

تقدیم به
همهٔ پدران و مادرانی که امنیت امروز
سرزمینمان را مدیون فرزندان آن‌هاییم.

گپی راجع به مجموعه «ماجرای بیست»

تا حالا به این فکر کردین که یه دانش آموز توی ۲۴ ساعت شبانه روز چی کار می‌کنه؟

❶ هفت هشت ساعت می‌خوابه و استراحت می‌کنه.

❷ حداقل هفت ساعت تو مدرسه‌ست که شیش ساعتش رو سر کلاسه و (احتمالن) داره درس گوش می‌ده.

❸ حدود یک ساعت تو راه خونه به مدرسه و مدرسه به خونه‌ست.

❹ سه چهار ساعتی هم توی خونه با کتابا و درساش مشغوله و گشتی می‌گیره.

❺ چهار پنج ساعت از وقتش هم می‌ره برای غذاخوردن، حضور در آغوش گرم خانواده و کارای شخصی مهم و

بازی‌گوشی (که شامل گوشی‌بازی هم می‌شه!)

خُب! با این حساب و کتابا معلوم می‌شه یه دانش آموز، ۷۵/۶۲۵ درصد از زمان بیداریش رو با درس و مشق و کتاب

و مدرسه و معلم می‌گذرونه با کلی اتفاقات تلخ و شیرین؛ پس بی‌راه نیست که بگیم:

«ماجرای بیست» ماجرای اصلی زندگی یه دانش آموزه.

ما توی خیلی‌سبز این مجموعه رو آماده کردیم، چون واقعن دلمون می‌خواد داستان مدرسه‌رفتن و درس‌خوندن شما

و این عمری که به پاش گذاشتین، پایان خیلی خوش و شکوهمندی داشته باشه!

اگه ماجراهای جالب خودتون با درساتون رو به صورت مطلب، عکس، سلفی، خاطره، فیلم و فیلم‌نامه و ... برامون

بفرستین، خیلی رو سرمون منت گذاشتین. ما حتمن ماجراهاتون رو یه جایی (مثلن تو سایت خیلی‌سبز یا شاید

هم چاپ بعدی کتاب) منتشر می‌کنیم.

ماجرای من و ریاضی ۱

چند وقتیته که ذهنم با چندتا سؤال بی‌ربط ولی بنیادی درگیر شده؛ گفتم با شما هم درمیان بذارم شاید شما جواب

قانع‌کننده‌ای داشته باشین!

❶ چرا عرب‌زبان‌ها به ورزش می‌گن الرياضیه ولی ما به ریاضی می‌گیم ریاضی؟

❷ مهندس علی دایی (که مدرکشون رو از دانشگاه صنعتی شریف گرفتن)، چون ریاضی بلدن پولدار شدن یا چون

ورزشکار هستن؟

❸ چرا بعضی از تیم‌های ورزشی وقتی فوتبال بازی می‌کنن، آدم احساس می‌کنه اینا انقد خوبن که دارن مسئله

المپیاد ریاضی حل می‌کنن! ولی بعضیا وقتی دارن جمع و تفریق می‌کنن، انگار دارن به خودشون لایی می‌زنن؟

❹ معروف، معروف‌تر است یا مریم میرزاخانی؟

❺ کدوم بیشتر حال می‌ده؟ در زنگ ورزش ریاضی بخونیم یا در زنگ ریاضی ورزش کنیم؟

اگر در مورد این سؤالا نظری دارین برام بفرستید؛ شاید از مشغولیت‌های ذهنی بنده کم کنید. البته به یه نتایجی

رسیدم! ورزشکارایی که ریاضی خوندن و ریاضی‌دانایی که ورزشکارن، خیلی کارشون درسته!

ریاضی بخونید! ورزش کنید! ماجراجو باشید!

به نام او که از همه بیشتر تو را دوست دارد

بچه‌ها سلام! ورود شما را به دبیرستان تبریک می‌گویم. می‌بینم که همه شما آماده‌اید. به نظرم ریاضی امسال، مهم‌ترین ریاضی دوران تحصیل شماست! می‌دانم که الان می‌گویید همه دبیرها در اول کار همین را می‌گویند، ولی اگر ادامه مقدمه را بخوانید، شما هم با من موافق می‌شوید. ریاضی امسال شما هفت فصل دارد. اول برای بچه‌های ریاضی بگویم:

فصل اول ادامه مباحث مجموعه است. در فصل‌های بعدی هم کمی به آن نیاز دارید. با دنباله‌ها هم آشنا می‌شوید! به خصوص دنباله خطی، حسابی و هندسی که اهمیت زیادی دارند.

فصل دوم این فصل بسم ا... مثلثات هست. ادامه آن را هم سال بعد خواهید خواند؛ پس پایه‌ای برای سال بعد است و ردپای آن خیلی از جاهای دیگر دیده می‌شود.

فصل سوم اوایلش تا حدودی برای شما آشناست. همان ریشه‌گیری و قواعد آن! البته آخرهای فصل، چیزهای مهم و جدیدی برای شما دارد.

فصل چهارم به نظرم از مهم‌ترین فصل‌های کتاب شماست. تو خیلی از مسئله‌ها مجبورید معادله حل کنید به خصوص توی حسابان! حسابان ۲ و کنکور هم که دیگر جای خود دارد.

فصل پنجم راجع به تابع صحبت می‌کند. الفبای تابع را یاد می‌گیرید، ادامه آن را هم باز دوباره در حسابان می‌خوانید. در **فصل ششم** باید بشمرید، البته بدون انگشت! از این فصل به سادگی عبور نکنید. اگر مطالب آن را خوب بفهمید، کارتان در فصل احتمال خیلی ساده می‌شود. این درس هم پایه برای درس آمار و احتمال سال بعد شماست.

اما **فصل هفتم** احتمال. یه کمی هم آخر آن آمار دارد که آسان است، البته به شرطی که فصل ۶ را خوب فهمیده باشید! برای بچه‌های تجربی هم تقریباً همین است. ادامه مباحث مثلثات، تابع و احتمال را در سال‌های بعد می‌خوانید و بقیه مطالب را هم به عنوان پایه نیاز دارید. دیدید حالا! ریاضی سال‌های بعدتان وابستگی زیادی به این کتاب دارد.

خب پرحرفی کردم. چند نکته هم برای استفاده بهتر از این کتاب بگویم و تمام! این کتاب شامل بخش‌های زیر است:

درس‌نامه: سعی کردم خیلی روان و ساده (البته کامل) درس را آموزش دهم. مطالب اضافه که به دردتان نمی‌خورد در این کتاب نمی‌بینید، اما هر چیزی که برای کسب نمره ۲۰ لازم دارید بیان شده است؛ پس به نظرم یک بار هم شده درس‌نامه را به دقت مطالعه کنید. چینش درس‌ها کاملاً مثل کتاب درسی است. البته در برخی موارد برای این که درس، طولانی نشود و حوصله‌تان سر نرود درس به چند بخش تقسیم شده و سؤال‌های هر قسمت آورده شده است.

در امتحان چه خبر: بچه‌ها حجم درس‌ها زیاد است؛ پس تا می‌توانید مطالب را تیپ‌بندی شده و منظم به خاطر بسپارید. من سعی کرده‌ام این کار را برای شما انجام بدهم و تیپ‌های مهم امتحانی به همراه نمونه سؤال‌های آن را در هر قسمت بیان کنم. این کار یک فایده دیگر هم دارد، بعد از خواندن قسمتی از درس‌نامه می‌فهمید که کدام سؤال‌ها را می‌توانید حل کنید.

سؤال‌های امتحانی: همه مثال‌ها و تمرین‌های کتاب و کار در کلاس! و سؤال‌های نهایی سال‌های قبل و (حتی سؤال‌های سال‌های بعد!) را در این قسمت به صورت کاملاً دسته‌بندی شده برای شما آورده‌ام. اگر کتاب را از اول سال تهیه کرده‌اید که کم‌کم همه را حل کنید و جلو بیاورید، اما اگر نزدیک پایان ترم هستید بیشتر روی سؤال‌های مشابه کتاب درسی، برگرفته از امتحانات مدارس و نهایی‌ها تمرکز کنید. سؤال‌هایی که کنار آن‌ها علامت  است مقداری بالاتر از کتاب درسی بوده و برخی از آن‌ها نیز تست کنکور بوده‌اند، چون ممکن است در آینده، تست هم در سؤال‌های نهایی ترم بیاید یا معلم شما آزمون تستی هم بگیرد، خوب است به این‌ها هم توجه کنید. (به درد کنکورتون هم می‌خوره!)

آزمون‌های انتهایی هر فصل: بعد از تمام شدن هر فصل، خوب است خودتان را با یک آزمون نسبتاً دشوار محک بزنید. اگر در حل سؤال‌ها اشکالات زیادی داشتید، بدانید که باید دوباره به درس‌نامه و سؤال‌های امتحانی فلش‌بک (رجوع با عین غلیظ) بزنید.

پاسخ‌های تشریحی: بعد از حل سؤال‌ها، حتماً پاسخ‌ها را تحلیل کنید، حتی شما دوست عزیز که سؤال را درست حل کرده‌اید! **آزمون‌های پایانی کتاب:** در انتهای کتاب دو آزمون ترم اول داریم و سه‌تا هم ترم دوم. این‌ها دیگر از نون شب واجب‌تر است. به خصوص برای شب‌های بارانی (اشک‌آلود) امتحان! دقت کنید که در پاسخ‌نامه آزمون، راه حل چه‌جوری نوشته شده است.

بخوانید و حالش را ببرید و هر نقد و نظری هم داشتید بیاید در کانال آموزشی didari.math به خودم بگویید.

در پایان از همه بر و بچه‌های خیلی سبز که مرا در نوشتن این کتاب یاری کردند، به خصوص آقای هاشمی و سرکار خانم جالینوسی صمیمانه تشکر می‌کنم. هم‌چنین از دانش‌آموزان عزیز، محمد یزدان‌پناه، وستا محمدزاده، حمیده محمدزاده، گلستا ترابی و صبا فلاح و سوگند یوسف مارزی و صوفیا قربانی که در رفع اشکالات کتاب ما را یاری کردند سپاسگزارم.

۱۴۰۴/۲/۲۲

دوستدارتون دیداری

فهرست

فصل اول: مجموعه، الگو و دنباله

- بخش ۱:** مجموعه‌های متناهی و نامتناهی ۸
- بخش ۲:** متمم یک مجموعه - شمارش تعداد ۱۳
- بخش ۳:** الگو و دنباله ۱۸
- بخش ۴:** دنباله حسابی ۲۵
- بخش ۵:** دنباله هندسی ۲۹
- آزمون جمع‌بندی فصل اول ۳۴

فصل دوم: مثلثات

- بخش ۱:** نسبت‌های مثلثاتی ۳۵
- بخش ۲:** دایره مثلثاتی ۴۳
- بخش ۳:** روابط بین نسبت‌های مثلثاتی ۵۲
- آزمون جمع‌بندی فصل دوم ۵۷

فصل سوم: توان‌های گویا و عبارت‌های جبری

- بخش ۱:** ریشه و توان ۵۸
- بخش ۲:** ریشه n ام ۶۲
- بخش ۳:** توان‌های گویا ۶۵
- بخش ۴:** عبارت‌های جبری ۷۰
- بخش ۵:** عبارت‌های گویا ۷۵
- آزمون جمع‌بندی فصل سوم ۸۰

فصل چهارم: معادله‌ها و نامعادله‌ها

- بخش ۱:** معادله درجه دوم و روش‌های مختلف حل آن .. ۸۱
- بخش ۲:** سهمی ۸۸
- بخش ۳:** تعیین علامت ۹۵
- بخش ۴:** حل نامعادله ۹۹
- آزمون جمع‌بندی فصل چهارم ۱۰۶

فصل پنجم: تابع

- بخش ۱:** مفهوم تابع و بازنمایی‌های آن ۱۰۷
- بخش ۲:** دامنه و برد توابع ۱۱۱

- بخش ۳:** انواع تابع ۱۱۸
- بخش ۴:** انتقال تابع ۱۲۴
- آزمون جمع‌بندی فصل پنجم ۱۲۸

فصل ششم: شمارش، بدون شمردن

- بخش ۱:** شمارش ۱۲۹
- بخش ۲:** جایگشت ۱۳۴
- بخش ۳:** ترکیب ۱۴۰
- آزمون جمع‌بندی فصل ششم ۱۴۷

فصل هفتم: آمار و احتمال

- بخش ۱:** تعریف‌های مقدماتی احتمال ۱۴۸
- بخش ۲:** احتمال یا اندازه‌گیری شانس ۱۵۳
- بخش ۳:** مقدمه‌ای بر علم آمار، جامعه و ۱۶۱
- آزمون جمع‌بندی فصل هفتم ۱۶۶

