مرورنامه ۴

روابط بین ریشه‌ها و تشکیل معادلهٔ درجه ۲

پیش‌نیاز آزمون: ۶

رابطه‌های بین ریشه‌های معادلهٔ درجه ۲

۱ در معادلهٔ $ax^2+bx+c=0$، وقتی با فرض $a\neq 0$ و $\Delta>0$، معادله دارای دو ریشهٔ α و β است، روابط زیر را بین ریشه‌ها داریم:

رابطه‌های اصلی: $\boxed{S=\alpha+\beta=-\frac{b}{a}}$, $\boxed{P=\alpha\beta=\frac{c}{a}}$

۲ رابطه‌های معروف:

۱	$\alpha^2+\beta^2=S^2-2P$	۲	$\alpha^3+\beta^3=S^3-3SP$
۳	$\lvert\alpha-\beta\rvert=\sqrt{S^2-4P}=\frac{\sqrt{\Delta}}{\lvert a\rvert}$	۴	$\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}=\sqrt{S+2\sqrt{P}}$ $(\alpha,\beta>0)$
۵	$(\alpha,\beta\neq 0)\ \frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=\frac{S}{P}$	۶	$\alpha\beta^2+\alpha^2\beta=SP$

۳ تستی که یک رابطه بین ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ دوم داده است: در چنین سؤالاتی رابطهٔ داده‌شده بین α و β **را از روی فرض سؤال نوشته و در کنارش** $\alpha+\beta=-\frac{b}{a}$ **و** $\alpha\beta=\frac{c}{a}$ **را هم یادداشت کنید. حالا با حل دستگاهِ حاصل از همهٔ این‌ها، پارامترهای مطلوب را پیدا کنید...**

۴ اگر $\alpha=k\beta$ **باشد، آن‌وقت:** $\frac{b^2}{ac}=\frac{(k+1)^2}{k}$

۵ هر رابطهٔ غیرمعروفی بین ریشه‌ها خواسته شد: در صورت نیاز مخرج‌مشترک عبارت را به دست آورید، ساده کنید و در صورت نیاز با فاکتورگیری یا به توان رساندن به عبارت‌های معروفِ $\alpha+\beta$ و $\alpha\beta$ برسید...

نگاه کن:

$$(\alpha,\beta>0):\frac{1}{\sqrt{\alpha}}+\frac{1}{\sqrt{\beta}}=\frac{\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}}{\sqrt{\alpha}\sqrt{\beta}}\xrightarrow{\text{طبق ۴}}\frac{\sqrt{S+2\sqrt{P}}}{\sqrt{\alpha\beta}}=\frac{\sqrt{S+2\sqrt{P}}}{\sqrt{P}}$$

۶ رابطهٔ غیرمتقارنی بین ریشه‌ها خواسته شده: در این مدل از تست‌ها α و β ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ دومِ $ax^2+bx+c=0$ هستند و رابطهٔ غیرمتقارنی بین α و β خواسته شده؛ مثل $\alpha^2+3\beta$ و...

کافی است توجه کنید که هم α و هم β در معادلهٔ درجهٔ دوم صدق می‌کنند و از این رابطه می‌توانید برای جای‌گذاری در عبارتی که تست خواسته استفاده کنید تا آن را به رابطه‌ای متقارن تبدیل کنید...

ببین:

$$x^2-4x-9=0\xrightarrow[\text{ریشه‌ها}:\alpha\text{و}\beta]{\alpha^2+4\beta=?}\alpha^2-4\alpha-9=0\Rightarrow\alpha^2=4\alpha+9$$

α در معادلهٔ اصلی صدق می‌کند

$$\xrightarrow{\text{بذار در عبارت خواسته شده}}\alpha^2+4\beta=(4\alpha+9)+4\beta=4(\alpha+\beta)+9$$

$$=4S+9\xrightarrow{S=-\frac{b}{a}=4}4S+9=16+9=25$$

علامت S و P

۷ در معادلهٔ $ax^2+bx+c=0$:

۱	$\Delta>0$ و	$S<0\ ,\ P>0$	معادله دو ریشهٔ منفی دارد.
۲		$S>0\ ,\ P>0$	معادله دو ریشهٔ مثبت دارد.
۳	$P<0$: سهمی از هر چهار ناحیه می‌گذرد.		معادله دو ریشهٔ مختلف‌العلامت دارد.

تشکیل معادلهٔ درجه ۲

۸ اگر مجموع دو ریشهٔ معادله‌ای S و ضربِ ریشه‌هایش P باشد، معادلهٔ درجهٔ دومش می‌شود: $\boxed{x^2-Sx+P=0}$

۹ اگر در سؤالی با دوتا معادلهٔ درجهٔ دوم مواجه بودید، آن‌وقت: S و P هر دو را برحسب ریشه‌هایشان بنویسید و حاصل هر کدام را پیدا کنید و بعد سعی کنید از رابطه‌ای که تست بین دو معادله یا ریشه‌های آن‌ها داده استفاده کنید. (مبحث معادلهٔ درجه ۲ کتاب جامع را ببینید...)

مسئله‌های عملی از معادلهٔ درجه ۲

۱۰ در یک تورنمنت با حضور n تیم که هر تیم با دیگران فقط یک بازی انجام می‌دهد:

$$\text{تعداد بازی‌ها}=\frac{n(n-1)}{2}$$

۱۱ اگر چهار مربع کوچک به ضلع k از گوشه‌های مربعی جدا کنیم و بعد با تازدن شکل حاصل، یک قوطی به حجم V بسازیم، آن‌وقت:

$$\text{ضلع مربع اصلی}=\sqrt{\frac{V}{k}}+2k$$

۱۲ اگر با یک رشته سیم به طول ℓ، مستطیلی به مساحت S بسازیم؛ آن‌وقت:

$$\text{یک ضلع مستطیل}=\frac{\ell+\sqrt{\ell^2-16S}}{4}$$

کاربردهای معادلهٔ درجه ۲

۱۳ اگر در معادله‌ای، یک عبارتِ تکراری داشتیم که یک‌بار با توان ۱ و یک‌بار با توان ۲ دیده می‌شد، آن را t می‌گیریم و معادلهٔ درجه ۲ حاصل را برحسب t حل می‌کنیم. بعد که t به‌دست آمد، از روی آن، مقدار x را پیدا می‌کنیم. اگر t شرطی داشت، جواب‌های حاصل را بررسی می‌کنیم که قابل قبول هستند یا نه؛ در این مدل از تست‌ها **یک جمله مجذور جملهٔ دیگری است**. این معادله‌ها با روش تغییر متغیر تبدیل به یک معادلهٔ درجه ۲ می‌شوند...

ببین:

$$(x^2+x)^2+3(x^2+x)-4=0\xrightarrow{x^2+x=t}t^2+3t-4=0\xrightarrow{\text{حل}}$$

$$ax^4+bx^2+c=0\xrightarrow[t\geq 0]{x^2=t}at^2+bt+c=0\xrightarrow{\text{حل}}$$

۱۴ بیشترین و کمترین مقدار عبارت: در این مدل از سؤالات رابطه‌ای بین دوتا متغیر داده می‌شود (این متغیرها معمولاً کاربردی و ملموس‌اند، مثل طول، مساحت، زمان، حجم و...) و بعد قرار است عبارتی که موردنظر سؤال است بیشترین مقدار (یا کمترین مقدار) شود. خب شما از رابطهٔ اولیهٔ داده‌شده، یکی از متغیرها را برحسب دیگری پیدا می‌کنید و در عبارتِ مطلوبِ سؤال قرار می‌دهید. اگر عبارت حاصل برحسبِ یک متغیر، درجهٔ دوم شود، می‌توانیم بیشترین مقدار یا کمترین مقدارش را پیدا کنیم...

توجه کنید متغیرهای حاضر در زندگی روزمره، مثبت‌اند...

مدل ریاضی:

$$P=ax^2+bx+c\begin{cases}\xrightarrow{a>0}\text{مینیممِ عبارت}\\\xrightarrow{a<0}\text{ماکزیممِ عبارت}\end{cases}\rightarrow-\frac{\Delta}{4a}$$

آزمون ۶

مبحثی

روابط بین ریشه‌ها و تشکیل معادلهٔ درجه ۲

کتاب درسی صفحهٔ ۱۱ تا ۱۴ (ریاضی ۲)
پاسخ تشریحی صفحهٔ ۲۵۵

تعداد سؤالات: ۱۰ سؤال | زمان پیشنهادی: ۲۰ دقیقه

محل انجام محاسبات

۱. اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ $x^2-3x+1=0$ باشند، مقدار عبارت $\alpha^3+\frac{1}{\alpha^2}-\beta^2+3\beta$ کدام است؟

۱) ۱۷ ۲) ۱۸ ۳) ۱۹ ۴) ۲۰

۲. اگر به ریشه‌های معادلهٔ $x^2-mx+3=0$، $\frac{m}{2}$ واحد اضافه کنیم، به مجموع مربعات ریشه‌ها $6m$ واحد اضافه می‌شود. m کدام است؟ $(m\neq 0)$

۱) ۱ ۲) ۴ ۳) ۸ ۴) ۶

۳. در معادلهٔ درجهٔ دوم $x^2+2x-1=0$، حاصل $x_1^4+4x_2^2-4x_2$ چه‌قدر است؟ (x_1 و x_2 ریشه‌های معادله هستند.)

۱) ۳۲ ۲) ۳۳ ۳) ۳۱ ۴) ۳۴

۴. اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ دوم $kx^2-x=\frac{k}{3}$ بوده و $27(\alpha\beta^3+\alpha^3\beta)+7=0$ باشد، مقدار $\frac{\alpha^2}{\beta}+\frac{\beta^2}{\alpha}$ کدام است؟ (قدرمطلق ریشهٔ مثبت بزرگ‌تر است.)

۱) $\frac{10}{9}$ ۲) $-\frac{10}{9}$ ۳) $-\frac{8}{9}$ ۴) $\frac{8}{9}$

۵. اگر بین ریشه‌های معادلهٔ $2x^2-8x+m-2=0$ رابطهٔ $x_1+4x_2=19$ برقرار باشد، آن‌گاه کدام گزینه در مورد ریشه‌های معادلهٔ $x^2+(m+2)x+1-m=0$ درست است؟

۱) دو ریشهٔ مثبت دارد.
۲) دو ریشهٔ منفی دارد.
۳) ریشهٔ مضاعف مثبت دارد.
۴) دو ریشهٔ مختلف‌العلامت دارد.

۶. اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ $x^2+4=6x$ بوده و $A=\frac{\sqrt{\alpha}}{\beta}+\frac{\sqrt{\beta}}{\alpha}$ و $B=\alpha^2-6\beta+4$ باشد، $\frac{B}{A}$ کدام است؟

۱) $2\sqrt{2}$ ۲) $4\sqrt{2}$ ۳) $6\sqrt{2}$ ۴) $8\sqrt{2}$

۷. هرگاه α و β ریشه‌های معادلهٔ $x^2-3x+1=0$ باشند، حاصل عبارت $\alpha^4+9\beta^2-6\beta$ کدام است؟

۱) ۴۶ ۲) ۸۲ ۳) ۴۵ ۴) ۸۱

۸. اگر در معادلهٔ $3x^2-mx+n=0$، بین اعداد m و n رابطهٔ $2m+n=-12$ برقرار باشد، یکی از ریشه‌های معادله کدام گزینه است؟

۱) $-n$ ۲) $-\frac{n}{2}$ ۳) $-\frac{n}{3}$ ۴) $-\frac{n}{6}$

۹. جواب‌های معادلهٔ $2x^2+(a-2)x+b+1=0$ از مربع جواب‌های معادلهٔ $x^2-2x-6=0$ دو واحد کمتر است. حاصل $[\sin(\frac{b}{a}\pi)]$ کدام است؟ ([ ] نماد جزءصحیح است.)

