۸

$$D_f : x+2 \geq 0 \Rightarrow x \geq -2$$

$$D_g : x^2 - 16 \geq 0 \Rightarrow x^2 \geq 16 \xrightarrow{\sqrt{\quad}} |x| \geq 4$$

$$\Rightarrow x \geq 4 \text{ یا } x \leq -4$$

$$D_{\text{gof}} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\}$$

$$= \{x \geq -2 \mid \sqrt{x+2} \geq 4 \text{ یا } \sqrt{x+2} \leq -4\}$$

(*)

برای محاسبه $f^{-1}(7)$ ، کافی است در تساوی فوق به جای $f(x)$ ،

عدد ۷ قرار دهیم:

$$\frac{7-1}{7+2} = \frac{x}{x+1} \Rightarrow \frac{6}{9} = \frac{x}{x+1} \Rightarrow 6x+6=9x$$

$$\Rightarrow 3x=6 \Rightarrow x=2 \quad \text{بنابراین } f^{-1}(7)=2 \text{ است.}$$

۱۳ الف $(g \circ f)^{-1}(-2)$ را a فرض کرده و داریم:

$$(g \circ f)^{-1}(-2) = a \Rightarrow (g \circ f)(a) = -2 \Rightarrow g(f(a)) = -2$$

با توجه به جدول $g(2) = -2$ ، پس $f(a) = 2$ یعنی $(a, 2) \in f$.

لذا $(2, a) \in f^{-1}$ که با توجه به جدول $a = -5$ می‌باشد.

ب ابتدا $(f+g)(\circ)$ را می‌یابیم:

$$(f+g)(\circ) = f(\circ) + g(\circ)$$

$$\frac{(-1, \circ) \in f^{-1} \Rightarrow (\circ, -1) \in f}{(\circ, 3) \in g} \quad -1+3=2 \quad (*)$$

$$f((f+g)(\circ)) \stackrel{(*)}{=} f(2) \stackrel{(1,2) \in f^{-1} \Rightarrow (2,1) \in f}{=} 1$$

۱۴ می‌دانیم: $g^{-1} \circ f^{-1}(x) = (f \circ g)^{-1}(x)$

پس کافی است وارون تابع $f \circ g(x)$ را بیابیم:

$$y = \sqrt{2x+1} \Rightarrow y^2 = 2x+1$$

$$\Rightarrow y^2 - 1 = 2x \Rightarrow x = \frac{y^2 - 1}{2}$$

$$\Rightarrow (f \circ g)^{-1}(x) = \frac{x^2 - 1}{2} \Rightarrow g^{-1} \circ f^{-1}(x) = \frac{x^2 - 1}{2}$$

$$y = \frac{9}{5}x + 32 \Rightarrow y - 32 = \frac{9}{5}x$$

$$\xrightarrow{\times \frac{5}{9}} \frac{5}{9}(y - 32) = x$$

$$\Rightarrow x = \frac{5}{9}y - \frac{160}{9} \xrightarrow{\text{جای } x \text{ و } y \text{ عوض شود}} f^{-1}(x) = \frac{5}{9}x - \frac{160}{9}$$

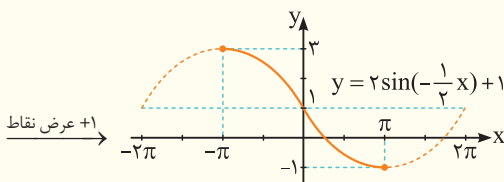
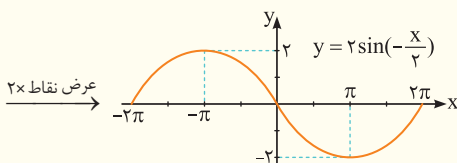
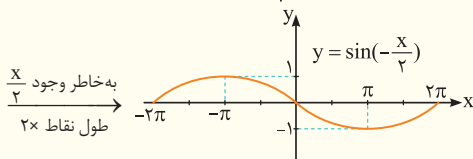
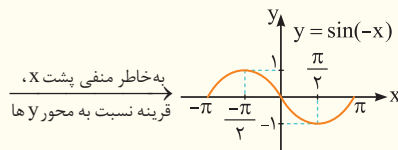
تابع f^{-1} ، دما برحسب درجه سانتی‌گراد را به‌عنوان تابعی از درجه فارنهایت نمایش می‌دهد.