- پاسخ‌نامه تشریحی ۱۶۷
- پاسخ‌نامه آزمون‌های جمع‌بندی ۲۴۳

امتحانات

- امتحان‌های نوبت اول (آزمون شماره ۱) ۲۵۳
- امتحان‌های نوبت اول (آزمون شماره ۲) ۲۵۵
- امتحان‌های نوبت دوم (آزمون شماره ۳) ۲۵۶
- امتحان‌های نوبت دوم (آزمون شماره ۴) ۲۵۸
- امتحان‌های نوبت دوم (نهایی خرداد ۱۴۰۳) ۲۶۰
- پاسخ سؤال‌های امتحانی نوبت اول (آزمون شماره ۱) ۲۶۲
- پاسخ سؤال‌های امتحانی نوبت اول (آزمون شماره ۲) ۲۶۳
- پاسخ سؤال‌های امتحانی نوبت دوم (آزمون شماره ۳) ۲۶۵
- پاسخ سؤال‌های امتحانی نوبت دوم (آزمون شماره ۴) ۲۶۶
- پاسخ سؤال‌های امتحانی نوبت دوم (نهایی خرداد ۱۴۰۳) ۲۶۸

درس نامہ و سؤالات امتحان

فصل ۱: مجموعه، الگو و دنباله

بخش ۱: مجموعه‌های متناهی و نامتناهی

یادآوری مجموعه‌های مهم و اعمال روی آن‌ها

- قبل از این که درس اصلی را شروع کنیم، بد نیست چند مطلب را با هم مرور کنیم: **۱** مجموعه، دسته‌ای از اشیای کاملاً معین است.
- ۲** اگر شیء a ، متعلق به مجموعه A باشد، می‌نویسیم $a \in A$ و اگر متعلق به A نباشد، می‌نویسیم $a \notin A$.
- ۳** مجموعه A را زیرمجموعه B گوئیم، هرگاه همهٔ عضوهای A متعلق به B هم باشند و می‌نویسیم $A \subseteq B$.
- ۴** مجموعه‌ای که عضوی ندارد را مجموعهٔ تهی می‌گوییم و با نمادهای $\emptyset$ یا $\{\}$ نمایش می‌دهیم.
- در سال نهم با نماد و عضوهای مجموعه‌های مهم و پرتکرار آشنا شدید. یک بار آن‌ها را مرور کنیم:

نام مجموعه	نماد	عضوهای مجموعه	نکته‌ها
اعداد طبیعی	$\mathbb{N}$	$\{1, 2, 3, 4, \dots\}$	بزرگ‌ترین عدد طبیعی وجود ندارد.
اعداد حسابی	$\mathbb{W}$	$\{0, 1, 2, 3, \dots\}$	تنها عدد حسابی غیرطبیعی، صفر است.
اعداد صحیح	$\mathbb{Z}$	$\{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$	—
اعداد گویا	$\mathbb{Q}$	$\{\frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\}$	۱) اعداد گویا، اعداد کسری هستند که صورت و مخرج صحیح بوده و مخرج مخالف صفر باشد. ۲) $\frac{\text{عدد}}{\text{عدد}} = 0$ تعریف نشده است. ۳) $\frac{0}{\text{عدد غیر صفر}} = 0$
اعداد گنگ	$\mathbb{Q}'$ یا $\mathbb{Q}^c$	اعدادی که نمی‌توان آن‌ها را به صورت تقسیم دو عدد صحیح نوشت.	۱) $\sqrt{2}$ ، $\sqrt{3}$ و π نمونه‌هایی از اعداد گنگ هستند. ۲) مجموع، تفاضل، ضرب و تقسیم دو عدد گنگ، ممکن است گنگ نباشد. (مثلاً $\sqrt{2}$ و $-\sqrt{2}$ هر دو گنگ هستند، ولی $\sqrt{2} + (-\sqrt{2}) = 0$ یا $(\sqrt{2})(-\sqrt{2}) = -1$).
اعداد حقیقی	$\mathbb{R}$	اجتماع اعداد گویا و گنگ ($\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}'$)	اعداد روی محور همان اعداد حقیقی هستند.

نکته: ارتباط مجموعه‌های مهم: $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{W} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$

$\mathbb{Q}' \subseteq \mathbb{R}$

یادآوری: خوب است یک یادآوری هم دربارهٔ اعمال روی مجموعه‌ها داشته باشیم. فرض کنید A و B دو مجموعه باشند:

عمل	نماد	تعریف	نمودار ون	نکته‌ها
اجتماع	$A \cup B$	اشیایی که در A یا در B (یا هر دو) (به زبان دیگر عضو حداقل یکی از مجموعه‌ها) هستند. (به «یا» دقت کن.)		۱) $A \cup A = A$ ۲) $A \cup \emptyset = A$ ۳) $A \subseteq B \Rightarrow A \cup B = B$
اشتراک	$A \cap B$	اشیایی که در هر دوی A و B (مشترک‌ها) هستند. (به «و» دقت کن.)		۱) $A \cap A = A$ ۲) $A \cap \emptyset = \emptyset$ ۳) $A \subseteq B \Rightarrow A \cap B = A$
تفاضل	$A - B$	اشیایی که در A هستند ولی در B نیستند. (فقط عضو A هستند.) (به «فقط» دقت کن.)		۱) $A - B$ با $B - A$ فرق دارد. ($B - A$ شامل عضوهایی است که در B هستند ولی در A نیستند.) ۲) $A - \emptyset = A$ ، $\emptyset - A = \emptyset$ ۳) $A \subseteq B \Rightarrow A - B = \emptyset$

مثال: اگر $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ و $B = \{-1, 0, 2, 7\}$ باشد، مجموعه‌های $B - A$ و $A - B$ ، $A \cap B$ ، $A \cup B$ را به دست آورید.

پاسخ:

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\} \cup \{-1, 0, 2, 7\} = \{-1, 0, 2, 7\} \cup \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

$$A \cap B = \{1, 2, 3, 4, 5\} \cap \{-1, 0, 2, 7\} = \{2\}$$

$$A - B = \{1, 3, 4, 5\} - \{-1, 0, 2, 7\} = \{1, 3, 4, 5\}$$

(عدد ۲ در B هم هست، پس آن را از A حذف کردیم.)

$$B - A = \{-1, 0, 7\} - \{1, 2, 3, 4, 5\} = \{-1, 0, 7\}$$

مثال: با توجه به رابطه زیرمجموعه بودن مجموعه‌های مهم، حاصل مجموعه‌های $Q - R$ ، $Q \cap R$ ، $Q \cup R$ ، $N - Z$ ، $N \cap Z$ ، $N \cup Z$ را به دست آورید.

پاسخ:

$$N \subseteq Z \Rightarrow N \cup Z = Z, N \cap Z = N, N - Z = \emptyset$$

$$Q \subseteq R \Rightarrow Q \cup R = R, Q \cap R = Q, Q - R = \emptyset, R - Q = Q'$$

بازه‌ها

مجموعه همه اعداد حقیقی بین ۱ و ۰ (مثلاً $1/5$ ، $0/5$ ، $\sqrt{2}/4$ ، ...) را در نظر بگیرید. نمایش مجموعه‌ای این اعداد، به صورت $\{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 1\}$ است. این مجموعه را به صورت ساده‌تر $(0, 1)$ نمایش داده (با نقطه $(0, 1)$ روی دستگاه اشتباه‌گیری!) و آن را بازه صفر تا یک (بازه بین ۰ و ۱) می‌نامیم. چون خود ۱ و صفر عضو مجموعه نیستند، بازه را بازه باز می‌نامیم. اگر عدد ۱ عضو بازه باشد، آن را به صورت $[0, 1]$ نشان می‌دهیم. در حالت کلی داریم:

نمایش هندسی (روی محور)	نمایش مجموعه‌ای	بازه	نوع بازه
	$\{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$	(a, b)	باز
	$\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$	$[a, b]$	بسته
	$\{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$	$(a, b]$	نیم‌باز
	$\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$	$[a, b)$	نیم‌باز

توجه: اگر (a, b) بازه باشد، باید $a < b$ باشد. در سؤال‌هایی که اول یا آخر بازه مجهول هستند، حواستان به این موضوع باشد. ممکن است همه اعداد حقیقی بزرگ‌تر از a مدنظر باشند، در این صورت نمایش مجموعه‌ای آن به صورت $\{x \in \mathbb{R} \mid a < x\}$ بوده و بازه نظیر آن را به صورت $(a, +\infty)$ نمایش می‌دهیم. $+\infty$ (مثبت بی‌نهایت) عدد نیست، بلکه نشان می‌دهد بازه از راست بی‌کران است. در حالت کلی داریم:

نمایش هندسی (روی محور)	نمایش مجموعه‌ای	بازه	نوع بازه
	$\{x \in \mathbb{R} \mid a < x\}$	$(a, +\infty)$	باز و از راست بی‌کران
	$\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x\}$	$[a, +\infty)$	نیم‌باز و از راست بی‌کران
	$\{x \in \mathbb{R} \mid x < a\}$	$(-\infty, a)$	باز و از چپ بی‌کران
	$\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq a\}$	$(-\infty, a]$	نیم‌باز و از چپ بی‌کران
	$\mathbb{R}$	$(-\infty, +\infty)$	باز و از دو طرف بی‌کران

(توجه کن $+\infty$ یا $-\infty$ همیشه باز هستند)

مثال: درستی یا نادرستی هر عبارت را بررسی کنید.

(پ) $7 \in (-1, 7]$

(ب) $1 \in (1, 5]$

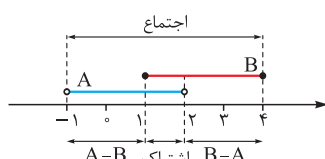
(الف) $0 \in (-1, 2)$

پاسخ: (الف) $0 \in (-1, 2)$ درست است، چون صفر بین ۱- و ۲ قرار دارد. همچنین $0/2 \in (-1, 2)$ یا $\sqrt{2} \in (-1, 2)$. (دقت کن $0 \in [0, 1] \neq (-1, 2)$.)

(ب) $1 \in (1, 5]$ درست نیست، چون بازه در سمت چپ باز بوده و عدد ۱ عضو بازه نیست، اما $5 \in (1, 5]$ درست است.

(پ) $7 \in (-1, 7]$ درست است، چون سمت راست بازه بسته است اما $7 \in (-1, 7)$ درست نیست. در نمایش این بازه روی محور، ۱- توخالی است.

مثال: بازه‌های $A = (-1, 2)$ و $B = [1, 4]$ را روی محور رسم کرده، اشتراک و تفاضل آن‌ها را به صورت بازه بنویسید.



$$A \cup B = (-1, 4]$$

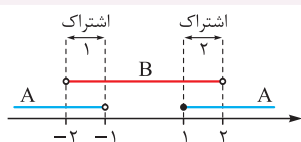
$$A \cap B = [1, 2)$$

$$A - B = (-1, 1) \text{ (توجه دارید که } 1 \in A \text{ و } 1 \in B \text{، پس } 1 \notin A - B)$$

$$B - A = [2, 4] \text{ (توجه دارید که } 2 \in B \text{ ولی } 2 \notin A \text{، پس } 2 \in B - A)$$

بوده و بازه از چپ بسته می‌شود.)

مثال: مجموعه $A = (-\infty, -1) \cup [1, +\infty)$ را روی محور رسم کرده و اشتراک آن را با بازه $B = (-2, 2)$ به دست آورید.



پاسخ: نمایش مجموعه‌های A و B روی محور به صورت مقابل است.

این دو مجموعه در دو قسمت اشتراک دارند، بنابراین اشتراک آن‌ها را نمی‌توان به صورت یک بازه نوشت. داریم:

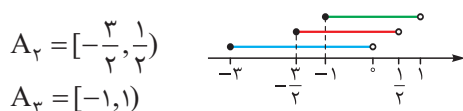
$$A \cap B = \underbrace{(-2, -1)}_{\text{قسمت (۱)}} \cup \underbrace{[1, 2)}_{\text{قسمت (۲)}}$$

مورد داشتیم پرسیده آقا مگه اشتراک نبود، چرا بین اون‌ها اجتماع شد؟

بین A و B در کدام قسمت‌ها اشتراک دارند؟ در دو بازه که هر دوی اون‌ها هم قبوله، یعنی همه‌شون جزء جواب باید باشن، پس قسمت (۱) اجتماع (به اضافه) قسمت (۲).