۱) ۱ ۲) ۱− ۳) صفر ۴) ۲−

۱۰. ریشه‌های کدام معادله از دو برابر عکس ریشه‌های معادلهٔ $(x^2-x)^2-x^2+x=56$ یک واحد بیشتر است؟

۱) $4x^2-7x=1$ ۲) $4x^2+7x=1$ ۳) $4x^2-1=7x$ ۴) $4x^2+1=7x$

نتیجهٔ آزمون

درست | غلط | نزده

درصد

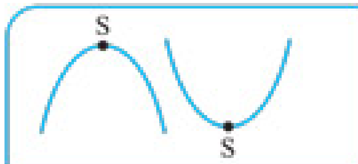
مرورنامه ۵

سهمی و تابع درجه ۲

پیش‌نیاز آزمون: ۷

ویژگی‌های سهمی

۱ وقتی معادلهٔ سهمی به‌صورت $y=ax^2+bx+c$ داده شده باشد، در این‌صورت:

مختصات رأس	$S(-\frac{b}{2a},-\frac{\Delta}{4a})$	
نقطهٔ برخورد با محور y ها	$A(0,c)$	
وضعیت سهمی و محور x ها	اگر $\Delta>0$ باشد، محور x ها را در دو نقطه قطع می‌کند.	
	اگر $\Delta=0$ باشد، بر محور x ها مماس است.	
	اگر $\Delta<0$ باشد، محور x ها را قطع نمی‌کند.	
تأثیر علامتِ a	$a>0$، یعنی سهمی رو به بالا بوده و مینیمم دارد.	
	$a<0$، یعنی سهمی رو به پایین بوده و ماکزیمم دارد.	
معادلهٔ محور تقارن	$x=-\frac{b}{2a}$	

۲ وقتی اتحادِ مربع دوجمله‌ای در معادلهٔ سهمی به فرم بازنشده دیده می‌شود، بهتر است اتحاد را باز کرده و آن را ساده کنیم.

ببین:

$y=(2x-1)^2-1 \xrightarrow{\text{اتحاد مربع دوجمله‌ای}} y=4x^2-4x+1-1$

$\xrightarrow{\text{ساده‌کن}} y=4x^2-4x \xrightarrow{\text{ویژگی‌ها}}$

تیزبازی: اگر ضرایب حاضر درمعادلهٔ درجه ۲، کسری یا بزرگ باشند و محاسبهٔ $-\frac{\Delta}{4a}$ به عنوانِ عرضِ رأس سهمی سخت باشد و یا حتی جای‌گذاری $x=-\frac{b}{2a}$ در معادله برای پیداکردن عرض مشکل شود، این کار را بکنید: در سهمی $y=ax^2+bx+c$ وقتی طول سهمی را پیدا کردید $x=-\frac{b}{2a}$، آن را s بنامید و بعد $\boxed{y=c-as^2 : \text{عرض‌رأس‌سهمی}}$

ببین:

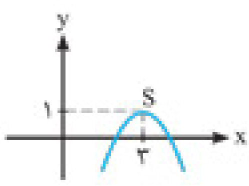
$y=2x^2-\frac{x}{2}+\frac{1}{4} \xrightarrow{\text{طول رأس}} x=-\frac{-\frac{1}{2}}{2(2)}=\frac{1}{8}=S$

$\xrightarrow{\text{عرض رأس}} y=\frac{1}{4}-2(\frac{1}{64})=\frac{7}{32}$

نوشتن معادلهٔ سهمی

۳ اگر مختصاتِ رأس سهمی را به فرم $S(h,k)$ داده باشند، معادلهٔ سهمی را به‌صورت کلیِ $\boxed{y=a(x-h)^2+k}$ بنویسید و سعی کنید از اطلاعاتِ داده‌شده در تست، a را پیدا کنید...

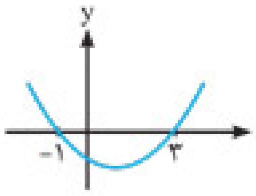
ببین:



$\xrightarrow[\text{معادلهٔ سهمی}]{S(3,1)} y=a(x-3)^2+1,\ a<0$

۴ اگر نقطه‌های تلاقیِ سهمی با محور x ها (صفرهای سهمی) به فرم x_1 و x_2 داده شده باشند، معادلهٔ سهمی را به‌صورت کلیِ $\boxed{y=a(x-x_1)(x-x_2)}$ بنویسید و سعی کنید از اطلاعات داده‌شده در تست، a را پیدا کنید...

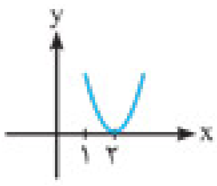
ببین:



$\xrightarrow[\text{معادلهٔ سهمی}]{x_1=-1,\ x_2=3} y=a(x+1)(x-3),\ a>0$

۵ اگر سهمی در نقطهٔ $(x_0,0)$ بر محور x ها مماس شده باشد، معادلهٔ سهمی را به‌صورت کلیِ $y=a(x-x_0)^2$ بنویسید و سعی کنید از داده‌های موجود در تست، a را پیدا کنید...

ببین:



$\xrightarrow[\text{معادلهٔ سهمی}]{\text{ریشهٔ مضاعف}=2} y=a(x-2)^2,\ a>0$

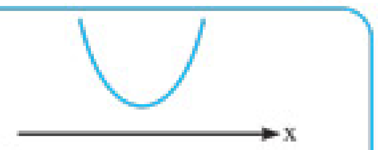
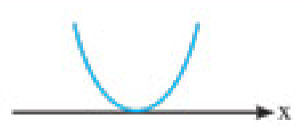
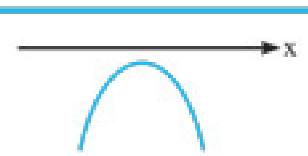
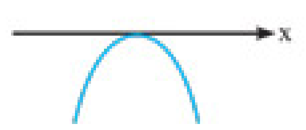
۶ اگر سهمی به معادلهٔ $y=ax^2+bx+c$ بر خط به معادلهٔ $y=mx+h$ مماس باشد، y ها را برابر قرار دهید، این‌طوری: $ax^2+bx+c=mx+h$ و بعد ساده کرده و Δ ی معادلهٔ نهایی را برابر صفر بگذارید...

نگاه کن: $y=2x^2+mx+6 \xrightarrow{\text{مماس بر خط } y=x} 2x^2+mx+6=x$

$\xrightarrow{\text{مرتب‌کن}} 2x^2+(m-1)x+6=0$

$\xrightarrow{\Delta=0} (m-1)^2-48=0 \xrightarrow{\text{حل}}$

وضعیت سهمی و محور xها

	
همواره بالای محور $a>0,\Delta<0$	بالای محور و مماس بر آن $a>0,\Delta=0$
	
همواره پایین محور $a<0,\Delta<0$	پایین محور و مماس بر آن $a<0,\Delta=0$

۷ اگر سهمی محور x ها را در دو نقطه قطع کند، در آن‌صورت $\Delta>0$...

۸ وقتی علامت چندجمله‌ای درجهٔ دوم همواره ثابت است ...!

$ax^2+bx+c<0$	$ax^2+bx+c>0$	$ax^2+bx+c\le 0$	$ax^2+bx+c\ge 0$
$\Delta<0,a<0$	$\Delta<0,a>0$	$\Delta\le 0,a<0$	$\Delta\le 0,a>0$

یادت باشه: علامتِ ثابتِ چندجمله‌ای درجهٔ دوم، یعنی Δ مثبت نیست.

آزمون
۷
مبحثی
سهمی و تابع درجه ۲

کتاب درسی صفحهٔ ۱۵ تا ۱۸ (ریاضی ۲)
پاسخ تشریحی صفحهٔ ۲۵۶

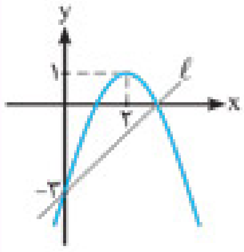
تعداد سؤالات: ۱۰ سؤال | زمان پیشنهادی: ۲۰ دقیقه

محل انجام محاسبات

۱. α و β صفرهای سهمی $y=3x^2+(1-2\alpha)x-2\beta$ هستند. این سهمی از کدام ناحیهٔ مختصات نمی‌گذرد؟

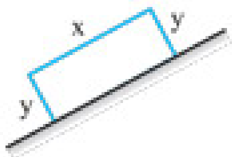
۱) اول ۲) دوم ۳) سوم ۴) چهارم

۲. با توجه به شکل، محل برخورد محور تقارن سهمی و خط ℓ چه فاصله‌ای تا مبدأ دارد؟



۱) $\sqrt{5}$ ۲) $2\sqrt{5}$ ۳) $\frac{\sqrt{5}}{5}$ ۴) $3\sqrt{5}$

۳. قرار است در کنار یک رودخانه، زمینی مستطیل‌شکل را نرده‌کشی کنیم (مطابق شکل). اگر فقط هزینهٔ نصب ۷۲ متر نرده را داشته باشیم، بیشترین مساحت ممکن برای این زمین چه‌قدر خواهد بود؟

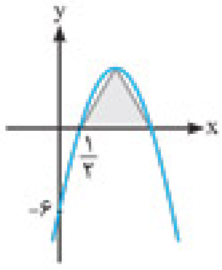


۱) ۳۲۴ ۲) ۶۴۸ ۳) ۵۲۴ ۴) ۱۰۴۸

۴. نمودار سهمی $y=ax^2+bx+c$ محور yها را در نقطه‌ای به عرض k و محور xها را در نقاطی به طول $1-k$ و k قطع کرده و بیشترین مقدار سهمی $\frac{9}{4}$ است. k کدام می‌تواند باشد؟

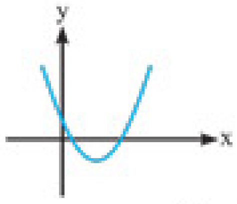
۱) $\frac{4}{5}$ ۲) $\frac{2}{5}$ ۳) $\frac{5}{2}$ ۴) $\frac{5}{4}$

۵. نمودار سهمی $y=ax^2-(6a-1)x+b$ به‌صورت مقابل است. مساحت ناحیهٔ رنگی کدام است؟



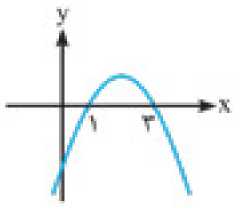
۱) $\frac{1331}{16}$ ۲) $\frac{1331}{32}$ ۳) $\frac{1573}{32}$ ۴) $\frac{1573}{16}$

۶. نمودار تابع $y=(m+4)x^2-4x+m+1$ به‌صورت مقابل است. چند مقدار صحیح برای m وجود دارد؟



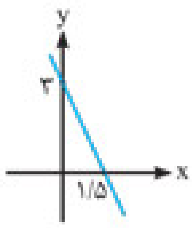
۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۷. شکل مقابل، نمودار تابع $f(x)=ax^2+bx+c$ است. اگر بیشترین مقدار تابع $-2a-9$ باشد، $f(\frac{b}{9})$ کدام است؟



۱) -27 ۲) ۹ ۳) -9 ۴) ۲۷

۸. نقطهٔ ماکزیمم تابع $y=-2x^2+mx-m-1$ روی خط مقابل است. مجموع مقادیر ممکن برای m کدام است؟



۱) ۳ ۲) ۸ ۳) ۲ ۴) ۴

۹. رأس سهمی $y=(3m+4)x^2-3(m-1)x+9$ در ناحیهٔ دوم قرار دارد. بیشترین طول بازهٔ قابل قبول برای m کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۰. رأس‌های سهمی‌های $f(x)=3x^2+bx+c$ و $g(x)=-x^2+6x+d$ بر هم منطبق‌اند. اگر خط $y=x+d$ بر نمودار تابع $y=(c-1)x^2+(b+3)x-1$ در ربع چهارم مماس باشد، مقدار d کدام می‌تواند باشد؟

۱) -7 ۲) -33 ۳) ۳ ۴) -29

نتیجهٔ آزمون

درست | غلط | نزده

درصد

جامع فصل

آزمون ۸

معادله و تابع درجه ۲

کتاب درسی صفحهٔ ۱۱ تا ۱۸ (ریاضی ۲)
پاسخ تشریحی صفحهٔ ۲۵۷

تعداد سؤالات: ۱۰ سؤال — زمان پیشنهادی: ۲۰ دقیقه

محل انجام محاسبات

۱. اگر α و β جواب‌های معادلهٔ $x^2+x-3=0$ باشند، مجموعهٔ جواب‌های کدام معادله به‌صورت $\{2+\frac{\beta}{\alpha+1}, 2+\frac{\alpha}{\beta+1}\}$ است؟

۱) $x^2-2x=1$ ۲) $x^2+2x=1$ ۳) $x^2+2x+1=0$ ۴) $x^2-2x+1=0$

۲. α و β ریشه‌های معادلهٔ $x^2+ax+b=0$ هستند و $\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}=\sqrt{5}$ و $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=3$. معادلهٔ درجهٔ دومی که ریشه‌هایش $(\alpha-\beta)^2$ و $(\alpha+\beta)^2$ باشند، کدام است؟