۱۵ منظور از قرینه نسبت به خط $y = x$ (نیمساز ربع اول و سوم)، پیدا کردن معکوس تابع $f(x) = 2 + \sqrt{x-1}$ است:

$$y = 2 + \sqrt{x-1} \Rightarrow y-2 = \sqrt{x-1}$$

$$\xrightarrow{\text{توان } 2} (y-2)^2 = x-1$$

$$\Rightarrow x = (y-2)^2 + 1 \xrightarrow{\text{جای } x \text{ و } y \text{ عوض شود}} f^{-1}(x) = (x-2)^2 + 1$$



! با توجه به فرمول $\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$ می‌توانستیم تابع را به صورت $y = -2 \sin(\frac{x}{2}) + 1$ بنویسیم و برای رسم آن ابتدا طول نقاط، ۲ برابر شده و سپس عرض نقاط را ابتدا در عدد ۲ ضرب کرده و سپس با عدد ۱ جمع کنیم.

! اگر از مامی‌خواستند تابع $y = -2 \sin(\frac{-1}{2}x) + 1$ را رسم کنیم، زرن‌بازی در بیاورید و منفی داخل سینوس را ابتدا بدهید پشت سینوس:

$$y = -2 \sin(-\frac{1}{2}x) + 1 \Rightarrow y = (-2)(-\sin(\frac{x}{2})) + 1$$

$$\Rightarrow y = 2 \sin(\frac{x}{2}) + 1$$

این‌طوری از شَر دو قرینه نمودار نسبت به محور x ها و y ها خلاص می‌شویم!

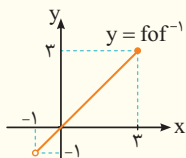
۱۲ با توجه به شکل، فرض کنیم $g(x) = \frac{x-1}{x+2}$. در این صورت

$(g \circ f)(x) = \frac{x}{x+1}$ شده است و چون تابع بیرونی g را داریم، به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$x \rightarrow \boxed{f} \rightarrow \boxed{\frac{x-1}{x+2}} \rightarrow \frac{x}{x+1}$$

$$g(f(x)) = \frac{x}{x+1} \xrightarrow{g(x) = \frac{x-1}{x+2}} \frac{f(x)-1}{f(x)+2} = \frac{x}{x+1}$$

$$y = (f \circ f^{-1})(x) = x \in D_{f^{-1}} = R_f = (-1, 3]$$



۱۸ محل برخورد نمودار $y = (g^{-1} \circ f^{-1})(x)$ با محور y را نقطه $(0, \alpha)$ در نظر می‌گیریم. در این صورت مختصات آن نقطه در ضابطه‌اش صدق می‌کند:

$$y = g^{-1}(f^{-1}(x)) \xrightarrow{\substack{x=0 \\ y=\alpha}} \alpha = g^{-1}(f^{-1}(0)) \quad (*)$$

برای یافتن $f^{-1}(0)$ ، معادله $f(x) = 0$ را حل می‌کنیم:

$$\log_{1/2}(2x - 5) = 0 \Rightarrow 2x - 5 = 1 \Rightarrow 2x = 6 \Rightarrow x = 3 \Rightarrow f^{-1}(0) = 3$$