مثال: اگر $A_n = [-\frac{3}{n}, \frac{n-1}{4}]$ باشد، آنگاه حاصل $A_1 \cup A_2 \cup A_3$ را به دست آورید و تعداد اعداد صحیح در بازه به دست آمده را معین کنید.

پاسخ: برای به دست آوردن A_1 ، A_2 و A_3 به جای n به ترتیب ۱، ۲ و ۳ قرار می‌دهیم:



$$A_1 \cup A_2 \cup A_3 = [-3, 1)$$

جواب شامل اعداد صحیح $-3, -2, -1, 0$ و (یعنی چهار عدد صحیح) است.

تذکره: $A_1 \cup A_2 \cup A_3$ را خلاصه‌تر به صورت $\bigcup_{n=1}^3 A_n$ نیز نمایش می‌دهند.

مجموعه‌های متناهی و نامتناهی

تعداد عضوهای مجموعه A را با نماد $n(A)$ نمایش می‌دهیم، مثلاً مجموعه $A = \{-1, 2, 5\}$ ، ۳ عضو دارد؛ پس $n(A) = 3$ اما تعداد عضوهای مجموعه $B = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$ را نمی‌توان با یک عدد حسابی، بیان کرد. مجموعه A نمونه‌ای از یک مجموعه متناهی (باپایان) و مجموعه B نمونه‌ای از یک مجموعه نامتناهی (بی‌پایان) است.

مجموعه متناهی مجموعه‌هایی که تعداد اعضای آن‌ها یک عدد حسابی باشد، مجموعه‌های متناهی (باپایان) می‌نامیم.

ممکن است تعداد اعضای یک مجموعه، عدد حسابی بزرگی باشد اما باز هم مجموعه متناهی به حساب می‌آید.

مجموعه $\emptyset$ ، صفر عضو دارد، پس $\emptyset$ هم یک مجموعه متناهی است.

مجموعه‌ای که متناهی نباشد، نامتناهی می‌نامیم.

مثال: متناهی یا نامتناهی بودن مجموعه‌های ستون سمت راست را مشخص کنید.

مجموعه	متناهی یا نامتناهی
$A =$ مجموعه اعداد اول دورقمی	متناهی، چون $A = \{11, 13, 17, \dots, 97\}$ بوده و تعداد عضوها، عدد حسابی است.
$B =$ مجموعه اعداد حسابی	نامتناهی، چون $B = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ بوده و تعداد عضوها، یک عدد حسابی نیست.
$C =$ مجموعه مضرب‌های طبیعی عدد ۳	نامتناهی، چون $C = \{3, 6, 9, 12, \dots\}$ بوده و تعداد عضوها، یک عدد حسابی نیست.
$D =$ مجموعه اعداد بین صفر و یک	نامتناهی، چون $D = (0, 1)$ و بی‌شمار عدد در این بازه وجود دارد.
$E =$ مجموعه مورچه‌های کره زمین در یک لحظه خاص	متناهی، چون تعداد آن‌ها بالآخره یک عدد حسابی است هر چند بسیار بزرگ خواهد بود.
$F =$ مجموعه اعداد گویا	نامتناهی، چون تعداد عددهای گویا، یک عدد حسابی نیست.
$G =$ مجموعه اعداد اعشاری بین $0/1$ و $0/2$	نامتناهی، چون بی‌شمار عدد اعشاری، بین هر دو عدد مختلف، وجود دارد.

مثال: دو مجموعه نامتناهی مثال بزنید که اشتراک آن‌ها متناهی باشد.

پاسخ: دو مجموعه $A = \{1, 2, 3, \dots\}$ و $B = \{1, 0, -1, -2, \dots\}$ هر دو نامتناهی هستند، ولی $A \cap B = \{1\}$ ؛ پس اشتراک دو مجموعه، متناهی است.

نکته: خوب است در این‌جا به چند نکته توجه کنیم:

۱) اگر حداقل یکی از دو مجموعه A و B نامتناهی باشد، $A \cup B$ نامتناهی است (پون $A \cup B$ هم شامل عضوهای A هست و هم B).

۲) اشتراک دو مجموعه نامتناهی هم می‌تواند نامتناهی باشد و هم می‌تواند متناهی باشد.

۳) اگر حداقل یکی از A و B متناهی باشد اشتراک آن‌ها حتماً متناهی است (پون وقتی یکی متناهی عضوهای مشترکشان متناهی).



مثال: دو مجموعه نامتناهی A و B مثال بنزید که $A - B$ نامتناهی و دو مجموعه نامتناهی مثال بنزید که $A - B$ متناهی باشد.

پاسخ: دو مجموعه $\mathbb{Z}$ و $\mathbb{N}$ هر دو نامتناهی هستند. داریم:

$$\mathbb{Z} - \mathbb{N} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\} - \{1, 2, 3, \dots\} = \{\dots, -2, -1, 0\}$$

نامتناهی دو مجموعه $C = \{1, 2, 3, \dots\}$ و $D = \{3, 4, \dots\}$ هر دو نامتناهی هستند. داریم:

$$C - D = \{1, 2\}$$

نکته: اگر A متناهی باشد، مجموعه $A - B$ (حالا B هر چی هست) حتماً متناهی است. (پون $A - B$ شامل بعضی از عضوهای A هست حالا وقتی A متناهی، واضحه که بعضی از اون هم متناهی).

مثال: مجموعه‌ای متناهی مثالی بنزید که یک زیرمجموعه نامتناهی داشته باشد.

پاسخ: چنین مجموعه‌ای وجود ندارد. اگر $A \subseteq B$ بوده و A نامتناهی باشد، B هم نامتناهی است، چون مجموعه B هم عضوهای A را دارد. تازه ممکن است عضوهای دیگری هم داشته باشد.

در امتحان چه خبر؟

تیپ ۱ نماد مجموعه‌های مهم، عضوهای آن‌ها و اعمال روی آن‌ها معمولاً به صورت جای خالی یا درست و نادرست از شما خواسته می‌شود.

حالاتو حل کن: سؤال‌های ۱ و ۲ و ۷ تا ۲۱ و ۳۱ و ۳۳

تیپ ۲ مهم‌ترین موضوع درس اول، بازه‌ها است. از مفهوم بازه‌ها و اعمال روی آن‌ها (به‌خصوص تفاضل) حتماً در آزمون سؤال می‌آید.

حالاتو حل کن: سؤال‌های ۳ و ۶ و ۲۲ تا ۳۰ و ۳۴ تا ۴۰ و ۶۰ و ۶۱

تیپ ۳ متناهی یا نامتناهی بودن مجموعه‌های داده‌شده از شما خواسته می‌شود. هم‌چنین متناهی یا نامتناهی بودن اجتماع، اشتراک و تفاضل دو مجموعه (متناهی یا نامتناهی) به صورت درست و نادرست یا زدن مثال نیز می‌تواند در آزمون مطرح شود.

حالاتو حل کن: سؤال‌های ۴ و ۵ و ۴۲ تا ۵۹

؟ سؤال‌های امتحانی

سؤال‌هایی که علامت دارند، سخت‌ترین سؤال‌های هر بخش. اگر به کم‌تر از ۲۰ دقیقه نمی‌شود، بعد از تسلط روی سؤال‌های دیگر، برو سراغ اون‌ها.

■ جای خالی را با استفاده از عبارتهای مناسب تکمیل کنید.

۱- مجموعه اعدادی که نتوان آن‌ها را به صورت نسبت دو عدد صحیح نمایش داد را مجموعه اعداد می‌گوییم.

۲- تعداد عدد حسابی وجود دارد که طبیعی نیست.

۳- بازه‌هایی که تنها شامل یکی از نقاط انتهایی خود باشند را بازه‌های می‌نامیم.

۴- مجموعه‌هایی که تعداد اعضای آن‌ها یک عدد است را مجموعه‌های متناهی می‌نامیم.

۵- اگر مجموعه A ، زیرمجموعه نامتناهی داشته باشد، آن‌گاه A یک مجموعه است.

۶- طول بازه $[-1, 4]$ برابر واحد است.

■ در جای خالی یکی از مجموعه‌های $\mathbb{R}$ ، $\mathbb{Q}$ ، $\mathbb{Q}'$ ، $\mathbb{Z}$ ، $\mathbb{W}$ ، $\mathbb{N}$ ، $\emptyset$ را قرار دهید.

$$\mathbb{Z} \cup \mathbb{Q} = \dots \quad -۹$$

$$\mathbb{W} \cap \mathbb{N} = \dots \quad -۸$$

$$\mathbb{N} \cup \mathbb{Z} = \dots \quad -۷$$

$$\mathbb{Z} - \mathbb{Q} = \dots \quad -۱۲$$

$$\mathbb{R} - \mathbb{Q}' = \dots \quad -۱۱$$

$$\mathbb{Q} \cap \mathbb{Q}' = \dots \quad -۱۰$$

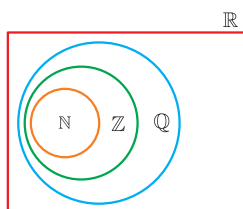
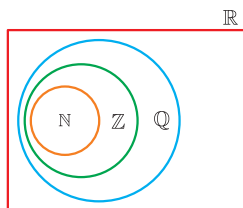
$$\mathbb{Q}' \cap \mathbb{R} = \dots \quad -۱۵$$

$$\mathbb{Q}' - \mathbb{R} = \dots \quad -۱۴$$

$$\mathbb{Z} - \mathbb{Q}' = \dots \quad -۱۳$$

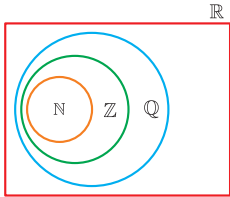
۱۶- مجموعه $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ چه نام دارد؟ آن را روی شکل مقابل هاشور بنزید و دو عضو دلخواه از آن را در ناحیه هاشور خورده بنویسید.

(مشابه تمرین کتاب درسی)



۱۷- دو عدد گویا مثال بنزید که عدد صحیح نباشند و آن‌ها را روی شکل مقابل در محل مناسب بنویسید.

۱۸- اعداد زیر را روی شکل و در محل مناسب بنویسید.



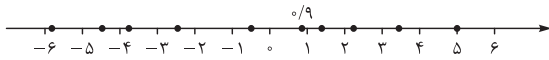
$$\sqrt{27}, 0, \frac{\pi}{2}, 3/6, 2\sqrt{5}, -\frac{25}{6}, -7$$

(مشابه تمرین کتاب درسی)

۱۹- مجموعه اعداد صحیح غیرطبیعی را با نمایش اعضا بنویسید. $\mathbb{Z} - \mathbb{N} = \{ \quad \}$

۲۰- مجموعه $\mathbb{N} - \mathbb{W}$ چند عضو دارد؟

۲۱- هر یک از اعداد $0/9, \sqrt{2}, \frac{\pi}{6}, 2/2, -2/4$ و $17/3$ را در یکی از مکان‌های مشخص شده (مانند $0/9$) بنویسید. مشخص کنید کدام اعداد گنگ هستند.



(مشابه تمرین کتاب درسی)

درستی یا نادرستی هر عبارت را مشخص کنید.

- ۲۲- $3 \in \{0, 3\}$
- ۲۳- $-1 \in \{-2, 0\}$
- ۲۴- $3 \in (0, 3)$
- ۲۵- $-1 \in (-2, 0)$
- ۲۶- $(-1, 2) \subseteq [-1, 2]$
- ۲۷- $\emptyset \in (-5, 0]$
- ۲۸- $\emptyset \subseteq (0, 1)$
- ۲۹- $\frac{\sqrt{5}}{3} \notin [0, 1]$
- ۳۰- $(2, 3] = [2, 3)$

۳۱- اعضای مجموعه $\mathbb{W} - \mathbb{N}$ را در کدام ناحیه باید بنویسیم؟

- ۱) ناحیه ۱
- ۲) ناحیه ۲
- ۳) ناحیه ۳
- ۴) ناحیه ۴

۳۲- مجموعه $[-3, 2) - (-2, 1]$ شامل چند عدد صحیح است؟

- ۱) ۱
- ۲) ۲
- ۳) ۳
- ۴) ۴

۳۳- مجموعه‌های A و B به صورتی هستند که $Q \subseteq A$ و $B \subseteq \mathbb{R}$. کدام مجموعه حتماً نامتناهی است؟

- ۱) $B - A$
- ۲) $A - B$
- ۳) $A \cap B$
- ۴) $A \cup B$

۳۴- نمایش مجموعه $\mathbb{R} - \mathbb{N}$ روی محور به کدام صورت است؟



۳۵- مشخص کنید هر عدد متعلق به کدام بازه است. (مانند نمونه)

(مشابه تمرین کتاب درسی)

نمونه: $-3, \sqrt{8}, \frac{\sqrt{11}}{2}, 0/075 \times 10^{100}, (-10)^{-2}, -10^{20}$

$[1, 2), (0, 1), (-5, -3], (-\infty, -100), (\sqrt{7}, 3], (4, +\infty)$

(مشابه تمرین کتاب درسی)

۳۶- جدول زیر را کامل کنید.