۱) $x^2-14x+45=0$ ۲) $x^2-14x=45$ ۳) $x^2+14x+45=0$ ۴) $x^2+14x=45$

۳. به ازای کدام مقدار a، نمودار تابع $y=(1-a)x^2+2\sqrt{6}x-a$ همواره پایین محور x هاست؟

۱) $a>3$ یا $a<-2$ ۲) $-2<a<3$ ۳) $a>3$ ۴) $\varnothing$

۴. راکتی که به‌طور عمودی پرتاب شده، t ثانیه پس از شلیک در ارتفاع h متری از سطح زمین قرار می‌گیرد که معادلهٔ آن از رابطهٔ $h(t)=100t-5t^2$ به دست می‌آید. ارتفاع نقطهٔ اوج راکت و مدت زمانی که طول می‌کشد تا راکت دوباره به سطح زمین برگردد به ترتیب کدام‌اند؟

۱) $500\,m$ و $10\,s$ ۲) $1500\,m$ و $20\,s$ ۳) $500\,m$ و $20\,s$ ۴) $1500\,m$ و $10\,s$

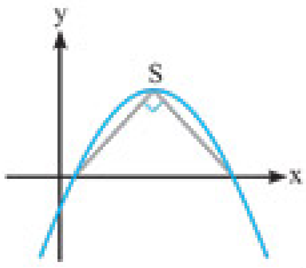
۵. اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ $x^2-3x+m=0$ بوده و $3^{2\sqrt{\alpha}}\times 9^{\sqrt{\beta}}=81$ باشد، آن‌گاه تفاضل ریشه‌های معادلهٔ $x^2-(4m^2-1)x=1$ کدام است؟

۱) $\frac{\sqrt{73}}{2}$ ۲) $\frac{\sqrt{73}}{4}$ ۳) $\frac{\sqrt{73}}{8}$ ۴) $\sqrt{73}$

۶. α و β ریشه‌های معادلهٔ $x^2+(1-3m)x+2=m$ هستند و $(\alpha-\beta)^2$ دارای مینیمم‌مقدار ممکن است. در این‌صورت، محور تقارن سهمی $y=x^2+(x-m)^2$، خط $2x+3y=6$ را در نقطه‌ای با کدام عرض قطع می‌کند؟

۱) $\frac{53}{3}$ ۲) $\frac{53}{9}$ ۳) $\frac{1}{18}$ ۴) $\frac{53}{27}$

۷. در سهمی مقابل با رأسِ S، مقدار Δ کدام است؟

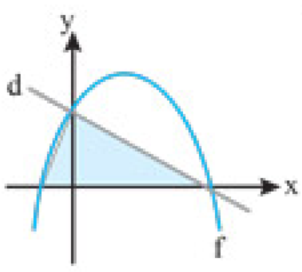


۱) ۱
۲) ۴
۳) ۱۶
۴) ۹

۸. به ازای کدام مقادیر a، سهمی به معادلهٔ $y=ax^2-(a+2)x$ از ناحیهٔ اول محورهای مختصات نمی‌گذرد؟

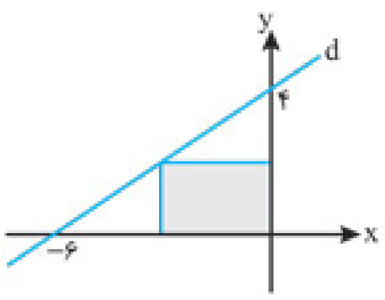
۱) $a\le 2$ ۲) $a>0$ ۳) $a\le -2$ ۴) $-2\le a<0$

۹. سهمی زیر، نمودار تابع $f(x)=-x^2+ax+b$ است. اگر معادلهٔ خط d به‌صورت $y=2-x$ باشد، مساحت مثلث رنگی کدام است؟



۱) ۳ ۲) ۵
۳) ۶ ۴) ۱۰

۱۰. مستطیلی بین خط d و محورهای مختصات مطابق شکل زیر محصور شده است. کمترین مقدار مساحت این مستطیل کدام است؟



۱) ۴ ۲) ۶
۳) ۸ ۴) ۹

نتیجهٔ آزمون
درست غلط نزده
درصد

یک گام تا صد

آزمون ۹

معادله و تابع درجه ۲

کتاب درسی صفحهٔ ۱۱ تا ۱۸ (ریاضی ۲)
پاسخ تشریحی صفحهٔ ۲۵۹

تعداد سؤالات: ۱۰ سؤال | زمان پیشنهادی: ۲۰ دقیقه

محل انجام محاسبات

۱. اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ دوم $2x^2-3x-2=0$ باشند، مقدار $\frac{\beta^4-\alpha^2}{\beta}$ چه عددی است؟

۱) $\frac{51}{8}$ ۲) $\frac{63}{8}$ ۳) $\frac{65}{8}$ ۴) $\frac{53}{8}$

۲. اگر α و 2β ریشه‌های معادلهٔ $x^2+ax+b=0$ باشند و ۲ و β ریشه‌های معادلهٔ $3x^2-ax-18=0$ باشند، مقدار α کدام است؟

۱) ۹ ۲) ۶ ۳) ۱۲ ۴) ۸

۳. نقاط برخورد سهمی $f(x)=mx^2+(m-1)x+1-2m$ با محورهای مختصات رئوس یک مثلث با مساحت $\frac{7}{2}$ هستند. طول رأس سهمی کدام می‌تواند باشد؟

۱) $-\frac{1}{6}$ ۲) $\frac{3}{2}$ ۳) $-\frac{5}{2}$ ۴) $\frac{1}{3}$

۴. اگر x_1 و x_2 ریشه‌های معادلهٔ $x^2+2x-4=0$ باشند، حاصل $P=\frac{x_1}{x_2(2+x_2)}+\frac{x_2}{x_1(2+x_1)}$ کدام است؟

۱) ۴ ۲) -4 ۳) $-\frac{1}{2}$ ۴) $\frac{1}{2}$

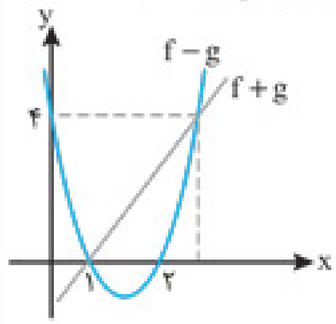
۵. اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ $x^2+x-1=0$ باشند، به ازای کدام مقدار مثبت k رابطهٔ $(\alpha-k)(\beta-k)(\alpha+k)(\beta+k)=5$ برقرار است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) $\sqrt{2}$ ۴) $\sqrt{3}$

۶. α و β صفرهای معادلهٔ $ax^3-7x^2-bx-9=0$ هستند، به‌طوری که $\alpha+\beta=5$ و $\alpha^2+\beta^2=31$. مقدار b کدام است؟

۱) -21 ۲) ۹ ۳) ۲۱ ۴) -9

۷. فرض کنید f و g دو سهمی باشند، به‌طوری‌که نمودار $f+g$ و $f-g$ به‌صورت زیر باشد. طول رأس سهمی g کدام است؟

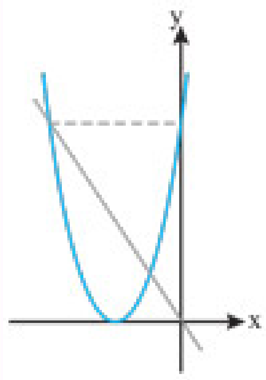


۱) $\frac{5}{2}$
۲) ۳
۳) $\frac{3}{2}$
۴) ۲

۸. فرض کنید α و β ریشه‌های معادلهٔ $x^2+x-3m=0$ و α و γ ریشه‌های معادلهٔ $x^2-3x+5m=0$ باشند. ریشه‌های کدام معادلهٔ زیر β و γ است؟ $(\alpha\neq0)$

۱) $4x^2+4x-15=0$ ۲) $4x^2-4x-7=0$
۳) $4x^2-4x-15=0$ ۴) $4x^2+4x-7=0$

۹. نمودار سهمی $f(x)=ax^2+bx+c$ و خط $y=-4x$ داده شده است. مقدار $ac+b$ کدام است؟



۱) ۴۸
۲) ۹۶
۳) ۸۰
۴) ۷۲

۱۰. هرگاه α و β جواب‌های معادلهٔ $x^2-9x+1=0$ باشند، مقدار $\sqrt{\frac{\alpha^2+1}{\beta}}+\sqrt{\frac{\beta^2+1}{\alpha}}$ کدام است؟

۱) ۱۸ ۲) ۹ ۳) ۲۷ ۴) $9\sqrt{3}$

نتیجهٔ آزمون

درست □ غلط □ نزده □

درصد □

۹ گزینهٔ ۳ (ریاضی ۲، صفرهای تابع درجه ۲)

$$2x^2 - 3x - 7 = 0 \xrightarrow{\text{فاکتور}} 2(x^2 - \frac{3}{2}x) - 7 = 0 \Rightarrow x^2 - \frac{3}{2}x = \frac{7}{2}$$

$$\xrightarrow{\text{ایجاد مربع کامل}} x^2 - \frac{3}{2}x + (\frac{3}{4})^2 = \frac{7}{2} + (\frac{3}{4})^2 \Rightarrow (x-\frac{3}{4})^2 = \frac{7}{2}+\frac{9}{16}$$

۱۰ گزینهٔ ۳ (ریاضی ۲، روش تغییر متغیر برای حل معادله)

$$\frac{x}{x+1} = t \xrightarrow{\text{جای‌گذاری}} 92t^2 - 167t + 75 = 0 \xrightarrow{\text{جمع ضرایب صفره}} t=1 \text{ یا } t = \frac{75}{92}$$

① $\frac{x}{x+1}=1 \Rightarrow x = x+1$ ✗

② $\frac{x}{x+1} = \frac{75}{92} \Rightarrow 92x = 75x+75 \Rightarrow 17x = 75$

$$\Rightarrow x = \frac{75}{17} = \frac{a}{b} \Rightarrow a - 5b = 75 - \underbrace{5(17)}_{85} = -10$$

آزمون ۶ — روابط بین ریشه‌ها و تشکیل معادلهٔ درجه ۲

۱ گزینهٔ ۳ (ریاضی ۲، مجموع و حاصل‌ضرب ریشه‌های معادلهٔ درجه ۲)

$$x^2 - 3x + 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} S = \alpha+\beta = -\frac{b}{a} = 3 \\ P = \alpha\beta = \frac{c}{a} = 1 \Rightarrow \beta = \frac{1}{\alpha}\end{cases}$$

$$\Rightarrow \alpha^3 + \frac{1}{\alpha^3} = \alpha^3+\beta^3 = S^3 - 3PS$$

$$= 27 - 3\times1\times3 = 27-9 = 18 \quad ①$$

β ریشهٔ معادله است؛ پس در معادله صدق می‌کند:

$$\beta^2 - 3\beta + 1 = 0 \Rightarrow 1 = -\beta^2 + 3\beta \quad ②$$

$$\xrightarrow{①,②} \alpha^3 + \frac{1}{\alpha^3} - \beta^2 + 3\beta = 18+1 = 19$$

۲ گزینهٔ ۲ (ریاضی ۲، مجموع و حاصل‌ضرب ریشه‌های معادلهٔ درجه ۲)

$$x^2 - mx + 3 = 0 \Rightarrow S = \alpha+\beta = m \,,\, P = \alpha\beta = 3$$

$$\Rightarrow \alpha^2+\beta^2 = S^2 - 2P = m^2 - 6$$

حالا به ریشه‌ها $\frac{m}{2}$ اضافه می‌کنیم:

$$\alpha' = \alpha + \frac{m}{2} \,,\, \beta' = \beta+\frac{m}{2}$$

$$S' = \alpha'+\beta' = (\alpha+\beta) + m = m+m = 2m$$

$$P' = \alpha'\beta' = (\alpha+\frac{m}{2})(\beta+\frac{m}{2}) = \underbrace{\alpha\beta}_{3} + \frac{m}{2}\underbrace{(\alpha+\beta)}_{m} + \frac{m^2}{4} = \frac{3m^2}{4}+3$$

پس:

$$\alpha'^2+\beta'^2 = S'^2 - 2P' = (2m)^2 - 2(\frac{3m^2}{4}+3) = \frac{5m^2}{2} - 6$$