حال باید $g^{-1}(3)$ را بیابیم که برای آن معادله $g(x) = 3$ را حل می‌کنیم:

$$2x - 5 = 3 \Rightarrow 2x = 8 \Rightarrow x = 4 \Rightarrow g^{-1}(3) = 4$$

$$\xrightarrow{(*)} \alpha = g^{-1}(f^{-1}(0)) = 4$$

حال ۲ واحد $f^{-1}(x)$ حاصل را به راست و سپس ۳ واحد به پایین انتقال می‌دهیم:

$$\xrightarrow[\substack{x \rightarrow x-2}]{\substack{2 \text{ واحد به راست}}} y = ((x-2) - 2)^2 + 1$$

$$\xrightarrow[\substack{y \rightarrow y-3}]{\substack{3 \text{ واحد به پایین}}} y = (x-4)^2 + 1 - 3 \Rightarrow g(x) = (x-4)^2 - 2$$

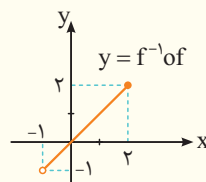
بنابراین:

$$g(g(4)) = g((4-4)^2 - 2) = g(-2)$$

$$= (-2-4)^2 - 2 = 36 - 2 = 34$$

۱۹ با توجه به شکل $D_f = (-1, 2]$ و $R_f = (-1, 3]$ از طرفی داریم:

$$y = (f^{-1} \circ f)(x) = x \in D_f = (-1, 2]$$



پاسخ تشریحی آزمون ۳

ت منظور از g ، همان f^{-1} است. پس باید وارون f را حساب کنیم:

$$y = 1 - \sqrt{1-x} \Rightarrow \sqrt{1-x} = 1-y$$

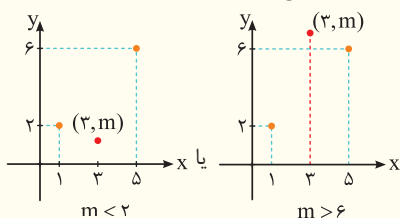
$$\xrightarrow{\text{توان } 2} 1-x = (1-y)^2 \Rightarrow x = 1 - (1-y)^2$$

$$\xrightarrow[\substack{\text{جای } x \text{ عوض شود.}}]{\substack{y}} f^{-1}(x) = g(x) = 1 - (1-x)^2$$

۲ الف درست؛ نمودار $y = f(x)$ از نقطه $(2, 6)$ عبور می‌کند، پس $f(2) = 6$.

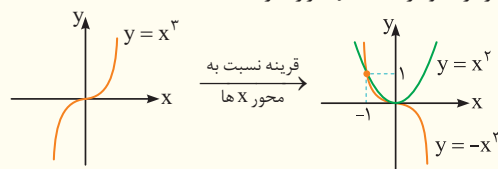
$$(f \circ f)(1) = f(f(1)) \xrightarrow{f(1)=2} f(2) \xrightarrow{f(2)=6} 6$$

ب نادرست؛ ابتدا زوج مرتب‌های f را در دستگاه مختصات نمایش می‌دهیم:



باتوجه به شکل‌ها، برای غیریکنا بودن f باید $m < 2$ یا $m > 6$ باشد.

۱ الف چون درجه f برابر ۵ است، بزرگ‌ترین توان چندجمله‌ای که $k+2$ بوده باید برابر ۵ شود؛ پس $k+2 = 5$ و لذا $k = 3$ می‌شود. ب با توجه به شکل زیر، نمودار $y = -x^3$ در بازه $(-\infty, -1)$ بالاتر از نمودار $y = x^2$ قرار دارد.



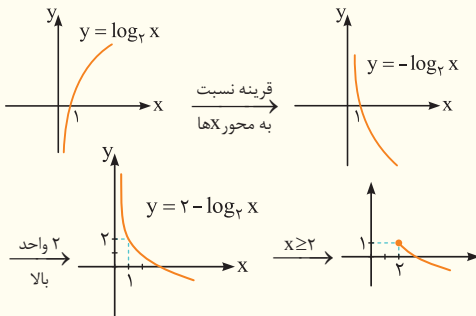
ب چون f تابعی هم صعودی و هم نزولی است، نتیجه می‌گیریم که باید f تابعی ثابت باشد، پس جملات دارای مجهول x باید حذف شوند:

$$f(x) = (2a-1)x^2 + (b+1)x + 4$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2a-1=0 \Rightarrow a=\frac{1}{2} \\ b+1=0 \Rightarrow b=-1 \end{cases} \Rightarrow a+b=-\frac{1}{2}$$