نمایش هندسی	نمایش مجموعه‌ای	بازه	نوع بازه
	$\{x \in \mathbb{R} \mid x > -1\}$	$(-3, 2]$	
.....			
.....			

(پیرگرفته از امتحانات مدارس کشور)

در هر قسمت $A \cup B, A \cap B, A - B$ و $B - A$ را به دست آورده و در صورت امکان با بازه‌ها نمایش دهید.

- ۳۷- $B = (0, 5), A = [-2, 1]$
- ۳۸- $B = [1, +\infty), A = (-2, 0)$
- ۳۹- $B = [-1, 1], A = (-2, 2)$
- ۴۰- $B = (0, 1), A = [-3, 1]$

۴۱- مجموعه‌های $\mathbb{R} - \{1, -1\}$ و $\mathbb{R} - (-1, 1)$ را روی محور نمایش داده و سپس آن‌ها را به صورت اجتماع چند بازه بنویسید.

(مشابه تمرین کتاب درسی)

متناهی یا نامتناهی بودن هر مجموعه را مشخص کنید.

- ۴۲- مجموعه اعداد طبیعی مضرب 100
- ۴۳- مجموعه سلول‌های زنده بدن شما
- ۴۴- مجموعه همه دایره‌های به مرکز مبدأ مختصات
- ۴۵- اعداد بازه $(-\frac{1}{100}, \frac{1}{100})$



۴۶- اعداد گویای بین ۲ و ۱

۴۷- اعداد حسابی منفی

۴۸- مجموعه تهی

۴۹- مجموعه اعداد طبیعی که مربع آن‌ها از ۱۰ بیشتر است. (شبه‌نهایی ۱۴۰۳)

۵۰- مجموعه اعداد اعشاری بین ۰/۲ و ۰/۵

۵۱- مجموعه مقسوم‌علیه‌های عدد ۱۰۰

(مشابه کتاب درسی)

در هر قسمت دو مجموعه A و B مثال بزنید که شرایط خواسته‌شده را دارا باشد.

۵۲- A و B نامتناهی بوده ولی اشتراک آن‌ها متناهی باشد.

۵۳- A و B نامتناهی بوده ولی A - B متناهی و B - A نامتناهی باشد.

درستی یا نادرستی هر عبارت را مشخص کنید.

۵۴- اجتماع دو مجموعه متناهی، متناهی است.

۵۵- اشتراک دو مجموعه نامتناهی، نامتناهی است.

۵۶- اگر $A \subseteq B$ بوده و B متناهی باشد، A هم متناهی است.۵۷- اگر $A \subseteq B$ بوده و A نامتناهی باشد، B هم نامتناهی است.

۵۸- اگر A - B نامتناهی باشد، A نامتناهی و B حتماً متناهی است.

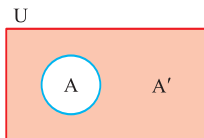
۵۹- اگر B - A متناهی باشد، B متناهی است.

۶۰- اگر $\frac{m-2}{3} \in [2, 6]$ باشد، m برابر با چند عدد صحیح می‌تواند باشد؟۶۱- اگر $(-2, a) \cap (b, 3] = (-\frac{2}{3}, 0)$ باشد، حاصل $(a, -b] \cup (-3a, 2b + 3)$ را به دست آورید.

بخش ۲: متمم یک مجموعه - شمارش تعداد عضوهای مجموعه‌ها

مجموعه مرجع و متمم یک مجموعه

مجموعه مرجع: در هر بحث، مجموعه‌ای که همه مجموعه‌های مورد بحث، زیرمجموعه آن باشند را **مجموعه مرجع** می‌نامیم و آن را با U نشان می‌دهیم. مجموعه مرجع، معمولاً توسط خود مسئله مشخص می‌گردد.



متمم مجموعه A: فرض کنید U مجموعه مرجع و $A \subseteq U$ باشد. مجموعه $U - A$ را متمم A می‌نامیم و آن را با نماد A' نشان می‌دهیم. (A' ، شامل عضوهایی از مجموعه مرجع است که در A نیستند).

نکته: روابط زیر همواره در مجموعه U برقرار است:

$$U' = \emptyset \quad \emptyset' = U \quad (A')' = A \quad A \cup A' = U \quad A \cap A' = \emptyset$$

مثال: اگر $U = \mathbb{N}$ و $A = \{1, 2, 3, 4\}$ باشد، مجموعه A' را به دست آورید.

$$A' = U - A = \mathbb{N} - A = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\} - \{1, 2, 3, 4\} = \{5, 6, 7, \dots\}$$

پاسخ:

مثال: در مثال بالا، اگر $U = \mathbb{Z}$ باشد، مجموعه A' را به دست آورید.

$$A' = U - A = \mathbb{Z} - A = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\} - \{1, 2, 3, 4\} = \{\dots, -2, -1, 0, 5, 6, 7, \dots\}$$

پاسخ:

مثال: در مثال اول، اگر $U = \mathbb{R}$ باشد، مجموعه A' را به دست آورید.

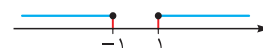
پاسخ: از کل محور، اعداد ۱، ۲، ۳، ۴ را حذف می‌کنیم:

$$A' = U - A = \mathbb{R} - \{1, 2, 3, 4\} = (-\infty, 1) \cup (1, 2) \cup (2, 3) \cup (3, 4) \cup (4, +\infty)$$

توجه: می‌بینید با این که در هر سه مثال، مجموعه A یکسان است ولی چون مجموعه‌های مرجع، در هر کدام متفاوت است، مجموعه‌های مختلفی برای A' به دست می‌آید. به همین دلیل است که وقتی صحبت از متمم مجموعه می‌شود، حتماً باید مجموعه مرجع داده شده باشد.

مثال: فرض کنید $U = \mathbb{R}$ و $A = (-1, 1)$ و $B = [2, +\infty)$ باشد. مجموعه‌های A' و B' و $(A \cup B)'$ را به دست آورید.

$$A' = U - A = \mathbb{R} - (-1, 1) = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$$

یازده (-1, 1) را از کل $\mathbb{R}$ برمی‌داریم

پاسخ:

$$B' = U - B = \mathbb{R} - [2, +\infty) = (-\infty, 2)$$



$$(A \cup B)' = \mathbb{R} - (A \cup B)$$

$$(A \cup B)' = (-\infty, -1] \cup [1, 2)$$

روابط بین متمم مجموعه‌ها در حالت کلی روابط مهمی بین متمم‌های دو مجموعه و اعمال اجتماع، اشتراک و تفاضل وجود دارد که آن‌ها را در جدول می‌بینید. درستی هر کدام را با نمودار ون یا مثال، بهتر می‌توانید درک کنید.

اسم قانون	قانون	توضیح	نمودار ون
تفاضل به اشتراک	$A - B = A \cap B'$	تفاضل به اشتراک تبدیل شده و دومی متمم می‌شود.	
دمورگان	$(A \cup B)' = A' \cap B'$ $(A \cap B)' = A' \cup B'$	هر دو مجموعه متمم شده و علامت وسط برعکس می‌شود.	
تفاضل مجموعه از متمم خودش	$A - A' = A$ $A' - A = A'$	چون A و A' عضو مشترک ندارند، تفاضل آن‌ها همان مجموعه اول می‌شود.	-
متمم‌گیری از رابطه زیرمجموعه	$A \subseteq B \rightarrow B' \subseteq A'$	اگر A زیرمجموعه B باشد، با متمم‌گیری جای دو مجموعه عوض شده و B' زیرمجموعه A' می‌شود.	

مثال: مجموعه مرجع به صورت $U = \{1, 2, 3, \dots, 10\}$ تعریف شده و مجموعه‌های $A = \{2, 3, 5\}$ و $B = \{3, 5, 7, 8\}$ را در نظر بگیرید. درستی رابطه $(A \cup B)' = A' \cap B'$ را بررسی کنید.

پاسخ: ابتدا مجموعه‌های راست و چپ تساوی را جداگانه به دست می‌آوریم:

$$A \cup B = \{2, 3, 5, 7, 8\} \Rightarrow (A \cup B)' = U - (A \cup B) = \{1, 4, 6, 9, 10\}$$

$$A' = \{1, 4, 6, 7, 8, 9, 10\}, B' = \{1, 2, 4, 6, 9, 10\} \Rightarrow A' \cap B' = \{1, 4, 6, 9, 10\}$$

مثال: ساده‌شده مجموعه $(A \cup B) \cap (A' \cap B')$ را به دست آورید.

$$\underbrace{(A \cup B)}_X \cap \underbrace{(A' \cap B')}_{X'} = X \cap X' = \emptyset$$

پاسخ: طبق قانون دمورگان $A' \cap B' = (A \cup B)'$ پس داریم:

نکته: برای ساده‌سازی عبارت‌های مجموعه‌ای می‌توانیم از نمودار ون هم کمک بگیریم.

مثال: حاصل مجموعه $[A \cup (B \cap A)] \cap (B - A)'$ را به دست آورید.

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \begin{array}{|c|c|} \hline A & B \\ \hline \end{array} & \cup & \begin{array}{|c|c|} \hline A & B \\ \hline \end{array} \\ \text{A} & & (B \cap A) \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|} \hline A & B \\ \hline \end{array}$$

پاسخ: از داخل گروه شروع می‌کنیم و با نمودار ون مجموعه‌ها را ساده‌تر می‌نویسیم:

$$\begin{array}{ccc} \begin{array}{|c|c|} \hline A & B \\ \hline \end{array} & \cap & \begin{array}{|c|c|} \hline A & B \\ \hline \end{array} \\ \text{A} & & (B - A)' \\ \hline \end{array} = A \rightarrow (B - A) \text{ بیرون}$$

حالا داریم:

مثال: مجموعه $(A - B)'$ با کدام گزینه برابر است؟

$$A \cup B' \quad (۴)$$

$$A' \cup B \quad (۳)$$

$$A' \cap B \quad (۲)$$

$$A \cap B \quad (۱)$$

$$(A - B)' = (A \cap B')' = A' \cup B$$

پاسخ: گزینه (۳)؛ طبق قانون تفاضل به اشتراک و بعد دمورگان داریم:

تعداد عضوهای اجتماع، تفاضل و متمم مجموعه‌ها

به دو روش می‌توانیم تعداد عضوهای مجموعه‌ها را به دست آوریم: (۱) روش فرمولی (۲) روش نمودار ون

روش فرمول ۱. **تعداد عضوهای $A \cup B$:** اگر تعداد اعضای A را با تعداد اعضای B جمع کنیم، عضوهای تکراری دو بار شمرده می‌شوند (در صورتی که عضوهای تکراری تو $A \cup B$ رو به بار می‌نویسیم)، پس یک بار آن را کم می‌کنیم، بنابراین:

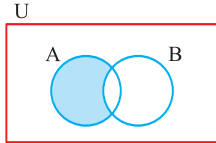
$$\underbrace{n(A \cup B)}_{\text{تعداد عضوهایی که در هر دو } A, B \text{ هستند}} = \underbrace{n(A)}_{\text{تعداد } A} + \underbrace{n(B)}_{\text{تعداد } B} - \underbrace{n(A \cap B)}_{\text{تعداد عضوهایی که در هر دو } A, B \text{ هستند}}$$

دو مجموعه جدا از هم: A و B را دو مجموعه جدا از هم یا مجزا گوئیم هرگاه اشتراکی نداشته باشند؛ به عبارت دیگر $A \cap B = \emptyset$.

نتیجه ۱: رابطه بالا در این حالت به صورت مقابل درمی آید. $A \cap B = \emptyset \Rightarrow n(A \cup B) = n(A) + n(B) - \underbrace{n(\emptyset)}_{\text{صفر}} = n(A) + n(B)$.

یعنی اگر دو مجموعه جدا از هم باشند، برای به دست آوردن تعداد عضوهای اجتماع، تعداد عضوهای دو مجموعه را با هم جمع می کنیم.