مجموع مربعات جدید $6m$ واحد بیشتر از اولی است:

$$\underbrace{(m^2-6)}_{\text{قبلی}} + 6m = \underbrace{(\frac{5m^2}{2}-6)}_{\text{جدید}}$$

$$\xrightarrow{\times 2} 2m^2 - \cancel{12} + 12m = 5m^2 - \cancel{12} \xrightarrow{\text{مرتب}} 3m^2 - 12m = 0$$

$$\Rightarrow 3m(m-4) = 0 \xrightarrow{m\neq 0} m = 4$$

۳ گزینهٔ ۲ (ریاضی ۲، مجموع و حاصل‌ضرب ریشه‌های معادلهٔ درجه ۲)

از خاصیت ریشهٔ معادله استفاده می‌کنیم:

$$x^2 + 2x - 1 = 0 \xrightarrow{x_1 \text{ ریشه است}} x_1^2 + 2x_1 - 1 = 0$$

$$\Rightarrow x_1^2 = 1 - 2x_1 \xrightarrow{\text{توان ۲}} x_1^4 = 1 + 4x_1^2 - 4x_1$$

$$\xrightarrow[\text{درعبارت}]{\text{جای‌گذاری}} x_1^4 + 4x_2^2 - 4x_2 = 1 + 4x_1^2 - 4x_1 + 4x_2^2 - 4x_2$$

$$= 1 + 4(x_1^2+x_2^2) - 4(x_1+x_2) = 1 + 4(S^2-2P) - 4S$$

$$\xrightarrow{S=-2 \,,\, P=-1} x_1^4 + 4x_2^2 - 4x_2 = 1 + 4(4+2) - 4\times(-2) = 33$$

۴ گزینهٔ ۲ (ریاضی ۲، مجموع و حاصل‌ضرب ریشه‌های معادلهٔ درجه ۲)

$$kx^2 - x - \frac{k}{3} = 0 \Rightarrow S = \alpha+\beta = -\frac{-1}{k} = \frac{1}{k} \,,\, P = \alpha\beta = \frac{-\frac{k}{3}}{k} = -\frac{1}{3} \quad *$$

$$27(\alpha\beta^3 + \alpha^3\beta) + 7 = 0 \xrightarrow{\text{فاکتور}} 27\underbrace{\alpha\beta}_{P}\underbrace{(\beta^2+\alpha^2)}_{S^2-2P} + 7 = 0$$

$$\xrightarrow{*} \underbrace{27(-\frac{1}{3})}_{-9}(\frac{1}{k^2}+\frac{2}{3}) + 7 = 0$$

$$\xrightarrow{\text{مخرج مشترک}} -9(\frac{3+2k^2}{3k^2}) = -7 \xrightarrow[\text{و ضرب}]{\text{طرفین وسطین}} 27 + 18k^2 = 21k^2$$

$$\Rightarrow 3k^2 = 27 \Rightarrow k = \pm 3 \xrightarrow{\alpha+\beta>0} k = 3$$

در نهایت:

$$\frac{\alpha^2}{\beta}+\frac{\beta^2}{\alpha} = \frac{\alpha^3+\beta^3}{\alpha\beta} = \frac{S^3-3PS}{P} = \frac{(\frac{1}{k})^3 - 3(-\frac{1}{3})(\frac{1}{k})}{-\frac{1}{3}} \overset{k=3}{=} \frac{\frac{1}{27}+\frac{1}{3}}{-\frac{1}{3}} = -\frac{10}{9}$$

۵ گزینهٔ ۳ (ریاضی ۲، مجموع و حاصل‌ضرب ریشه‌های معادلهٔ درجه ۲)

$$2x^2 - 8x + m - 2 = 0 \Rightarrow x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = 4 \quad ①$$

$$x_1 + 4x_2 = 19 \Rightarrow x_1 + x_2 + 3x_2 = 19$$

$$\xrightarrow{①} 4 + 3x_2 = 19 \Rightarrow x_2 = 5$$

$$\xrightarrow{\text{در معادله}} 2(5)^2 - 8\times5 + m - 2 = 0 \Rightarrow m = -8 \quad ②$$

و اما معادلهٔ دومی:

$$x^2 + (m+2)x + 1 - m = 0 \xrightarrow{②} x^2 - 6x + 9 = 0$$

$\Rightarrow (x-3)^2 = 0 \Rightarrow x = 3 \Rightarrow$ ریشهٔ مضاعف مثبت دارد.

۶ گزینهٔ ۳ (ریاضی ۲، مجموع و حاصل‌ضرب ریشه‌های معادلهٔ درجه ۲)

$$x^2 - 6x + 4 = 0 \Rightarrow P = \alpha\beta = 4 \,,\, S = \alpha+\beta = 6$$

$$A = \frac{\sqrt\alpha}{\beta} + \frac{\sqrt\beta}{\alpha} \xrightarrow{\text{توان ۲}} A^2 = \frac{\alpha}{\beta^2} + 2\frac{\sqrt{\alpha\beta}}{\alpha\beta} + \frac{\beta}{\alpha^2}$$

$$= \frac{\alpha^3+\beta^3}{\alpha^2\beta^2} + \underbrace{2\frac{\sqrt4}{4}}_{1} = \frac{S^3-3PS}{P^2} + 1 = \frac{6^3-3(4)(6)}{16} + 1$$

$$\xrightarrow{\text{ساده‌کن}} A^2 = 10 \xrightarrow{A>0} A = \sqrt{10}$$

از طرفی α ریشهٔ معادله است و در آن صدق می‌کند؛ پس:

$$\alpha^2 - 6\alpha + 4 = 0 \Rightarrow \alpha^2 = 6\alpha - 4$$

$$\xrightarrow{\text{جای‌گذاری در B}} B = \alpha^2 - 6\beta + 4 = (6\alpha-4) - 6\beta + 4$$

$$= 6(\alpha-\beta) = 6\frac{\sqrt\Delta}{|a|} = 6\times\frac{\sqrt{36-4(4)}}{1} = 12\sqrt5$$

$$\xrightarrow{\text{خواستهٔ تست}} \frac{B}{A} = \frac{12\sqrt5}{\sqrt{10}} = \frac{12\sqrt5}{\sqrt5\times\sqrt2} = \frac{12}{\sqrt2} = 6\sqrt2$$

۷ گزینهٔ ۱ (ریاضی ۲، مجموع و حاصل‌ضرب ریشه‌های معادلهٔ درجه ۲)

$$x^2 - 3x + 1 = 0 \xrightarrow{x=\alpha} \alpha^2 - 3\alpha + 1 = 0 \Rightarrow \alpha^2 = 3\alpha - 1$$

$$\xrightarrow{\text{توان دو}} \alpha^4 = 9\alpha^2 - 6\alpha + 1 \quad ①$$

از طرفی داریم:

$$x^2 - 3x + 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} S = \alpha+\beta = 3 \\ P = \alpha\beta = 1\end{cases} \quad ②$$

و اما حاصل عبارت خواسته‌شده:

$$\alpha^4 + 9\beta^2 - 6\beta \overset{①}{=} 9\alpha^2 - 6\alpha + 1 + 9\beta^2 - 6\beta$$

$$= 9(\alpha^2+\beta^2) - 6(\alpha+\beta) + 1 = 9(S^2-2P) - 6S + 1$$

$$\overset{②}{=} 9(9-2) - 6\times3 + 1 = 46$$

۸ گزینهٔ ۴ (ریاضی ۲، مجموع و حاصل‌ضرب ریشه‌های معادلهٔ درجه ۲)

وقتی رابطهٔ داده‌شده را به‌صورت $12+2m+n=0$ می‌نویسیم، متوجه می‌شویم که در معادلهٔ $3x^2-mx+n=0$ به جای x عدد -2 جایگزین شده است، یعنی $x=-2$ یکی از ریشه‌های این معادله است، از طرفی می‌دانیم که در معادلهٔ درجه ۲، ضرب ریشه‌ها برابر $\frac{c}{a}$ است، پس:

$$x_1x_2=\frac{c}{a}\Rightarrow(-2)x_2=\frac{n}{3}\Rightarrow x_2=-\frac{n}{6}$$

۹ گزینهٔ ۲ (ریاضی ۲، مجموع و حاصل‌ضرب ریشه‌های معادلهٔ درجه ۲)

فرض کنیم α و β ریشه‌های معادلهٔ $2x^2+(a-2)x+b+1=0$ باشند، در این‌صورت داریم:

$$\begin{cases}S=\alpha+\beta=\frac{2-a}{2}\\ P=\alpha\cdot\beta=\frac{b+1}{2}\end{cases}$$

فرض کنیم x_1 و x_2 ریشه‌های معادلهٔ $x^2-2x-6=0$ باشند. در این‌صورت داریم:

$$\begin{cases}S'=x_1+x_2=2\\ P'=x_1\cdot x_2=-6\end{cases}$$

از طرفی طبق فرض داریم:

$$\begin{cases}\alpha=x_1^2-2\\ \beta=x_2^2-2\end{cases}$$

در نتیجه می‌توانیم بنویسیم:

$$S=\alpha+\beta=x_1^2-2+x_2^2-2=x_1^2+x_2^2-4=S'^2-2P'-4=4-2(-6)-4=12$$

$$\Rightarrow\frac{2-a}{2}=12\Rightarrow 2-a=24\Rightarrow a=-22$$

$$P=\alpha\cdot\beta=(x_1^2-2)(x_2^2-2)=(x_1x_2)^2-2(x_1^2+x_2^2)+4$$

$$=P'^2-2(S'^2-2P')+4=(-6)^2-2(2^2-2(-6))+4=36-32+4=8$$

$$\Rightarrow\frac{b+1}{2}=8\Rightarrow b+1=16\Rightarrow b=15\Rightarrow[\sin(\frac{b}{a}\pi)]=[\sin(-\frac{15\pi}{22})]=-1$$

توجه کنید که زاویهٔ $-\frac{15\pi}{22}$ در ربع سوم قرار داشته و سینوس این زاویه عددی بین -1 و صفر است و در نتیجه جزءصحیح آن -1 است.

۱۰ گزینهٔ ۴ (ریاضی ۲، تشکیل معادلهٔ درجه ۲ با استفاده از S و P)

با تغییر متغیر در معادلهٔ داده‌شده داریم:

$$(x^2-x)^2-(x^2-x)-56=0\xrightarrow{x^2-x=t}t^2-t-56=0$$

$$\Rightarrow(t-8)(t+7)=0\Rightarrow t=8,-7$$

با جای‌گذاری $t=x^2-x$ داریم:

$$\begin{cases}x^2-x=-7\Rightarrow x^2-x+7=0\Rightarrow\Delta<0\Rightarrow \text{معادله جواب ندارد.}\\ x^2-x=8\Rightarrow x^2-x-8=0\end{cases}$$

پس باید معادلهٔ درجهٔ دومی بنویسیم که ریشه‌های آن از دو برابر معکوس ریشه‌های معادلهٔ $x^2-x-8=0$ یک واحد بیشتر باشد، برای این منظور داریم:

$$x^2-x-8=0\xrightarrow{\text{و } \beta \text{ ریشه‌ها باشند.} \alpha}\begin{cases}S=\alpha+\beta=1\\ P=\alpha\beta=-8\end{cases}$$

حالا اگر معادلهٔ خواسته‌شده را به‌صورت $x^2-S'x+P'=0$ با ریشه‌های x' و x'' در نظر بگیریم، با توجه به فرض سؤال داریم:

$$\begin{cases}x'=\frac{2}{\alpha}+1\\ x''=\frac{2}{\beta}+1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}S'=x'+x''=\frac{2}{\alpha}+\frac{2}{\beta}+2=\frac{2(\alpha+\beta)}{\alpha\beta}+2\\ P'=x'x''=(\frac{2}{\alpha}+1)(\frac{2}{\beta}+1)=\frac{4}{\alpha\beta}+\frac{2}{\alpha}+\frac{2}{\beta}+1\\ \quad=\frac{4}{\alpha\beta}+2(\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta})+1\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}S'=\frac{2(1)}{-8}+2=-\frac{1}{4}+2=\frac{7}{4}\\ P'=\frac{4}{-8}+\frac{2\times1}{-8}+1=-\frac{6}{8}+1=-\frac{3}{4}+1=\frac{1}{4}\end{cases}$$

پس معادلهٔ خواسته‌شده به‌صورت زیر خواهد بود:

$$x^2-\frac{7}{4}x+\frac{1}{4}=0\Rightarrow 4x^2-7x+1=0\Rightarrow 4x^2+1=7x$$

آزمون ۷ سهمی و تابع درجه ۲

۱ گزینهٔ ۴ (ریاضی ۲، مجموع و حاصل‌ضرب ریشه‌های معادلهٔ درجه ۲)

$$y=\underbrace{3}_{a}x^2+\underbrace{(1-2\alpha)}_{b}x\underbrace{-2\beta}_{c}$$

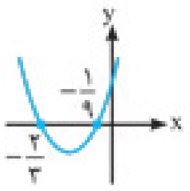
$$\xrightarrow{\text{و } \beta \text{ ریشه‌ها} \alpha}S=\alpha+\beta=-\frac{b}{a}=-\frac{1-2\alpha}{3},\ P=\alpha\beta=\frac{c}{a}=\frac{-2\beta}{3}$$

حالت اول: $\beta\neq0$؛ در این حالت، داریم:

$$\alpha\cancel{\beta}=\frac{-2\cancel{\beta}}{3}\Rightarrow\alpha=\frac{-2}{3}$$

$$\xrightarrow{S \text{ جای‌گذاری در}}-\frac{2}{3}+\beta=-\frac{1-2(-\frac{2}{3})}{3}=\frac{-7}{9}\Rightarrow\beta=\frac{-1}{9}$$

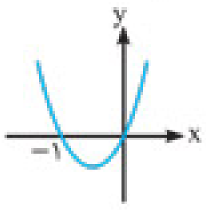
چون هر دو ریشه منفی هستند و ضریب x^2 هم مثبت است، بنابراین نمودار سهمی از ناحیهٔ چهارم عبور نمی‌کند. در این حالت، نمودار سهمی به شکل مقابل است:



حالت دوم: $\beta=0$؛ در این حالت، داریم:

$$\alpha+\beta=-\frac{1-2\alpha}{3}\xrightarrow{\beta=0}\alpha=-\frac{1-2\alpha}{3}\Rightarrow3\alpha=2\alpha-1\Rightarrow\alpha=-1$$

در این حالت نیز چون یکی از ریشه‌ها صفر و دیگری منفی است و ضریب x^2 هم مثبت است، نمودار از ناحیهٔ چهارم عبور نمی‌کند.