۴ ابتدا نمودار تابع f را رسم می‌کنیم:

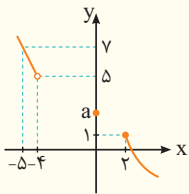
$$f(x) = \begin{cases} -2x - 3 & ; x < -4 \\ a & ; x = 0 \\ -(\log_2 x) + 2 & ; x \geq 2 \end{cases}$$



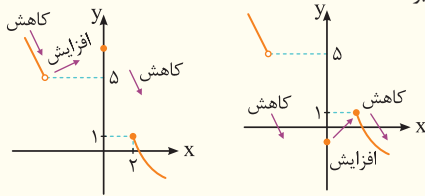
به ازای $x = 2$ مقدار $2 - \log_2 x$ برابر ۱ می‌شود. زیرا:

$$f(2) = 2 - \log_2 2 = 2 - 1 = 1$$

بنابراین نمودار f به صورت زیر درمی‌آید:



با توجه به شکل، اگر $a > 5$ یا $a < 1$ باشد، تابع غیرکنوا خواهد بود. زیرا:



۵ با توجه به آن‌که بازه $(-\infty, -1]$ ، بزرگ‌ترین بازه‌ای است که تابع در آن اکیداً صعودی است، نمودار سهمی باید به صورت

$$y = kx^2 + \frac{1}{k}x + 1 \quad \text{باشد. یعنی طول رأس سهمی}$$

باید برابر -1 باشد. داریم:

$$x_S = \frac{-b}{2a} = -1 \Rightarrow \frac{-\frac{1}{k}}{2k} = -1 \Rightarrow \frac{1}{2k^2} = 1$$

$$\Rightarrow k^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow k = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$$

اما از شکل مشخص است که دهانه سهمی رو به پایین بوده و لذا ضریب x^2 (یعنی k) باید منفی باشد، لذا فقط $k = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ صحیح است.

پ درست؛ طبق فرض $0 < k < 1$ است. برای راحتی، k را عددی در این بازه مثل $k = \frac{1}{2}$ در نظر می‌گیریم.

$$kf\left(\frac{x}{k}\right) \stackrel{k=\frac{1}{2}}{=} \frac{1}{2} f\left(\frac{x}{\frac{1}{2}}\right) = \frac{1}{2} f(2x)$$

حُب برای رسم $\frac{1}{2} f(2x)$ کافی است نمودار را در راستای محور y ها و x ها با ضریب $\frac{1}{2}$ منقبض کنیم که همان k بود.

ت نادرست؛ می‌دانیم $(f \circ f^{-1})(x) = x$ با شرط $x \in D_{f^{-1}} = R_f$ و $(f^{-1} \circ f)(x) = x$ با شرط $x \in D_f$ است. بنابراین ظاهر این دو تابع برابر x است اما ماهیت واقعی آن‌ها یکی عضو دامنه f و دیگری عضو بُرد f است و چون در حالت کلی، دامنه و بُرد توابع لزوماً با هم برابر نیست، پس تساوی بیان‌شده همواره درست نیست و فقط می‌تواند در برخی از توابع که دامنه و بُرد یکسانی دارند، برقرار باشد.