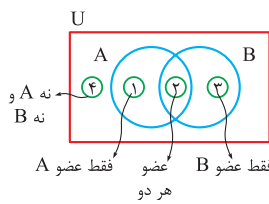
۲. تعداد عضوهای $A - B$: شکل زیر نمایش نمودار ون $A - B$ است. برای به دست آوردن تعداد عضوهای این مجموعه، کافی است تعداد عضوهای مشترک را از تعداد اعضای A کم کنیم.



$$\underbrace{n(A - B)}_{\substack{\text{تعداد عضوهایی که} \\ \text{در A هستند ولی} \\ \text{در B نیستند (فقط A)}}} = \underbrace{n(A)}_{\substack{\text{تعداد (مجموعه اول)}}} - \underbrace{n(A \cap B)}_{\substack{\text{اشتراک}}}$$

$$\underbrace{n(A')}_{\substack{\text{تعداد عضوهایی که در A نیستند.}}} = \underbrace{n(U)}_{\substack{\text{تعداد مرجع}}}$$

۳. تعداد عضوهای متمم:

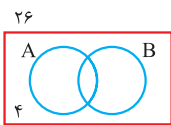


برای به دست آوردن تعداد اعضا، هم می توانید از این روابط مهم استفاده کنید یا این که از نمودار ون کمک بگیرید.

روش نمودار ون: در این روش، نموداری به صورت مقابل رسم می کنیم:

- ۱ اگر تعداد عضوهای اشتراک، داده شده باشد، اول آن را در ناحیه (۲) قرار می دهیم، در غیر این صورت آن را X می گیریم.
- ۲ با کم کردن اشتراک از تعداد عضوهای A ، ناحیه (۱) را به دست می آوریم. (شبه همین ناحیه (۳))
- ۳ مجموع تعداد عضوهایی که در ۴ ناحیه قرار دارد، برابر مجموعه مرجع می شود که از حل معادله، مجهول به دست می آید.

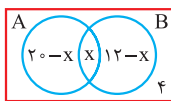
مثال: در یک کلاس ۲۶ نفره که ۲۰ نفر علاقه مند به فوتبال، ۱۲ نفر علاقه مند به والیبال و ۴ نفر علاقه مند به هیچ کدام نیستند. چند نفر به هر دو رشته علاقه مند هستند؟



پاسخ: روش اول: ۲۶ نفر در کلاس هستند که ۴ نفر آن ها نه علاقه مند به فوتبال هستند و نه والیبال (بیرون دایره ها)؛ پس $26 - 4 = 22$ نفر درون دایره ها هستند. اگر فوتبال A و والیبال B بگیریم داریم:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

$$22 = 20 + 12 - n(A \cap B) \Rightarrow n(A \cap B) = 10$$



روش دوم: تعداد عضوهای اشتراک را X می گیریم. طبق روش نمودار ون، $20 - X$ نفر، در ناحیه (۱)، $12 - X$ نفر، در ناحیه (۳) قرار دارند. حالا مجموع اعضای تمام نواحی، برابر ۲۶ می شود:

$$20 - X + X + 12 - X + 4 = 26 \Rightarrow X = 10$$

مثال: در یک کلاس ۳۰ نفره، ۸ نفر عضو تیم والیبال، ۱۴ نفر عضو تیم فوتبال و ۳ نفر هم عضو هر دو تیم هستند.

(الف) چند نفر عضو تیم والیبال یا فوتبال هستند؟ (به عبارت دیگر، چند نفر عضو حداقل یکی از تیم ها هستند؟)

(ب) چند نفر عضو تیم فوتبال بوده ولی عضو تیم والیبال نیستند؟

(پ) چند نفر عضو تیم والیبال هستند ولی عضو تیم فوتبال نیستند؟

(ت) چند نفر عضو هیچ کدام از تیم ها نیستند؟

پاسخ: الف: V و F را به ترتیب مجموعه دانش آموزان عضو تیم والیبال و فوتبال تعریف می کنیم:

$$\underbrace{n(V \cup F)}_{\substack{\text{تعداد فوتبال یا والیبال}}} = n(V) + n(F) - n(V \cap F) = 8 + 14 - 3 = 19$$

بنابراین ۱۹ نفر، عضو حداقل یکی از تیم های فوتبال یا والیبال هستند (حالا فوتبال یا والیبال یا هر دو)

$$n(F \cap V') = n(F - V) = n(F) - n(F \cap V) = 14 - 3 = 11$$

ب: ۱۱ نفر فقط فوتبالی هستند.

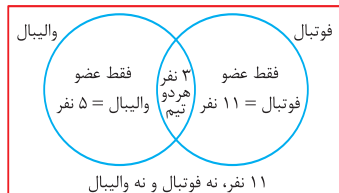
$$n(V \cap F') = n(V - F) = n(V) - n(V \cap F) = 8 - 3 = 5$$

پ: ۵ نفر فقط والیبال هستند.

ت: روش اول: طبق قسمت الف، ۱۹ نفر فوتبالی یا والیبال هستند. کلاس ۳۰ دانش آموز دارد، بنابراین $30 - 19 = 11$ نفر، نه عضو فوتبال و نه عضو والیبال هستند.

$$n(\underbrace{F'}_{\substack{\text{نه فوتبال} \\ \text{و نه والیبال}}} \cap \underbrace{V'}_{\substack{\text{نه فوتبال} \\ \text{و نه والیبال}}}) = n((F \cup V)') = n(U) - n(F \cup V) = 30 - 19 = 11$$

کلاس ۳۰ نفر



روش دوم: از نمودار ون استفاده می کنیم. شکلی به صورت مقابل رسم می کنیم. اول ۳ نفر را در قسمت اشتراک می نویسیم. کل والیبال ها ۸ نفر بودند، پس $8 - 3 = 5$ نفر فقط عضو والیبال هستند. به همین صورت $14 - 3 = 11$ نفر هم فقط عضو فوتبال هستند. حالا $5 + 3 + 11 = 19$ نفر بالآخره عضو حداقل یکی از تیم ها و بنابراین $30 - 19 = 11$ نفر عضو هیچ تیمی نیستند.

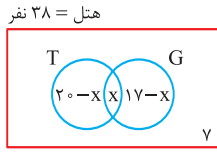
مثال: در یک هتل، ۳۸ مسافر وجود دارد. ۲۰ نفر آنان تاجر و ۱۷ نفر جهانگرد هستند. اگر ۷ نفر نه تاجر و نه جهانگرد باشند، چند مسافر تاجر جهانگرد در هتل وجود دارد؟

پاسخ: روش اول: از ۳۸ مسافر، ۷ نفر نه تاجر و نه جهانگرد هستند، پس $38 - 7 = 31$ نفر بالآخره تاجر هستند یا جهانگرد. مجموعه تاجران و جهانگردان را به ترتیب T و G در نظر می‌گیریم:

$$n(T \cup G) = n(T) + n(G) - n(T \cap G) \Rightarrow 31 = 20 + 17 - n(T \cap G) \Rightarrow n(T \cap G) = 6$$

تاجر یا جهانگرد تاجرو جهانگرد

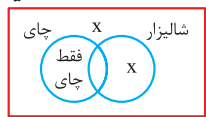
روش دوم: از نمودار ون کمک می‌گیریم. اول اشتراک اما چون آن را نداریم $n(T \cap G) = x$ می‌گیریم. $n(T) = 20$ ، پس تعداد افرادی که فقط تاجرند $20 - x$ خواهد بود. به همین صورت افرادی که فقط جهانگرد هستند $17 - x$ نفر خواهند بود. در داخل دایره‌ها $20 - x + x + 17 - x$ نفر وجود دارد. به شکل دیگری می‌توان گفت داخل دایره‌ها $20 - x + x + 17 - x = 31 \Rightarrow 37 - x = 31 \Rightarrow x = 6$ نفر وجود دارد، پس: $38 - 7 = 31$



مثال: در بررسی ۵۰۰ کشاورز، ۳۷۰ نفر دارای مزرعه چای و ۲۰۰ نفر دارای شالیزار هستند. تعداد آن‌هایی که نه مزرعه چای و نه شالیزار دارند، برابر تعداد کشاورزانی است که فقط شالیزار دارند. چند کشاورز فقط مزرعه چای دارند؟ (کشاورزان فقط چای و برنج برداشت می‌کنند.) (برگرفته از کنکور سراسری)

پاسخ: بهتر است به جای درگیر شدن با فرمول‌ها از نمودار ون استفاده کنیم: فقط شالیزار $\uparrow$ فقط شالیزار را X می‌گیریم، پس بیرون دایره‌ها (نه چای و نه شالیزار) نیز X می‌شود: $370 + x + x = 500 \Rightarrow 2x = 130 \Rightarrow x = 65 \Rightarrow \text{مشترک} = 200 - x = 200 - 65 = 135 \Rightarrow \text{فقط چای} = 370 - 135 = 235$

$\downarrow$ $\downarrow$
چای هیچ کدام



در امتحان چه خبر؟

تیب ۱ ساده کردن عبارت‌های شامل مجموعه‌ها است. علاوه بر این که روابط اصلی مثل دموگان و تفاضل به اشتراک و متمم را حفظ باشید، از نمودار ون هم می‌توانید کمک بگیرید.

حالاتو حل کن: سؤال‌های ۶۲ تا ۶۵ و ۸۰ تا ۸۷

تیب ۲ مجموعه A و مجموعه مرجع داده می‌شود و شما باید A' را به دست آورید. حواستان به باز یا بسته بودن بازه‌های داده شده باشد.

حالاتو حل کن: سؤال‌های ۶۶ تا ۷۹ و ۸۸ تا ۱۰۲

تیب ۳ مجموعه مرجع و دو مجموعه که ویژگی خاصی دارند داده می‌شود. باید از روی تعداد عضوهای داده شده تعداد عضوهای خواسته شده را به دست آورید. روش نمودار ون معمولاً بهتر از فرمول جواب می‌دهد. حواستان اول به اشتراک دو مجموعه باشد.

حالاتو حل کن: سؤال‌های ۱۱۱ تا ۱۱۹

تیب ۴ تعداد عضوهای برخی از مجموعه‌ها داده شده و شما باید با استفاده از فرمول‌ها تعداد عضوهای مجموعه‌های خواسته شده را پیدا کنید.

حالاتو حل کن: سؤال‌های ۱۲۰ تا ۱۲۲

سؤال‌های امتحانی

■ جای خالی را با عبارت‌های مناسب تکمیل کنید.

۶۲- در هر مبحث، مجموعه‌ای را که همه مجموعه‌های مورد بحث آن باشند، مجموعه مرجع می‌نامیم.

۶۳- مجموعه A' شامل عضوهایی است که در

۶۴- به هر دو مجموعه مثل A و B که دو مجموعه مجزا می‌گوییم.

۶۵- اگر A مجموعه شمارنده‌های عدد ۲۸ و B مجموعه شمارنده‌های عدد ۳۰ باشد، $n(A \cap B) = \dots$

۶۶- اگر U مجموعه تمام اتومبیل‌های پلاک‌گذاری شده و A مجموعه اتومبیل‌هایی باشد که رقم آخر پلاک آن‌ها ۰، ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ و ۶ است A' مجموعه اتومبیل‌هایی هست که

۶۷- اگر مجموعه مرجع، افراد در سن اشتغال یک جمعیت و A مجموعه افراد شاغل باشد، A' مجموعه است. نسبت $\frac{n(A')}{n(U)}$ را می‌گوییم.

(مشابه کتاب درسی)

■ جاهای خالی را تکمیل کنید.

۷۰- $U \cup A = \dots$

۶۹- $A \cap A' = \dots$

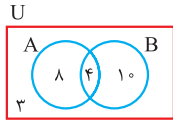
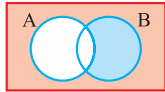
۶۸- $A \cup A' = \dots$

۷۳- $A - U = \dots$

۷۲- $U - A = \dots$

۷۱- $U \cap A = \dots$

۷۴- $\emptyset' = \dots$



■ درستی یا نادرستی هر عبارت را مشخص کنید.

۷۵- نمایش نمودار $(A - B)'$ به صورت مقابل است:

۷۶- متمم مجموعه $\{2, 3, 5\}$ نسبت به اعداد طبیعی یک‌رقمی ۶ عضو دارد.

۷۷- $(A - B)' = A' \cup B$

۷۸- در شکل مقابل تعداد عضوهایی که فقط در یکی از مجموعه‌ها هستند، برابر ۱۸ است.

■ در سؤال‌های ۷۹ تا ۸۴، گزینه درست را انتخاب کنید.

۷۹- اگر $U = \{x \in \mathbb{N} \mid 0 \leq x < 10\}$ مجموعه مرجع و A مجموعه اعداد مضرب ۳ باشد، $n(A')$ کدام است؟

- (۱) ۷ (۲) ۶ (۳) ۵ (۴) ۴

۸۰- اگر $A \subseteq B$ کدام رابطه نادرست است؟

- (۱) $B' \subseteq A'$ (۲) $A - (A \cup B) = \emptyset$ (۳) $B - (A \cap B) = \emptyset$ (۴) $A - (A \cap B) = \emptyset$

۸۱- رابطه $n(A \cup B) = n(A) + n(B)$ در چه صورت درست است؟

- (۱) $A' \subseteq B'$ (۲) $A = B$ (۳) $A \subseteq B$ (۴) A و B مجزا باشند.