۲ گزینهٔ ۱ (ریاضی ۲، صفرهای تابع درجه ۲)

$$\text{رأس سهمی}:S(2,1)\xrightarrow[a<0]{\text{معادلهٔ سهمی}}y=a(x-2)^2+1$$

$$\xrightarrow[\text{صدق بده}]{(0,-3)}-3=a(4)+1\Rightarrow a=-1$$

$$\xrightarrow{\text{معادلهٔ سهمی}}y=-(x-2)^2+1$$

$$\xrightarrow{\text{اتحاد و ساده}}y=-x^2+4x-3\xrightarrow{\text{صفرهای سهمی}}x=1,3$$

خط ℓ از نقاط $(3,0)$ و $(0,-3)$ می‌گذرد، پس:

$$m=\frac{-3-0}{0-3}=1\xrightarrow{\text{معادلهٔ خط}}y-0=(1)(x-3)\Rightarrow x-y=3$$

$$\underbrace{x=2}_{\text{محور تقارن سهمی}}\xrightarrow[\text{تلاقی بده}]{x-y=3}2-y=3\Rightarrow y=-1$$

$$\Rightarrow\text{نقطهٔ تلاقی}:A(2,-1)\xrightarrow{\text{فاصله تا مبدأ}}OA=\sqrt{4+1}=\sqrt{5}$$

۳ گزینهٔ ۲ (ریاضی ۲، ماکزیمم و مینیمم تابع درجه ۲)

مطابق با شکل، مساحت این زمین برابر است با: $S=xy$

$$\text{طول نرده}=2y+x=72\Rightarrow x=72-2y$$

$$\xrightarrow{S \text{ در}}S=(72-2y)y\Rightarrow S=72y-2y^2$$

$$\xrightarrow{a<0}\max=-\frac{\Delta}{4a}=-\frac{72^2-4(-2)(0)}{4(-2)}=\frac{72\times72}{8}=9\times72=648$$

۴ گزینهٔ ۴ (ریاضی ۲، ماکزیمم و مینیمم تابع درجه ۲)

مجموع جواب‌های معادلهٔ $ax^2+bx+c=0$ همان مجموع صفرهای تابع y است، پس:

$$y=ax^2+bx+c\Rightarrow S=-\frac{b}{a}=k+(1-k)=1\Rightarrow b=-a \quad ✽$$

حاصل‌ضرب جواب‌های معادلهٔ $ax^2+bx+c=0$ برابر با حاصل‌ضرب صفرهای تابع y است، پس:

$$P=\frac{c}{a}=k(1-k)\xrightarrow[\text{تلاقی با محور عرض‌ها}]{c=k}\frac{k}{a}=k(1-k)$$

$$\Rightarrow a=\frac{1}{1-k}\xrightarrow{✽}b=\frac{1}{k-1}$$

چون سهمی بیشترین مقدار دارد، پس ضریب x^2 منفی است، یعنی $a<0$.

بیشترین مقدار سهمی $= -\frac{\Delta}{4a} \overset{\text{فرض}}{=} \frac{9}{4} \Rightarrow \Delta = -9a$

$\xrightarrow[b^2-4ac=-9a]{\text{جای‌گذاری}} \frac{1}{(k-1)^2} - 4(\frac{1}{1-k})(k) = -9(\frac{1}{1-k})$

$\xrightarrow{\text{مخرج مشترک}} \frac{1+4k(k-1)}{(k-1)^{\cancel{2}}} = \frac{9}{\cancel{k-1}} \xrightarrow[\text{وضرب}]{\text{طرفین وسطین}} 4k^2-4k+1 = 9k-9$

$\xrightarrow{\text{ساده}} 4k^2-13k+10=0 \xrightarrow[\text{جواب‌ها}]{\text{حل معادله}} k=2, \frac{5}{4}$

۵ گزینهٔ ۲ (ریاضی ۲، ماکزیمم و مینیمم تابع درجه ۲)

$-6 =$ نقطهٔ تلاقی با محور yها

$\xrightarrow[x=0,\ y=-6]{\text{در سهمی}} -6 = \underbrace{a(0)^2-(6a-1)(0)}_{0} + b \Rightarrow b=-6$

$\frac{1}{2} =$ نقطهٔ تلاقی با محور xها

$\xrightarrow[x=\frac12,\ y=0]{\text{در سهمی}} 0 = a(\frac14) - (6a-1)(\frac12) - 6 \xrightarrow{\times 4} 0 = a - 12a + 2 - 24$

$\Rightarrow 11a = -22 \Rightarrow a=-2$

ناحیهٔ رنگی، مثلثی است که ارتفاعش $-\frac{\Delta}{4a}$ (بیشترین مقدار سهمی یا عرض رأس) بوده و قاعده‌اش اختلاف ریشه‌های سهمی است!

$a=-2 \xrightarrow{\text{در سهمی}} y=-2x^2+13x-6 \xrightarrow[\text{ریشهٔ بزرگ‌تر}]{\text{حل معادله}} x=6$

$\Rightarrow$ قاعدهٔ مثلث $= 6 - \frac12 = \frac{11}{2}$

ارتفاع $= -\frac{13^2-4(-2)(-6)}{4(-2)} = \frac{121}{8} \Rightarrow S_{\text{رنگی}} = \frac12(\frac{11}{2}\times\frac{121}{8}) = \frac{1331}{32}$

۶ گزینهٔ ۱ (ریاضی ۲، صفرهای تابع درجه ۲)

نمودار تابع نشان می‌دهد، سهمی دو ریشهٔ مثبت دارد $(\Delta>0, -\frac{b}{a}>0, \frac{c}{a}>0)$ و البته نقطهٔ تلاقی با محور yها هم مثبت است $(c>0)$.

$\frac{c}{a}>0, -\frac{b}{a}>0 \xrightarrow{c>0} a>0, b<0, c>0$

$\Rightarrow m+4>0, -4<0, m+1>0 \Rightarrow m>-4, m>-1$

$\xrightarrow{\cap} m>-1$ ✲

$\Delta = (-4)^2 - 4(m+4)(m+1) = \cancel{16} - 4m^2 - 20m - \cancel{16} > 0$

$\Rightarrow -4m(m+5)>0 \xrightarrow[\text{تعیین علامت}]{\text{ریشه‌ها}: -5,\ 0} -5<m<0$

$\xrightarrow{\text{اشتراک با ✲}} -1<m<0 \xrightarrow{\text{m صحیح}}$ هیچ مقدار

۷ گزینهٔ ۱ (ریاضی ۲، ماکزیمم و مینیمم تابع درجه ۲)

روش اول

صفرهای سهمی $=1,3 \xrightarrow{\text{معادلهٔ سهمی}} y=a(x-1)(x-3)$

$=a(x^2-4x+3) \xrightarrow{\text{ضرب}} y=ax^2-4ax+3a$

$\xrightarrow[a<0]{\text{بیشترین مقدار}} -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{(-4a)^2-4(a)(3a)}{4a} \overset{\text{فرض}}{=} -2a-9$

$\xrightarrow{\text{ساده}} -a=-2a-9 \Rightarrow a=-9 \xrightarrow[\text{در سهمی}]{\text{جای‌گذاری}} f(x)=-9x^2+36x-27$

$\xrightarrow[\frac{b}{9}=4]{b=36} f(\frac{b}{9}) = f(4) = -9(16)+36(4)-27=-27$

روش دوم

$\xrightarrow[x_S=\frac{1+3}{2}=2]{\text{بیشترین مقدار}} -2a-9 = a(2-1)(2-3) \Rightarrow -2a-9=-a$

$\Rightarrow a=-9 \Rightarrow f(x) = -9(x-1)(x-3) = -9(x^2-4x+3)$

$=-9x^2+36x-27 \Rightarrow b=36$

$\Rightarrow f(\frac{b}{9}) = f(4) = -9(4-1)(4-3) = -9(3)(1) = -27$

۸ گزینهٔ ۴ (ریاضی ۲، ماکزیمم و مینیمم تابع درجه ۲)

$\underbrace{(0,3),(\frac32,0)}_{\text{روی خط}} \xrightarrow{\text{معادلهٔ خط}} y-3 = \frac{3-0}{0-\frac32}(x-0) \Rightarrow y-3=-2x$

$\Rightarrow 2x+y=3$ ✲

$y=-2x^2+mx-m-1 \xrightarrow{\text{رأس سهمی}} S(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a})$

$=(\frac{m}{4}, -\frac{m^2-8(m+1)}{-8}) \xrightarrow{\text{ساده}} S(\frac{m}{4}, \frac{m^2-8m-8}{8})$

$\xrightarrow[\text{صدق بده}]{\text{روی خط ✲}} 2(\frac{m}{4}) + (\frac{m^2-8m-8}{8}) = 3$

$\xrightarrow{\times 8} 4m + (m^2-8m-8) = 24 \xrightarrow{\text{ساده}} m^2-4m-32=0$

$\xrightarrow{\text{مجموع مقادیر m}} S = -\frac{(-4)}{1} = 4$

۹ گزینهٔ ۲ (ریاضی ۲، ماکزیمم و مینیمم تابع درجه ۲)

$S(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}) = S(\frac{3m-3}{2(3m+4)}, -\frac{9(m-1)^2-36(3m+4)}{4(3m+4)})$

$\xrightarrow{\text{ساده}} S(\frac{3m-3}{2(3m+4)}, \frac{-9m^2+126m+135}{4(3m+4)}) \xrightarrow{\text{S ناحیهٔ دوم}}$

۱ $\frac{3m-3}{3m+4} < 0 \xrightarrow[\text{و مخرج}]{\text{ریشه‌های صورت}} m=1, -\frac43 \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} -\frac43<m<1$ ۱

۲ $\frac{-9m^2+126m+135}{4(3m+4)} > 0$

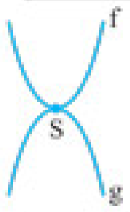
درصورت کسر، $126=-9-135$، پس یکی از ریشه‌ها -1 و دیگری $-\frac{c}{a}$ است! $\xrightarrow{\text{تعیین علامت}}$

x		$-\frac43$		-1		15	
عبارت	+	ت‌ن	-	۰	+	۰	-

$\Rightarrow m<-\frac43$ یا $-1<m<15$ ۲

$\xrightarrow{۱ \cap ۲} -1<m<1 \xrightarrow{\text{بازه}} (-1,1) \xrightarrow{\text{طول بازه}} 1-(-1)=2$

۱۰ گزینهٔ ۲ (ریاضی ۲، صفرهای تابع درجه ۲)



چون در سهمی‌های f و g ضریب x^2 مختلف‌العلامت هستند، شکل فرضی مقابل را در نظر می‌گیریم:

می‌دانیم در سهمی به معادلهٔ $Ax^2+Bx+C=0$ مختصات رأس سهمی از روابط زیر به دست می‌آید:

$$\begin{cases} x_S = \frac{-B}{2A} \\ y_S = f(x_S) = \frac{-\Delta}{4A} \end{cases}$$

در تابع g داریم: $x_S = \frac{-6}{2(-1)} = 3$

و برای تابع f داریم: $x_S = -\frac{b}{2\times3} = -\frac{b}{6} \Rightarrow -\frac{b}{6}=3 \Rightarrow b=-18$

پس ضابطهٔ تابع f به‌صورت $f(x)=3x^2-18x+c$ خواهد بود. عرض رأس هر دو سهمی هم با هم برابر است:

$y_S = f(3) = g(3) \Rightarrow 27-54+c = -9+18+d \Rightarrow c=d+36$

با جای‌گذاری b و c در معادلهٔ سهمی داده‌شده داریم:

$y=(c-1)x^2+(b+3)x-1 \xrightarrow[b=-18]{c=d+36} y=(d+35)x^2-15x-1$ ✲

شرط آن‌که سهمی ✲ بر خط $y=x+d$ مماس باشد، آن است که معادلهٔ تلاقی آن‌ها دارای ریشهٔ مضاعف باشد:

$\xrightarrow{\text{تلاقی}} (d+35)x^2-15x-1 = x+d \Rightarrow \underbrace{(d+35)x^2-16x-(d+1)=0}_{\text{معادلهٔ تلاقی}}$

حالا شرط ریشهٔ مضاعف را برقرار می‌کنیم:

$\Delta=0 \Rightarrow (-16)^2+4(d+35)(d+1)=0 \xrightarrow{\div 4} (d+35)(d+1)+64=0$

$\Rightarrow d^2+36d+35+64=0 \Rightarrow d^2+36d+99=0 \Rightarrow (d+3)(d+33)=0$

که $d=-33$ در بین گزینه‌ها دیده می‌شود.