۳ مشخص است که نمودار $y = x^3$ را k واحد به سمت راست و سپس 2 واحد به سمت بالا انتقال داده‌اند. بنابراین ضابطه $f(x)$ را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$y = x^3 \xrightarrow[k \rightarrow x-k]{\text{واحد به راست}} y = (x-k)^3$$

$$\xrightarrow[y+2]{\text{۲ واحد به بالا}} f(x) = (x-k)^3 + 2 \quad (*)$$

از طرفی نمودار از نقطه $(0, -7)$ می‌گذرد، لذا مختصات این نقطه در ضابطه $f(x)$ صدق می‌کند:

$$f(x) = (x-k)^3 + 2 \xrightarrow{(0, -7) \in f} -7 = (0-k)^3 + 2$$

$$\Rightarrow -k^3 = -9 \Rightarrow k = 3 \xrightarrow{(*)} f(x) = (x-3)^3 + 2$$

حال ضابطه f حاصل را برابر ضابطه صورت سؤال قرار داده و a و b را می‌یابیم:

$$(x-3)^3 + 2 = x^3 - 9x^2 + ax + b$$

$$\Rightarrow (x^3 - 9x^2 + 27x - 27) + 2 = x^3 - 9x^2 + ax + b$$

$$= x^3 - 9x^2 + ax + b$$

$$\Rightarrow x^3 - 9x^2 + 27x - 25 = x^3 - 9x^2 + ax + b$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = 27 \\ b = -25 \end{cases}$$

بعضی‌ها از یک منفی داخل قدرمطلق در تابع $k(x)$ فاکتور می‌گیرند. سپس می‌گویند قدرمطلق، منفی را از بین می‌برد؛ این طوری:

$$k(x) = \frac{-1}{3} |2 - x| = \frac{-1}{3} |-(x - 2)|$$

$$\boxed{-\square = \square} \Rightarrow k(x) = \frac{-1}{3} |x - 2|$$

بعد می‌گویند که کافی است عرض نقاط نمودار تابع $f(x)$ را در $\frac{-1}{3}$ ضرب کنیم تا تابع $k(x)$ ایجاد شود که این کار به‌خاطر دامنه $[-2, 3]$ غلط است! (چرا؟)

$$\sqrt{-2x+1} \xrightarrow[\text{قرار می‌دهیم.}]{\text{مرحله (۱): به جای } -x, x} \sqrt{2x+1}$$

$$\frac{x}{\frac{1}{3}} \xrightarrow[\text{قرار می‌دهیم.}]{\text{مرحله (۲): به جای } x, \frac{x}{\frac{1}{3}}} \sqrt{2\left(\frac{x}{\frac{1}{3}}\right)+1} = \sqrt{x+1}$$

$$\frac{x-1}{x} \xrightarrow[\text{قرار می‌دهیم.}]{\text{مرحله (۳): به جای } x-1, x} \sqrt{(x-1)+1} = \sqrt{x}$$

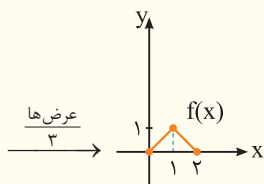
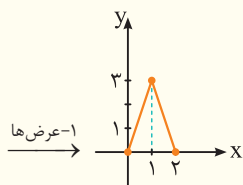
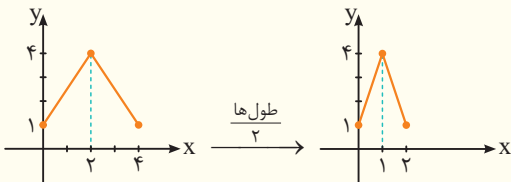
مراحل بالا را به فارسی بیان می‌کنیم:

مرحله اول: قرینه نسبت به محور y ها

مرحله دوم: طول نقاط دو برابر

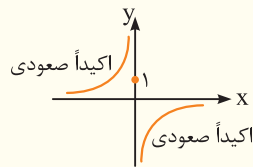
مرحله سوم: کل نمودار یک واحد به راست

۹ طول نقاط را باید تقسیم بر ۲ کنیم و از عرض نقاط یک واحد کم کرده و سپس عرض حاصل را تقسیم بر ۳ می‌کنیم:

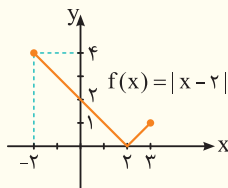


۶ نمودار تابع $f(x) = \begin{cases} \frac{-1}{x} & ; x \neq 0 \\ 1 & ; x = 0 \end{cases}$ را در نظر بگیرید.