(شبه‌نویسی ۱۴۰۳)

۸۲- اگر $A \subseteq B$ باشد، آن‌گاه کدام گزینه همواره درست است؟

- (۱) $A' = B'$ (۲) $B' \subseteq A'$ (۳) $A' - B' = \emptyset$ (۴) $A' \cup B' = U$

۸۳- اگر $A \subseteq B'$ باشد، کدام گزینه نادرست است؟

- (۱) $B \subseteq A'$ (۲) $B \cap A' = B$ (۳) $B' \cup A' = B'$ (۴) $B \cup A' = A'$

۸۴- اگر $A \cap B \subseteq B \cup C$ کدام گزینه حتماً درست است؟

- (۱) $A' \cup B' \subseteq B' \cap C'$ (۲) $B' \cap C' \subseteq A' \cup B'$ (۳) $A' \cap B' \subseteq B' \cup C'$ (۴) $B' \cup C' \subseteq A' \cap B'$

۸۵- اگر $U = \mathbb{R}$ ، $A = [-1, 2]$ ، $B = (3, +\infty)$ و $C = (-3, 1)$ باشد، حاصل مجموعه‌های زیر را به دست آورید.

الف) $A - (B \cup C)$ ب) $(B' \cup C) - A$

■ عبارت‌های زیر را ساده کنید.

۸۶- $((A \cap B) - B)' \cap ((A \cap B) \cup (A - B))$ ۸۷- $A' - (B - (A \cap B))$

■ اگر مجموعه اعداد طبیعی یک‌رقمی مجموعه مرجع، A مجموعه اعداد اول، B مجموعه اعداد مضارب ۳ و C مجموعه شمارنده‌های عدد ۸ باشد، مجموعه‌های زیر را مشخص کنید.

۸۸- $A - (B' \cap C)$ ۸۹- $B' - (A' \cup C)$

■ اگر $U = \{x \in \mathbb{Z} \mid -1 \leq x^2 \leq 5\}$ (مجموعه مرجع)، $A = \{x \in U \mid 2x \geq 1\}$ ، $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid -2 < x < 4\}$ و $C = \{x \in \mathbb{W} \mid x \text{ شمارنده ۶ است}\}$ ، مجموعه‌های زیر را با نوشتن اعضا مشخص کنید.

۹۰- $(A \cap B)'$ ۹۱- $A - (B' \cup C)'$

■ $\mathbb{W}$ را به عنوان مجموعه مرجع در نظر گرفته و به سؤال‌های زیر پاسخ دهید.

۹۲- مجموعه‌ای نامتناهی مثل A معرفی کنید که A' نیز نامتناهی باشد.

۹۳- مجموعه‌ای نامتناهی مثل A معرفی کنید که A' متناهی باشد.

۹۴- مجموعه‌ای متناهی مثل A معرفی کنید که A' نیز متناهی باشد.

■ فرض کنید مجموعه $A = \{0, 1, 2\}$ باشد. متمم مجموعه A را نسبت به هر کدام از مجموعه‌های مرجع داده‌شده به دست آورید.

۹۵- $U = \{-5, -4, \dots, 5\}$ ۹۶- $U = \mathbb{Z}$ ۹۷- $U = [0, 2]$ (برگرفته از امتحانات مدارس کشور)

۹۸- $U = (-1, 4]$ ۹۹- $U = \mathbb{R}$

۱۰۰- فرض کنید $U = \mathbb{R}$ باشد. متمم مجموعه‌های $\mathbb{N}$ ، $\mathbb{W}$ ، $\mathbb{Z}$ و $\mathbb{Q}$ را مشخص کرده و در صورت امکان با بازه‌ها نمایش دهید.

۱۰۱- فرض کنید $U = [-3, 3]$ باشد. متمم مجموعه‌های $(-3, 0]$ ، $(-3, 1)$ ، $(-3, 3)$ و $(0, 1)$ را به دست آورید. (برگرفته از امتحانات مدارس کشور)

۱۰۲- فرض کنید $U = \mathbb{R}$ ، $A = (-\infty, 1]$ و $B = (2, +\infty)$ باشد. مجموعه‌های A' ، B' ، $A' \cap B'$ ، $(A \cap B)'$ و $(A - B)'$ را به دست آورید.

ردیف	آزمون جمع‌بندی فصل اول	رشته: ریاضی و تجربی	مدت امتحان: ۹۰ دقیقه	Kheilisabz.com	نمره
۱	درستی یا نادرستی هر عبارت را مشخص کنید. الف) $(-2, 3) \in 2$ ب) دنباله $2\sqrt{5}, 4\sqrt{5}, 6\sqrt{5}, \dots$ یک دنباله هندسی است. پ) اگر مجموعه C دارای یک زیرمجموعه نامتناهی باشد، آن گاه C حتماً یک مجموعه نامتناهی است. ت) اگر $\mathbb{Z}$ مجموعه مرجع باشد، آن گاه $(\mathbb{Z} - \mathbb{W})' = \mathbb{N}$ است.				۱
۲	جای خالی را با عبارت‌های مناسب تکمیل کنید. الف) جمله بیستم دنباله $-7, -2, 3, \dots$ برابر است. ب) اگر A شمارنده‌های عدد ۲۴ و B شمارنده‌های عدد ۱۸ باشد، $n(A \cap B)$ تعداد عضو دارد. پ) دنباله $3, a+b, a-b, \dots$ هم حسابی و هم هندسی است، مقدار ab برابر است. ت) اگر A نامتناهی و B متناهی باشد، آن گاه مجموعه $B - A$ مجموعه‌ای است.				۲
۳	اگر حاصل $[0, 2] - [-6, 4] \cap (-\infty, 1]$ به صورت بازه $[a, b]$ باشد، حاصل $a - b$ را به دست آورید. (نوشتن مراحل لازم است).				۱
۴	حاصل متمم مجموعه $[A' \cap (A' \cup B)] - (A - B)$ را نسبت به مجموعه مرجع به دست آورید.				۱
۵	در یک مدرسه ۱۲۲ نفری، ۸۲ نفر ساعت در دست دارند و ۷۹ نفر عینک می‌زنند و ۵۴ نفر هم عینک می‌زنند و هم ساعت در دست دارند. چند نفر: الف) حداقل یکی از دو مورد را استفاده می‌کنند؟ ب) فقط ساعت در دست دارند؟ پ) دقیقاً یکی از دو مورد را استفاده می‌کنند؟ ت) نه ساعت می‌بندند و نه عینک می‌زنند؟				۱
۶	فرض کنیم A و B زیرمجموعه‌هایی از مجموعه مرجع U باشد به طوری که $n(U) = 120$ ، $n(A) = 75$ ، $n(B) = 50$ و $n(A \cap B) = 35$ مطلوب است: الف) $n(A \cup B)$ ب) $n(A \cap B')$ پ) $n(A' \cap B)$ ت) $n(A' \cap B')$				۲
۷	با توجه به الگوی مقابل تعداد دایره‌ها در شکل یازدهم چه قدر است؟				۱/۵
۸	در الگوی مقابل: الف) الگوی مربع‌های سیاه را بنویسید. ب) الگوی مربع‌های سفید را بنویسید. پ) وقتی کل مربع‌ها برابر ۱۰۶ تا باشد، تعداد مربع‌های سفید چه قدر است؟				۱/۵
۹	شش جمله اول از دنباله بازگشتی با اطلاعات مقابل را بنویسید.			$F_1 = 1$ ، $F_2 = 1$ ، $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$	۱
۱۰	برای دنباله روبه‌رو جمله عمومی را بنویسید.			۵، ۱۲، ۲۲، ۳۵، ۵۱، ...	۱
۱۱	در یک دنباله حسابی اگر $a_5^2 - a_7^2 = 20$ و قدرنسبت ۴ باشد، دنباله را مشخص کنید.				۱
۱۲	واسطه حسابی دو عدد $\sqrt{8}$ و $\sqrt{128}$ چند برابر واسطه مثبت هندسی آن‌هاست؟				۱
۱۳	جمله عمومی یک دنباله هندسی $a_n = \frac{3}{2 \times 3^n}$ است. قدرنسبت آن را پیدا کنید.				۱
۱۴	در یک دنباله هندسی، مجموع معکوس جملات هفتم و نهم برابر ۵ و حاصل ضرب جملات پنجم و یازدهم برابر $\frac{1}{9}$ می‌باشد. جمله اول و قدرنسبت مثبت دنباله چه قدر است؟				۱/۵
۱۵	بین دو عدد ۸۱ و ۶۲۵ سه عدد مثبت چنان قرار دهید که پنج عدد حاصل تشکیل دنباله هندسی دهند.				۱
۱۶	سه عدد تشکیل دنباله حسابی داده‌اند. اگر مجموع آن‌ها ۱۵ و مجموع مربعاتشان ۱۰۷ باشد، آن سه عدد را بیابید.				۱/۵
	جمع نمرات				۲۰

پاسخ نامہ تشریحی



فصل اول: مجموعه، الگو و دنباله

۱. گنگ

۲. حسابی

۳. نامتناهی

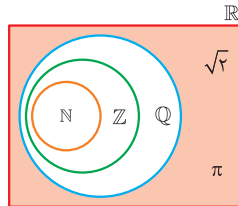
۴. نیم‌باز

۵. طول بازه‌های $[a, b]$ ، (a, b) ، $[a, b)$ و $(a, b]$ همگی برابر $b - a$ است، پس داریم:

۶. اگر $A \subseteq B$ باشد $A \cap B = A$ ، $A \cup B = B$ و $A - B = \emptyset$ می‌شود. با توجه به رابطه زیرمجموعه بین مجموعه‌های مهم داریم:

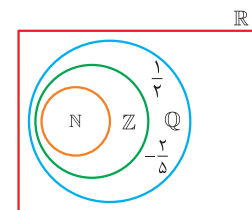
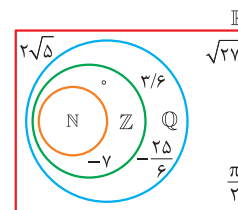
۷. $\mathbb{Z}$ ۸. $\mathbb{N}$ ۹. $\mathbb{Q}$ ۱۰. $\emptyset$ ۱۱. $\mathbb{Q}$ ۱۲. $\emptyset$ ۱۳. $\mathbb{Z}$ ۱۴. $\emptyset$ ۱۵. $\mathbb{Q}'$

۱۶. مجموعه $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ یا $\mathbb{Q}'$ قسمت رنگی (گنگ) مجموعه اعداد گنگ نام دارد. دو عدد گنگ مثل $\sqrt{2}$ و π که در قسمت رنگی نوشته شده است.



۱۷. $\frac{1}{2}$ و $-\frac{2}{5}$

۱۸.

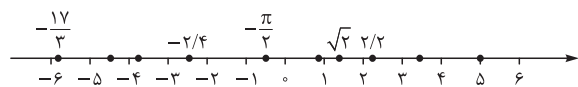


۱۹. $\mathbb{Z} - \mathbb{N} = \{0, -1, -2, -3, \dots\}$

۲۰. صفر عضو دارد، چون $\mathbb{N} - \mathbb{W} = \emptyset$. (به زبان دیگر عضوی ندارد.)

۲۱. دقت کنید که $\sqrt{2}$ و $-\frac{\pi}{6}$ گنگ بوده و مقدار تقریبی آن‌ها برابر است با:

$$-\frac{\pi}{6} \approx -\frac{3.14}{6} \approx -\frac{1}{2} \text{ و } \sqrt{2} \approx 1/4$$



۲۲. درست ۲۳. نادرست

۲۴. نادرست ۲۵. درست

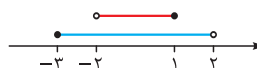
۲۶. درست ۲۷. نادرست

۲۸. درست ($\emptyset$ زیرمجموعه همه مجموعه‌هاست)

۲۹. نادرست ($\sqrt{5} < 1$) ۳۰. نادرست

۳۱. $\mathbb{W} - \mathbb{N} = \{0\}$ (اعداد حسابی غیرطبیعی). عدد صفر صحیح و غیرطبیعی است؛ پس باید آن را در ناحیه دوم بنویسیم.

۳۲. $[-3, 2) - (-2, 1] = [-3, -2] \cup (1, 2)$



این مجموعه شامل دو عدد صحیح -2 و -3 است.