آزمون ۸ جامع

۱ گزینهٔ ۴ (ریاضی ۲، مجموع و حاصل‌ضرب ریشه‌های معادلهٔ درجه ۲)

$x^2+x-3=0 \Rightarrow \alpha+\beta=S=-1\ ,\ \alpha\beta=P=-3$

$x_1=\frac{\alpha}{\beta+1}+2, x_2=\frac{\beta}{\alpha+1}+2 \Rightarrow x_1+x_2=\frac{\alpha(\alpha+1)+\beta(\beta+1)}{(\alpha+1)(\beta+1)}+4$

$\Rightarrow x_1+x_2 = \frac{(\alpha^2+\beta^2)+(\alpha+\beta)}{\alpha\beta+(\alpha+\beta)+1}+4 = \frac{(S^2-2P)+S}{P+S+1}+4$

$$\xrightarrow{\text{جای‌گذاری}} x_1+x_2=\frac{(1+6)-1}{-3-1+1}+4 \Rightarrow S'=2$$

$$x_1x_2=(\frac{\alpha}{\beta+1}+2)(\frac{\beta}{\alpha+1}+2)$$

$$\xrightarrow{\text{ضرب کن}} x_1x_2=\frac{\alpha\beta}{(\beta+1)(\alpha+1)}+\frac{2\alpha}{\beta+1}+\frac{2\beta}{\alpha+1}+4$$

$$\xrightarrow{\text{مخرج مشترک}} x_1x_2=\frac{\alpha\beta+\overbrace{2\alpha(\alpha+1)+2\beta(\beta+1)}^{2(\alpha^2+\beta^2)+2(\alpha+\beta)}}{\underbrace{(\beta+1)(\alpha+1)}_{\text{مثل بالا}=-3}}+4=\frac{P+2(S^2-2P)+2S}{-3}+4$$

$$\xrightarrow{\text{جای‌گذاری}} x_1x_2=\frac{-3+2(1+6)-2}{-3}+4 \Rightarrow P'=1$$

پس معادلهٔ موردنظر می‌شود: $x^2-2x+1=0$

۲ گزینهٔ ۱ (ریاضی ۲، تشکیل معادلهٔ درجه ۲ با استفاده از S و P)

$$\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}=\sqrt{5} \xrightarrow{\text{به توان ۲}} \alpha+\beta+2\sqrt{\alpha\beta}=5 \Rightarrow S+2\sqrt{P}=5 \quad ✲$$

$$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=3 \xrightarrow{\text{مخرج مشترک}} \frac{\beta+\alpha}{\alpha\beta}=3 \Rightarrow \frac{S}{P}=3 \Rightarrow S=3P$$

$$\xrightarrow{\text{جای‌گذاری در ✲}} 3P+2\sqrt{P}=5 \Rightarrow 2\sqrt{P}=5-3P$$

$$\xrightarrow[P>0,\ P<\frac{5}{3}]{\text{به توان ۲}} 4P=25-30P+9P^2 \Rightarrow 9P^2-34P+25=0$$

$$\xrightarrow[\text{ریشه‌ها}]{\text{حل معادله}} P=1,\ \frac{25}{9} \xrightarrow{P<\frac{5}{3}} P=1 \xrightarrow{S=3P} S=3$$

اما در معادلهٔ جدید: $S'=x_1+x_2=(\alpha+\beta)^2+(\alpha-\beta)^2$

$$\xrightarrow{\text{اتحاد و ساده}} x_1+x_2=2\alpha^2+2\beta^2=2(S^2-2P)$$

$$\xrightarrow{\text{جای‌گذاری}} S'=x_1+x_2=2(9-2)=14$$

$$P'=x_1x_2=(\alpha+\beta)^2(\alpha-\beta)^2=((\alpha+\beta)(\alpha-\beta))^2$$

$$=(S\sqrt{S^2-4P})^2=S^2(S^2-4P) \xrightarrow{\text{جای‌گذاری}} P'=x_1x_2=9(9-4)=45$$

$$\xrightarrow{\text{معادله بنویس}} x^2-S'x+P'=0 \Rightarrow x^2-14x+45=0$$

۳ گزینهٔ ۳ (ریاضی ۲، صفرهای تابع درجه ۲)

همواره پایین محور x ها بودنِ نمودار تابع درجهٔ دومِ $y=ax^2+bx+c$ به معنای همواره منفی‌بودن عبارت درجه ۲ بوده و شرطش این است که $a<0$ و $\Delta<0$ باشد؛ پس:

۱) $1-a<0 \xrightarrow{+a} a>1 \quad ✲$

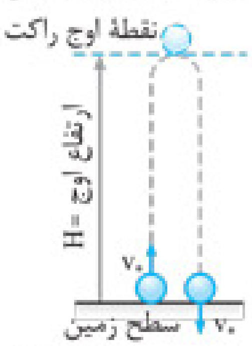
۲) $\Delta<0 \Rightarrow (2\sqrt{6})^2-4(1-a)(-a)<0$

$$\Rightarrow 24+4a-4a^2<0 \xrightarrow{\div(-4)} a^2-a-6>0 \Rightarrow (a+2)(a-3)>0$$

$$\xrightarrow{\text{بعد از حل نامعادله}} a<-2 \text{ یا } a>3 \xrightarrow[\text{با ✲} \cap]{\text{درنهایت}} a>3$$

۴ گزینهٔ ۳ (ریاضی ۲، ماکزیمم و مینیمم تابع درجه ۲)

اگر حرکت راکت را مطابق شکل زیر فرض کنیم، ارتفاع اوج راکت که همان حداکثر مقدار تابع درجهٔ دوم h است، به ازای $t_0=\frac{-b}{2a}$ به دست می‌آید:



$$h(t)=100t-5t^2=-5t^2+100t$$

$$\Rightarrow t_0=\frac{-100}{2(-5)}=\frac{100}{10}=10s$$

$$\Rightarrow H=h_{max}(t_0)=h(10)$$

$$=-5(10)^2+100(10)=500m$$

یعنی راکت، ۱۰ ثانیه پس از پرتاب به حداکثر ارتفاع خود $(H=500m)$ رسیده و ۱۰ ثانیه پس از آن دوباره به زمین می‌رسد؛ بنابراین زمان بازگشت مجدد راکت به زمین برابر ۲۰ ثانیه خواهد بود.

این‌جوری هم ببین: زمان بازگشت دوبارهٔ راکت به زمین به معنای صفرشدن تابع h است:

$$h(t)=-5t^2+100t=0 \Rightarrow t(-5t+100)=0$$

$t=0$ (لحظهٔ پرتاب) یا $-5t+100=0$

$\Rightarrow t=\frac{100}{5}=20s$ (زمان بازگشت دوباره به زمین)

۵ گزینهٔ ۲ (ریاضی ۲، مجموع و حاصل‌ضرب ریشه‌های معادلهٔ درجه ۲)

$$x^2-3x+m=0 \Rightarrow S=\alpha+\beta=3,\ P=\alpha\beta=m$$

$$3^{2\sqrt{\alpha}}\times 9^{\sqrt{\beta}}=81 \Rightarrow 3^{2\sqrt{\alpha}}\times 3^{2\sqrt{\beta}}=3^4$$

$$\Rightarrow 2(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})=4 \Rightarrow \sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}=2=\sqrt{S+2\sqrt{P}}=2$$

$$\xrightarrow{\text{جای‌گذاری و توان ۲}} 3+2\sqrt{m}=4 \Rightarrow 2\sqrt{m}=1 \Rightarrow m=\frac{1}{4}$$

$$\xrightarrow{\text{جای‌گذاری در دومی}} x^2-(\frac{4}{16}-1)x-1=0 \Rightarrow x^2+\frac{3}{4}x-1=0$$

$$\text{تفاضل ریشه‌ها}=\sqrt{S'^2-4P'}=\sqrt{\frac{9}{16}-4(-1)}=\sqrt{\frac{73}{16}}=\frac{\sqrt{73}}{4}$$

۶ گزینهٔ ۴ (ریاضی ۲، ماکزیمم و مینیمم تابع درجه ۲)

$$x^2+(1-3m)x+(2-m)=0 \Rightarrow S=\alpha+\beta=(3m-1),\ P=\alpha\beta=2-m$$

$$(\alpha-\beta)^2=\alpha^2+\beta^2-2\alpha\beta=S^2-2P-2P=S^2-4P$$

$$\xrightarrow{\text{جای‌گذاری کن}} (\alpha-\beta)^2=(3m-1)^2-4(2-m)$$

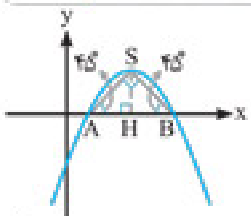
$$\xrightarrow{\text{اتحاد و ساده}} (\alpha-\beta)^2=9m^2-2m-7$$

$$\xrightarrow{\text{عبارت مینیمم شود.}} m=\frac{-b}{2a}=\frac{2}{18}=\frac{1}{9} \xrightarrow{\text{در دومی}} y=x^2+(x-\frac{1}{9})^2$$

$$\xrightarrow{\text{اتحاد و ساده}} y=2x^2-\frac{2}{9}x+\frac{1}{81} \xrightarrow[x=-\frac{b}{2a}]{\text{محور تقارن}} x=\frac{\frac{2}{9}}{4}=\frac{1}{18}$$

$$\xrightarrow[\text{تلاقی}]{2x+3y=6} 2(\frac{1}{18})+3y=6 \Rightarrow 3y=6-\frac{1}{9}=\frac{53}{9} \Rightarrow y=\frac{53}{27}$$

۷ گزینهٔ ۲ (ریاضی ۲، ماکزیمم و مینیمم تابع درجه ۲)



فرض کنیم سهمی مقابل با ضابطهٔ $y=ax^2+bx+c$ باشد و α و β صفرهای این سهمی باشند.

مثلث SAB متساوی‌الساقین است، پس:

$$\hat{A}=\hat{B}=45^\circ$$

$$\overset{\Delta}{SAH}: \underbrace{\tan 45^\circ}_{1}=\frac{SH}{AH} \Rightarrow \underbrace{SH}_{\text{عرض رأس}}=AH \Rightarrow AH=-\frac{\Delta}{4a}$$

$$\xrightarrow{AH=\frac{AB}{2}} -\frac{\Delta}{4a}=\frac{|\alpha-\beta|}{2} \Rightarrow -\frac{\Delta}{4a}=\frac{\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}}{2}$$

$$\xrightarrow{a<0} -\frac{\Delta}{4a}=\frac{\sqrt{\Delta}}{-2a} \Rightarrow 2\sqrt{\Delta}=\Delta \xrightarrow{\text{توان ۲}} 4\Delta=\Delta^2 \xrightarrow{\Delta\neq 0} \Delta=4$$

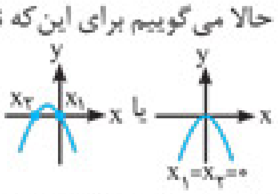
۸ گزینهٔ ۴ (ریاضی ۲، صفرهای تابع درجه ۲)

ابتدا محل تلاقی سهمی با محور x ها را به دست می‌آوریم:

$$y=ax^2-(a+2)x=0 \xrightarrow{\text{فاکتورگیری}} x(ax-(a+2))=0$$

$x_1=0$ (عبور از مبدأ) یا $x_2=\frac{a+2}{a}$

حالا می‌گوییم برای این‌که نمودار سهمی وارد ناحیهٔ اول نشود، باید نمودار آن به شکل



باشد.