همان‌طور که می‌بینید f در شرایط صورت سؤال صدق می‌کند.



۷ ابتدا تابع $f(x) = |x - 2|$ را در بازه $[-2, 3]$ رسم می‌کنیم:



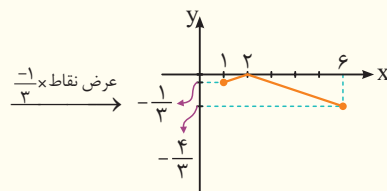
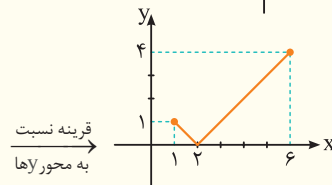
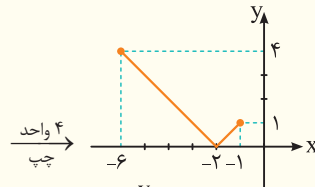
حال برای رسیدن از $f(x) = |x - 2|$ به $k(x) = \frac{-1}{3} |2 - x|$ باید کارهای زیر را انجام دهیم:

$$f(x) = |x - 2| \xrightarrow[\text{واحد به چپ}]{\frac{4}{x \rightarrow x+4}} y = \left| \frac{x+2}{x+4} - 2 \right|$$

$$\xrightarrow[\text{قرینه نسبت به محور } y]{x \rightarrow -x} y = |-x + 2|$$

$$\xrightarrow[\text{عرض نقاط } \frac{-1}{3}]{\frac{-1}{3} \times} k(x) = \frac{-1}{3} |2 - x|$$

حال این عملیات را روی نمودار پیاده می‌کنیم:



۱۰

$$(*) : \frac{6}{3x-5} - 3 \leq 0$$

$$\Rightarrow \frac{6-3(3x-5)}{3x-5} \leq 0 \Rightarrow \frac{-9x+21}{3x-5} \leq 0$$

ریشه: $\frac{7}{3}$
ریشه: $\frac{5}{3}$

x	$\frac{5}{3}$	$\frac{7}{3}$
$-9x+21$	+	+
$3x-5$	-	+
کل کسر	-	+

تَن

$$\xrightarrow{\leq 0 \text{ کل کسر}} x < \frac{5}{3} \text{ یا } x \geq \frac{7}{3}$$

$$D_{f \circ g} = \{x \neq \frac{5}{3} \mid x < \frac{5}{3} \text{ یا } x \geq \frac{7}{3}\}$$

اشتراک

$$= (-\infty, \frac{5}{3}) \cup [\frac{7}{3}, +\infty)$$

یادتان باشد در نامعادلات، حق طرفین وسطین کردن ندارید مگر در حالاتی خاص! مثلاً در این‌جا:

$$\frac{6}{3x-5} \leq 3 \xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} 6 \leq 3(3x-5) \quad \times$$

حتماً همه جملات را به یک طرف نامعادله برده و با مخرج مشترک‌گیری به یک کسر برسید و سپس جدول تعیین علامت برای آن کسر رسم کنید.

حال ضابطه $f \circ g$ را بیابیم:

به جای x در f

$$f(g(x)) = f\left(\frac{6}{3x-5}\right) = \sqrt{3 - \left(\frac{6}{3x-5}\right)}$$

$$= \sqrt{\frac{9x-15-6}{3x-5}} = \sqrt{\frac{9x-21}{3x-5}}$$

۱۳ می‌دانیم در تابع و وارونش جای ورودی و خروجی‌ها عوض می‌شود. طبق فرض $g^{-1}(f(a)) = 3$ یعنی در تابع g^{-1} مقدار $f(a)$ وارد و ۳ خارج شده است. پس در تابع g عدد ۳ وارد می‌شود و $f(a)$ خارج می‌گردد:

$$g(3) = \underbrace{f(a)}_{\text{خروجی}}$$

$$\begin{cases} f(x) = x^2 + 3x \\ g(x) = -\frac{1}{3}x + 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow g \circ f(x) \xrightarrow{\text{به جای } x \text{ در تابع } g} -\frac{1}{3}f(x) + 2$$

$$= -\frac{1}{3}(x^2 + 3x) + 2 = -\frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{3}x + 2 \quad (*)$$