۳۳. مجموعه اعداد گویا ($\mathbb{Q}$) نامتناهی است و چون $\mathbb{Q}$ زیرمجموعه A است؛ پس A نیز حتماً نامتناهی است. اجتماع هر مجموعه نامتناهی با مجموعه دیگر قطعاً نامتناهی است.

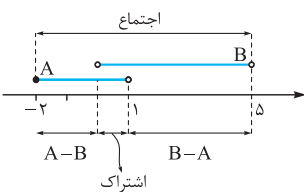
دقت کنید که B ممکن است متناهی بوده؛ پس $A \cap B$ و $B - A$ می‌توانند متناهی باشند. هم‌چنین ممکن است B نامتناهی باشد و $A - B$ نیز متناهی شود.

۳۴. کافی است از کل محور اعداد حقیقی، اعداد طبیعی را حذف کنیم.

۳۵. $-3, \sqrt{8}, \frac{\sqrt{11}}{2}, 0.075 \times 10^{100}, (-10)^{-2}, -10^2$

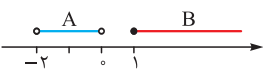
۳۶. $(1, 2), (0, 1), (-5, -3), (-\infty, -100), (\sqrt{7}, 3), (4, +\infty)$

نوع بازه	بازه	نمایش هندسی و مجموعه‌ای
نیم‌باز	$(-3, 2]$	$\{x \in \mathbb{R} \mid -3 < x \leq 2\}$
باز بی‌کران	$(-1, +\infty)$	$\{x \in \mathbb{R} \mid x > -1\}$
نیم‌باز بی‌کران	$(-\infty, 4]$	$\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 4\}$



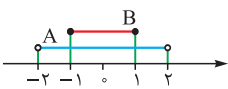
$A \cup B = [-2, 5]$ ، $A \cap B = (0, 1)$

$A - B = [-2, 0]$ ، $B - A = [0, 1]$



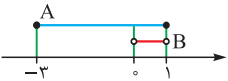
$A \cup B = (-2, 0) \cup [0, 1]$ ، $A \cap B = \emptyset$

$A - B = A = (-2, 0)$ ، $B - A = B = [0, 1]$



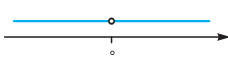
$A \cup B = A = (-2, 2)$ ، $A \cap B = B = [-1, 1]$

$A - B = (-2, -1) \cup (1, 2)$ ، $B - A = \emptyset$

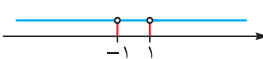


$A \cup B = A = [-3, 1]$ ، $A \cap B = B = (0, 1)$

$A - B = [-3, 0] \cup \{0\}$ ، $B - A = \emptyset$



$\mathbb{R} - \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$



$\mathbb{R} - \{-1, 1\} = (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)$



$\mathbb{R} - (-1, 1) = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$

از کل $\mathbb{R}$ بازه $(-1, 1)$ را حذف می‌کنیم. چون بازه، باز است، ۱ و -1 حذف نمی‌شوند.

۴۳. متناهی

۴۵. نامتناهی

۴۷. متناهی (برابر $\emptyset$ است)

۴۹. نامتناهی $\{4, 5, 6, \dots\}$

۵۱. متناهی

$A = \{\dots, -2, -1, 0\}$ ، $B = \{0, 1, 2, \dots\} \Rightarrow A \cap B = \{0\}$

$A = \mathbb{N}$ ، $B = \mathbb{Z}$

$\Rightarrow A - B = \emptyset$ ، $B - A = \{\dots, -2, -1, 0\}$

۴۲. نامتناهی

۴۴. نامتناهی

۴۶. نامتناهی

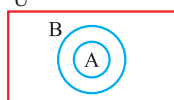
۴۸. متناهی

۵۰. نامتناهی

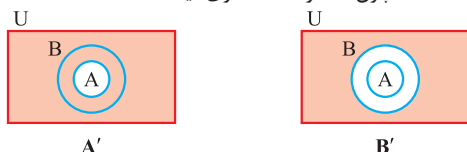
۵۳

۸۱. ۴ اگر A و B مجزا (جدا از هم) باشند، $A \cap B = \emptyset$ و تعداد عضوهای اجتماع دو مجموعه، برابر با مجموع تعداد عضوهای دو مجموعه است.

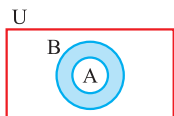
۸۲. ۲ یک نمودار می‌کشیم که در آن $A \subseteq B$ باشد.



۱ نادرست است، چون B' و A' مساوی نیستند.



اما با توجه به شکل ۲ درست است، چون $B' \subseteq A'$ است.



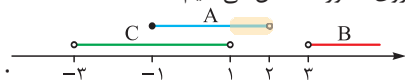
۳ نادرست است، چون $A' - B'$ به صورت مقابل بوده و تهی نیست:

۴ هم نادرست است، چون $A' \cup B'$ شامل مجموعه A نیست؛ پس برابر U نیست.

۸۳. ۳ اگر $A \subseteq B$ ، آن‌گاه $B' \subseteq A'$ (یعنی با متمم گرفتن جای دو مجموعه عوض می‌شود). از رابطه $A \subseteq B'$ نتیجه می‌گیریم $(B')' \subseteq A'$ پس؛ $B \subseteq A'$ (درست). اشتراک دو مجموعه B و A' همان مجموعه کوچک‌تر یعنی B می‌شود (درست) و اجتماع آن‌ها همان مجموعه بزرگ‌تر یا A' می‌شود (درست) اما ۳ در حالت کلی نادرست است.

۸۴. ۲ اگر از دو طرف رابطه زیرمجموعه، متمم بگیریم، جای دو مجموعه عوض می‌شود؛ پس $(B \cup C)' \subseteq (A \cap B)'$ یا $(A \cap B)' \subseteq (B \cup C)'$ از قانون دمورگان داریم: $(A \cap B)' = A' \cup B'$ و $(B \cup C)' = B' \cap C'$ ؛ یعنی $B' \cap C' \subseteq A' \cup B'$.

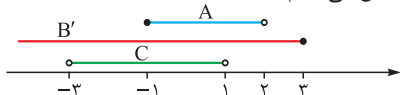
۸۵. الف مجموعه‌ها را روی محور مشخص می‌کنیم:



کافی است $B \cup C$ را از A کم کنیم تا قسمت زرد رنگ باقی بماند.

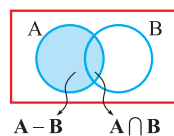
$$A - (B \cup C) = [1, 2)$$

ب B' را روی محور مشخص می‌کنیم:



$$B' \cup C = B' = (-\infty, 2] \Rightarrow B' - A = (-\infty, -1) \cup [2, 2]$$

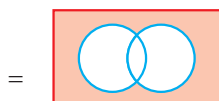
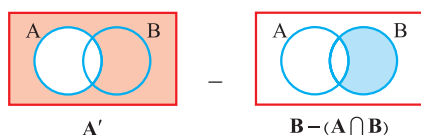
۸۶. ۱ $A \cap B \subseteq B$ پس $(A \cap B) - B = \emptyset$ و متمم $\emptyset$ مجموعه مرجع می‌شود. اشتراک مرجع با هر مجموعه‌ای خود آن می‌شود؛ پس حاصل برابر $(A \cap B) \cup (A - B)$ می‌شود. با نمودار ون داریم:



$$(A \cap B) \cup (A - B) = A$$

$A - B$ $A \cap B$

۸۷. ۱ مجموعه‌ها را روی نمودار مشخص می‌کنیم:



$$(A \cup B)' \rightarrow (A \cup B) \text{ بیرون}$$

۵۴. درست

۵۵. نادرست؛ اشتراک دو مجموعه نامتناهی می‌تواند متناهی هم باشد.

۵۶. درست؛ وقتی مجموعه بزرگ‌تر (یعنی B) متناهی باشد، زیرمجموعه‌های آن نیز متناهی هستند.

۵۷. درست؛ همه اعضای A را هم دارد، چون A نامتناهی است، پس B هم نامتناهی می‌شود.

۵۸. نادرست؛ ممکن است B نامتناهی هم باشد.

۵۹. نادرست؛ ممکن است B نامتناهی باشد ولی $B - A$ متناهی شود. (سعی کن برای خودت مثال بزنی.)

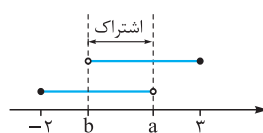
۶۰. $\frac{m-2}{3} \in [2, 6)$ یعنی $2 \leq \frac{m-2}{3} < 6$. حالا باید محدوده m را به دست آوریم. اول همه عبارت‌ها را در ۳ ضرب می‌کنیم، بعد هم با ۲ جمع می‌کنیم، ببینید:

$$2 \leq \frac{m-2}{3} < 6 \xrightarrow{\times 3} 6 \leq m-2 < 18 \xrightarrow{+2} 8 \leq m < 20$$

$$\Rightarrow m \in [8, 20)$$

پس m برابر با اعداد صحیح ۸، ۹، ۱۰، ۱۱، ۱۲ (یعنی ۱۲ عدد صحیح) می‌تواند باشد.

۶۱. به شکل زیر دقت کنید. $a < b$ نمی‌تواند باشد چون اشتراک دو بازه تهی می‌شود. از طرفی $b < -2$ هم نمی‌تواند باشد، چون آن وقت اشتراک را از -2 باید شروع کرد؛ پس چاره‌ای جز این که $-2 < b < a$ باشد، نمی‌ماند. شبیه همین استدلال $a < 3$ باید باشد (اگر $a \geq 3$ باشد، اشتراک تا ۳ میره نه صفر!) خلاصه این که اشتراک دو بازه داده شده برابر (b, a) می‌شود؛ پس می‌فهمیم که $a = 0$ و $b = -\frac{2}{3}$ باید باشد.



با جای گذاری داریم:

$$(a, -b] \cup (-3a, 2b+3) = \left(0, \frac{2}{3}\right] \cup \left(0, \frac{5}{3}\right) = \left(0, \frac{5}{3}\right)$$

۶۲. زیرمجموعه **۶۳. A نیستند.**

۶۴. فاقد عضو مشترک باشند.

$$\begin{cases} A = \{1, 2, 4, 7, 14, 28\} \\ B = \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\} \end{cases} \Rightarrow A \cap B = \{1, 2\}$$

۶۵. ۲ $\Rightarrow n(A \cap B) = 2$

۶۶. رقم آخر پلاک آن‌ها ۷، ۸ و ۹ است.

۶۷. افراد بیکار در سن اشتغال - نرخ بیکاری

۶۸. با استفاده از نمودار ون درمی‌یابیم که:

$$U \cap (A \cap B)' = \emptyset$$

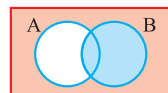
$$U \cap (A \subseteq U) = A \quad \text{چون } A \subseteq U$$

$$A' \quad \text{چون } A \subseteq U$$

$$\emptyset \quad \text{(چون هرچی تو } A \text{ هست تو } U \text{ هست)}$$

$$\emptyset' = U - \emptyset = U$$

۷۵. نادرست است؛ نمایش نمودار $(A - B)'$ به صورت مقابل است:



۷۶. درست است؛ $\{1, 2, 3, \dots, 9\} - \{2, 3, 5\} = \{1, 4, 6, 7, 8, 9\}$

$$(A - B)' = (A \cap B')' = A' \cup B$$

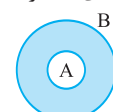
۷۷. درست است؛ چون مجموعه $(A - B) \cup (B - A)$ ، $8 + 10$ عضو دارد.

$$U = \{1, 2, 3, \dots, 9\}, A = \{3, 6, 9\}$$

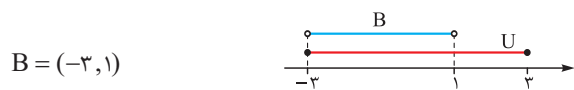
$$\Rightarrow A' = \{1, 2, 4, 5, 7, 8\} \Rightarrow n(A') = 6$$

دقت دارید که $n(A')$ همان تعداد عضوهای A' را نشان می‌دهد.

۸۰. ۳ اگر $A \subseteq B$ باشد، داریم:

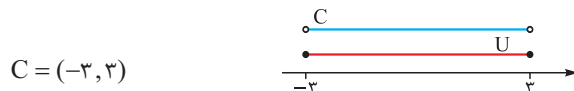


$$B - (A \cap B) \neq \emptyset$$



$$B = (-3, 1)$$

$$C' = U - C = \{-3, 3\} \text{ (فقط دو تا عدد می‌شه)}$$



$$C = (-3, 3)$$

$$D' = U - D = [-3, 0] \cup [1, 3]$$

$$D = (0, 1)$$



۱۰۲



$$A' = (1, +\infty), B' = (-\infty, 1] \text{ (اول A و B' به اشتراک اون‌ها)}$$

$$A' \cap B' = (1, +\infty) \cap (-\infty, 1] = (1, 1]$$

$$(A \cap B)' = (\emptyset)' = \mathbb{R} - \emptyset = \mathbb{R} \text{ (اول A \cap B به متمم)}$$

$$A - B = A \Rightarrow (A - B)' = A' = (1, +\infty)$$

۱۰۳ باید $A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ و $B = \{3, 6, 9\}$ توجه دارید که A و B زیرمجموعه مجموعه مرجع باشند.

$\{2, 4, 6, 8, 10\}$	A
$\{1, 3, 5, 7, 9\}$	A'
$\{2, 4, 6, 8, 10\}$	(A')
$(A')' = A$	نتیجه

۱۰۴

$\{1, 3, 5, 7, 9\}$	A'
$\{1, 2, 4, 5, 7, 8, 10\}$	B'
$\{2, 3, 4, 6, 8, 9, 10\}$	A ∪ B
$\{1, 5, 7\}$	(A ∪ B)'
$\{1, 5, 7\}$	A' ∩ B'
$(A \cup B)' = A' \cap B'$	نتیجه

۱۰۵

$\{1, 3, 5, 7, 9\}$	A'
$\{1, 2, 4, 5, 7, 8, 10\}$	B'
$\{6\}$	A ∩ B
$\{1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 10\}$	(A ∩ B)'
$\{1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 10\}$	A' ∪ B'
$(A \cap B)' = A' \cup B'$	نتیجه

۱۰۶

$\{1, 2, 4, 5, 7, 8, 10\}$	B'
$\{2, 4, 8, 10\}$	A - B
$\{2, 4, 8, 10\}$	A ∩ B'
$\{2, 4, 8, 10\}$	A - (A ∩ B)
$A - B = A \cap B' = A - (A \cap B)$	نتیجه

۱۰۷ نادرست؛ بستگی به مجموعه مرجع دارد. اگر U نامتناهی باشد، متمم

مجموعه متناهی، نامتناهی می‌شود، اما اگر U متناهی باشد، متمم مجموعه

متناهی، متناهی است، پس در حالت کلی نادرست است.

۱۰۸ درست؛ با توجه به توضیحات سؤال ۱۰۷ درست است.

۱۰۹ نادرست؛ ممکن است A و A' هر دو نامتناهی باشند. مثلاً اگر

A = N و U = Z باشد، A' هم نامتناهی است.

$$U = \{1, 2, 3, \dots, 9\}, A = \{2, 3, 5, 7\}, B = \{3, 6, 9\},$$

۸۸

$$C = \{1, 2, 4, 8\}$$

$$B' = U - B = \{1, 2, 4, 5, 7, 8\}, B' \cap C = \{1, 2, 4, 8\}$$

$$\Rightarrow A - (B' \cap C) = \{2, 3, 5, 7\} - \{1, 2, 4, 8\} = \{3, 5, 7\}$$

$$A' = U - A = \{1, 4, 6, 8, 9\}$$

۸۹

$$A' \cup C = \{1, 4, 6, 8, 9\} \cup \{1, 2, 4, 8\} = \{1, 2, 4, 6, 8, 9\}$$

$$B' - (A' \cup C) = \{1, 2, 4, 5, 7, 8\} - \{1, 2, 4, 6, 8, 9\} = \{5, 7\}$$

۹۰

U = {0, 1, -1, 2, -2} اعداد صحیحی که مربع آن‌ها بین ۱ تا ۵ باشد

A = {1, 2} = اعدادی از مجموعه مرجع که دو برابر آن‌ها بزرگ‌تر یا مساوی ۱ باشد.

$$B = \{-1, 0, 1, 2\}$$

دقت کنید که B باید زیرمجموعه مرجع باشد؛ پس ۳ را نباید در B بنویسیم.

شبه همین درست است که ۲، ۳، ۶ و ۱ شمارنده‌های ۶ هستند، ولی چون

C ⊆ U، پس فقط شمارنده‌هایی از ۶ را می‌نویسیم که در مرجع هستند؛ پس:

$$C = \{1, 2\}$$

$$A \cap B = \{1, 2\} \Rightarrow (A \cap B)' = U - (A \cap B) = \{0, -1, -2\}$$

$$B' = \{-2\} \Rightarrow B' \cup C = \{-2, 1, 2\} \Rightarrow (B' \cup C)' = \{0, -1\}$$

۹۱

$$\Rightarrow A - (B' \cup C)' = \{1, 2\} - \{0, -1\} = \{1, 2\}$$

$$A = \{2, 4, 6, \dots\} \Rightarrow A' = \{0, 1, 3, 5, \dots\}$$

۹۲

$$A = \{1, 2, 3, \dots\} \Rightarrow A' = \{0\}$$

۹۳

۹۴ چنین مجموعه‌ای وجود ندارد، چون A متناهی و مرجع نامتناهی است؛

پس A' حتماً نامتناهی می‌شود.

$$A' = U - A = \{-5, -4, \dots, 5\} - \{0, 1, 2\}$$

۹۵

$$= \{-5, -4, -3, -2, -1, 3, 4, 5\}$$

$$A' = U - A = \mathbb{Z} - \{0, 1, 2\} = \{\dots, -2, -1, 3, 4, 5, \dots\}$$

۹۶

$$A' = U - A = [0, 2] - \{0, 1, 2\} = (0, 1) \cup (1, 2)$$

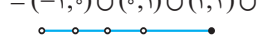
۹۷



$$A' = U - A = (-1, 4] - \{0, 1, 2\}$$

۹۸

$$= (-1, 0) \cup (0, 1) \cup (1, 2) \cup (2, 4]$$



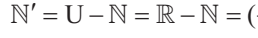
$$A' = U - A = \mathbb{R} - \{0, 1, 2\}$$

۹۹

$$= (-\infty, 0) \cup (0, 1) \cup (1, 2) \cup (2, +\infty)$$

$$N' = U - N = \mathbb{R} - N = (-\infty, 1) \cup (1, 2) \cup (2, 3) \cup \dots$$

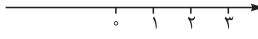
۱۰۰



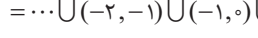
$$W' = U - W = \mathbb{R} - W = (-\infty, 0) \cup (0, 1) \cup (1, 2) \cup \dots$$



$$Z' = U - Z = \mathbb{R} - Z$$



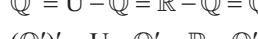
$$= \dots \cup (-2, -1) \cup (-1, 0) \cup (0, 1) \cup (1, 2) \cup \dots$$



$$Q' = U - Q = \mathbb{R} - Q = Q'$$

$$(Q')' = U - Q' = \mathbb{R} - Q' = Q$$

۱۰۱



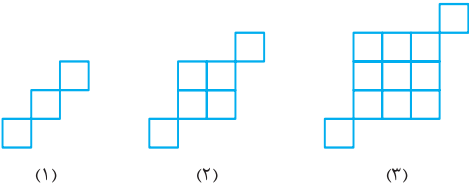
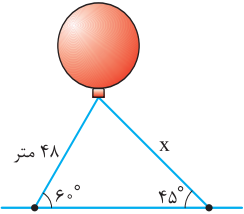
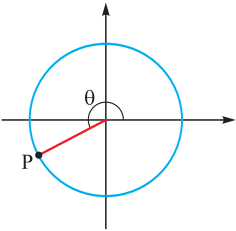
$$A = [-3, 0)$$



$$A' = U - A = [0, 3]$$

$$B' = U - B = \{-3\} \cup [1, 3]$$

آزمون‌های نوبت اوّل و دوم

نمونه امتحان نوبت اول		رشته ریاضی و فیزیک - علوم تجربی	ریاضی ۱	ردیف
امتحان شماره ۱	مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه	Kheilisabz.com	نمره	
۱	جاهای خالی را تکمیل کنید. الف) اگر مجموعه A نامتناهی و مجموعه B متناهی باشد، $A \cap B$ مجموعه‌ای است. ب) ریشه‌های دوم عدد $\frac{1}{9}$ برابر هستند. پ) کسر $\frac{x^2-1}{x^2-9}$ به ازای اعداد تعریف نشده است. ت) اگر $\sin \theta \tan \theta < 0$ باشد، θ در ربع‌های یا خواهد بود. ث) اگر در معادله $y = ax^2 + bx + c$ ، $a > 0$ باشد، رأس سهمی نقطهٔ سهمی است. ج) اگر $0 < a < 1$ باشد، $\sqrt{a}$ $\sqrt[3]{a}$ چ) $(\mathbb{W} - \mathbb{N})' = \dots\dots\dots$ (مجموعهٔ مرجع را $\mathbb{Z}$ در نظر بگیرید.)	۲		
۲	اگر $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 2\}$ و $B = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x+1 < 4\}$ باشد، الف) مجموعه‌های $A \cup B$ ، $A \cap B$ و $A - B$ را با بازه‌ها نمایش دهید. ب) اگر مجموعهٔ مرجع برابر $\mathbb{R}$ باشد، B' را به دست آورید.	۱/۵		
۳	جملهٔ عمومی الگوی زیر را به دست آورید. آیا این الگو خطی است؟ 	۵/۵		
۴	الف) در یک دنبالهٔ حسابی جملهٔ دهم برابر ۳۴ و جملهٔ هفدهم برابر ۱۰۴ است. جملهٔ صدم این دنباله را به دست آورید. ب) در یک دنبالهٔ هندسی، جملهٔ چهارم و جملهٔ هفتم به ترتیب برابر ۴۰ و ۳۲۰ هستند. جملهٔ عمومی این دنباله را به دست آورید.	۱/۵		
۵	یک بالن تبلیغاتی با دو طناب به صورت مقابل، به زمین بسته شده است. x را به دست آورید. 	۱		
۶	الف) اگر نقطهٔ $P(\frac{-1}{\sqrt{7}}, \frac{-\sqrt{6}}{\sqrt{7}})$ روی دایرهٔ مثلثاتی باشد، نسبت‌های مثلثاتی زاویهٔ θ را به دست آورید. ب) اگر $\sin \theta = \frac{1}{5}$ و θ در ربع دوم باشد، سایر نسبت‌های مثلثاتی زاویهٔ θ را به دست آورید. 	۱/۵		
۷	درستی اتحاد مثلثاتی مقابل را نشان دهید. $1 - \frac{\cos^2 \theta}{1 + \sin \theta} = \sin \theta$	۱		
۸	الف) عدد $\sqrt[4]{5^3 \sqrt{5}}$ را با توان‌های گویا نوشته و حاصل آن را با یک رادیکال نمایش دهید. ب) از معادلهٔ $\sqrt[3]{3} \sqrt{3} = \sqrt{3}$ ، x را به دست آورید.	۱/۵		

نمونه امتحان نوبت اول		رشته ریاضی و فیزیک - علوم تجربی	ریاضی ۱
ردیف	امتحان شماره ۱	مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه	Kheilisabz.com نمره
۹	الف) حاصل عبارت‌های زیر را با استفاده از اتحادها به دست آورید. $(\frac{x}{y} + 2y)^3 =$ ب) عبارت $3x^2 + 11x - 4$ را تجزیه کنید.	$(2a - 3)(2a + 3)(16a^4 + 36a^2 + 81) =$	۱/۵
۱۰	ابتدا مخرج کسر را گویا و سپس حاصل را به صورت یک کسر بنویسید.	$A = \frac{1}{\sqrt{x}-1} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}-1}$	۱
۱۱	معادله‌های درجه دوم را با روش خواسته شده حل کنید. الف) $x^2 - 3x + 1 = 0$ (روش مربع کامل) ب) $3x^2 - 7x + 4 = 0$ (روش کلی یا Δ)		۱/۵
۱۲	الف) مختصات رأس سهمی $y = x^2 - 4x + 3$ را به دست آورید. ب) سهمی را رسم کنید.		۱
۱۳	عبارت مقابل را تعیین علامت کنید.	$A = \frac{(1+x)^5(x^2-x+3)}{(x^2-6x+5)(x-3)^4}$	۱/۵
۱۴	نامعادله مقابل را حل کرده و جواب را با استفاده از بازه‌ها نمایش دهید.	$\frac{x}{x-1} \leq \frac{x+1}{x-2}$	۱
۱۵	حدود m را چنان تعیین کنید که عبارت $A = x^2 - 3mx + 1$ همواره مثبت باشد.		۱
۱۶	نامعادله $3 < \frac{x+1}{y} + 3 $ را حل کنید.		۱
	جمع نمرات		۲۰