این یعنی علاوه بر این‌که سهمی رو به پایین باز می‌شود $(a<0)$، ریشهٔ آن $(x_2=\frac{a+2}{a})$ نیز باید کوچک‌تر یا مساوی صفر باشد:

$$\frac{a+2}{a}\le 0 \xrightarrow{\text{با توجه به } a<0} a+2\ge 0 \Rightarrow a\ge -2$$

اشتراک جواب‌های $a<0$ و $a\ge -2$ را به عنوان جواب نهایی برای مقادیر قابل قبول a قبول می‌کنیم: $\text{مجموعه مقادیر } a=\{a<0\}\cap\{a\ge -2\}=\{-2\le a<0\}$

۹ گزینهٔ ۱ (ریاضی ۲، صفرهای تابع درجه ۲)

ابتدا نقاط تلاقی خط d با محورهای مختصات را می‌یابیم:

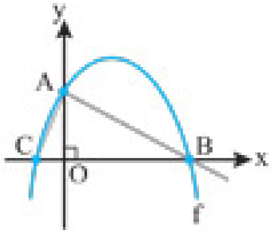
$$y=2-x \xrightarrow{x=0} y=2 \Rightarrow A(0,2)$$

$$y=2-x \xrightarrow{y=0} x=2 \Rightarrow B(2,0)$$

پس با توجه به شکل، سهمی f هم از نقاط $(0,2)$ و $(2,0)$ گذشته است، پس:

$$\begin{cases} f(0)=2 \Rightarrow 0+0+b=2 \Rightarrow b=2 \\ f(2)=0 \Rightarrow -4+2a+2=0 \Rightarrow 2a=2 \Rightarrow a=1 \end{cases} \Rightarrow f(x)=-x^2+x+2$$

با توجه به شکل داریم:



$S=\frac{1}{2}OA\times BC$

$y_A=2\Rightarrow OA=2$

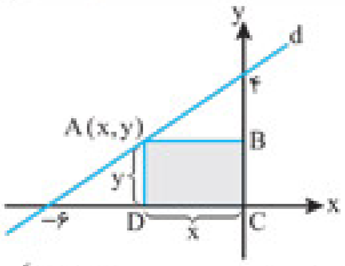
نقطهٔ C، محل تلاقی تابع با محور x هاست، پس:

$-x^2+x+2=0\xrightarrow{a+c=b}x=-1\ ,\ x=2\Rightarrow x_C=-1\Rightarrow BC=2-(-1)=3$

$\Rightarrow S=\frac{1}{2}\times2\times3=3$

۱۰ گزینهٔ ۲ (ریاضی ۲، صفرهای تابع درجه ۲)

مطابق شکل، اگر مختصات نقطهٔ A را به‌صورت $A(x,y)$ در نظر بگیریم، داریم:



$S=AB\times AD=xy$ ①

نقطهٔ A روی خط d قرار دارد، پس معادلهٔ خط d را می‌نویسیم:

② $\begin{cases}(-6,0)\\(0,4)\end{cases}\Rightarrow m=\frac{0-4}{-6-0}=\frac{2}{3}\xrightarrow{\text{معادلهٔ خط}}y-0=\frac{2}{3}(x+6)\Rightarrow y=\frac{2}{3}x+4$

حال با جای‌گذاری ② در رابطهٔ ① داریم: $S=x\times(\frac{2}{3}x+4)\Rightarrow S=\frac{2}{3}x^2+4x$

و اما خواستهٔ سؤال محاسبهٔ کمترین مقدار S است، پس داریم:

$\min(S)=|-\frac{\Delta}{4a}|=|-\frac{4^2-0}{4\times\frac{2}{3}}|=\frac{16}{\frac{8}{3}}=6$

آزمون ۹ یک گام تا صد

۱ گزینهٔ ۲ (ریاضی ۲، مجموع و حاصل‌ضرب ریشه‌های معادلهٔ درجه ۲)

چون α و β ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ دوم $2x^2-3x-2=0$ هستند، پس:

$\begin{cases}\alpha+\beta=\frac{3}{2}=S\\\alpha\beta=-1=P\end{cases}$ ✱

پس: $\frac{\beta^4-\alpha^2}{\beta}=\beta^3-\frac{\alpha^2}{\beta}=\beta^3-\frac{\alpha^2\alpha}{\alpha\beta}=\beta^3-\frac{\alpha^3}{\alpha\beta}$

$\overset{✱}{=}\beta^3+\alpha^3=S^3-3PS=(\frac{3}{2})^3-3(-1)(\frac{3}{2})=\frac{27}{8}+\frac{9}{2}=\frac{27+36}{8}=\frac{63}{8}$

۲ گزینهٔ ۱ (ریاضی ۲، صفرهای تابع درجه ۲)

با توجه به آن‌که ۲ و β ریشه‌های معادلهٔ $3x^2-ax-18=0$ هستند، پس $x=2$ در این معادله صدق می‌کند.

$3(2)^2-2a-18=0\Rightarrow a=-3$

$3x^2+3x-18=0\Rightarrow x^2+x-6=0\Rightarrow(x-2)(x+3)=0$

$\Rightarrow\begin{cases}x=2\\x=-3\Rightarrow\beta=-3\end{cases}$

پس ریشه‌های معادلهٔ دیگر ۶- و α هستند؛ اما معادلهٔ دیگر به‌صورت زیر است:

$x^2-3x+b=0\xrightarrow{-6\ \text{در معادله صدق می‌کند}}36+18+b=0\Rightarrow b=-54$

$x^2-3x-54=0\Rightarrow(x+6)(x-9)=0\Rightarrow\begin{cases}x=-6\\x=9\Rightarrow\alpha=9\end{cases}$

۳ گزینهٔ ۱ (ریاضی ۲، صفرهای تابع درجه ۲)

دقت شود جمع ضرایب صفر است، پس ریشه‌های معادلهٔ $f(x)=0$ که همان طول صفرهای تابع f هستند، عبارت‌اند از: $x_1=1$ و $x_2=\frac{c}{a}=\frac{1-2m}{m}$. از طرفی $f(0)=1-2m$، پس اختلاف ۲ ریشه برابر طول قاعدهٔ مثلث و تلاقی تابع با محور عرض‌ها برابر ارتفاع مثلث است. یعنی:

$S=\frac{1}{2}|(1-2m)(\frac{1-2m}{m}-1)|\Rightarrow\frac{7}{3}=\frac{1}{2}|(1-2m)(\frac{1-3m}{m})|\Rightarrow|\frac{6m^2-5m+1}{m}|=\frac{14}{3}$

$$\Rightarrow\begin{cases}\frac{6m^2-5m+1}{m}=\frac{14}{3}\Rightarrow18m^2-29m+3=0\\\xrightarrow{\Delta=625}m=\frac{29\pm25}{36}\Rightarrow\begin{cases}m=\frac{3}{2}\\m=\frac{1}{9}\end{cases}\\\frac{6m^2-5m+1}{m}=-\frac{14}{3}\Rightarrow18m^2-m+3=0\Rightarrow\Delta=-215<0\end{cases}$$

بنابراین طول رأس سهمی برابر است با:

$$\text{طول رأس سهمی}:x_S=-\frac{b}{2a}=\frac{1-m}{2m}\Rightarrow\begin{cases}x_S=\frac{1-\frac{3}{2}}{2\times\frac{3}{2}}=\frac{-\frac{1}{2}}{3}=-\frac{1}{6}\\x_S=\frac{1-\frac{1}{9}}{2\times\frac{1}{9}}=\frac{\frac{8}{9}}{\frac{2}{9}}=4\end{cases}$$

۴ گزینهٔ ۳ (ریاضی ۲، مجموع و حاصل‌ضرب ریشه‌های معادلهٔ درجه ۲)

چون x_1 و x_2 جواب‌های معادله هستند؛ پس:

$\begin{cases}S=x_1+x_2=-2\Rightarrow x_1+2=-x_2\ ,\ x_2+2=-x_1\\P=x_1x_2=-4\end{cases}$

به این ترتیب:

$P=\frac{x_1}{x_2(-x_1)}+\frac{x_2}{x_1(-x_2)}=\frac{x_1}{4}+\frac{x_2}{4}=\frac{1}{4}(x_1+x_2)\Rightarrow P=\frac{1}{4}(-2)=-\frac{1}{2}$

۵ گزینهٔ ۲ (ریاضی ۲، مجموع و حاصل‌ضرب ریشه‌های معادلهٔ درجه ۲)

ابتدا عبارت داده‌شده را ساده می‌کنیم و داریم:

$(\alpha-k)(\alpha+k)(\beta-k)(\beta+k)=5\Rightarrow(\alpha^2-k^2)(\beta^2-k^2)=5$

$\Rightarrow(\alpha\beta)^2-k^2(\alpha^2+\beta^2)+k^4=5$

با توجه به آن‌که α و β جواب‌های معادلهٔ $x^2+x-1=0$ هستند؛ پس:

$\begin{cases}\alpha\beta=-1\\\alpha+\beta=-1\end{cases}\Rightarrow\alpha^2+\beta^2=3\Rightarrow1-k^2(3)+k^4=5\Rightarrow k^4-3k^2-4=0$

$\Rightarrow(k^2+1)(k^2-4)=0\Rightarrow k=\pm2\xrightarrow{k>0}k=2$

۶ گزینهٔ ۳ (ریاضی ۲، مجموع و حاصل‌ضرب ریشه‌های معادلهٔ درجه ۲)

$\alpha+\beta=5\ ,\ \alpha^2+\beta^2=31\Rightarrow(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=31$

$\Rightarrow25-2\alpha\beta=31\Rightarrow\alpha\beta=-3\Rightarrow\begin{cases}\alpha+\beta=5\\\alpha\beta=-3\end{cases}\Rightarrow x^2-5x-3=0$

یعنی α و β جواب‌های $x^2-5x-3=0$ هستند؛ پس:

$ax^3-7x^2-bx-9=(x^2-5x-3)(ax+3)=ax^3+(3-5a)x^2-(3a+15)x-9$

اگر ضرایب را متناظر قرار دهیم، آن‌گاه:

$3-5a=-7\Rightarrow a=2$

$-(3a+15)=-b\Rightarrow-(6+15)=-b\Rightarrow b=21$

۷ گزینهٔ ۴ (ریاضی ۲، صفرهای تابع درجه ۲)

با توجه به نمودار سهمی $y=(f-g)(x)$ داریم:

$(f-g)(x)=k(x-1)(x-2)\ ,\ (f-g)(0)=4\Rightarrow4=k(-1)(-2)\Rightarrow k=2$

$\Rightarrow(f-g)(x)=2(x-1)(x-2)=2x^2-6x+4$

از طرفی:

$(f+g)(x)=a(x-1)\ ,\ (f+g)(3)=(f-g)(3)=4\Rightarrow4=a(3-1)\Rightarrow a=2$

$\Rightarrow\begin{cases}(f+g)(x)=2x-2\\-(f-g)(x)=2x^2-6x+4\end{cases}\Rightarrow2g(x)=-2x^2+6x-4+2x-2$

$\Rightarrow g(x)=-x^2+4x-3\Rightarrow$ طول رأس g: $S_g=-\frac{b}{2a}=-\frac{4}{2(-1)}=2$

۸ گزینهٔ ۳ (ریاضی ۲، تشکیل معادلهٔ درجه ۲ با استفاده از S و P)

چون α ریشهٔ مشترک دو معادله است، پس در هر دو معادله صدق می‌کند.