برای آن‌که تابع $g \circ f$ در بالای محور x قرار گیرد، باید مقدار آن را مثبت قرار دهیم. داریم:

$$g \circ f(x) > 0 \xrightarrow{(*)} -\frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{3}x + 2 > 0$$

$$\xrightarrow{\times (-2)} x^2 + 3x - 4 < 0$$

جهت نامساوی عوض می‌شود.

$$\xrightarrow{\text{به کمک جدول تعیین علامت}} -4 < x < 1$$

۱۱

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x+4)$$

$$= \frac{2(x+4)-1}{(x+4)+2} = \frac{2x+7}{x+6}$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g\left(\frac{2x-1}{x+2}\right) = \frac{2x-1}{x+2} + 4$$

$$= \frac{2x-1+4(x+2)}{x+2} = \frac{2x-1+4x+8}{x+2} = \frac{6x+7}{x+2}$$

حال با برابر قرار دادن ضابطه‌های $(f \circ g)(x)$ و $(g \circ f)(x)$ ، جواب معادله را می‌یابیم:

$$(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x) \Rightarrow \frac{2x+7}{x+6} = \frac{6x+7}{x+2}$$

$$\Rightarrow (2x+7)(x+2) = (6x+7)(x+6)$$

$$\Rightarrow 2x^2 + 11x + 14 = 6x^2 + 43x + 42$$

$$\Rightarrow 4x^2 + 32x + 28 = 0 \xrightarrow{\div 4} x^2 + 8x + 7 = 0$$

$$\Rightarrow (x+1)(x+7) = 0 \Rightarrow x = -1 \text{ یا } x = -7$$

۱۲

$$D_f : 3 - x \geq 0 \Rightarrow 3 \geq x$$

$$D_g : 3x - 5 \neq 0 \Rightarrow 3x \neq 5 \Rightarrow x \neq \frac{5}{3}$$

$$D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\}$$

$$= \{x \neq \frac{5}{3} \mid \underbrace{\frac{6}{3x-5}}_{(*)} \leq 3\}$$

از برابری دو تابع فوق نتیجه می‌گیریم که $D_f = R_f$. بنابراین دامنه و برد تابع $f(x) = k - \sqrt{2-x}$ را محاسبه کرده و با هم برابر قرار می‌دهیم تا k پیدا شود:

$$D_f: 2-x \geq 0 \Rightarrow x \leq 2 \Rightarrow D_f = (-\infty, 2]$$

$$R_f: \sqrt{2-x} \geq 0 \xrightarrow{\times(-1)} -\sqrt{2-x} \leq 0$$

$$\xrightarrow{+k} \underbrace{k - \sqrt{2-x}}_{f(x)} \leq k \Rightarrow R_f = (-\infty, k]$$

$$\xrightarrow{D_f=R_f} (-\infty, 2] = (-\infty, k] \Rightarrow k = 2$$

$$f(-26) = -2 \Rightarrow f^{-1}(-2) = -26$$

$$\xrightarrow[\text{در } f^{-1}]{\text{جای گذاری}} -26 = (-2)^3 + a(-2)^2 - a(-2)$$

$$\Rightarrow -26 = -8 + 4a + 2a \Rightarrow -18 = 6a \Rightarrow a = -3$$

حال $a = -3$ را در ضابطه $f^{-1}(x)$ جای‌گذاری کرده و وارون آن یعنی $f(x)$ را می‌یابیم:

$$f^{-1}(x) = x^3 - 3x^2 - (-3)x$$

$$\Rightarrow f^{-1}(x) = x^3 - 3x^2 + 3x \xrightarrow{\text{اتحاد مکعب دو جمله‌ای}} (x-1)^3 + 1$$

اضافه و کم می‌کنیم

$$\Rightarrow y = (x-1)^3 + 1 \Rightarrow y-1 = (x-1)^3$$

$$\xrightarrow{\sqrt[3]{}} \sqrt[3]{y-1} = x-1$$

$$\Rightarrow x = \sqrt[3]{y-1} + 1 \xrightarrow[\text{عوض شود.}]{\text{جای } x \text{ و } y} f(x) = \sqrt[3]{x-1} + 1$$

$$(g \circ f)^{-1}(1) = 2 \Rightarrow (g \circ f)(2) = 1 \Rightarrow g(f(2)) = 1$$

$$\xrightarrow{f(x)=2x+5} g(2(2)+5) = 1 \Rightarrow g(9) = 1$$

حال $(f \circ g)^{-1}(7)$ را a فرض می‌کنیم:

$$(f \circ g)^{-1}(7) = a \Rightarrow (f \circ g)(a) = 7 \Rightarrow f(g(a)) = 7$$

$$\xrightarrow{f(x)=2x+5} 2g(a)+5 = 7 \Rightarrow 2g(a) = 2 \Rightarrow g(a) = 1$$

با توجه به (*), a همان ۹ بوده است.

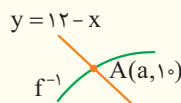
از طرفی $g(3)$ با توجه به تابع g برابر -2 است، زیرا $(3, -2) \in g$.
 $-2 = f(a)$

با توجه به $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & ; x \geq 0 \\ -\sqrt{-x} & ; x < 0 \end{cases}$ فقط ضابطه پایینی f می‌تواند برابر یک عدد منفی شود، زیرا $\sqrt{x}$ که منفی نمی‌شود.

$$\cancel{-2} = \cancel{-\sqrt{-a}} \Rightarrow \sqrt{-a} = 2 \xrightarrow{\text{توان } 2} -a = 4 \Rightarrow a = -4$$

۱۳ f^{-1} و خط $y = 12 - x$ هم‌دیگر را در نقطه‌ای به عرض ۱۰ قطع کرده‌اند. مختصات نقطه تقاطع را $A(a, 10)$ نامیده و باتوجه

به شکل، این نقطه روی نمودار خط و f^{-1} قرار دارد. پس مختصاتش در معادله آن‌ها صدق می‌کند. داریم:



$A(a, 10): y = 12 - x \Rightarrow 10 = 12 - a$

$$\Rightarrow a = 2 \Rightarrow A(2, 10)$$

روی f^{-1} است. $A(2, 10) \Rightarrow f^{-1}(2) = 10$

$$\Rightarrow f(10) = 2 \quad (*)$$

حال رابطه (*) را در معادله $f(x) = \sqrt{x-2}\sqrt{mx-1}$ قرار داده و m را می‌یابیم:

$$\underbrace{f(10)}_2 = \sqrt{10-2}\sqrt{10m-1} \xrightarrow{\text{توان } 2} 4 = 10-2\sqrt{10m-1}$$

$$\Rightarrow 2\sqrt{10m-1} = 6 \Rightarrow \sqrt{10m-1} = 3$$

$$\xrightarrow{\text{توان } 2} 10m-1 = 9 \Rightarrow 10m = 10 \Rightarrow m = 1$$

۱۵ می‌دانیم تابع $y = (f^{-1} \circ f)(x) = x$ که x عضو دامنه $f(x)$

است و تابع $y = (f \circ f^{-1})(x) = x$ که x عضو دامنه $f^{-1}(x)$ یا همان عضو برد f است:

$$y = (f^{-1} \circ f)(x) = x \in D_f$$

$$y = (f \circ f^{-1})(x) = x \in D_{f^{-1}} = R_f$$