$\cancel{\alpha^2}+\alpha-3m=\cancel{\alpha^2}-3\alpha+5m\Rightarrow4\alpha=8m\Rightarrow m=\frac{\alpha}{2}$

با قراردادن $m=\frac{\alpha}{2}$ در یکی از معادلات داریم:

$\alpha^2+\alpha-3(\frac{\alpha}{2})=0\Rightarrow\alpha^2-\frac{\alpha}{2}=0\Rightarrow\begin{cases}\alpha=\frac{1}{2}\ \text{ریشهٔ مشترک}\\m=\frac{1}{4}\end{cases}$

در معادلهٔ اول با توجه به ضرب ریشه‌ها داریم: $\alpha\beta=-3m\Rightarrow\frac{1}{2}\beta=-\frac{3}{4}\Rightarrow\beta=-\frac{3}{2}$

در معادلهٔ دوم با توجه به ضرب ریشه‌ها داریم: $\alpha\gamma=5m\Rightarrow\frac{1}{2}\gamma=\frac{5}{4}\Rightarrow\gamma=\frac{5}{2}$

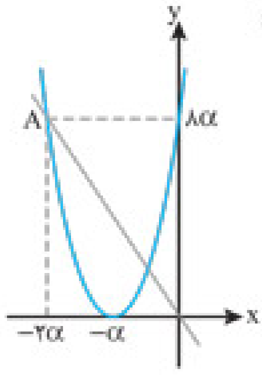
یعنی ریشه‌های غیرمشترک $-\frac{3}{2}$ و $\frac{5}{2}$ است؛ پس:

$\begin{cases}S=\beta+\gamma=1\\P=\beta\gamma=-\frac{15}{4}\end{cases}\Rightarrow x^2-x-\frac{15}{4}=0$

پس معادلهٔ موردنظر $4x^2-4x-15=0$ است.

۹ گزینهٔ ۳ (ریاضی ۲، صفرهای تابع درجه ۲)

در شکل زیر فرض می‌کنیم $\alpha > 0$ و نقطهٔ $A(-2\alpha, 8\alpha)$ واقع بر سهمی باشد، چون سهمی در نقطه‌ای به طول $-\alpha$ بر محور طول‌ها مماس است؛ پس:



$$f(x)=a(x+\alpha)^2 \ , \ A(-2\alpha, 8\alpha)\in f$$
$$\Rightarrow 8\alpha = a(-2\alpha+\alpha)^2$$
$$\Rightarrow 8\alpha = a(-\alpha)^2 \xrightarrow{\alpha\neq 0} a=\frac{8}{\alpha}$$
$$f(x)=\frac{8}{\alpha}(x^2+2\alpha x+\alpha^2)=\frac{8}{\alpha}x^2+16x+8\alpha$$

پس $a=\frac{8}{\alpha}$، $b=16$ و $c=8\alpha$؛ بنابراین:

$$ac+b=64+16=80$$

۱۰ گزینهٔ ۳ (ریاضی ۲، مجموع و حاصل‌ضرب ریشه‌های معادلهٔ درجه ۲)

روش اول با توجه به آن‌که α و β جواب‌های معادلهٔ $x^2-9x+1=0$ هستند؛ پس:

$$\alpha+\beta=-\frac{b}{a}=9 \ , \ \alpha\beta=\frac{c}{a}=1$$

همچنین α در معادله صدق می‌کند. پس $\alpha^2+1=9\alpha$ و با توجه به آن‌که $\beta=\frac{1}{\alpha}$، داریم:

$$\frac{\alpha^2+1}{\beta}=\frac{\alpha^2+1}{\frac{1}{\alpha}}=\alpha^3+\alpha=\alpha(\alpha^2+1)=\alpha\times 9\alpha=9\alpha^2$$

به طریق مشابه:

$$\frac{\beta^2+1}{\alpha}=9\beta^2$$

پس:

$$\sqrt{\frac{\alpha^2+1}{\beta}}+\sqrt{\frac{\beta^2+1}{\alpha}}=\sqrt{9\alpha^2}+\sqrt{9\beta^2}=3|\alpha|+3|\beta| \xrightarrow[\text{مثبت‌اند}]{\text{دو ریشه}} 3(\alpha+\beta)=27$$

روش دوم α و β جواب‌های معادله هستند؛ پس:

$$\begin{cases}\alpha^2+1=9\alpha \\ \beta^2+1=9\beta\end{cases} \Rightarrow A=\sqrt{\frac{9\alpha}{\frac{1}{\alpha}}}+\sqrt{\frac{9\beta}{\frac{1}{\beta}}}=3(\alpha+\beta)=27$$

آزمون ۱۰ معادله‌های گویا

۱ گزینهٔ ۳ (ریاضی ۲، معادلات گویا)

برای محاسبهٔ زمان رفت (t_1) داریم:

$$x=v_1t_1 \Rightarrow t_1=\frac{x}{v_1}=\frac{60}{v}$$

اگر زمان برگشت را با t_2 نمایش دهیم، با توجه به این‌که $10\ km/h$ از سرعت قطار کاسته می‌شود، داریم:

$$x=v_2t_2 \Rightarrow 60=(v-10)\times t_2 \Rightarrow t_2=\frac{60}{v-10}$$

طبق گفتهٔ سؤال، زمان برگشت به اندازهٔ نیم‌ساعت ($\frac{1}{2}$ ساعت) بیشتر از زمان رفت است؛ پس:

$$t_2=t_1+\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{60}{v-10}=\frac{60}{v}+\frac{1}{2}$$
$$\Rightarrow \frac{60}{v-10}=\frac{120+v}{2v} \Rightarrow \cancel{120v}-1200+v^2-10v=\cancel{120v}$$
$$\Rightarrow v^2-10v-1200=0 \Rightarrow (v-40)(v+30)=0 \xrightarrow{v>0} v=40 : \text{سرعت رفت}$$

در نتیجه:

$$\left.\begin{aligned} t_1&=\frac{60}{v}=\frac{60}{40}=1.5\ h \\ t_2&=\frac{60}{v-10}=\frac{60}{40-10}=\frac{60}{30}=2\ h\end{aligned}\right\} \xrightarrow{+} t_1+t_2=3.5\ h$$

۲ گزینهٔ ۱ (ریاضی ۲، معادلات گویا)

$$\frac{3}{x}-\frac{2}{x-3}=\frac{12}{(3-x)(x+3)} \Rightarrow \frac{3}{x}-\frac{2}{x-3}=\frac{-12}{(x-3)(x+3)}$$
$$\xrightarrow[x\neq 3]{\text{مخرج مشترک}} \frac{3x-9-2x}{x\cancel{(x-3)}}=\frac{-12}{\cancel{(x-3)}(x+3)}$$
$$\Rightarrow \frac{x-9}{x}=\frac{-12}{x+3} \xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} x^2-6x-27=-12x$$
$$\Rightarrow x^2+6x-27=0 \Rightarrow (x-3)(x+9)=0 \Rightarrow \begin{cases}x=3 \ \times \\ x=-9 \ \checkmark\end{cases}$$

حواستان باشد، $x=3$ مخرج را صفر می‌کند و غیرقابل قبول است؛ بنابراین تنها جواب این معادله $x=-9$ است.

۳ گزینهٔ ۲ (ریاضی ۲، معادلات گویا)

$$\frac{2x}{x-1}+\frac{a}{x-2}=1 \Rightarrow \frac{2x^2-4x+ax-a}{(x-1)(x-2)}=1$$
$$\xrightarrow{\text{طرفین‌وسطین}} 2x^2-4x+ax-a=x^2-3x+2$$
$$\xrightarrow{\text{مرتب‌کن}} x^2+(a-1)x-(a+2)=0 \quad ✲$$

حالت اول: معادلهٔ ✲ یک ریشهٔ مضاعف داشته باشد و این ریشه مخالف ریشه‌های مخرج $(x=1, x=2)$ باشد؛ پس دلتای معادلهٔ ✲ باید صفر باشد:

$$b^2-4ac=(a-1)^2+4(a+2)=0 \Rightarrow a^2+2a+9=0$$
$$\Rightarrow \Delta=4-36<0$$

پس در این حالت هیچ مقداری برای a به دست نمی‌آید.

حالت دوم: دلتای معادلهٔ ✲ بزرگ‌تر از صفر باشد و یکی از ریشه‌های معادله، $x=1$ یا $x=2$ باشد، بنابراین داریم: $\Delta=a^2+2a+9>0$

در این رابطه، ضریب درجهٔ دو، مثبت و دلتا منفی است، پس علامت آن همواره مثبت است و این نامساوی همواره برقرار است، پس برای این‌که معادلهٔ ✲ دارای ریشهٔ ۱ یا ۲ باشد، داریم:

$$\xrightarrow{\text{در معادلهٔ ✲}} \begin{cases} x=1 \Rightarrow 1+a-1-a-2=0 \\ \quad \Rightarrow -2=0 \ \text{امکان‌پذیر نیست.} \\ x=2 \Rightarrow 4+2a-2-a-2=0 \\ \quad \Rightarrow a=0 \ \checkmark \end{cases}$$

پس به ازای یک مقدار a، این معادله دارای یک ریشه است.

۴ گزینهٔ ۳ (ریاضی ۲، معادلات گویا)

$$\frac{1}{(x+1)(x+2)}-\frac{1}{x(x+3)}=2 \Rightarrow \frac{1}{x^2+3x+2}-\frac{1}{x^2+3x}=2$$
$$\xrightarrow{x^2+3x=t} \frac{1}{t+2}-\frac{1}{t}=2 \xrightarrow{\text{مخرج مشترک}} \frac{t-t-2}{t^2+2t}=2$$
$$\Rightarrow \frac{-2}{t^2+2t}=2 \xrightarrow[\text{طرفین وسطین}]{\div 2} -1=t^2+2t \Rightarrow t^2+2t+1=0$$
$$\Rightarrow (t+1)^2=0 \Rightarrow t=-1 \xrightarrow{t=x^2+3x} x^2+3x=-1$$
$$\Rightarrow x^2+3x+1=0 \Rightarrow \Delta=9-4>0$$

بنابر این معادله دو ریشهٔ حقیقی متمایز دارد.

دقت کنید، چون Δ، برابر ۵ است، پس ریشه‌های معادلهٔ $x^2+3x+1=0$، گنگ بوده و با ریشه‌های مخرج کسر $(x=0,-1,-2,-3)$ برابر نمی‌شوند.

۵ گزینهٔ ۳ (ریاضی ۲، معادلات گویا)

$$\frac{6}{x^3-8}=\frac{5}{x^2+2x+4}+\frac{1}{x-2} \xrightarrow{\text{مخرج مشترک}} \frac{6}{x^3-8}=\frac{5(x-2)+x^2+2x+4}{\underbrace{(x-2)(x^2+2x+4)}_{\text{اتحاد چاق و لاغر}}}$$
$$\Rightarrow \frac{6}{\cancel{x^3-8}}=\frac{x^2+7x-6}{\cancel{x^3-8}} \Rightarrow x^2+7x-12=0 \Rightarrow S=x_1+x_2=-\frac{b}{a}=-7$$

۶ گزینهٔ ۱ (ریاضی ۲، معادلات گویا)

ابتدا سمت راست معادلهٔ داده‌شده را به‌صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$\frac{7x^2+16}{x^2+2}=\frac{8x^2-x^2+16}{x^2+2}=\frac{(8x^2+16)-x^2}{x^2+2}=\frac{8(x^2+2)-x^2}{x^2+2}=8-\frac{x^2}{x^2+2}$$

با جای‌گذاری در معادله داریم:

$$\left(\frac{3x^2}{x^2+2}\right)^2=8-\frac{x^2}{x^2+2} \xrightarrow{t=\frac{x^2}{x^2+2}\geq 0} (3t)^2=8-t \Rightarrow 9t^2=8-t$$
$$\Rightarrow 9t^2+t-8=0 \xrightarrow{a+c=b} \begin{cases} t=-1 \ \text{غ‌ق‌ق} \\ t=\frac{8}{9}\end{cases}$$
$$\Rightarrow t=\frac{x^2}{x^2+2}=\frac{8}{9} \xrightarrow{\text{طرفین‌وسطین}} 9x^2=8x^2+16 \Rightarrow x^2=16$$
$$\Rightarrow x=\pm 4 \Rightarrow x_1x_2=(-4)(4)=-16$$

۷ گزینهٔ ۴ (ریاضی ۲، معادلات گویا)

ابتدا به این مطلب دقت می‌کنیم که $x=2$ و $x=-2$ (ریشه‌های مخرج) در دامنهٔ تغییرات معادلهٔ داده‌شده قرار ندارند و نمی‌توانند جزء جواب‌های این معادله باشند. برای حل این معادله، طرفین معادله را در $4-x^2$ ضرب می‌کنیم، بنابراین داریم: